S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 1, стр. 1–23 (2004) УДК 510.53+512.52

MSC 11R37

АБСТРАКТНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ КЛАССОВ (ФОРМАТИРОВАНИЕ МОДУЛЕЙ)

Ю. Л. ЕРШОВ

Abstract. This article suggests a modified approach to presenting abstract class field theory. We refuse from the Neukirch idea to define a reciprocity homomorphism "homogeneously" by means of Frobenius elements (which are called Neukirch elements here) in favor of the inhomogeneous definition that was used by Iwasawa for local class filed theory [3]. This enables us to achieve more lucid presentation. Another novelty is the refusal to *postulate* the existence of the Hensel evaluation in favor of proving its existence. The concept of formatting of modules allows us to state the main theorem in a more elegant form. An unexpected consequence of this result is the fact that the definition of reciprocity homomorphism depends not only on a choice of a generator in the group $\hat{\mathbb{Z}}$ but also on a choice of an epimorphism $d : G \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$. In particular, there are various epimorphisms of this kind in the classical local class field theory (in contrast to the global one).

Let G be a profinite group, and let $\Omega(G)$ be the family of all open subgroups of G. A *section* of G is a pair $s = (G_0 \trianglelefteq G_1)$ of subgroups G_0 and G_1 of $\Omega(G)$ such that G_0 is normal in G_1. Let $\Sigma(G)$ stand for the family of all sections of G. Introduce the ordering $\leq$ on $\Sigma(G)$ as follows:

if $s_0 = (G_0 \trianglelefteq G_1),\ s_1 = (H_0 \trianglelefteq H_1) \in \Sigma(G)$ then $s_0 \leq s_1 \Longleftrightarrow H_0 \leq G_0$ and $H_1 \leq G_1$.

If $s = (G_0 \trianglelefteq G_1)$ is a section, $H \in \Omega(G)$, then $s_H \rightleftharpoons (G_0 \cap H \trianglelefteq G_1 \cap H)$ is a section too and $s \leq s_H$.

Given a section $s = (G_0 \trianglelefteq G_1)$, denote by G_s the factor-group G_1/G_0. A section s is *cyclic* if G_s is a cyclic group. If $s_0 = (G_0 \trianglelefteq G_1) \leq s_1 = (H_0 \trianglelefteq H_1)$, then λ_{s_1,s_0} is the homomorphism from G_{s_1} to G_{s_0} defined as follows:

$$\lambda_{s_1,s_0} : h_1 H_0 \longmapsto h_1 G_0,\ h_1 \in H_1.$$

Ershov, Yu.L., Abstract class field theory (formatting of modules).

Поступила 9 июля 2004 г., опубликована 7 сентября 2004 г.

It is easy that if $s_0 \le s_1 \le s_2$ then

$$\lambda_{s_2,s_0} = \lambda_{s_1,s_0} \cdot \lambda_{s_2,s_1}$$

Let A be a multiplicative module. Given a subgroup $H \le G$, let A^H stand for the subgroup $\{a \mid a \in A, \forall\sigma \in H(a^\sigma = a)\}$. Let $G_0, G_1 \in \Omega(G)$, $G_0 \le G_1$. Then $A^{G_1} \le A^{G_0}$ and there is naturally defined the *norm homomorphism* $N_{G_0/G_1} : A^{G_0} \longrightarrow A^{G_1}$.

A module A is called *Hilbertian* provided that for every cyclic section $s = (G_0 \trianglelefteq G_1)$ and every $a \in A^{G_0}$ such that $N_{G_0/G_1}(a) = 1$, there are $b \in A^{G_0}$ and $\tau \in G_1$ satisfying $a = b^{\tau-1}(= b^\tau \cdot b^{-1})$.

A *formatting* of a G-module A we call a system of homomorphisms $\rho_s : G_s \longrightarrow A_s,\ s \in \Sigma(G)$, enjoying the following two conditions:

i) for all $s \in \Sigma(G)$, the homomorphism ρ_s indices an isomorphism of the groups
$G_s^{ab}(= G_s/G'_s)$ and A_s (in particular, ρ_s is an epimorphism);

ii) for all $s_0 \le s_1 \in \Sigma(G)$ the diagram

$$\begin{array}{ccc} G_{s_1} & \xrightarrow{\rho_{s_1}} & A_{s_1} \\ {\scriptstyle\lambda_{s_1,s_0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu_{s_1,s_0}} \\ G_{s_0} & \xrightarrow{\rho_{s_0}} & A_{s_0} \end{array}$$

is commutative.

A G-module A is *formattable* provided that there is a formatting of A.

Formattable modules reside in class field theory. For instance, within local class field theory the multiplicative group $F_{sep}^\times$ of the separable closure of a local field F is a formattable (Hilbertian) $G(F)$-module ($G(F) \rightleftharpoons G(F_{sep}/F)$), while within global class field theory as a corresponding formattable (Hilbertian) $G(F)$-module serves the idele class group of the separable closure F_{sep} of a global field F. Note that Artin and Tate have introduced for these classical class field theories the concept of class formation which involves cohomological concepts. These notions are not used (explicitly) in this article, and the concept of formatting is a simpler version of the concept of class formation.

Necessary conditions for a G-module to be formattable are as follows:

(C_i) if s is a cyclic section then the groups G_s and A_s are isomorphic;

(C_{ii}) if s is a cyclic section and $H \in \Omega(G)$ then the homomorphism $\mu_{s_H,s} : A_{s_H} \longrightarrow A_s$ is an embedding.

THEOREM (on formatting of modules). *If a Hilbertian G-module A satisfies the conditions C_i and C_{ii} and the group G admits at least one epimorphism $d : G \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ then A is formattable.*

Введение

В настоящей работе предлагается еще один способ изложения абстрактной теории полей классов (см. [1, 2]). Отказ от идеи Нейкирха [1] определять гомоморфизм взаимности “однородно” через элементы Фробениуса (которые в настоящей статье называются элементами Нейкирха) в пользу неоднородного определения, использованного Ивасавой для локальной теории полей классов [3], позволяет добиться большей ясности изложения. Другим новшеством является отказ от *постулирования* существования гензелевого нормирования в пользу доказательства его существования. Понятие форматирования модулей позволяет дать более изящную формулировку основной теоремы. Неожиданным следствием этой формулировки является то, что определение гомоморфизма взаимности зависит не только от выбора образующих в группе $\hat{\mathbb{Z}}$, но и от выбора эпиморфизма $d : G \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$. В частности, даже для классической локальной теории полей классов (в отличие от глобальной), существуют различные такие эпиморфизмы.

Знакомство с предыдущей работой автора [2] не предполагается, хотя ряд технически сложных доказательств здесь заменяется ссылками на [2].

1. Форматирование модулей

Пусть G — проконечная группа, $\Omega(G)$ — семейство всех открытых подгрупп G. *Секцией* группы G называется пара $s = (G_0 \trianglelefteq G_1)$ подгрупп G_0 и G_1 из $\Omega(G)$ таких, что G_0 нормальна в G_1. Семейство всех секций G обозначим через $\Sigma(G)$. На множестве $\Sigma(G)$ определим частичный порядок $\leq$ так:

пусть $s_0 = (G_0 \trianglelefteq G_1),\ s_1 = (H_0 \trianglelefteq H_1) \in \Sigma(G)$, тогда $s_0 \leq s_1 \iff H_0 \leq G_0$ и $H_1 \leq G_1$.

Если $s = (G_0 \trianglelefteq G_1)$ — секция, $H \in \Omega(G)$, то $s_H \rightleftharpoons (G_0 \cap H \trianglelefteq G_1 \cap H)$ — тоже секция и $s \leq s_H$.

Частично упорядоченное множество $\langle \Sigma(G), \leq \rangle$ не является направленным, а любая цепь либо конечна, либо имеет тип ω. Это следует из того, что для любого $s = (G_0 \trianglelefteq G_1) \in \Sigma(G)$ множество $\{s' \mid s' \leq s,\ s' \in \Sigma(G)\}$ конечно, так как $[G : G_1] < \omega$ и, следовательно, множество $\{H \mid G_1 \leq H \leq G\}$ конечно.

Для секции $s = (G_0 \trianglelefteq G_1)$ через G_s обозначается фактор-группа G_1/G_0. Секцию s назовем *циклической,* если G_s — циклическая группа. Если $s_0 = (G_0 \trianglelefteq G_1) \leq s_1 = (H_0 \trianglelefteq H_1)$, то обозначим через λ_{s_1,s_0} гомоморфизм из G_{s_1} в G_{s_0}, определенный по правилу:

$$\lambda_{s_1,s_0} : h_1 H_0 \longmapsto h_1 G_0,\ h_1 \in H_1.$$

Нетрудно видеть: если $s_0 \leq s_1 \leq s_2$, то

$$\lambda_{s_2,s_0} = \lambda_{s_1,s_0} \cdot \lambda_{s_2,s_1}.$$

Другими словами, система $\{G_s, \lambda_{s_1,s_0} \mid s, s_0 \leq s_1 \in \Sigma(G)\}$ групп и гомоморфизмов является *обратной системой.*

Пусть $H \in \Omega(G),\ \Sigma_H \rightleftharpoons \{s = (G_0 \trianglelefteq H) \mid G_0 \in \Omega(G)\}$; тогда Σ_H — направленное подмножество $\langle \Sigma(G), \leq \rangle$, $\{G_s, \lambda_{s_1,s_0} \mid s, s_0 \leq s_1 \in \Sigma_H\}$ — обратный спектр конечных групп и H естественно изоморфна обратному пределу $\varprojlim \{G_s \mid s \in \Sigma_H\}$.

Пусть A — мультипликативный G-модуль, т. е. A — абелева группа (с операцией умножения), на которой действует группа G ($a \longmapsto a^\sigma,\ a \in A,\ \sigma \in G$) так, что выполняются условия:

i)	$a^e = a,$	$a \in A$
ii)	$(ab)^\sigma = a^\sigma \cdot b^\sigma,$	$a, b \in A;\ \sigma \in G$
iii)	$a^{\sigma\tau} = (a^\sigma)^\tau,$	$a \in A;\ \sigma, \tau \in G.$

Для любой подгруппы $H \leq G$ обозначим через A^H подгруппу $\{a \mid a \in A, \forall \sigma \in H (a^\sigma = a)\}$. Пусть $G_0, G_1 \in \Omega(G),\ G_0 \leq G_1$; тогда $A^{G_1} \leq A^{G_0}$ и определен *норменный гомоморфизм* (или *гомоморфизм нормы*) $N_{G_0/G_1} : A^{G_0} \longrightarrow A^{G_1}$, а именно, пусть $G_1 = \bigcup\limits_i G_0 \sigma_i$ — некоторое разложение G_1 на правые смежные классы по подгруппе G_0, тогда для любого $a \in A^{G_0}$

$$N_{G_0/G_1}(a) = \prod_i a^{\sigma_i}.$$

Модуль A назовем *гильбертовым,* если для любой циклической секции $s = (G_0 \trianglelefteq G_1)$ и любого $a \in A^{G_0}$ такого, что $N_{G_0/G_1}(a) = 1$, существуют $b \in A^{G_0}$ и $\tau \in G_1$ такие, что $a = b^{\tau - 1} (= b^\tau \cdot b^{-1})$.

Заметим, что для любой секции $s = (G_0 \leq G_1)$, из $b \in A^{G_0}$, и $\tau \in G_1$, вытекает $N_{G_0/G_1}(b^{\tau-1}) = 1$.

Если $G_0 \leq G_1 \leq G_2$, то $N_{G_0/G_2} = N_{G_1/G_2} N_{G_0/G_1}$; если $s = (G_0 \trianglelefteq G_1) \in \Sigma(G)$, то обозначим через A_s группу $A^{G_1}/N_{G_0/G_1}(A^{G_0})$. Если $s = (G_0 \trianglelefteq G_1) \leq s' = (H_0 \trianglelefteq H_1)$, то отображение нормы $N_{H_1/G_1} : A^{H_1} \longrightarrow A^{G_1}$ индуцирует гомоморфизм

$$\mu_{s',s} : A_{s'} \longrightarrow A_s.$$

Если $s \leq s' \leq s''$, то $\mu_{s'',s} = \mu_{s',s} \cdot \mu_{s'',s'}$; следовательно,

$$\{A_s, \mu_{s_1,s_0} \mid s, s_0 \leq s_1 \in \Sigma(G)\}$$

является обратной системой абелевых групп и гомоморфизмов.

Форматированием G-модуля A назовем такую систему гомоморфизмов $\rho_s : G_s \longrightarrow A_s,\ s \in \Sigma(G)$, что выполняются следующие два условия:

i) для любого $s \in \Sigma(G)$ гомоморфизм ρ_s индуцирует изоморфизм групп G_s^{ab} $(= G_s/G_s')$ и A_s (в частности, ρ_s — эпиморфизм);

ii) для любых $s_0 \leq s_1 \in \Sigma(G)$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G_{s_1} & \xrightarrow{\rho_{s_1}} & A_{s_1} \\ {\scriptstyle \lambda_{s_1,s_0}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mu_{s_1,s_0}} \\ G_{s_0} & \xrightarrow{\rho_{s_0}} & A_{s_0} \end{array}$$

коммутативна.

Всякое форматирование $\bar{\rho} = \{\rho_s \mid s \in \Sigma(G)\}$ G-модуля A позволяет равномерно описывать "абелизации" $H^{ab} = H/H'$ для любой группы H из $\Omega(G)$. А именно, форматирование $\bar{\rho}$ индуцирует эпиморфизм

$$\rho_H : H \simeq \varprojlim \{G_s \mid s \in \Sigma_H\} \longrightarrow \varprojlim \{A_s \mid s \in \Sigma_H\}$$

такой, что ядро ρ_H $(\operatorname{Ker} \rho_H)$ совпадает с коммутантом $H' = [H, H]$ группы H, т.е.

$$H^{ab} = H/H' \simeq \varprojlim \{A_s \mid s \in \Sigma_H\}.$$

Будем говорить, что G-модуль A *форматируем*, если существует его форматирование.

Форматируемые модули появляются в теории полей классов. Так, в локальной теории полей классов мультипликативная группа $F_{sep}^\times$ сепарабельного замыкания локального поля F является (гильбертовым) форматируемым $G(F)$-модулем, где $G(F) \rightleftharpoons G(F_{sep}/F))$, а в глобальной теории полей классов (гильбертовым) форматируемым $G(F)$-модулем является группа классов иделей сепарабельного замыкания F_{sep} глобального поля F [4]. Заметим, что для этих классических теорий полей классов Артиным и Тейтом введено понятие *формации классов,* использующее когомологические понятия. В настоящей статье эти понятия (в явном виде) не будут использоваться, а понятие форматирования является более простой версией формации классов.

Необходимыми условиями форматируемости G-модуля являются следующие:

(C_i) *если s — циклическая секция, то группы G_s и A_s изоморфны;*

(C_{ii}) *если s — циклическая секция, $H \in \Omega(G)$, то гомоморфизм $\mu_{s_H,s} : A_{s_H} \longrightarrow A_s$ является вложением.*

(Заметим, что для любой секции s и любой $H \in \Omega(G)$ гомоморфизм $\lambda_{s_H,s} : G_{s_H} \longrightarrow G_s$ является вложением).

Таким образом, условия C_i и C_{ii} относятся лишь к циклическим секциям. Тем не менее справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1 (о форматировании модулей)**.** *Пусть G — проконечная группа. Если гильбертов G-модуль A удовлетворяет условиям C_i и C_{ii}, а группа G допускает хотя бы один эпиморфизм $d : G \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$, то A форматируем.*

Доказательство этой теоремы будет приведено в следующей части статьи. При фиксации эпиморфизма d условия C_i и C_{ii} могут быть ослаблены.

Сделаем ряд общих замечаний о понятии форматирования.

1. Пусть G — проконечная группа, A — форматируемый G-модуль. Тогда для любой открытой подгруппы $H(\in \Omega(G))$, A форматируем как H-модуль.

2. Пусть G — проконечная группа, H — замкнутая нормальная подгруппа G, A — форматируемый G-модуль. Тогда G/H-модуль A^H форматируем.

Следствием этих простых замечаний и (сложной!) глобальной теории полей классов является

ТЕОРЕМА 2. *Для любой проконечной группы G существует гильбертов форматируемый G-модуль.*

Приведем набросок доказательства. Для случая конечной группы G это вытекает из того, что группа G вкладывается в симметрическую группу S_n для $n = |G|$; группа S_n реализуется как группа Галуа подходящего расширения Галуа поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Тогда замечания 2 и 1 и глобальная теория полей классов позволяют утверждать существование гильбертова форматируемого G-модуля A_G.

Для произвольной проконечной группы G требуется взять подходящее ультрапроизведение $\prod A_{G/H}/D$ семейства форматируемых G/H-модулей $A_{G/H}$, где H пробегает множество всех открытых нормальных подгрупп группы G. □

Отметим один вопрос, связанный с введенным понятием:

Для всякой ли конечной группы G существует конечный форматируемый G-модуль?

Нетрудно проверить, что для всякой конечной циклической группы G сама эта группа с тривиальным действием является форматируемым (но не гильбертовым!) G-модулем.

Что касается конечных гильбертовых форматируемых G-модулей, то таковой существует для циклической группы порядка 2, но для других конечных циклических групп их (кажется) нет.

В заключение этой части статьи начнем подготовительные рассмотрения, необходимые для доказательства основной теоремы. Зафиксировав эпиморфизм $d : G \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$, перейдем к терминологии, использованной Нейкирхом в его изложении [1] абстрактной теории полей классов. В частности, будем предполагать, что группа G реализована как группа Галуа $G(\bar{k}/k)$ подходящего расширения Галуа $\bar{k} > k$ полей. Это всегда можно сделать [5].

Пусть задано поле k, его (бесконечное) расширение Галуа $\bar{k}$ и эпиморфизм $d : \mathbb{G} \rightleftharpoons G(\bar{k}/k) \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ проконечных групп, где $\hat{\mathbb{Z}}$ — свободная проконечная группа с одним образующим, зафиксируем его для дальнейшего; пусть $\Phi \in \hat{\mathbb{Z}}$ и $\hat{\mathbb{Z}} = \overline{\langle\Phi\rangle}$; черта обозначает замыкание. Обозначим через $\mathbb{I}$ ядро гомоморфизма d. Для произвольного промежуточного поля $k \leq K \leq \bar{k}$ через $\mathbb{G}_K$ обозначается (замкнутая) подгруппа $\{\sigma \mid \sigma \in \mathbb{G},\ a^\sigma = a \text{ для всех } a \in K\}$ группы $\mathbb{G}$, а через $\mathbb{I}_K$ — группа $\mathbb{I} \cap \mathbb{G}_K$. Соответствие $K \longmapsto \mathbb{G}_K$ по теории Галуа является взаимнооднозначным соответствием между всеми промежуточными полями и замкнутыми подгруппами группы $\mathbb{G} = \mathbb{G}_k$. Причем справедливы следующие свойства:

1) $K \leq L \iff \mathbb{G}_L \leq \mathbb{G}_K$*;*

2) если $K \leq L$, $\sigma \in \mathbb{G}_K$, *то обозначая через* $L^\sigma \rightleftharpoons \{a \mid a \in L,\ a^\sigma = a\}$ *подполе поля* L, *имеем равенство* $\mathbb{G}_{L^\sigma} = \overline{\langle \mathbb{G}_L, \sigma\rangle}$, *где черта обозначает замыкание в* $\mathbb{G}_K$*;*

3) $L \geq K$ *— расширение Галуа* $\iff \mathbb{G}_L$ *— нормальная подгруппа* $\mathbb{G}_K$*;*

4) если $L \geq K$ *— расширение Галуа, то* $G(L/K) \simeq \mathbb{G}_K/\mathbb{G}_L$.

Заметим, что если K — конечное расширение поля k, то $d(\mathbb{G}_K)$ — подгруппа конечного индекса группы $\hat{\mathbb{Z}}$; ее индекс $[\hat{\mathbb{Z}} : d(\mathbb{G}_K)]$ обозначим через f_K; тогда определен эпиморфизм $d_K \rightleftharpoons f_K^{-1} d : \mathbb{G}_K \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$. Группа $\mathbb{I}_K = \mathbb{I} \cap \mathbb{G}_K$, называемая *группой инерции поля* K, является подгруппой конечного индекса группы $\mathbb{I}$; обозначим через e_K этот индекс $[\mathbb{I} : \mathbb{I}_K]$. Нетрудно проверить, что $[K : k] = f_K \cdot e_K$. Для этого точную последовательность

$$1 \longrightarrow \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{G} \xrightarrow{d} \hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow 1$$

следует “профакторизовать” по $\mathbb{G}_K$.

В дальнейшем будем рассматривать лишь конечные расширения поля k.

Пусть $(k \leq)\ K \leq L\ (< \bar{k})$ — расширение полей; *степенью инерции* (или *относительной степенью)* называется индекс $f_{L/K} \rightleftharpoons [d(\mathbb{G}_K) : d(\mathbb{G}_L)]$, а *индексом ветвления* $e_{L/K} \rightleftharpoons [\mathbb{I}_K : \mathbb{I}_L]$; справедливо соотношение $[L : K] = f_{L/K} \cdot e_{L/K}$.

Расширение $K \leq L$ называется *неразветвленным,* если $e_{L/K} = 1$, и *вполне разветвленным,* если $f_{L/K} = 1$.

Если $K \leq L \leq M$, то $f_{M/K} = f_{L/K} \cdot f_{M/L}$ и $e_{M/K} = e_{L/K} \cdot e_{M/L}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если* $L \geq K$ *и* $M \geq L$ *— неразветвленные (вполне разветвленные) расширения, то* $M \geq K$ *— неразветвленное (вполне разветвленное) расширение.* $\square$

Справедливы следующие свойства:

1) Всякое неразветвленное расширение $L \geq K$ *является циклическим.*

Действительно, если $e_{L/K} = 1$, то $\mathbb{I}_K = \mathbb{I}_L$; $\mathbb{G}_L/\mathbb{I}_L \leq \mathbb{G}_K/\mathbb{I}_K \simeq d(\mathbb{G}_K) \leq \hat{\mathbb{Z}}$. Следовательно, $\mathbb{G}_L/\mathbb{I}_L$ нормальна в $\mathbb{G}_K/\mathbb{I}_K$ ($\mathbb{G}_L$ нормальна в $\mathbb{G}_K$) и $G(L/K) = \mathbb{G}_K/\mathbb{G}_L \simeq d(\mathbb{G}_K)/d(\mathbb{G}_L)$ — циклическая группа. $\square$

Обобщением проведенных рассуждений можно установить и такое

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если* $L \geq K$ *— расширение Галуа,* $L' \geq L$ *— неразветвленное расширение, то* L' *— расширение Галуа поля* K.

Действительно, $\mathbb{G}_L \trianglelefteq \mathbb{G}_K$, $\mathbb{I}_L = \mathbb{I}_K \cap \mathbb{G}_L \trianglelefteq \mathbb{G}_K$, группа $\mathbb{G}_K/\mathbb{I}_L$ изоморфна подпрямому произведению $\mathbb{G}_K/\mathbb{I}_K \times_{\mathbb{G}_K/\mathbb{I}_K\mathbb{G}_L} \mathbb{G}_K/\mathbb{G}_L$. Отсюда вытекает, что любая промежуточная подгруппа $\mathbb{I}_L \leq H \leq \mathbb{G}_L$ является нормальной в $\mathbb{G}_K$; но так как $L' \geq L$ — неразветвленное расширение, то $\mathbb{I}_L \leq \mathbb{G}_{L'} \leq \mathbb{G}_L$. □

2) Для любого расширения $L \geq K$ существует наибольшее промежуточное поле L_u^K такое, что L_u^K — неразветвленное расширение K и $L \geq L_u^K$ — вполне разветвленное расширение.

Поле L_u^K соответствует замкнутой подгруппе $\mathbb{G}_L\mathbb{I}_K$ группы $\mathbb{G}_K$ $(\mathbb{G}_L \leq \mathbb{G}_L\mathbb{I}_K \leq \mathbb{G}_K)$. Действительно, из определения легко видеть, что $\mathbb{I}_{L_u^K} = \mathbb{G}_L\mathbb{I}_K \cap \mathbb{I} \geq \mathbb{I}_K$, $\mathbb{I}_{L_u^K} = \mathbb{G}_L\mathbb{I}_K \cap \mathbb{I} \leq \mathbb{G}_K \cap \mathbb{I} = \mathbb{I}_K$; следовательно, $\mathbb{I}_{L_u^K} = \mathbb{I}_K$, и $L_u^K \geq K$ — неразветвленное расширение. Так как $\mathbb{I}_K \leq \mathbb{I}(= \operatorname{Ker} d)$, то $d(\mathbb{G}_L) = d(\mathbb{G}_L\mathbb{I}_K) = d(\mathbb{G}_{L_u^K})$; следовательно, $f_{L/L_u^K} = 1$, т.е. $L \geq L_u^K$ — вполне разветвленное расширение. □

Если $L \geq K$ — расширение Галуа, то будем через I_K^L обозначать подгруппу $G(L/L_u^K)$ группы $G(L/K)$.

3) Для любого поля K и любого натурального $n > 0$ существует единственное неразветвленное расширение L такое, что $f_{L/K} = [L : K] = n$.

Пусть L — поле такое, что $\mathbb{G}_L \rightleftharpoons d_K^{-1}(n\hat{\mathbb{Z}})$; нетрудно проверить, что L — искомое. □

4) Пусть $L \geq K$ — произвольное расширение, $M \geq K$ — неразветвленное расширение. Тогда ML — неразветвленное расширение L, и для любого неразветвленного расширения $L' \geq L$ найдется неразветвленное расширение $M \geq K$ такое, что $L' = ML$.

Действительно, по теории Галуа имеем $\mathbb{G}_{ML} = \mathbb{G}_L \cap \mathbb{G}_M$; $\mathbb{I}_{ML} = \mathbb{I}_M \cap \mathbb{I}_L = \mathbb{I}_K \cap \mathbb{I}_L = \mathbb{I}_L$ ($\mathbb{I}_M = \mathbb{I}_K$ так как расширение $M \geq K$ неразветвлено); отсюда ML — неразветвленное расширение L. Для доказательства второго утверждения в качестве M нужно взять поле $L_u'^K$. □

Пусть $L \geq K$ — неразветвленное расширение Галуа; тогда $\mathbb{I}_K \leq \mathbb{G}_L$ и существует естественный эпиморфизм группы $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{G}_K/\mathbb{I}_K$ на группу $G(L/K) = \mathbb{G}_K/\mathbb{G}_L$; образ элемента $\Phi(\in \hat{\mathbb{Z}})$ в группе $G(L/K)$ порождает эту циклическую группу и называется *автоморфизмом (элементом) Фробениуса* (расширения $L \geq K$). Если $L \geq K$ — произвольное расширение Галуа, то *автоморфизмом (элементом) Фробениуса* расширения $L \geq K$ (группы $G(L/K)$) назовем всякий элемент $\varphi \in G(L/K)$ такой, что

1) $\varphi \restriction L_u^K$ — автоморфизм Фробениуса (неразветвленного) расширения $L_u^K \geq K$;

2) порядки элементов φ и $\varphi \restriction L_u^K$ совпадают.

Замечание. Автоморфизмы Фробениуса могут и не существовать для некоторых расширений Галуа $L \geq K$. Если же автоморфизм Фробениуса φ расширения $L \geq K$ существует, то группа $G(L/K)$ естественно изоморфна полупрямому произведению $\langle\varphi\rangle \leftthreetimes I_K^L$ (а условие 2 определения равносильно условию $\langle\varphi\rangle \cap I_K^L = e$), поле L^φ является вполне разветвленным расширением K, L — неразветвленным расширением L^φ а $L = L_u^K \bigotimes_K L^\varphi$.

Пусть задан мультипликативный G-модуль A. Полагаем $A_K \rightleftharpoons A^{\mathbb{G}_K}$.

Для любого расширения $L \geq K$ имеется включение $A_K \leq A_L$ и определено отображение (гомоморфизм) нормы $N_{L/K} : A_L \longrightarrow A_K$.

Замечание. Для расширений $M \geq L \geq K$ имеет место равенство $N_{M/K} = N_{L/K} \cdot N_{M/L}$.

Если $L \geq K$ — расширение Галуа, то A_L является $G(L/K)$-модулем и справедливо $A_L^{\mathbb{G}(L/K)} = A_K$.

Предположим, что выполнены следующие три аксиомы:

(U_0) *Для любого неразветвленного расширения $L \geq K$ группа $A_K/N_{L/K}(A_L)$ является циклической группой порядка $[L : K]$ $(\simeq C_{[L:K]})$, т.е. изоморфна группе $G(L/K)$;*

(F) *Пусть $L \geq K$ — вполне разветвленное расширение, $M \geq K$ — неразветвленное расширение, тогда норменное отображение $N_{L/K}$ индуцирует изоморфизм:*

$$(C_{[LM:L]} \simeq)\ A_L/N_{LM/L}(A_{LM}) \stackrel{\bar{N}_{L/K}}{\longrightarrow} A_K/N_{M/K}(A_M)\ (\simeq (C_{[M:K]});$$

(заметим, что LM — неразветвленное расширение поля L).

(H_{90}^u) *Пусть $L \geq K$ — неразветвленное расширение, $a \in A_L$ и $N_{L/K}(a) = 1$, тогда существует $b \in A_L$ такой, что $a = b^{\tau - 1}$, где τ — образующая циклической группы $G(L/K)$ $(G(L/K) = \langle \tau \rangle)$.*

Выполнение аксиом U_0, F и H_{90}^u позволит определить для любого расширения Галуа $L \geq K$ гомоморфизм взаимности

$$r_{L/K} : G(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L),$$

удовлетворяющий следующим функторным свойствам.

Пусть $K \leq L \leq M$ — расширения полей, M — расширение Галуа поля K; $G \rightleftharpoons G(M/K)$, $G_0 \rightleftharpoons G(M/L) \leq G$; тогда коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{r_{M/L}} & A_L/N_{M/L}(A_M) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow N_{L/K} \\ G & \xrightarrow{r_{M/K}} & A_K/N_{M/K}(A_M), \end{array}$$

где правая вертикальная стрелка — это гомоморфизм, индуцированный нормой $N_{L/K}$.

Если еще L — расширение Галуа поля K (и $G_1 \rightleftharpoons G/G_0 = G(L/K)$), то коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{r_{M/K}} & A_K/N_{M/K}(A_M) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ G_1 & \xrightarrow{r_{L/K}} & A_L/N_{L/K}(A_L), \end{array}$$

где правая вертикальная стрелка — гомоморфизм (эпиморфизм), индуцированный вложением $N_{M/K}(A_M) \leq N_{L/K}(A_L)$.

Замечание. Коммутативность этих двух диаграмм является частным случаем более общего утверждения:

Пусть $L_0 \geq K_0,\ L_1 \geq K_1$ — расширения Галуа, $K_0 \leq K_1,\ L_0 \leq L_1$; тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G(L_1/K_1) & \xrightarrow{r_{L_1/K_1}} & A_{K_1}/N_{L_1/K_1}(A_{L_1}) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow N_{K_1/K_0} \\ G(L_0/K_0) & \xrightarrow{r_{L_0/K_0}} & A_{K_0}/N_{L_0/K_0}(A_{L_0}), \end{array}$$

где левая вертикальная стрелка — это гомоморфизм ограничения $\sigma \longmapsto \sigma \restriction L_0$, $\sigma \in G(L_1/K_1)$.

И это утверждение вытекает из коммутативности двух указанных выше частных случаев.

Если еще выполняется аксиома

(H_{90}^r) *Пусть* $L \geq K$ *— вполне разветвленное циклическое расширение,* $a \in A_L$ *и* $N_{L/K}(a) = 1$, *тогда существует* $b \in A_L$ *такой, что* $a = b^{\tau - 1}$, *где* τ *— образующая циклической группы* $G(L/K)$ $(G(L/K) = \langle\tau\rangle)$,

то гомоморфизм взаимности $r_{L/K} : G(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$ индуцирует вложение

$$r_{L/K} : G(L/K)^{ab} \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$$

где $G(L/K)^{ab}$ — "абелизация" $G(L/K)$, т.е. фактор-группа $G(L/K)$ по коммутанту $G(L/K)' = [G(L/K), G(L/K)]$.

Наконец, если еще выполняется аксиома

(R_0) *Для любого вполне разветвленного циклического расширения* $L \geq K$ *группа* $A_K/N_{L/K}(A_L)$ *является циклической группой порядка* $[L : K]$, *т.е. изоморфна группе* $G(L/K)$,

то гомоморфизм взаимности индуцирует изоморфизм групп $G(L/K)^{ab}$ и $A_K/N_{L/K}(A_L)$ для любого расширения Галуа $L \geq K$.

Замечание. Аксиомы H_{90}^u и H_{90}^r являются "частями" условия гильбертовости модуля A. Аксиомы U_0 и R_0 — "части" условия C_i. Аксиома F — "часть" условия C_{ii}.

Доказательству всех этих утверждений будет посвящена вторая часть статьи. А в заключение этой части покажем, как аксиомы U_0 и H_{90}^u позволят определить гомоморфизм $v_k : A_k \longrightarrow Z_k$, который у Нейкирха [1] называется гензелевым нормированием и задан заранее.

Будем предполагать справедливость аксиомы U_0 и выведем из нее ряд необходимых для дальнейшего следствий.

Для произвольного поля K полагаем $U_K \rightleftharpoons \bigcap\{N_{L/K}(A_L) \mid L$ — неразветвленное расширение поля $K\}$; $U_K \leq A_K$; $Z_K \rightleftharpoons A_K/U_K$, $v_k : A_K \longrightarrow Z_K$ — соответствующий эпиморфизм.

Если $L_0 \geq L_1$ $(\geq K)$ — неразветвленные расширения поля K, то существует естественный эпиморфизм

$$\varepsilon_{L_0,L_1} : A_K/N_{L_0/K}(A_{L_0}) \longrightarrow A_K/N_{L_1/K}(A_{L_1}),$$

индуцированный вложением $N_{L_0/K}(A_{L_0}) \leq N_{L_1/K}(A_{L_1})$, и система

$$\{A_K/N_{L/K}(A_L), \varepsilon_{L_0,L_1} \mid L, L_0 \geq L_1 \text{— \textit{неразветвленные расширения поля} } K\}$$

является проективной системой циклических групп и эпиморфизмов. Соответствующий обратный предел

$$\varprojlim\{A_K/N_{L/K}(A_L) \mid L \geq K \text{— \textit{неразветвленное расширение} } K\}$$

изоморфен группе $\hat{\mathbb{Z}}$; тогда можно рассматривать $Z_K = A_K/U_K$ как подгруппу группы $\hat{\mathbb{Z}}$.

Замечание. Если $A_i,\ i \in I$ — G-модули, ϕ — ультрафильтр на множестве индексов I, то ультрапроизведение

$$\prod_{i\in I} A_i/\phi$$

является G-модулем. Тогда ультрастепень $A^* \rightleftharpoons A^I/\phi$ можно рассматривать как расширение G-модуля A, причем такое, что для любой секции $s \in \Sigma(G)$ $A^*_s \simeq A^I_s/\phi$. В частности, если A_s конечна, то $A^*_s \simeq A_s$. Если ϕ — счетно неполный фильтр на I, то A^* — ω_1-насыщенный G-модуль (см. [6]), и, следовательно, заменяя, если нужно, G-модуль A на такой G-модуль A^*, можно предполагать (это и будем делать), что для любого K группа Z_K изоморфна $\hat{\mathbb{Z}}$. Будем предполагать далее, что в $\hat{\mathbb{Z}}$ групповая операция — умножение.

ЛЕММА 1. *Пусть L — неразветвленное расширение поля K, тогда*

$$N_{L/K}(U_L) = U_K.$$

Так как семейство подгрупп $\{N_{L'/L}(A_{L'}) \mid L'$ — неразветвленное расширение $L\}$ групп A_L направлено по убыванию, то $N_{L/K}(U_L) = N_{L/K}(\bigcap\{N_{L'/L}(A_{L'}) \mid L'$ — неразветвленное расширение $L\}) = \bigcap(N_{L/K}N_{L'/L}(A_{L'})) = \bigcap\{N_{L'/K}(A_{L'}) \mid L'$ — неразветвленное расширение $L\}) \supseteq U_K$, так как из того, что L' — неразветвленное расширение L следует, что L' — неразветвленное расширение K. Обратное включение следует из того, что если $M \geq K$ — неразветвленное расширение, то $LM \geq L$ — неразветвленное расширение и $N_{LM/K}(A_{LM}) = N_{L/K}N_{LM/L}(A_{LM}) \leq N_{M/K}(A_M)$. □

Последнее рассуждение и свойство 4 устанавливают

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для любого расширения $L \geq K$ имеет место включение $N_{L/K}(U_L) \leq U_K$.* □

Это следствие показывает, что норменное отображение $N_{L/K}$ индуцирует гомоморфизм

$$\bar{N}_{L/K} : Z_L = A_L/U_L \longrightarrow Z_K = A_K/U_K.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если $L \geq K$ — неразветвленное расширение, то группа $\bar{N}_{L/K}(Z_L)$ имеет конечный индекс в Z_K, равный $[L:K]$.*

Действительно, по лемме 1, $N_{L/K}(U_L) = U_K$ и, следовательно,

$$[Z_K : \bar{N}_{L/K}(Z_L)] = [A_K : N_{L/K}A_L] = [L:K],$$

так как $A_K/N_{L/K}(A_L)$ — циклическая группа порядка $[L:K]$. □

Для любых поля L и автоморфизма $\sigma \in \mathbb{G} = \mathbb{G}_k$ через $\sigma(L)$ обозначается поле, являющееся образом L при автоморфизме σ. Легко видеть, что $A_{\sigma(L)} = \sigma(A_L)$. Так как расширение $L \geq K$ является неразветвленным тогда и только тогда, когда $\sigma(L) \geq \sigma(K)$ — неразветвленное расширение, то имеют место и соотношения $\sigma(U_L) = U_{\sigma(L)}$, $\sigma(A_L \setminus U_L) = A_{\sigma(L)} \setminus U_{\sigma(L)}$.

Поэтому из $\sigma(L) = L$ вытекает $\sigma(U_L) = U_L$.

Значит справедлива

ЛЕММА 2. *Для любого расширения Галуа $L \geq K$*

$$N_{L/K}(U_L) \ \leq \ U_L. \ \square$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любого расширения $L \geq K$ имеет место равенство $U_K = U_L \cap A_K$.*

Вначале установим, что выполняется

ЛЕММА 3. $U_K \leq U_L$.

Рассмотрим случай, когда L — вполне разветвленное расширение K. Пусть $a \in U_K = \bigcap\{N_{M/K}(A_M) \mid M$ — неразветвленное расширение $K\}$, $M \geq L$ — неразветвленное расширение L; тогда $M = M_u^K \bigotimes_K L$ и найдется элемент $b \in A_{M_u^K}$ такой, что $N_{M_u^K/K}(b) = a$. Поскольку $N_{M_u^K/K}(b) = N_{M/L}(b) = a$, то $a \in \bigcap\{N_{M/L}(A_M) \mid M$ — неразветвленное расширение $L\} = U_L$; итак, $U_K \leq U_L$ в этом случае.

Рассмотрим общий случай. Пусть $L \geq K$ — произвольное расширение, $a \in U_K$. Пусть $M \geq L$ — неразветвленное расширение L, тогда $M = LM_u^K$. Так как M_u^K — неразветвленное расширение K ввиду диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & M_u^K \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & M \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash] & L_u^K \arrow[r, dash] & L
\end{tikzcd}$$

то по лемме 1 найдется элемент $b \in U_{M_u^K}$ такой, что $N_{M_u^K/K}(b) = a$. Рассмотрим элемент $c \rightleftharpoons N_{M_u^K/L_u^K}(b) = N_{M/L}(b)$ ($\in U_{L_u^K}$ по лемме 1). Имеем $a = N_{L_u^K/K}(c) \in N_{L_u^K/K}(U_{L_u^K})$; $N_{L_u^K/K}(U_{L_u^K}) \leq U_{L_u^K}$ по лемме 2 (L_u^K — неразветвленное, следовательно, циклическое расширение K), а $U_{L_u^K} \leq U_L$ по доказанному выше, так как L — вполне разветвленное расширение L_u^K. $\square$

Справедливо следующее естественное расширение леммы 2.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Для любого расширения $L \geq K$ имеет место включение $N_{L/K}(U_L) \leq U_L$.*

Действительно, по следствию к лемме 1, $N_{L/K}(U_L) \leq U_K$, а по лемме 3, $U_K \leq U_L$. $\square$

Обратимся к доказательству предложения. По лемме 3 имеется включение $U_K \leq U_L \cap A_K$. Пусть $a \in U_L \cap A_K$; тогда $N_{L/K}(a) \in N_{L/K}(U_L) \leq U_K$ по следствию к лемме 1. Из $a \in A_K$ вытекает, что $N_{L/K}(a) = a^{[L:K]}$. Итак, $a^{[L:K]} \in U_K$; а поскольку $Z_K = A_K/U_K$ — группа без кручения, то $a \in U_K$; $U_L \cap A_K \leq U_K$ и $U_L \cap A_K = U_K$. $\square$

Пусть $L \geq K$ — произвольное расширение; предложение 1 показывает, что вложение $A_K \leq A_L$ индуцирует вложение

$$i_{K/L} : Z_K \ (= A_K/U_K) \longrightarrow Z_L \ (= A_L/U_L);$$

это позволяет отождествить Z_K с подгруппой $i_{K/L}(Z_K)$ группы Z_L.

Из доказательства предложения 1 видно, что вложение $i_{K/L} : Z_K \longrightarrow Z_L$ является непрерывным. Так как Z_K и Z_L изоморфны $\hat{\mathbb{Z}}$, то справедливо

СЛЕДСТВИЕ 6. *Фактор-группа Z_L/Z_K является периодической.*

Если $\hat{Z}_p$ — про-p-компонента Z_L ($\simeq \hat{\mathbb{Z}}$), то $\hat{Z}_p \cap Z_K$ — замкнутая нетривиальная подгруппа, значит $[\hat{Z}_p : \hat{Z}_p \cap Z_K] < \omega$. $\square$

Из этого следствия вытекает

ЛЕММА 4. *Пусть L — поле, $\sigma \in \mathbb{G}$ — такой автоморфизм, что $\sigma(L) = L$. Тогда для любого $a \in A_L$ имеет место равенство $v_L(a^\sigma) = v_L(a)$.*

Пусть $K \rightleftharpoons L^\sigma$; автоморфизм σ индуцирует автоморфизм $\bar{\sigma}$ на $Z_L = A_L/U_L$, такой, что $\bar{\sigma} \restriction Z_K = \mathrm{id}_{Z_K}$. Так как Z_L/Z_K периодическая, а Z_L — абелева группа с однозначным извлечением корней, то $\bar{\sigma} = \mathrm{id}_{Z_L}$. Отсюда $v_L(a^\sigma) = v_L(a)^{\bar{\sigma}} = v_L(a)$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 7. *Для любого расширения $L \geq K$ и любого элемента $a \in A_L$ имеет место равенство $v_L(N_{L/K}(a)) = v_L(a)^{[L:K]}$.* $\square$

Выше был определен гомоморфизм

$$\bar{N}_{L/K} : Z_L \longrightarrow Z_K.$$

Взаимоотношения гомоморфизмов $i_{K,L}$ и $\bar{N}_{L/K}$ установим в предположении справедливости аксиомы F.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *1) Индекс Z_K в Z_L конечен и равен индексу ветвления $e_{L/K}$.*

2) Гомоморфизм $\bar{N}_{L/K}$ является вложением; образ $\bar{N}_{L/K}(Z_L)$ группы Z_L имеет конечный индекс в Z_K, равный относительной степени $f_{L/K}$.

Из следствия к лемме 4 и отсутствия кручения в Z_L вытекает, что гомоморфизм $\bar{N}_{L/K} : Z_L \longrightarrow Z_K \leq Z_L$ является вложением.

Рассмотрим композицию $\bar{N}_{L/K} \cdot i_{K/L}$ этих гомоморфизмов. Имеем вложения

$$Z_K^{[L:K]} \ (= \bar{N}_{L/K}(Z_K)) \leq \bar{N}_{L/K}(Z_L) \ (= Z_L^{[L:K]}) \leq Z_K.$$

Справедливы следующие соотношения

$$[\bar{N}_{L/K}(Z_L) : \bar{N}_{L/K}(Z_K)] = [Z_L : Z_K], \ [Z_K : Z_K^{[L:K]}] = [L : K]$$

(так как $Z_K \simeq \hat{\mathbb{Z}}$) и $[L : K] = [Z_L : Z_K] \cdot [Z_K : \bar{N}_{L/K}(Z_L)]$.

Рассмотрим случай, когда $L \geq K$ — неразветвленное расширение. По следствию 2 к лемме 1, $[Z_K : \bar{N}_{L/K}(Z_L)] = [L : K] = f_{L/K}$; значит $[Z_L : Z_K] = 1 = e_{L/K}$, т.е. $Z_L = Z_K$.

Рассмотрим случай, когда $L \geq K$ — вполне разветвленное расширение. Покажем, что $[Z_K : \bar{N}_{L/K}(Z_L)] = 1$, т.е. $Z_K = \bar{N}_{L/K}(Z_L)$ или, что то же самое, $A_K = N_{L/K}(A_L) \cdot U_K$. Рассмотрим группу $T \rightleftharpoons N_{L/K}(A_L) \cdot U_K$; имеет место равенство $[A_K : T] = [Z_K : \bar{N}_{L/K}(Z_L)]$. Пусть $n \rightleftharpoons [Z_K : \bar{N}_{L/K}(Z_L)]$; $M \geq K$ — неразветвленное расширение такое, что $[M : K] = n$. Так как L — вполне разветвленное расширение K, то $[LM : L] = [M : K] = n$.

По аксиоме F отображение нормы $N_{L/K}$ индуцирует изоморфизм

$$A_L/N_{LM/L}(A_{LM}) \ (\simeq C_{[LM:L]}) \longrightarrow A_K/N_{M/K}(A_M) \ (\simeq C_{[M:K]}).$$

Отсюда $N_{L/K}(A_L) \cdot N_{M/K}(A_M) = A_K$. Так как $M \geq K$ — неразветвленное расширение, то по доказанному выше $n = [Z_K : \bar{N}_{M/K}(Z_M)] = [A_K : N_{M/K}(A_M) \cdot U_K]$. Так как $n = [A_K : T] = [Z_K : T/U_K] = [Z_K : \bar{N}_{M/K}(Z_M)]$, то $T/U_K = \bar{N}_{M/K}(Z_M)$ (так как $Z_K \simeq \hat{\mathbb{Z}}$ имеет единственную подгруппу индекса n) и $T = N_{M/K}(A_M) \cdot U_K$. В частности, $N_{M/K}(A_M) \leq T$; в то же время и $N_{M/K}(A_K) \leq T$;

тогда $A_K = N_{L/K}(A_K) \cdot N_{M/K}(A_M) \le T \le A_K$; следовательно, $T = A_K$ и $n = [A_K : T] = [Z_K : \bar{N}_{L/K}(Z_L)] = 1$. Итак, $[Z_K : \bar{N}_{L/K}(Z_L)] = 1 = f_{L/K}$ и, следовательно, $[Z_L : Z_K] = [L : K] = e_{L/K}$.

Рассмотрим общий случай. Имеем расширения $K \le L_u^K \le L$; тогда по доказанному выше $Z_K = Z_{L_u^K} \le Z_L$ и $[Z_L : Z_K] = [Z_L : Z_{L_u^K}] = [L : L_u^K] = e_{L/K}$. Поэтому $[Z_K : \bar{N}_{L/K}(Z_L)] = [L : K] \cdot e_{L/K}^{-1} = f_{L/K}$, и предложение доказано $\square$

СЛЕДСТВИЕ 8. *Для любого расширения $L \ge K$ верно равенство $U_K \cap N_{L/K}(A_L) = N_{L/K}(U_L)$.*

По следствию 1 к лемме 1, $N_{L/K}(U_L) \le U_K$. Пусть $a \in A_L$ и $N_{L/K}(a) \in U_K$. Если $a \notin U_L$, то $v_L(a) \ne 1$; тогда

$$v_K(N_{L/K}(a)) = v_L(N_{L/K}(a)) = v_L(a)^{[L:K]} \ne 1,$$

и $N_{L/K}(a) \notin U_K$, что противоречит предположению. Итак, $N_{L/K}^{-1}(U_K) = U_L$; в частности, отсюда следует и равенство $U_K \cap N_{L/K}(A_L) = N_{L/K}(U_L)$. $\square$

Выберем в группах Z_K согласованные образующие Φ_K так: зафиксируем образующую Φ_k в Z_k; для любого $K \ge k$ группа Z_K имеет индекс e_K в Z_K; полагаем $\Phi_K \rightleftharpoons \sqrt[e_K]{\Phi_k}$. Заметим, что для любого расширения $L \ge K$ имеет место соотношение $\Phi_L = \sqrt[e_{L/K}]{\Phi_K}$.

Для любого поля K *простым элементом* в A_K назовем любой элемент $\pi_K \in A_K$ такой, что $v_K(\pi_K) = \Phi_K$.

ЛЕММА 5. *1) Если L/K — неразветвленное расширение, то любой простой элемент в A_K будет простым и в A_L;*

2) если $L \ge K$ — вполне разветвленное расширение и π_L — простой элемент в A_L, то $N_{L/K}(\pi_L)$ — простой элемент в A_K.

Утверждение 1 легко следует из равенства $Z_K = Z_L$.

Пусть π_L — простой элемент в A_L; это означает, что $v_L(\pi_L) = \Phi_L$; тогда

$$v_K(N_{L/K}(\pi_L)) = v_L(N_{L/K}(\pi_L)) = \Phi_L^{[L:K]} = (\sqrt[e_{L/K}]{\Phi_K})^{[L:K]} = \Phi_K,$$

т.е. $N_{L/K}(\pi_L)$ — простой элемент A_K. $\square$

2. Гомоморфизм взаимности

Будем предполагать, что выполняются аксиомы U_0, F и H_{90}^u.

Определение. Расширение Галуа $L \ge K$ *находится в общем положении,* если существует элемент Фробениуса $\varphi \in G = G(L/K)$ (тогда $G = \langle\varphi\rangle \leftthreetimes I$, $I \rightleftharpoons I_K^L = G(L/L_u^K)$), а $\tau\varphi$ — также элемент Фробениуса (это равносильно тому, что порядки $|\varphi|$ и $|\tau\varphi|$ элементов φ и $\tau\varphi$ совпадают) для любого $\tau \in I$.

Рассмотрим точную последовательность

$$1 \longrightarrow U_K \longrightarrow A_K \xrightarrow{v_K} Z_K \longrightarrow 1$$

и профакторизуем ее по $N_{L/K}(A_L)$. По следствию к предложению 2, $U_K \cap N_{L/K}(A_L) = N_{L/K}(U_L)$, поэтому имеем точную последовательность

$$(*) \qquad 1 \longrightarrow U_K/N_{L/K}(U_L) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L) \longrightarrow Z_K/\bar{N}_{L/K}(Z_L) \longrightarrow 1$$

Из предложения 2 следует, что $Z_K/\bar{N}_{L/K}(Z_L)$ — циклическая группа порядка $f_{L/K}$, ее образующей является образ любого элемента π_K в A_K. Так как

φ — элемент Фробениуса, то L — неразветвленное расширение поля L^{φ}, а L^{φ} — вполне разветвленное расширение поля K. Пусть π' — простой элемент в $A_{L^{\varphi}}$; лемма 5 показывает, что $\pi \rightleftharpoons N_{L^{\varphi}/K}(\pi')$ — простой элемент в A_K. Рассмотрим элемент $N_{L/K}(\pi')$; $N_{L/K}(\pi') = N_{L^{\varphi}/K}N_{L/L^{\varphi}}(\pi') = N_{L^{\varphi}/K}(\pi'^{f_{L/K}}) = N_{L^{\varphi}/K}(\pi')^{f_{L/K}} = \pi^{f_{L/K}}$. Итак, $\pi^{f_{L/K}} \in N_{L/K}(A_K)$, следовательно, элемент $\pi N_{L/K}(A_K)$ имеет порядок $f_{L/K}$ и последовательность $(*)$ расщепляется:

$$A_K/N_{L/K}(A_L) = U_K/N_{L/K}(U_L) \times \langle \pi N_{L/K}(A_L)\rangle.$$

Гомоморфизм взаимности $r_{L/K} : G \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$ будет определен так, что $r_{L/K}(\varphi) \rightleftharpoons \pi N_{L/K}(A_L)$, а на подгруппе $I \leq G$ он будет определен с помощью *гомоморфизма Дворка–Ивасавы*

$$\rho_{L/K} : I \longrightarrow U_K/N_{L/K}(U_L),$$

к определению которого и приступим.

Обозначим через $V_{L/K}$ подгруппу группы U_L, порожденную элементами вида $v^{\tau-1}$, где $v \in U_L, \tau \in I$ и вида $w^{\varphi-1}$, где $w \in U_L, N_{L/L^K_u}(w) = 1$. В дальнейшем вместо N_{L/L^K_u} будем использовать символ N.

Пусть π — простой элемент в A_L, тогда для любого $\tau \in I$, если $w \in U_L$ такой элемент, что $w^{1-\varphi}\pi^{1-\tau} \in V_{L/K}$, то полагаем

$$\rho(\tau) \rightleftharpoons N(w)N_{L/K}(U_L).$$

Следующее предложение устанавливает корректность определения и основные свойства отображения ρ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *1) $N(w) \in U_K$;*

2) если $w_0, w_1 \in U_L$

$$w_0^{1-\varphi}\pi^{1-\tau}, w_1^{1-\varphi}\pi^{1-\tau} \in V_{L/K},$$

то $N(w_0 w_1^{-1}) \in N_{L/K}(U_L)$;

3) определение ρ не зависит от выбора элемента Фробениуса φ и простого элемента π в A_L;

4) отображение ρ определено для любого $\tau \in I$;

5) ρ является гомоморфизмом;

6) $\rho(\tau^{\varphi}) = \rho(\tau)$ для любого $\tau \in I$.

1) Так как $w^{1-\varphi}\pi^{1-\tau} \in V_{L/K}$, то существуют элементы $v_0, ..., v_k, w_0 \in U_L$, $\tau_0, ..., \tau_k \in I$ такие, что $N(w_0) = 1$ и

$$w^{1-\varphi}\pi^{1-\tau} = w_0^{\varphi-1}\prod_{i\leq k} v_i^{\tau_i-1};$$

тогда

$$(ww_0)^{1-\varphi} = \pi^{\tau-1}\prod_{i\leq k} v_i^{\tau_i-1};$$

и, следовательно, $N((ww_0)^{1-\varphi}) = N(\pi^{\tau-1}\Pi v_i^{\tau_i-1}) = 1$; тогда $N(ww_0)^{1-\varphi} = 1, N(ww_0) \in A_{L^{\varphi}}$; так как $N = N_{L/L^K_u}$, то $N(ww_0) \in A_{L^K_u}$, кроме того, $L^{\varphi} \cap L^K_u = K$; следовательно, $N(w) = N(ww_0) \in A_K = A_{L^{\varphi}} \cap A_{L^K_u}$.

2) При доказательстве предложения 6 в [2] основным является установление следующего факта:

если $w \in U_L$ и $w^{1-\varphi} \in V_{L/K}$, то $N(w) \in N_{L/K}(U_L)$.

Воспользуемся этим фактом. Пусть $w_0^{1-\varphi}\pi^{1-\tau}, w_1^{1-\varphi}\pi^{1-\tau} \in V_L$; $w_0, w_1 \in U_L$; тогда $(w_0 w_1^{-1})^{1-\varphi} \in V_{L/K}$. $N(w_0 w_1^{-1}) \in N_{L/K}(U_L)$ и, следовательно, $w_0 N_{L/K}(U_L) = w_1 N_{L/K}(U_L)$.

3) Пусть $\tau \in I$, $w \in U_L$, $w^{1-\varphi}\pi^{1-\tau} \in V_{L/K}$; $\varphi' \in G$ — любой элемент Фробениуса, π' — любой простой элемент в A_L. Тогда $\sigma \rightleftharpoons \varphi'\varphi^{-1} \in I$; $\varphi' = \sigma\varphi$, $1-\varphi' = 1-\sigma\varphi = 1-\sigma+\sigma-\sigma\varphi$, $w^{1-\varphi'} = w^{1-\sigma+\sigma-\sigma\varphi} = w^{1-\sigma}(w^{\sigma})^{1-\varphi} = w^{1-\varphi}(w^{\sigma-1})^{1-\varphi}w^{1-\sigma}$; заметим, что $(w^{\sigma-1})^{1-\varphi} \in V_{L/K}$, так как $N(w^{\sigma-1}) = 1$, следовательно, и $w_0 \rightleftharpoons (w^{\sigma-1})^{1-\varphi}w^{1-\sigma} \in V_{L/K}$. Далее, $u \rightleftharpoons \pi'\pi^{-1} \in U_L$, $\pi' = \pi u$, $(\pi')^{1-\tau} = \pi^{1-\tau}u^{1-\tau}$; тогда

$$w^{1-\varphi'}(\pi')^{1-\tau} = w^{1-\varphi}\pi^{1-\tau}u^{1-\tau}w_0 \in V_{L/K}$$

и, если ρ' определить по φ' и π', то $\rho'(\tau) = N(w)N_{L/K}(U_L) = \rho(\tau)$.

4) Пусть $\tau \in I$, тогда $\varphi\tau$ (по условию) также является элементом Фробениуса группы G. Выберем простые элементы π в $A_{L^{\varphi}}$ и π' в $A_{L^{\varphi\tau}}$. Поскольку L является неразветвленным расширением как L^{φ}, так и $L^{\varphi\tau}$, то π, π' — простые элементы и в A_L. Пусть $u \rightleftharpoons \pi'\pi^{-1}$, тогда $u \in U_L$ и $\pi' = \pi u$. Имеем $\pi u = \pi' = (\pi')^{\varphi\tau} = (\pi u)^{\varphi\tau} = \pi^{\varphi\tau}u^{\varphi\tau} = \pi^{\tau}u^{\varphi\tau}$; $u^{1-\varphi\tau}\pi^{1-\tau} = 1 \in V_{L/K}$; следовательно, $\rho(\tau)$ определено ($\rho(\tau) = N(u)N_{L/K}(U_L)$).

5) Пусть $\tau_0, \tau_1 \in I$ и $w_0, w_1 \in U_L$ таковы, что

$$w_0^{1-\varphi}\pi^{1-\tau_0},\ w_1^{1-\varphi}\pi^{1-\tau_1} \in V_{L/K}.$$

Поскольку π^{τ_0} так же является простым элементом в A_L, то по доказанному выше и $w_1^{1-\varphi}(\pi^{\tau_0})^{1-\tau_1} \in V_{L/K}$. Тогда

$$(w_0 w_1)^{1-\varphi}\pi^{1-\tau_0}(\pi^{\tau_0})^{1-\tau_1} \in V_{L/K};$$

кроме того, $\pi^{1-\tau_0}\pi^{\tau_0-\tau_0\tau_1} = \pi^{1-\tau_0\tau_1}$; следовательно,

$$\rho(\tau_0\tau_1) = N(w_0 w_1)N_{L/K}(U_L) = N(w_0)N(w_1)N_{L/K}(U_L) = \rho(\tau_0)\rho(\tau_1).$$

6) Выберем π простым в $A_{L^{\varphi}}$ (тогда π простой и в A_L) и пусть $w \in U_L$ такой, что $w^{1-\varphi}\pi^{1-\tau} \in V_{L/K}$. Далее имеем $\pi^{1-\tau^{\varphi}} = \pi^{1-\varphi^{-1}\tau\varphi} = \pi^{1-\tau\varphi} = \pi^{1-\tau+\tau-\tau\varphi} = \pi^{1-\tau}(\pi^{\tau})^{1-\varphi}$; так как $\pi^{\varphi} = \pi$, то $\pi^{1-\varphi} = 1$ и $(\pi^{\tau})^{1-\varphi} = (\pi^{\tau-1})^{1-\varphi}$; поскольку $N(\pi^{\tau-1}) = 1$, то $(\pi^{\tau})^{1-\varphi} \in V_{L/K}$. Итак,

$$w^{1-\varphi}\pi^{1-\tau^{\varphi}} = w^{1-\varphi}\pi^{1-\tau}(\pi^{\tau})^{1-\varphi} \in V_{L/K};$$

следовательно, $\rho(\tau^{\varphi}) = N(w)N_{L/K}(U_L) = \rho(\tau)$. Предложение доказано. $\square$

Предложение 3 показывает, что гомоморфизм ρ индуцирует гомоморфизм группы $\tilde{I} \rightleftharpoons I/G'$, (где $G' \rightleftharpoons [G,G]$ — коммутатор группы G) в $U_K/N_{L/K}(U_L)$. Так как $G/G' \simeq \langle\varphi\rangle \times \tilde{I}$, то, как было указано выше, *гомоморфизм взаимности*

$$r_{L/K} : G \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)\ (\simeq \langle \pi N_{L/K}(A_L)\rangle \times U_K/N_{L/K}(U_L))$$

может быть определен так, что $r_{L/K}(\varphi) = N_{L^{\varphi}/K}(\pi')N_{L/K}(A_L)$ для π' простого в $A_{L^{\varphi}}$, а

$$r_{L/K}(\tau) = \rho_{L/K}(\tau) \in U_K/N_{L/K}(U_L) \le A_K/N_{L/K}(A_L)$$

для $\tau \in I$. Требуется лишь проверить, что $r_{L/K}(\varphi)$ не зависит от выбора π'. Пусть π — простой в $A_{L^{\varphi}}$; тогда $\pi' = \pi u$ для $u \rightleftharpoons \pi'\pi^{-1} \in U_{L^{\varphi}}$ и следует показать, что $N_{L^{\varphi}/K}(u) \in N_{L/K}(A_L)$. Так как L — неразветвленное расширение L^{φ}, то, по лемме 1, $U_{L^{\varphi}} = N_{L/L^{\varphi}}(U_L)$ и, значит существует $u_0 \in U_L$ такое, что

$u = N_{L/L^\varphi}(u_0)$; тогда $N_{L^\varphi/K}(u) = N_{L^\varphi/K}N_{L/L^\varphi}(u_0) = N_{L/K}(u_0) \in N_{L/K}(U_L) \leq N_{L/K}(A_L)$.

Определим теперь гомоморфизм взаимности в случае произвольного расширения Галуа. Для этого понадобится такой (технический) факт, который является легким следствием предложения 3 из [2]:

пусть $L > K$ — расширение Галуа, тогда существует неразветвленное расширение $M \geq L$ такое, что расширение $M \geq K$ находится в общем положении.

Пусть $M \geq L$ как выше $G \rightleftharpoons G(L/K)$, $G' \rightleftharpoons G(M/K)$, а $p : G' \longrightarrow G$ — эпиморфизм ограничения. Заметим, что можно естественно отождествить группы $I' = G(M/M_u^K)$ и $I = G(L/L_u^K)$ $(I' \cap \mathrm{Ker}\ p = \{e\})$.

Выше уже определен гомоморфизм взаимности $r_{M/K} : G' = G(M/K) \longrightarrow A_K/N_{M/K}(A_M)$. Гомоморфизм взаимности $r_{L/K} : G \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$ определяется так: для $\sigma \in G$ выбираем $\sigma' \in G'$ таким, что $p(\sigma') = \sigma$, и полагаем $r_{L/K}(\sigma) \rightleftharpoons r_{M/K}(\sigma')N_{L/K}(A_L)$.

Следующая лемма показывает корректность этого определения.

ЛЕММА 6. *Если $\sigma \in \mathrm{Ker}\ p$, то $r_{M/K}(\sigma) \subseteq N_{L/K}(A_L)$.*

Пусть φ — элемент Фробениуса группы $G' = G(M/K)$. Тогда найдутся $k < |\varphi|$ и $\tau \in I' = I$ такие, что $\sigma = \varphi^k\tau$. Условие $\sigma \in \mathrm{Ker}\ p$ $(p(\sigma) = e)$ означает, что $\sigma \restriction L = \mathrm{id}_L$. Имеем $\sigma \restriction L = (\varphi^k \restriction L) \cdot (\tau \restriction L) = (\varphi \restriction L)^k\tau$ $(\tau \restriction L = \tau$ при отождествлении I' и $I)$ и $(\varphi \restriction L)^k = \tau^{-1}$.

Имеем также $\sigma \restriction L_u^K = (\varphi \restriction L_u^K)^k(\tau \restriction L_u^K) = (\varphi \restriction L_u^K)^k = \mathrm{id}_{L_u^K}$.

Так как $\varphi \restriction L_u^K$ — автоморфизм Фробениуса, в частности, образующая группы $G(L_u^K/K)$, то $f_{L/K} = [L_u^K : K]$ делит k $(k = f_{L/K} \cdot k')$.

Вычислим $r_{M/K}(\sigma)$; пусть π' — простой элемент в A_{M^φ}; π — простой элемент в A_L. Поскольку M — неразветвленное расширение как L, так и M^φ, то π и π' — простые элементы в A_M и $\pi' = \pi u$ для $u \rightleftharpoons \pi'\pi^{-1} \in U_M$. Для любого натурального i имеем $\pi'^{\varphi^i} = (\pi u)^{\varphi^i} = \pi^{\varphi^i}u^{\varphi^i} = \pi' = \pi u$, $\pi^{\varphi^i - 1} = u^{1-\varphi^i}$ и $1 = \pi^{1-\varphi^i}u^{1-\varphi^i}$. В частности, $1 = \pi^{1-\varphi^k}u^{1-\varphi^k} = \pi^{1-\tau^{-1}}u^{1-\varphi^k} = \pi^{1-\tau^{-1}}(u^{\varphi_k})^{1-\varphi}$, где $\varphi_k = 1 + \varphi + ... + \varphi^{k-1}$; следовательно,

$$\rho_{M/K}(\tau^{-1}) = N(u^{\varphi_k})N_{M/K}(U_M), \quad \rho_{M/K}(\tau) = N(u^{-\varphi_k})N_{M/K}(U_M)$$

и $r_{M/K}(\sigma) = r_{M/K}(\varphi^k\tau) = N(\pi'^k)N(u^{-\varphi_k})N_{M/L}(A_M)$. Заметим, что $\pi'^k = \pi^k u^k$ и

$$N(\pi'^k u^{-\varphi^k}) = N(\pi)^k N(u^k u^{-\varphi_k}) = N(\pi)^k N\left(\prod_{i<k} u^{1-\varphi^i}\right).$$

Выше было отмечено, что $u^{1-\varphi^i} = \pi^{\varphi^i - 1}$, поэтому

$$N\left(\prod_{i<k} u^{1-\varphi^i}\right) = N\left(\prod_{i<k} \pi^{\varphi^i - 1}\right)$$

и

$$N\left(\pi^k\right) N\left(\prod_{i<k} u^{1-\varphi^i}\right) = N\left(\prod_{i<k} \pi^{\varphi^i}\right) = N\left(\pi^{\varphi_k}\right) = N\left(\left(\pi^{\varphi_{f_{L/K}}}\right)^{\varphi_{k'}^{f_{L/K}}}\right);$$

здесь использовано легко проверяемое соотношение $\varphi_k = \varphi_{f_{L/K}} \cdot \varphi_{k'}^{f_{L/K}}$, (и равенство $k = f_{L/K} \cdot k'$). Поскольку

$$N(\pi) \in A_{M_u^K} \cap A_L = A_{L_u^K},$$

то

$$N(\pi^{\varphi_{f_{L/K}}}) = N(\pi)^{1+\varphi\restriction L_u^K + \ldots + (\varphi\restriction L_u^K)^{f_{L/K}-1}} = N_{L_u^K/K} N(\pi) = N_{L/K}(\pi),$$

а следовательно,

$$N(\pi'^k u^{-\varphi_k}) = N(\pi^{\varphi_k}) = N((\pi^{\varphi_{f_{L/K}}})^{\varphi_{k'}^{f_{L/K}}}) = N_{L/K}(\pi)^{k'} \in N_{L/K}(A_L).$$

Лемма доказана. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *1) Пусть $K \le L \le M$ — расширения полей, M — расширение Галуа поля K, тогда коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} G(M/L) & \xrightarrow{r_{M/L}} & A_L/N_{M/L}(A_M) \\ \downarrow & & \downarrow \bar{N}_{L/K} \\ G(M/K) & \xrightarrow{r_{M/K}} & A_K/N_{M/K}(A_M). \end{array}$$

2) Пусть $K \le L \le M$ как в п. 1 и L — расширение Галуа поля K, тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G(M/K) & \xrightarrow{r_{M/K}} & A_K/N_{M/K}(A_M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(L/K) & \xrightarrow{r_{L/K}} & A_K/N_{L/K}(A_L) \end{array}$$

Сначала установим п. 1 в предположении, что расширения $M \ge K$ и $M \ge L$ находятся в общем положении. Пусть φ — элемент Фробениуса группы $G \rightleftharpoons G(M/K)$, тогда нетрудно видеть, что $\varphi_0 \rightleftharpoons \varphi^{f_{L/K}}$ является элементом Фробениуса группы $G_0 \rightleftharpoons G(M/L)$.

Пусть π — простой элемент в A_{M^φ}; тогда π является и простым элементом в $A_{M^{\varphi_0}}$. По определению имеем $r_{M/L}(\varphi_0) = N_{M^{\varphi_0}/L}(\pi) N_{M/L}(A_M)$. Далее,

$$N_{L/K} N_{M^{\varphi_0}/L}(\pi) = N_{M^{\varphi_0}/K}(\pi) = N_{M^\varphi/K} N_{M^{\varphi_0}/M^\varphi}(\pi);$$

$$N_{M^{\varphi_0}/M^\varphi}(\pi) = \pi^{[M^{\varphi_0}:M^\varphi]} = \pi^{f_{L/K}},$$

так как $\pi \in M^\varphi$, а $[M^{\varphi_0} : M^\varphi] = |\varphi| \cdot |\varphi_0|^{-1} = f_{L/K}$. Имеем также

$$\begin{aligned} r_{M/K}(\varphi_0) &= r_{M/K}(\varphi^{f_{L/K}}) = N_{M^\varphi/K}(\pi)^{f_{L/K}} N_{L/K}(A_L) = \\ &\quad N_{L/K} N_{M^{\varphi_0}/L}(\pi) N_{L/K}(A_L) = N_{L/K}\ r_{M/L}(\varphi_0) N_{L/K}(A_L). \end{aligned}$$

Пусть $\tau \in I_0 = G(M/L_u^M) = I \cap G(M/L)$, где $I \rightleftharpoons G(M/M_u^K)$; пусть $u \in U_M$ и $u^{1-\varphi_0}\pi^{1-\tau} \in V_{M/L}$; тогда

$$\rho_{M/L}(\tau) = N_{M/M_u^L}(u) N_{M/L}(U_M).$$

Проверим, что $V_{M/L} \le V_{M/K}$; если $u \in U_M$, $\sigma \in I_0 \le I$, то $u^{\sigma-1} \in V_{M/K}$. Пусть $w \in U_M$ и $N_{M/M_u^L}(w) = 1$, тогда

$$w^{\varphi_0 - 1} = w^{\varphi^{f_{L/K}}} - 1 = (w^{\varphi_{f_{L/K}}})^{\varphi - 1}$$

и

$$N_{M/M_u^K}(w^{\varphi_{f_{L/K}}}) = N_{M/M_u^K}(w)^{\varphi_{f_{L/K}}} = N_{M_u^L/M_u^K} N_{M/M_u^L}(w)^{\varphi_{f_{L/K}}} = 1;$$

следовательно, $w^{\varphi_0-1} \in V_{M/K}$ и $V_{M/L} \leq V_{M/K}$.

Итак,

$$u^{1-\varphi_0}\pi^{1-\tau} \in V_{M/L} \leq V_{M/K}, u^{1-\varphi_0} = u^{1-\varphi^{f_{L/K}}} = (u^{\varphi f_{L/K}})^{1-\varphi};$$

следовательно,

$$\rho_{M/K}(\tau) = N_{M/M_u^K}(u^{\varphi f_{L/K}})N_{L/K}(U_L).$$

Имеем

$$\begin{aligned} N_{M/M_u^K}(u^{\varphi f_{L/K}}) \quad = \quad & N_{M/M_u^K}(u)^{\varphi f_{L/K}} = N_{M_u^L/M_u^K}N_{M/M_u^L}(u)^{\varphi f_{L/K}} = \\ & N_{L/L_u^K}N_{M/M_u^L}(u)^{\varphi f_{L/K}} = N_{L_u^K/K}N_{L/L_u^K}N_{M/M_u^L}(u) = \\ & N_{L/K}N_{M/M_u^L}(u) \end{aligned}$$

и, следовательно, $\rho_{M/K}(\tau) = N_{L/K}\rho_{M/L}(\tau)$.

Итак, п. 1 проверен для случая, когда $M \geq K$ и $M \geq L$ находятся в общем положении. Для произвольного случая выбираем неразветвленное расширение $M_0 \geq M$ такое, что $M_0 \geq K$ и $M_0 \geq L$ находятся в общем положении, и рассмотрение диаграммы

$$\begin{tikzcd}
G(M_0/L) \arrow[rrr, "r_{M_0/L}"] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & A_L/N_{M_0/L}(A_{M_0}) \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& G(M/L) \arrow[r] \arrow[d] & A_L/N_{M/L}(A_M) \arrow[d] & \\
& G(M/K) \arrow[r] & A_K/N_{M/K}(A_M) & \\
G(M_0/K) \arrow[rrr, "r_{M_0/K}"] \arrow[ur] & & & A_K/N_{M_0/K}(A_{M_0}) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

вместе с уже доказанным позволяет установить п. 1 в общем случае.

Установим п. 2 в предположении, что $L \geq K$, $M \geq K$ находятся в общем положении и $L_u^K = M_u^K$. Пусть $\varphi \in G(M/K)$ — элемент Фробениуса, тогда $\bar{\varphi} \rightleftharpoons \varphi \restriction L$ — элемент Фробениуса группы $G(L/K)$; $G(M/K) = \langle\varphi\rangle \leftthreetimes I_M$, $I_M \rightleftharpoons G(M/M_u^K)$; $G(L/K) = \langle\bar{\varphi}\rangle \leftthreetimes I_L$, $I_L \rightleftharpoons G(L/L_u^K)$; гомоморфизм ограничения $\sigma \longmapsto \sigma \restriction L$ отображает I_M на I_L.

Пусть π — простой элемент в A_{M^φ}; так как $M^\varphi \geq L^{\bar{\varphi}}$ — вполне разветвленное расширение, то $\bar{\pi} = N_{M^\varphi/L^{\bar{\varphi}}}(\pi) = N_{M/L}(\pi)$ — простой элемент в $A_{L^{\bar{\varphi}}}$. Имеем

$$r_{M/K}(\varphi) = N_{M/M_u^K}(\pi)N_{M/L}(A_M);$$

$$r_{L/K}(\bar{\varphi}) = N_{L/L_u^K}(\bar{\pi})N_{L/K}(A_L);$$

но

$$N_{L/L_u^K}(\bar{\pi}) = N_{L/L_u^K}N_{M^\varphi/L^{\bar{\varphi}}}(\pi) = N_{L/L_u^K}N_{M/L}(\pi) = N_{M/M_u^K}(\pi);$$

следовательно,

$$r_{L/K}(\bar\varphi) = r_{M/K}(\varphi) N_{L/K}(A_L).$$

Пусть $\tau \in I_M$, $\bar\tau = \tau \restriction L \in I_L$. Находим $u \in U_M$ такой, что $u^{1-\varphi}\pi^{1-\tau} \in V_{M/K}$; тогда $r_{M/K}(\tau) = N_{M/M_u^K}(u) N_{M/K}(A_M)$; Нетрудно проверить, что $N_{M/L}(V_{M/K}) \leq V_{L/K}$; тогда имеем $N_{M/L}(u)^{1-\bar\varphi} N_{M/L}(\pi)^{1-\bar\tau} \in V_{L/K}$; $N_{M/L}(\pi) = \bar\pi$, следовательно,

$$r_{L/K}(\bar\tau) = N_{L/L_u^K}(N_{M/L}(u)) N_{L/K}(A_L);$$

но $N_{L/L_u^K}(N_{M/L}(u)) = N_{M/M_u^K}(u)$, следовательно, $r_{L/K}(\bar\tau) = r_{L/K}(\tau) N_{L/K}(A_L)$, что и доказывает п. 2 при сделанных предположениях.

Пусть $M \geq L \geq K$ — башня расширений такая, что $M \geq K$, $L \geq K$ — расширения Галуа. Тогда можно (см. факт в доказательстве предложения 3.2)) найти такое неразветвленное расширение $K_0 \geq M_u^K$, что $L_0 \rightleftharpoons K_0 L \geq K$ и $M_0 \rightleftharpoons K_0 M \geq K$ находятся в общем положении. Заметим, что тогда $K_0 = M_{0\,u}^K = L_{0\,u}^K$, т.е. башня расширений $M_0 \geq L_0 \geq K$ удовлетворяет условиям, при которых п. 2 уже доказан. Теперь уже не составляет труда доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
G(M_0/K) \arrow[rrr, "r_{M_0/K}"] \arrow[dr] \arrow[ddd] \arrow[drrr, phantom, "\textcircled{1}"] \arrow[dddr, phantom, "\textcircled{2}"] & & & A_K/N_{M_0/K}(A_{M_0}) \arrow[dl] \arrow[ddd] \arrow[dddl, phantom, "\textcircled{3}"] \\
& G(M/K) \arrow[r, "r_{M/K}"] \arrow[d] & A_K/N_{M/K}(A_M) \arrow[d] & \\
& G(L/K) \arrow[r, "r_{L/K}"] & A_K/N_{L/K}(A_L) & \\
G(L_0/K) \arrow[rrr, "r_{L_0/K}"] \arrow[ur] \arrow[urrr, phantom, "\textcircled{4}"] & & & A_K/N_{L_0/K}(A_{L_0}) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

используя коммутативность внешней диаграммы и “внешних” диаграмм ①, ②, ③, ④. Предложение доказано. □

Предложение 4 позволяет указать более явный путь для вычисления гомоморфизма взаимности.

Пусть $L \geq K$ — расширение Галуа, элемент $\sigma \in G(L/K)$ назовем *элементом (автоморфизмом) Нейкирха*, если σ является автоморфизмом Фробениуса в расширении $L \geq L^\sigma$ (группе $\langle\sigma\rangle = G(L/L^\sigma)$).

СЛЕДСТВИЕ 9. *Если $\sigma \in G(L/K)$ — автоморфизм Нейкирха, то $r_{L/K}(\sigma) = N_{L^\sigma/K}(\pi) N_{L/L^\sigma}(A_L)$ для простого элемента π в A_{L^σ}.*

Действительно, если π — простой элемент в A_{L^σ}, то $r_{L/L^\sigma}(\sigma) = \pi N_{L/L^\sigma}(A_L)$. По п. 1 предложения 4 имеем

$$r_{L/K}(\sigma) = N_{L^\sigma/K}(\pi) N_{L/L^\sigma}(A_L). \ \square$$

Пусть $M \geq L(\geq K)$ — расширения Галуа поля K $\sigma \in G(L/K)$; элемент $\sigma_0 \in G(M/K)$ назовем *подъемом* элемента σ, если σ_0 — автоморфизм Нейкирха в $G(M/K)$ и $\sigma_0 \restriction L = \sigma$.

СЛЕДСТВИЕ 10. *Если $\sigma_0 \in G(M/K)$ — подъем элемента $\sigma \in G(L/K)$, π — простой элемент в $A_{M^{\sigma_0}}$, то $r_{L/K}(\sigma) = N_{L^\sigma/K}(\pi) N_{L/L^\sigma}(A_L)$.*

Это вытекает из следствия 9 и п. 2 предложения 4. $\square$

Это следствие полезно потому, что справедлив следующий факт:

Для любого расширения Галуа $L \geq K$ существует неразветвленное расширение $M \geq L$ такое, что любой элемент $\sigma \in G(L/K)$ имеет подъем σ_0 в $G(M/K)$.

Это следствие предложения 3 в [2]. $\square$

Еще одним следствием предложения 4 является коммутативность следующей диаграммы:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & \to & G(M/L) & \to & G(M/K) & \to & G(L/K) & \to & 1 \\
\oplus & & & \downarrow r_{M/L} & & \downarrow r_{M/L} & & \downarrow r_{L/K} & & \\
 & & & A_L/N_{M/L}(A_M) & \to & A_K/N_{M/K}(A_M) & \to & A_K/N_{L/K}(A_L) & \to & 1
\end{array}
$$

где $M \geq L$ $(\geq K)$ — расширения Галуа поля K; заметим, что горизонтальные последовательности в $\oplus$ точны.

Предположим теперь, что еще выполняется аксиома H_{90}^r.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Гомоморфизм взаимности*

$$r_{L/K} : G(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$$

индуцирует вложение $r_{L/K} : G(L/K)^{ab} \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$.

Доказательство начнем со случая, когда расширение $L \geq K$ находится в общем положении. Пусть $G = G(L/K)$, $I = G(L/L_u^K)$, $G' = [G, G] \trianglelefteq I$, $L_0 \rightleftharpoons L^{G'}$; тогда $G_0 = G(L'/K) = G/G'$ и без труда проверяется, что расширение $L' \geq K$ находится в общем положении, $I_0 \rightleftharpoons G(L_0/L_{0\,u}^K) \simeq I/G'$ абелева. Из п. 2 предложения 4 легко следует, что если $r_{L'/K} : G_0 \longrightarrow A_K/N_{L_0/K}(A_{L_0})$ — вложение, то и $r_{L/K} : G^{ab} \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$ — вложение.

Итак, предположим, что расширение $L \geq K$ находится в общем положении и группа Галуа $G = G(L/K)$ абелева. Из определения гомоморфизма взаимности видим, что достаточно доказать, что гомоморфизм Дворка–Ивасавы $\rho_{L/K} : I\ (= G(L/L_u^K)) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$ является вложением. Пусть $e \neq \tau \in I$; тогда найдется подгруппа $I_0 \leq I$ такая, что $\tau \notin I_0$, а фактор-группа I/I_0 циклическая. Это позволяет предполагать, что группа I сама циклическая, $I = \langle \tau \rangle$.

Проверим, что в этом случае $V_{L/K} = U_L^{\tau-1}$ $(\rightleftharpoons \{u^{\tau-1} \mid u \in U_L\})$. Включение $\geq$ очевидно. Пусть $u \in U_L$, $k > 0$, тогда $u^{\tau^k-1} = (u^{\tau_k})^{\tau-1} \in U_L^{\tau-1}$; пусть $w \in U_L$, $N(w) = N_{L/L_u^k}(w) = 1$; тогда по аксиоме H_{90}^r существует элемент $a \in A_L$ такой, что $w = a^{\tau-1}$; тогда $w^{\varphi-1} = (a^{\tau-1})^{\varphi-1} = (a^{\varphi-1})^{\tau-1} \in U_L^{\tau-1}$, так как $a^{\tau-1} \in U_L$ (здесь φ — автоморфизм Фробениуса группы $G(L/K)$). Итак, $V_{L/K} = U_L^{\tau-1}$.

Пусть $k \in \omega$ и $\rho(\tau^k) = e$, т.е. существует $w \in U_L$ такой, что $w^{1-\varphi}\pi^{1-\tau^k} \in V_{L/K}$, где π — простой элемент в A_L, и $N(w) \in N_{L/K}(U_L)$. Пусть $v \in U_L$

такой, что $N(w) = N_{L/K}(v)$. Полагая $w_0 \rightleftharpoons N_{L/L^\varphi}(v) = v^{\varphi f_{L/K}}$ будем иметь $N(ww_0^{-1}) = 1$ и $(ww_0^{-1})^{1-\varphi} = w^{1-\varphi}(v^{-\varphi f_{L/K}})^{1-\varphi} = w^{1-\varphi}v^{\varphi^{f_{L/K}-1}} = w^{1-\varphi}$, так как $\varphi^{f_{L/K}} = 1$. Таким образом можно считать, что $N(w) = 1$ (заменив, если потребуется w на ww_0^{-1}). Тогда $w^{1-\varphi} \in U_L^{\tau-1}$ (как показано выше) и, следовательно, $\pi^{1-\tau^k} \in V_{L/K} = U_L^{\tau-1}$. Тогда существует $u \in U_L$ такой, что $\pi^{1-\tau^k} = u^{\tau-1}$, $\pi^{\tau^k-1}u^{\tau-1} = 1$, $(\pi^{\tau_k}u)^{\tau-1} = 1$, $\pi^{\tau_k}u \in A_{L^\tau}$, поэтому $v_{L^\tau}(\pi^{\tau_k}u) = v_L(\pi^{\tau_k}) = v_L(\pi)^k \in Z_{L^\tau} = Z_K$. Так как $v_L(\pi)$ является образующим в Z_L, а $[Z_L : Z_K] = f_{L/K}$, то $f_{L/K}$ делит k, а следовательно, $\tau^k = 1$.

Перейдем к рассмотрению произвольного расширения Галуа $L \geq K$. Как и выше, можно считать, что группа $G(L/K)$ абелева. Пусть $M \geq L$ — неразветвленное расширение такое, что расширение $M \geq K$ находится в общем положении. Тогда $G(M/K)$ также абелева. По доказанному выше и по п. 2 предложения 4 гомоморфизм Дворка–Ивасавы $\rho_{L/K} : I \longrightarrow U_K/N_{L/K}(U_L)$ является вложением. Поэтому достаточно показать, что $r_{L/K}(\sigma) \neq e$ если $\sigma \in G \setminus I$. Пусть $k \in \omega$ такой, что $\varphi^k \restriction L_u^K = \sigma \restriction L_u^K$, где φ — автоморфизм Фробениуса группы $G(M/K)$.

Так как $\sigma \notin I$, то $\sigma \restriction L_u^K \neq \mathrm{id}_{L_u^K}$ и, следовательно, $f_{L/K} = |\varphi \restriction L_u^K|$ не делит k. Пусть $\tau \rightleftharpoons \sigma(\varphi \restriction L)^{-k}$; тогда $\tau \in I = G(L/L_u^K) = G(M/M_u^K)$ и $(\varphi^k\tau) \restriction L = \sigma$. Значит

$$\begin{aligned} r_{L/K}(\sigma) &= r_{M/K}(\varphi^k\tau)N_{L/K}(A_L) = \\ &\quad N_{M^\varphi/K}(\pi^k)\rho_{M/K}(\tau)N_{L/K}(A_L). \end{aligned}$$

где π — простой элемент в A_{M^φ}. Далее имеем $v_M(N_{M^\varphi/K}(\pi^k)) = v_M(N_{M^\varphi/K}(\pi))^k$; так как M^φ — вполне разветвленное расширение K, то $N_{M^\varphi/K}(\pi)$ — простой элемент в Z_K, а поскольку $f_{L/K}$ $(= [Z_K : \bar{N}_{L/K}(Z_L)])$ не делит k, то $v_M(N_{M^\varphi/K}(\pi))^k \notin \bar{N}_{L/K}(Z_L)$. Отсюда $r_{L/K}(\sigma) \neq e$ (так как $\rho_{M/K}(\tau) \subseteq U_K$). Предложение доказано. □

Наконец, если предположить еще справедливость аксиомы R_0, то справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Для любого расширения Галуа $L \geq K$ гомоморфизм взаимности индуцирует изоморфизм*

$$r_{L/K} : G(L/K)^{ab} \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L).$$

Доказательство теоремы совпадает с доказательством теоремы 2 из [2]. □

Замечание. В работе [2] в формулировках теорем 1, 2 пропущено предположение о выполнимости аксиомы $H^{-1}(G(L/K), A_L) = 1$ для вполне разветвленных циклических расширений $L \geq K$ (это аксиома H_{90}^r в обозначениях настоящей статьи). А именно, эта аксиома необходима для выполнимости равенства $H_K^{-1}(H, U_L) = H^{-1}(H, U_L)$, используемого в начале доказательства леммы 11.

В заключение укажем полезное необходимое и достаточное условие справедливости аксиомы R_0 в предположении аксиомы H_{90}^r (и, конечно, аксиом U_0, F, H_{90}^u).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Для вполне разветвленного циклического расширения L/K изоморфизм групп $G(L/K)$ и $A_K/N_{L/K}(A_L)$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого элемента $u \in U_K$ найдется неразветвленное расширение $M \geq L$ такое, что $u \in N_{M/M_u^K}(U_M)$.*

Установим необходимость. Пусть $M \geq L$ — неразветвленное расширение такое, что $M \geq K$ — находится в общем положении; $G = G(M/K) = \langle\varphi\rangle \times \langle\tau\rangle$, где $\varphi \in G$ — автоморфизм Фробениуса, $\langle\varphi\rangle = G(L/K)$. Так как $r_{L/K} : G(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$ по предположению является изоморфизмом (достаточно эпиморфизмом), то для любого $u \in U_K$ найдется элемент $\tau^k \in G(L/K)$ такой, что $r_{L/K}(\tau^k) = uN_{L/K}(A_L)$. Рассмотрим элемент $r_{M/K}(\tau^k) = \rho_{M/K}(\tau^k)N_{M/K}(A_M)$. По определению гомоморфизма ρ существует $w \in U_M$ такой, что $w^{1-\varphi}\pi^{1-\tau^k} \in V_{M/K}$ и $N(w)N_{L/K}(U_L) = uN_{L/K}(A_L)$, где π — простой элемент A_M. Тогда $N(w)u^{-1} \in N_{L/K}(U_L)$ и, следовательно, $u = N_{M/M_u^k}(w)N_{L/K}(v)$ для подходящего $v \in U_L$. Заметим, что $L_u^K = K$, поэтому $N_{L/K}(v) = N_{L/L_u^K}(v) = N_{M/M_u^K}(v)$ и $u = N_{M/M_u^K}(wv) \in N_{M/M_u^K}(U_M)$.

Установим достаточность. Заметим, что $A_K/N_{L/K}(A_L)$ и $U_K/N_{L/K}(U_L)$ изоморфны. Это следует из рассмотрения точной последовательности

$$1 \longrightarrow U_K/N_{L/K}(U_L) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L) \longrightarrow Z_K\bar{N}_{L/K}(Z_L)\ (\simeq C_{f_{L/K}}) \longrightarrow 1.$$

Так как $L \geq K$ вполне разветвлено, то $f_{L/K} = 1$. Пусть $u \in U_K$, M — неразветвленное расширение L такое, что расширение $M \geq K$ находится в общем положении и в U_M существует элемент w такой, что $u = N_{M/M_u^K}(w) = N(w)$, $G(M/K) = \langle\varphi\rangle \times \langle\tau\rangle$, где $\varphi \in G(M/K)$ — автоморфизм Фробениуса и $\langle\tau\rangle = G(M/M_u^K) \simeq G(L/K)$. Заметим, что $N(w^{1-\varphi}) = N(w)^{1-\varphi} = u^{1-\varphi} = 1$. Тогда по H_{90}^τ найдется элемент $a \in A_M$ такой, что $w^{1-\varphi} = a^{\tau-1}$. Пусть π — простой элемент A_M, тогда для подходящих $k \in \omega$, $v \in U_M$ и $b \in A_{M_u^K}$ элемент a представим в виде $a = \pi^k vb$. Это следует из того, что $N_{M/M_u^K}(\pi)Z_{M_u^K}$ — образующая циклической группы $Z_M/Z_{M_u^K}$. Тогда $a^{\tau-1} = (\pi^k v)^{\tau-1}$, так как $b \in A_{M_u^K} = A_{M^\tau}$ и $b^\tau = b$. Итак, можно считать, что a имеет вид $\pi^k v$. Тогда $w^{1-\varphi}(\pi^k v)^{1-\tau} = 1$, $v^{1-\tau} \in V_{M/K}$, а $(\pi^k)^{\tau-1} = \pi^{1-\tau}...\pi^{1-\tau} = \pi^{1-\tau^k} \cdot v_0$ для подходящего $v_o \in V_{M/K}$ (это следует из доказательства того, что ρ является гомоморфизмом (п. 5 предложения 3)). Отсюда, $w^{1-\varphi}\pi^{1-\tau^k} \in V_{M/K}$; следовательно,

$$\rho_{M/K}(\tau^k) = N(w)N_{M/K}(U_M) = uN_{M/K}(U_M)$$

и тогда $r_{L/K}(\tau^k) = uN_{L/K}(A_L)$. Поэтому

$$uN_{L/K}(A_L) \in r_{L/K}(G(L/K)).$$

Так как $u \in U_K$ был произвольным, то $r_{L/K}$ — эпиморфизм. □

СЛЕДСТВИЕ 11. *В условиях предложения, если $r_{L/K}$ — эпиморфизм, то для неразветвленного расширения $M \geq L$ такого, что $[M : L] = [L : K]$ имеет место $U_K \leq N_{M/M_u^K}(U_M)$.*

Действительно, нетрудно проверить, что для такого M расширение $M \geq K$ находится в общем положении, далее — воспользоваться доказательством необходимости. □

Список литературы

[1] J. Neukirch, *Abstract Class Field Theory,* chapter IV in: Algebraic Number Theory, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1999.

[2] Ю. Л. Ершов, *Абстрактная теория полей классов (финитарный подход),* Математический сборник, 194, №. 2 (2003), 37–60.

[3] К. Ивасава, *Локальная теория полей классов,* Мир, Москва, 1983.
[4] *Алгебраическая теория чисел,* ред. Дж. Касселс, А. Фрелих, Мир, Москва, 1969.
[5] W. C. Waterhouse, *Profinite groups are Galois groups,* Proc. Am. Math. Soc, 42, No. 2 (1974), 639–640.
[6] Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, Математическая логика, Физматгиз, Москва, 1987.

Юрий Леонидович Ершов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ersho v@math.nsc.ru