S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 1, стр. 110–116 (2004) УДК 512.542, 512.547.2
MSC 20B35, 20C15, 20D15

ХАРАКТЕРЫ ГРУПП ВИДА $X \wr \mathbb{Z}_p$

Д.О. РЕВИН

Abstract. The irreducible complex characters of the groups $G \wr \mathbb{Z}_p$ are calculated, where p is a prime and G is a finite group with known characters table. As a consequence, we get a simple inductive method to find the characters tables of the Sylow p-subgroups of the symmetric groups. In particular, it is proved that the values of irreducible complex characters of the Sylow 2-subgroups in such groups are rational which solves the problem 15.25 from “Kourovka Notebook”.

Введение

Характеры силовских подгрупп симметрических групп и сплетений конечных групп неоднократно изучались в математической литературе (см., например, монографии [1, 2]). В [1, теорема 25.10] найдены значения степеней неприводимых комплексных характеров силовских подгрупп симметрических групп. Хорошо известно [3, пример III из 11.3.1], что если p — простое число и $n = a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^k$, где $a_0, a_1, \dots, a_k$ — неотрицательные целые числа, не превосходящие $p-1$, то силовская p-подгруппа группы S_n является прямым произведением групп $X_1, \dots, X_k$, где X_i — прямое произведение a_i изоморфных копий групп вида $\underbrace{(\dots((\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p) \wr \mathbb{Z}_p) \wr \dots) \wr \mathbb{Z}_p}_{i \text{ раз}}$. Неприводимые комплексные характеры прямых произведений легко вычисляются по неприводимым характерам своих прямых сомножителей (см. лемму 2). Поэтому для того, чтобы найти таблицу характеров силовской p-подгруппы симметрической

Revin, D.O., The characters of a group of type $X \wr \mathbb{Z}_p$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 02-01-00495, программы "Университеты России", проект УР.04.01.028 СО РАН, гранта Лаврентьевского конкурса молодых ученых и гранта Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект НШ-2069.2003.1.

Поступила 12 ноября 2004 г., опубликована 9 декабря 2004 г.

группы S_n, достаточно уметь строить таблицы характеров групп вида $X \wr \mathbb{Z}_p$ по таблице характеров группы X. Последнее и составляет основную цель данной статьи.

Прежде, чем сформулировать основной результат, зафиксируем обозначения, используемые далее. Всюду предполагается, что p — некоторое фиксированное простое число. Если i — целое число, то через $\underline{i}$ обозначается класс вычетов по модулю p, содержащий i. Для элементов x, y группы G запись $x \overset{G}{\sim} y$ означает, что элементы x и y сопряжены в G. Употребляемые в работе обозначения и термины из теории характеров стандартны и могут быть найдены в [4]. В частности, через $\mathrm{Irr}(G)$ обозначается множество всех неприводимых комплексных характеров конечной группы G. Отметим также, во избежание путаницы, что, хотя речь будет идти о поле комплексных чисел, символ i в статье всегда будет обозначать некоторое целое число и никогда не будет использоваться нами в значении мнимой единицы.

Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть X — подгруппа конечной группы G, и p — простое число. Пусть группа G содержит элемент t порядка p и нормальную подгруппу $H = X_{\underline{0}} \times X_{\underline{1}} \times \cdots \times X_{\underline{p-1}}$ такие, что $G = \langle H, t\rangle$, $X_{\underline{0}} = X$ и $X_{\underline{i}} = X^{t^i}$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Тогда для каждого элемента $g \in G$ однозначно определены элементы $x_{\underline{0}}, x_{\underline{1}}, \ldots, x_{\underline{p-1}} \in X$ и класс вычетов $\underline{i}$ по модулю p, такие, что $g = t^i x_{\underline{0}} x_{\underline{1}}^t \ldots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}$. Пусть также $x_{\underline{0}}, x_{\underline{1}}, \ldots, x_{\underline{p-1}}, y_{\underline{0}}, y_{\underline{1}}, \ldots, y_{\underline{p-1}}$ — некоторые элементы группы X. Тогда справедливы утверждения:*

(1) $x_{\underline{0}} x_{\underline{1}}^t \ldots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}} \overset{G}{\sim} y_{\underline{0}} y_{\underline{1}}^t \ldots y_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}$ *тогда и только тогда, когда для некоторого целого i имеют место соотношения $x_{\underline{0}} \overset{X}{\sim} y_{\underline{i}}, x_{\underline{1}} \overset{X}{\sim} y_{\underline{1+i}}, \ldots, x_{\underline{p-1}} \overset{X}{\sim} y_{\underline{p-1+i}}$;*

(2) $t^i x_{\underline{0}} x_{\underline{1}}^t \ldots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}} \overset{G}{\sim} t^j y_{\underline{0}} y_{\underline{1}}^t \ldots y_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}$ *при целых $i, j \not\equiv 0 \pmod p$ тогда и только тогда, когда $i \equiv j \pmod p$ и $x_{\underline{0}} x_{\underline{i}} \ldots x_{\underline{(p-1)i}} \overset{X}{\sim} y_{\underline{0}} y_{\underline{i}} \ldots y_{\underline{(p-1)i}}$;*

(3) *если k — число классов сопряженности группы X, то число классов сопряженности группы G равно $\dfrac{k^p - k}{p} + pk$;*

(4) *для любого упорядоченного набора из p характеров $\chi_{i_1}, \chi_{i_2}, \ldots, \chi_{i_p} \in \mathrm{Irr}(X)$, не все из которых совпадают друг с другом, существует характер $(\chi_{i_1}\chi_{i_2}\ldots\chi_{i_p})^G \in \mathrm{Irr}(G)$ такой, что*

$$(\chi_{i_1}\chi_{i_2}\ldots\chi_{i_p})^G(t^i x_{\underline{0}} x_{\underline{1}}^t \ldots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{p-1} \chi_{i_1}(x_{\underline{j}})\chi_{i_2}(x_{\underline{1+j}}) \ldots \chi_{i_p}(x_{\underline{p-1+j}}), & i \equiv 0 \pmod p, \\ 0, & i \not\equiv 0 \pmod p; \end{cases}$$

(5) *различным наборам из p неприводимых характеров группы X отвечает один и тот же характер, определенный в (4), тогда и только тогда, когда эти наборы получаются друг из друга циклической перестановкой элементов;*

(6) *для любого характера $\chi \in \mathrm{Irr}(X)$ существуют p однозначно определенных попарно различных неприводимых характеров $\hat{\chi}^j$ группы G, $j = 0, 1, \ldots, p-1$, таких, что*

$$\hat{\chi}^j(t^i x_{\underline{0}} x_{\underline{1}}^t \ldots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}) = \begin{cases} \chi(x_{\underline{0}})\chi(x_{\underline{1}}) \ldots \chi(x_{\underline{p-1}}), & i \equiv 0 \pmod p, \\ \zeta^{ij}\chi(x_{\underline{0}} x_{\underline{i}} \ldots x_{\underline{(p-1)i}}), & i \not\equiv 0 \pmod p, \end{cases}$$

где ζ *— некоторый фиксированный примитивный комплексный корень степени* p *из* 1;

(7) *характерами, определенными в* (4) *и* (6), *исчерпываются все неприводимые комплексные характеры группы* G.

Утверждения (1)–(3) теоремы, по-видимому, являются известными и приводятся здесь для полноты изложения.

При $p = 2$ примитивный комплексный корень из 1 равен -1. С учетом строения силовских 2-подгрупп симметрических групп, из теоремы по индукции вытекает следующее утверждение, дающее ответ на вопрос 15.25 из [5].

Следствие. *Значения комплекных характеров силовских* 2*-подгрупп симметрических групп являются рациональными числами.*

Отметим, что другое решение проблемы 15.25 получено С.Г.Колесниковым.

1. Предварительные утверждения

Лемма 1. *Пусть* H *— нормальная подгруппа простого индекса* p *конечной группы* G. *Пусть* $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$. *Тогда справедливо одно из следующих утверждений.*

(1.1) *Характер* ψ *является* G*-инвариантным, и* $\psi = \chi_H$ *для некоторого* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. *Если* $\lambda \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$ *— линейный характер и* $\ker\lambda = H$, *то характеры* $\chi, \lambda\chi, \ldots, \lambda^{p-1}\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ *попарно различны, и ими исчерпывается множество характеров из* $\mathrm{Irr}(G)$, *ограничение которых на* H *совпадает с* ψ.

(1.2) *Существует ровно* p *попарно различных характеров* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p \in \mathrm{Irr}(H)$, *сопряженных в* G *с* ψ. *Кроме того,* $\psi^G \in \mathrm{Irr}(G)$ *и*

$$\psi^G = \begin{cases} \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_p & \text{на элементах из } H, \\ 0 & \text{на элементах из } G \setminus H. \end{cases}$$

Обратно, пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. *Тогда справедливо одно из следующих утверждений.*

(2.1) *Характер* χ *принимает отличное от нуля значение на некотором элементе из* $G \setminus H$ *и* $\psi = \chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$. *Для характера* ψ *справедливо утверждение* (1.1).

(2.2) *Характер* χ *исчезает на* $G \setminus H$ *и* $\chi = \psi^G$ *для некоторого* $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$ *такого, что справедливо утверждение* (1.2).

Доказательство. Поскольку группа инерции любого характера из $\mathrm{Irr}(H)$ совпадает с G или с H, утверждение леммы вытекает из [4, теорема 6.11, теорема 6.17, следствие 6.19, следствие 6.20] и из определения индуцированного характера.

Лемма 2. *Неприводимые комплексные характеры группы* $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ *— это, в точности, отображения вида* $x_1x_2\ldots x_n \mapsto \chi_1(x_1)\chi_2(x_2)\ldots\chi_n(x_n)$, *где* $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *а каждая из функций* χ_i *пробегает* $\mathrm{Irr}(X_i)$.

Доказательство. См., например, [4, теорема 4.21].

2. Классы сопряженности в группе $X \wr \mathbb{Z}_p$

Далее до конца статьи считается, что группы G, X, H и элемент t те же, что и в условии теоремы.

Лемма 3. *Пусть* $x_{\underline{0}}, x_{\underline{1}}, \ldots, x_{\underline{p-1}}, y_{\underline{0}}, y_{\underline{1}}, \ldots, y_{\underline{p-1}} \in X$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $x_{\underline{0}} x_{\underline{1}}^t, \ldots, x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}} \overset{G}{\sim} y_{\underline{0}} y_{\underline{1}}^t, \ldots, y_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}$;

(2) *существует* $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, *для которого* $x_{\underline{0}} \overset{X}{\sim} y_{\underline{i}}, x_{\underline{1}} \overset{X}{\sim} y_{\underline{1+i}}, \ldots, x_{\underline{p-1}} \overset{X}{\sim} y_{\underline{p-1+i}}$.

Доказательство. Пусть $x = x_{\underline{0}} x_{\underline{1}}^t \ldots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}, y = y_{\underline{0}} y_{\underline{1}}^t \ldots y_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}$. Пусть верно (2), и элементы $u_{\underline{0}}, u_{\underline{1}}, \ldots, u_{\underline{p-1}} \in X$ таковы, что для каждого $j = 0, 1, \ldots, p-1$ имеет место равенство $x_{\underline{j}}^{u_j} = y_{\underline{j+i}}$. Пусть также $g = u_{\underline{0}} u_{\underline{1}}^t \ldots u_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}} t^i$. Имеем:

$$x^g = x_{\underline{0}}^{u_{\underline{0}} t^i} x_{\underline{1}}^{t u_{\underline{1}}^t t^i} \ldots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1} u_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}} t^i} = y_{\underline{i}}^{t^i} y_{\underline{1+i}}^{t^{1+i}} \ldots y_{\underline{p-1+i}}^{t^{p-1+i}} = y,$$

т.е. $x \overset{G}{\sim} y$, и верно (1).

Обратно, пусть $x^g = y$, где $g = u_{\underline{0}} u_{\underline{1}}^t \ldots u_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}} t^i$, и $u_{\underline{0}}, u_{\underline{1}}, \ldots, u_{\underline{p-1}} \in X$. Тогда

$$x_{\underline{0}}^{u_{\underline{0}} t^i} x_{\underline{1}}^{t u_{\underline{1}}^t t^i} \ldots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1} u_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}} t^i} = x^g = y = y_{\underline{i}}^{t^i} y_{\underline{1+i}}^{t^{1+i}} \ldots y_{\underline{p-1+i}}^{t^{p-1+i}}.$$

Приравнивая для каждого $j = 0, 1, \ldots, p-1$ компоненты обеих частей этого равенства, лежащие в группе $X_j^{t^{i+j}}$, получим $x_{\underline{j}}^{u_j} = y_{\underline{j+i}}$, что означает справедливость (2). Лемма доказана.

Из леммы 3 непосредственно вытекает

Лемма 4. *Пусть* $x = x_{\underline{0}} x_{\underline{1}}^t \ldots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}$, *где* $x_{\underline{i}} \in X$. *Класс сопряженности* x^H *является* G*-инвариантным тогда и только тогда, когда элементы* $x_{\underline{0}}, x_{\underline{1}}, \ldots, x_{\underline{p-1}}$ *сопряжены в* X.

Лемма 5. *Пусть элементы* a *и* b *группы* G *лежат в одном смежном классе* G *по* H, *отличном от* H, *и* $a^p = b^p$. *Тогда элементы* a *и* b *сопряжены в* G.

Доказательство. Поскольку a и b лежат в одном смежном классе G по H, имеет место равенство $b = a u_0 u_1 \ldots u_{p-1}$, где $u_i \in Y_i = X^{a^i}$. Заметим, что элементы $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ попарно перестановочны. Поэтому из условия леммы вытекает справедливость равенства

$$a^p = b^p = a^p \underbrace{(u_0^{a^{p-1}} u_1^{a^{p-2}} \ldots u_{p-1})}_{\text{элемент } Y_{p-1}} \underbrace{(u_1^{a^{p-1}} u_2^{a^{p-2}} \ldots u_0)}_{\text{элемент } Y_0} \ldots \underbrace{(u_{p-1}^{a^{p-1}} u_0^{a^{p-2}} \ldots u_{p-2})}_{\text{элемент } Y_{p-2}}.$$

Отсюда $u_0^{a^{p-1}} u_1^{a^{p-2}} \ldots u_{p-1} = 1$. Пусть

$$c = (u_0^{-1} \ldots u_{p-3}^{-1} u_{p-2}^{-1})(u_0^{-1} \ldots u_{p-3}^{-1})^a \ldots (u_0^{-1})^{a^{p-2}}.$$

Непосредственная проверка с учетом перестановочности элементов $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ показывает, что $b^c = a u_0^{a^{p-1}} u_1^{a^{p-2}} \ldots u_{p-1} = a$, что и требовалось.

Лемма 6. *Пусть* $x_{\underline{0}}, x_{\underline{1}}, \ldots, x_{\underline{p-1}}, y_{\underline{0}}, y_{\underline{1}}, \ldots, y_{\underline{p-1}} \in X$, $a = t^i x_{\underline{0}} x_{\underline{1}}^t, \ldots, x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}$, $b = t^i y_{\underline{0}} y_{\underline{1}}^t, \ldots, y_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $a \overset{G}{\sim} b$;

(2) $a^p \overset{G}{\sim} b^p$;

(3) $a^p \overset{H}{\sim} b^p$;

(4) $x_{\underline{0}}x_{\underline{i}}\dots x_{\underline{(p-1)i}} \overset{X}{\sim} y_{\underline{0}}y_{\underline{i}}\dots y_{\underline{(p-1)i}}$.

Доказательство. Утверждения (1) и (2) равносильны в силу леммы 5. Непосредственное вычисление компонент элементов $a^p, b^p \in H$ показывает, что они лежат в G-инвариантных классах сопряженности группы H в силу леммы 4. Поэтому увреждения (2) и (3) эквивалентны. Компоненты элементов a^p и b^p, лежащие в подгруппе $X^{t^{i(p-1)}}$, равны $x_{\underline{0}}x_{\underline{i}}\dots x_{\underline{(p-1)i}}$ и $y_{\underline{0}}y_{\underline{i}}\dots y_{\underline{(p-1)i}}$ соответственно. Поэтому, с учетом леммы 3 и G-инвариантности классов $(a^p)^G$ и $(b^p)^G$, получаем равносильность утверждений (3) и (4).

3. Неприводимые характеры группы $X \wr \mathbb{Z}_p$

Лемма 7. *Элементы множества* $\mathrm{Irr}(H)$ *— это, в точности, отображения вида*

$$\chi_{\underline{0}}\chi_{\underline{1}}\dots\chi_{\underline{p-1}} : x_{\underline{0}}x_{\underline{1}}^t,\dots,x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}} \mapsto \chi_{\underline{0}}(x_{\underline{0}})\chi_{\underline{1}}(x_{\underline{1}})\dots\chi_{\underline{p-1}}(x_{\underline{p-1}}),$$

где $(\chi_{\underline{0}},\chi_{\underline{1}},\dots,\chi_{\underline{p-1}})$ *пробегает по всем упорядоченным наборам из* p *неприводимых характеров группы* X*. Характер* $\chi_{\underline{0}}\chi_{\underline{1}}\dots\chi_{\underline{p-1}}$ *является* G*-инвариантным тогда и только тогда, когда* $\chi_{\underline{0}} = \chi_{\underline{1}} = \dots = \chi_{\underline{p-1}}$.

Доказательство. Следует из леммы 2.

Лемма 8. *Пусть* $\chi \in \mathrm{Irr}(X)$*,* $\mathfrak{X}$ *— матричное представление с характером* χ *группы* X*, и* $V = \mathbb{C}^n$ *— соответствующий* $\mathbb{C}X$*-модуль. Пусть* ζ *— примитивный комплексный корень степени* p *из* 1*. Пусть* $\hat{V} = \underbrace{V\otimes V\otimes\dots\otimes V}_{p\ \text{раз}}$*. Для каждого* $j = 0,1,\dots,p-1$ *определим отображение* $\hat{\mathfrak{X}}^j : G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\hat{V})$ *следующим образом. Если* $x_{\underline{0}},x_{\underline{1}},\dots,x_{\underline{p-1}} \in X$ *и* $v_{\underline{0}},v_{\underline{1}},\dots,v_{\underline{p-1}} \in V$*, то положим*

$$(v_{\underline{0}}\otimes v_{\underline{1}}\otimes\dots\otimes v_{\underline{p-1}})\hat{\mathfrak{X}}^j(t^i x_{\underline{0}}x_{\underline{1}}^t\dots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}) =$$

$$= \zeta^{ij}(v_{\underline{-i}}\mathfrak{X}(x_{\underline{0}}))\otimes(v_{\underline{1-i}}\mathfrak{X}(x_{\underline{1}}))\otimes\dots\otimes(v_{\underline{p-1-i}}\mathfrak{X}(x_{\underline{p-1}}))$$

и продолжим $\hat{\mathfrak{X}}^j(t^i x_{\underline{0}}x_{\underline{1}}^t\dots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}})$ *на* $\hat{V}$ *по линейности. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\hat{\mathfrak{X}}^j$ *— неприводимое представление группы* G*;*

(2) $\hat{\mathfrak{X}}^j_H = \underbrace{\mathfrak{X}\otimes\mathfrak{X}\otimes\dots\otimes\mathfrak{X}}_{p\ \text{раз}}$;

(3) *Если* $\hat{\chi}^j$ *— характер этого представления, то*

$$\hat{\chi}^j(t^i x_{\underline{0}}x_{\underline{1}}^t\dots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}) = \begin{cases} \chi(x_{\underline{0}})\chi(x_{\underline{1}})\dots\chi(x_{\underline{p-1}}) & \text{при } i \equiv 0 \pmod p, \\ \zeta^{ij}\chi(x_{\underline{0}}x_{\underline{i}}\dots x_{\underline{(p-1)i}}) & \text{при } i \not\equiv 0 \pmod p; \end{cases}$$

(4) *Характеры* $\hat{\chi}^j$*,* $j = 0,1,\dots,p-1$ *попарно различны.*

Доказательство. Тот факт, что $\hat{\mathfrak{X}}^j$ является представлением, проверяется непосредственно. Утверждение (2) очевидно. Кроме того, поскольку представление $\hat{\mathfrak{X}}^j_H$ неприводимо, $\hat{\mathfrak{X}}^j$ тоже неприводимо, поэтому утверждение (1) справедливо. Из (2) вытекает также справедливость той части утверждения (3), в которой говорится о значениях характера $\hat{\chi}^j$ на элементах из H. Для завершения доказательства леммы достаточно вычислить значения $\hat{\chi}^j$ на $G \setminus H$, поскольку утверждение (4) вытекает из (3).

Пусть $i \not\equiv 0 \pmod p$. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_n$ — база пространства V, согласованная с представлением $\mathfrak{X}$. Через $\mathfrak{X}(g)_{kl}$ будем обозначать элемент матрицы $\mathfrak{X}(g)$, стоящий в k-й строке и l-м столбце. Тогда набор векторов вида $v_{k_{\underline{0}}} \otimes v_{k_{\underline{1}}} \otimes \dots \otimes v_{k_{\underline{p-1}}}$, где $k_{\underline{0}}, k_{\underline{1}}, \dots, k_{\underline{p-1}}$ пробегают всевозможные значения от 1 до n, образует базу $\hat{V}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&(v_{k_{\underline{0}}} \otimes v_{k_{\underline{1}}} \otimes \dots \otimes v_{k_{\underline{p-1}}})\hat{\mathfrak{X}}^j(t^i x_{\underline{0}} x_{\underline{1}}^t \dots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}) = \\
&= \zeta^{ij}(v_{k_{\underline{-i}}}\mathfrak{X}(x_{\underline{0}})) \otimes (v_{k_{\underline{1-i}}}\mathfrak{X}(x_{\underline{1-i}})) \otimes \dots \otimes (v_{k_{\underline{p-1-i}}}\mathfrak{X}(x_{\underline{p-1}})) = \\
&= \zeta^{ij}\left(\sum_{l_{\underline{0}}=1}^{n} \mathfrak{X}(x_{\underline{0}})_{k_{\underline{-i}} l_{\underline{0}}} v_{l_{\underline{0}}}\right) \otimes \left(\sum_{l_{\underline{1}}=1}^{n} \mathfrak{X}(x_{\underline{1}})_{k_{\underline{0}} l_{\underline{1}}} v_{l_{\underline{1}}}\right) \otimes \dots \\
&\qquad \dots \otimes \left(\sum_{l_{\underline{p-1}}=1}^{n} \mathfrak{X}(x_{\underline{p-1}})_{k_{\underline{p-1-i}} l_{\underline{p-1}}} v_{l_{\underline{p-1}}}\right) \\
&= \zeta^{ij} \sum_{l_{\underline{0}}=1}^{n} \sum_{l_{\underline{1}}=1}^{n} \dots \sum_{l_{\underline{p-1}}=1}^{n} \mathfrak{X}(x_{\underline{0}})_{k_{\underline{-i}} l_{\underline{0}}} \mathfrak{X}(x_{\underline{1}})_{k_{\underline{1-i}} l_{\underline{1}}} \dots \\
&\qquad \dots \mathfrak{X}(x_{\underline{p-1}})_{k_{\underline{p-1-i}} l_{\underline{p-1}}} v_{l_{\underline{0}}} \otimes v_{l_{\underline{1}}} \otimes \dots \otimes v_{l_{\underline{p-1}}}.
\end{aligned}
$$

Коэффициент при $v_{k_{\underline{0}}} \otimes v_{k_{\underline{1}}} \otimes \dots \otimes v_{k_{\underline{p-1}}}$ равен

$$
\begin{aligned}
&\zeta^{ij}\mathfrak{X}(x_{\underline{0}})_{k_{\underline{-i}} k_{\underline{0}}} \mathfrak{X}(x_{\underline{1}})_{k_{\underline{1-i}} k_{\underline{1}}} \dots \mathfrak{X}(x_{\underline{p-1}})_{k_{\underline{p-1-i}} k_{\underline{p-1}}} = \\
&\qquad = \zeta^{ij}\mathfrak{X}(x_{\underline{0}})_{k_{\underline{i(p-1)}} k_{\underline{0}}} \mathfrak{X}(x_{\underline{i}})_{k_{\underline{0}} k_{\underline{i}}} \dots \mathfrak{X}(x_{\underline{i(p-1)}})_{k_{\underline{i(p-2)}} k_{\underline{i(p-1)}}}.
\end{aligned}
$$

Поэтому имеет место равенство:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\chi}^j(t^i x_{\underline{0}} x_{\underline{1}}^t \dots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}) = \\
&\quad = \sum_{k_{\underline{0}}=1}^{n} \sum_{k_{\underline{1}}=1}^{n} \dots \sum_{k_{\underline{p-1}}=1}^{n} \zeta^{ij}\mathfrak{X}(x_{\underline{0}})_{k_{\underline{i(p-1)}} k_{\underline{0}}} \mathfrak{X}(x_{\underline{i}})_{k_{\underline{0}} k_{\underline{i}}} \dots \mathfrak{X}(x_{\underline{i(p-1)}})_{k_{\underline{i(p-2)}} k_{\underline{i(p-1)}}}.
\end{aligned}
$$

С другой стороны, $\mathfrak{X}(x_{\underline{0}} x_{\underline{i}} \dots x_{\underline{i(p-1)}}) = \mathfrak{X}(x_{\underline{0}})\mathfrak{X}(x_{\underline{i}}) \dots \mathfrak{X}(x_{\underline{(p-1)i}})$. Элемент, стоящий в s-й строке и t-м столбце этой матрицы равен

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k_{\underline{0}}=1}^{n} \mathfrak{X}(x_{\underline{0}})_{s k_{\underline{0}}} \sum_{k_{\underline{i}}=1}^{n} \mathfrak{X}(x_{\underline{i}})_{k_{\underline{0}} k_{\underline{i}}} \dots \sum_{k_{\underline{i(p-2)}}=1}^{n} \mathfrak{X}(x_{\underline{i(p-2)}})_{k_{\underline{i(p-3)}} k_{\underline{i(p-2)}}} \mathfrak{X}(x_{\underline{i(p-1)}})_{k_{\underline{i(p-2)}} t} = \\
&\qquad = \sum_{k_{\underline{0}}=1}^{n} \sum_{k_{\underline{i}}=1}^{n} \dots \sum_{k_{\underline{i(p-2)}}=1}^{n} \mathfrak{X}(x_{\underline{0}})_{s k_{\underline{0}}} \mathfrak{X}(x_{\underline{i}})_{k_{\underline{0}} k_{\underline{i}}} \dots \\
&\qquad\qquad \dots \mathfrak{X}(x_{\underline{i(p-2)}})_{k_{\underline{i(p-3)}} k_{\underline{i(p-2)}}} \mathfrak{X}(x_{\underline{i(p-1)}})_{k_{\underline{i(p-2)}} t}.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем

$$
\chi(x_{\underline{0}} x_{\underline{i}} \dots x_{\underline{(p-1)i}}) = \mathrm{tr}\mathfrak{X}(x_{\underline{0}} x_{\underline{i}} \dots x_{\underline{(p-1)i}}) = \sum_{s=1}^{n} \mathfrak{X}(x_{\underline{0}} x_{\underline{i}} \dots x_{\underline{i(p-1)}})_{ss} =
$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{k_{\underline{0}}=1}^{n} \sum_{k_{\underline{i}}=1}^{n} \cdots \sum_{k_{\underline{i(p-2)}}=1}^{n} \mathfrak{X}(x_{\underline{0}})_{sk_{\underline{0}}} \mathfrak{X}(x_{\underline{i}})_{k_{\underline{0}}k_{\underline{i}}} \dots$$
$$\dots \mathfrak{X}(x_{\underline{i(p-2)}})_{k_{\underline{i(p-3)}}k_{\underline{i(p-2)}}} \mathfrak{X}(x_{\underline{i(p-1)}})_{k_{\underline{i(p-2)}}s}.$$

Заменив s на $k_{\underline{i(p-1)}}$ и поменяв местами знаки суммирования, получим

$$\chi(x_{\underline{0}}x_{\underline{i}} \dots x_{\underline{(p-1)i}}) =$$
$$= \sum_{k_{\underline{0}}=1}^{n} \sum_{k_{\underline{1}}=1}^{n} \cdots \sum_{k_{\underline{p-1}}=1}^{n} \mathfrak{X}(x_{\underline{0}})_{k_{\underline{i(p-1)}}k_{\underline{0}}} \mathfrak{X}(x_{\underline{i}})_{k_{\underline{0}}k_{\underline{i}}} \dots \mathfrak{X}(x_{\underline{i(p-1)}})_{k_{\underline{i(p-2)}}k_{\underline{i(p-1)}}},$$

что означает
$$\hat{\chi}^j(t^i x_{\underline{0}} x_{\underline{1}}^t \dots x_{\underline{p-1}}^{t^{p-1}}) = \zeta^{ij} \chi(x_{\underline{0}}x_{\underline{i}} \dots x_{\underline{(p-1)i}}).$$

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы

Справедливость утверждений (1) и (2) теоремы вытекает, соответственно, из лемм 3 и 6 и того факта, что если два элемента сопряжены в группе G, то в факторгруппе G/H сопряжены их образы. Утверждение (3) следует из (1), (2) и леммы 4. Утверждение (4) вытекает из лемм 1 и 7. Справедливость утверждения (5) следует из определения характеров $(\chi_{i_1}\chi_{i_2}\dots\chi_{i_p})^G$ в (4) и леммы 7. Утверждение (6) следует из леммы 8. Наконец, справедливость утверждения (7) получается из лемм 1 и 7 или из пунктов (3), (4), (5) и (6).

Список литературы

[1] B. Huppert, *Character theory of finite groups*, de Gruyter, Berlin, NY, 1988.
[2] G. James, A. Kerber, *The representation theory of the symmetric groups*, Encyclopedia of Mathematics, vol. 16, Addison-Wesley, 1981.
[3] М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, *Основы теории групп*, М., Наука, 1977.
[4] I.M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press, NY, 1976.
[5] *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, изд. 15, Новосибирск, 2002.

Данила Олегович Ревин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: revin@math.nsc.ru