S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 1, стр. 117–128 (2004) УДК 519.172.2
MSC 05C15

ПРОДОЛЖЕНИЕ 3-РАСКРАСКИ С 7-ГРАНИ НА ПЛОСКИЙ ГРАФ БЕЗ 3-ЦИКЛОВ

В. А. АКСЕНОВ, О. В. БОРОДИН, А. Н. ГЛЕБОВ

Abstract. We characterize the 3-colourings of a 7-face in a plane graph without 3-cycles that can be extended to a 3-colouring of the whole graph.

1. Введение

В ряде задач о раскраске плоских графов представляют интерес условия продолжаемости раскраски с "малых"подграфов на весь граф. Так, для графов без 3-циклов при раскраске в 3 цвета эти условия были описаны для 5-грани [1], 6-грани [3], пары произвольных вершин [2] и др. В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия продолжаемости правильной 3-раскраски вершин 7-грани на плоский граф без циклов длины 3.

Пусть $G(V, E, F)$ — конечный плоский граф с множеством вершин V, множеством ребер E и множеством граней F. Обозначим через $m = m(G)$, $n = n(G)$ и $f = f(G)$ соответственно число ребер, вершин и граней графа G. Пусть $t(G)$ обозначает число циклов длины 3 в G, и $d(x)$ — степень вершины $x \in V$. Будем называть k-гранью и k-циклом соответственно грань ранга k и простой цикл длины k. Обозначим через $f_k(G)$ число k-граней в плоском графе G.

Пусть C — простой цикл в G. Назовем цикл C *разделяющим*, если во внутренней и внешней компонентах цикла C имеется хотя бы по одной вершине графа G. Обозначим через $Int(C)$ (соответственно $Ext(C)$) подграф в G, порожденный вершинами цикла C и вершинами внутренней (соответственно внешней) компоненты цикла C. Грань P ранга не менее 5 будем называть *отделенной* от грани S, на которой задана 3-раскраска, если в графе G существует

Aksenov V.A., Borodin O.V., Glebov A.N., Continuation of a 3-colouring from a 7-face onto a plane graph without C_3.

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ 03-01-00796, работа второго автора поддержана грантом РФФИ 02-01-00039.

Поступила 18 ноября 2004 г., опубликована 14 декабря 2004 г.

такой 4-цикл Q, что грани P и S лежат в разных компонентах относительно Q. В этом случае 4-цикл Q будем называть *отделяющим* для грани P.

Назовем 3-раскраску вершин 6-грани S *специальной*, если любые две противоположные вершины в S (т. е. вершины, находящиеся в граничном цикле грани S на расстоянии 3) окрашены в один цвет. В [3] был доказан следующий критерий продолжаемости 3-раскраски, заданной на вершинах 6-грани.

Теорема 1. [3] *Пусть G — плоский граф без циклов длины 3. Правильную 3-раскраску, заданную на вершинах 6-грани S, нельзя продолжить на граф G тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий.*

а) в графе G одноцветные вершины из S смежны;

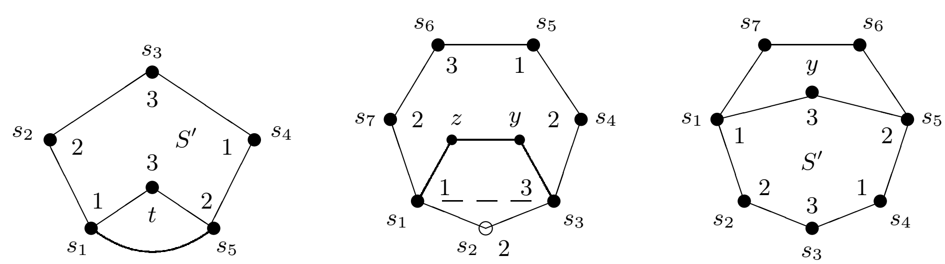
б) раскраска грани S — специальная, и для каждой k-грани $f \neq S$ ($k \geq 5$) в G имеется отделяющий 4-цикл.

Полученный ранее Аксеновым [1] результат о продолжении 3-раскраски с грани ранга не более 5 на плоский граф, можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2 ([1])**.** *Пусть в плоском графе G имеется не более одного 3-цикла. Тогда любая правильная 3-раскраска грани ранга 3 или 4 продолжаема. Правильную 3-раскраску (внешней) 5-грани $S = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ нельзя продолжить на граф G тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий.*

а) в графе G одноцветные вершины из S смежны;

б) в G имеется такой 3-цикл (s_1, s_5, t), что после окрашивания вершины t для 6-цикла $S' = (s_1, s_2, \ldots, s_5, t)$ и графа $Int(S')$ выполняется одно из условий (а), (б) теоремы 1 (рис. 1, а).



а *б* *в*

Рис. 1

Обозначим через $\mathbf{NCC_6}$ множество плоских графов, в которых на выделенной 6-грани задана специальная непродолжаемая 3-раскраска (т. е. выполняется условие (б) теоремы 1). *Операцией подразбиения ребра* $e = xy$ в графе G назовем замену ребра e на новую вершину z и ребра xz, yz. Докажем следующий критерий продолжаемости 3-раскраски, заданной на вершинах 7-грани.

Теорема 3. *Пусть G — плоский граф без 3-циклов. Правильную 3-раскраску, заданную на вершинах 7-грани $S = (s_1, s_2, \ldots, s_7)$, нельзя продолжить на граф G тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий.*

а) в графе G одноцветные вершины из S смежны;

б) в G имеется подграф, полученный из графа, принадлежащего $\mathbf{NCC_6}$*, подразбиением одного из ребер окрашенной* 6*-грани и окрашиванием добавленной вершины (рис. 1, б).*

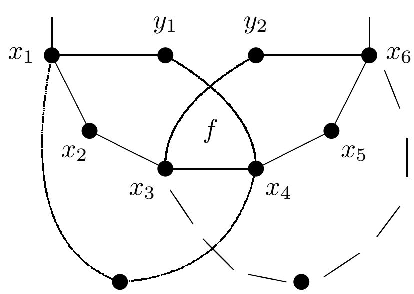
в) *в G имеется такой* 6*-цикл* $S' = (s_1, s_2, \ldots, s_5, y)$*, что* $y \notin S$*, и* $s_1, s_2, \ldots, s_5$ *— последовательные вершины граничного цикла грани* S*. При этом вершины* s_1 *и* s_5 *окрашены в различные цвета, и после окрашивания вершины* y *подграф* $Int(S')$ *принадлежит* $\mathbf{NCC_6}$ *(рис. 1, в).*

Заметим, что если выполнено условие (а) или в графе G есть подграф, описанный в одном из пунктов (б), (в) теоремы 3, то непродолжаемость раскраски грани S следует из теоремы 1. Остается доказать, что если в графе G нет подграфов указанного вида, и одноцветные вершины из S несмежны, то раскраска грани S продолжаема.

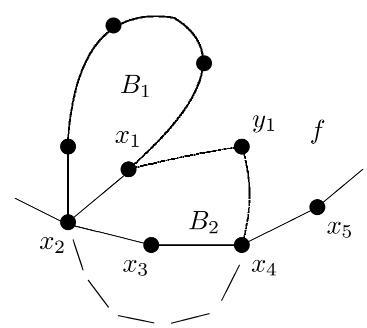
2. Переход к плоскому графу с ограниченным рангом граней

Покажем, что теорему 3 достаточно доказать для двусвязных плоских графов, не имеющих граней ранга больше пяти, отличных от грани S. Для этого выполним преобразования исходного графа, не нарушающие свойства продолжаемости 3-раскраски, но уменьшающие размеры "больших" граней, и не создающие циклов длины 3 и 4 а также хорд в S.

Рассмотрим в графе G грань $f \neq S$ ранга $k \geq 6$, ограниченную циклом $C = x_1 x_2 \ldots x_k$. Из условия $r(S) = 7$ следует, что граф G не является деревом. Следовательно, не все вершины цикла C степени не менее 2 являются точками сочленения в C. Не теряя общности, можно считать, что цикл C либо является простым (рис. 2, а), либо в C имеется такая точка сочленения x_2, что $d(x_3) > 1$ и ребра x_1x_2, x_2x_3 принадлежат различным блокам в G (рис. 2, б). В обоих случаях все вершины x_1, x_2, x_3, x_4 различны.



а



б

Рис. 2

Обозначим через G_1 плоский граф, полученный добавлением к графу G вершины y_1, смежной с вершинами x_1 и x_4. Аналогично пусть G_2 — плоский граф, полученный добавлением к G вершины y_2, смежной с вершинами x_3 и x_6. Из условия $t(G) = 0$ следует, что если в графе G_1 имеется цикл длины 3 или 4, проходящий через вершину y_1, то C — простой цикл, и в графе G_2 нет циклов длины 3 и 4, проходящих через вершину y_2 (рис. 2, а). Таким образом, хотя бы в одном графе G_1 или G_2 не образуются циклы длины 3 и 4. При этом ранг грани f уменьшается на единицу. Остается заметить, что из продолжаемости раскраски грани S на любой из графов G_1 или G_2 следует ее продолжаемость на G и наоборот.

Таким образом, можно считать, что в графе G любая грань $f \neq S$ имеет ранг 4 или 5. Из отсутствия 3-циклов в G следует, что каждая такая грань ограничена простым циклом. Покажем, что граничный цикл C_S грани S также можно считать простым. Действительно, если это неверно, то цикл C_S состоит из 5-цикла и висячего ребра. В этом случае продолжаемость раскраски грани S следует из теоремы 2. Далее будем считать, что каждая грань в G ограничена простым циклом. Тем самым, граф G вершинно двусвязен. При этом $r(S) = 7$ и каждая грань, отличная от грани S, имеет ранг 4 или 5. Обозначим описанный класс плоских графов через $\mathbf{PG_{45}}$.

3. Свойства минимального контрпримера к теореме 3

Пусть G — минимальный по числу вершин контрпример к теореме 3 в классе $\mathbf{PG_{45}}$, и $\varphi_0 : V(S) \to \{1, 2, 3\}$ — непродолжаемая 3-раскраска вершин грани S в G. Не теряя общности, можно считать, что грань S является внешней в G. Докажем следующие свойства графа G.

(1) *В G нет разделяющих циклов длины 4 и 5.*

Пусть C — какой-нибудь такой цикл. Ввиду минимальности графа G, раскраску φ_0 грани S можно продолжить до 3-раскраски ψ вершин графа $Ext(C)$. При этом раскраска ψ индуцирует правильную раскраску ψ_C на вершинах цикла C, который ограничивает внешнюю грань в графе $Int(C)$. Согласно теореме 2 раскраска ψ_C продолжаема на граф $Int(C)$. Следовательно, раскраска φ_0 продолжаема на G. Противоречие.

Из (1) следует, что каждый цикл длины 4 или 5 является границей грани в G. Кроме того, выполняется следующее свойство.

(2) *В G нет хорд грани S.*

Из (1) и (2) следует, что любой 5-цикл в графе G имеет не более трех общих ребер с циклом C_S. Рассмотрим следующие три множества плоских графов:

$\mathbf{G_I}$ — графы, в которых цикл C_S имеет не более одного общего ребра с любым 5-циклом;

$\mathbf{G_{II}}$ — графы, в которых цикл C_S имеет ровно два общих ребра с некоторым 5-циклом;

$\mathbf{G_{III}}$ — графы, в которых цикл C_S имеет три общих ребра с некоторым 5-циклом.

Заметим, что если для графа H выполнено условие (в) теоремы 3, то $H \in \mathbf{G_{III}}$. Если же граф H удовлетворяет условию (б) теоремы 3, то $H \in \mathbf{G_{II}}$ (так как подразбитое ребро в H до подразбиения принадлежит некоторому 4-циклу).

Случай $G \in \mathbf{G_{III}}$. Пусть 5-цикл $C = (s_1, s_7, s_6, s_5, y)$ имеет три общих ребра с циклом C_S (рис. 1, в). В этом случае продолжаемость раскраски грани S определяется продолжаемостью 3-раскраски 6-цикла $S' = (s_1, s_2, \dots, s_5, y)$ на граф $Int(S')$. Поскольку условие (в) теоремы 3 не выполняется, по теореме 1 раскраска цикла S' продолжаема.

Случай $G \in \mathbf{G_{II}}$. Пусть 5-цикл $C = (s_1, s_2, s_3, y, z)$ имеет два общих ребра с циклом C_S (рис. 1. б). Согласно свойству (1) цикл C оганичивает некоторую 5-грань f в G. Рассмтрим следующие два случая.

1) $\varphi_0(s_1) = \varphi_0(s_3)$. Обозначим через G_1 плоский граф, полученный из графа G удалением вершины s_2 и отождествлением вершин s_1, s_3. Так как в G нет разделяющих 5-циклов, то в графе G_1 имеется в точности один 3-цикл (s_1, y, z), который не имеет общих ребер с окрашенной 5-гранью $S_1 = (s_1, s_4, s_5, s_6, s_7)$. По теореме 2 раскраска грани S_1 продолжаема на граф G_1. Следовательно, ракcраска φ_0 продолжаема на граф G.

2) $\varphi_0(s_1) \neq \varphi_0(s_3)$. Рассмотрим граф G_2, полученный из графа G удалением вершины s_2 и добавлением ребра $s_1 s_3$. Так как в G нет разделяющих 4-циклов, то в графе G_2 нет 3-циклов. При этом граф G получается из G_2 подразбиением ребра $s_1 s_3$. Так как условие (б) теоремы 3 не выполняется, то $G_2 \notin \mathbf{NCC_6}$. По теореме 1 раскраску вершин 6-грани $(s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)$ можно продолжить на граф G_2. Следовательно, раскраска грани S продолжаема на граф G.

Анализ рассмотренных случаев показывает, что справедливо следующее

Утверждение 1. *Если $G \in \mathbf{G_{II}}$ и при раскраске вершин s_1, s_4, s_6 или s_3, s_5, s_7 использовано не более двух цветов, то раскраска грани S продолжаема.*

Случай $G \in \mathbf{G_I}$. Продолжим изучение свойств графа G.

(3) *Каждая 4-грань в G имеет не более одного общего ребра с циклом C_S.*

Пусть 4-грань $f = (s_2, s_3, s_4, x)$ имеет два общих ребра с циклом C_S. Из (2) следует, что $x \notin C_S$. Условие $G \in \mathbf{G_I}$ показывает, что вершина x несмежна с вершинами из C_S, отличными от s_2 и s_4. Поэтому раскраска грани S продолжаема на вершину x. Рассмотрим граф $G_1 = G - s_3$. Ясно, что в графе G_1 нет 3-циклов и разделяющих 4-циклов. Если раскраска 7-грани $S_1 = (s_1, s_2, x, s_4, s_5, s_6, s_7)$ продолжаема на граф G_1, то раскраска грани S продолжаема на G.

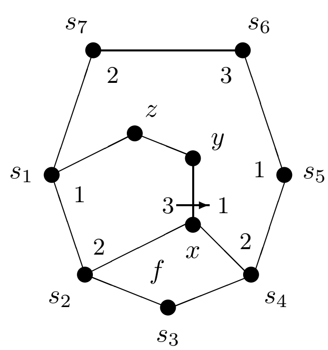


Рис. 3

Пусть раскраска грани S_1 непродолжаема. Из минимальности графа G следует, что граф G_1 удовлетворяет условию (б) теоремы 3. В этом случае имеем

$G_1 \in \mathbf{G_{II}}$. Следовательно, в графе G имеется такой 5-цикл (s_1, s_2, x, y, z), что $y, z \notin C_S$ (рис. 3). Из условия (б) теоремы 3 следует, что цвета вершин s_1, s_4, x попарно различны. Следовательно, цвета вершин s_2 и s_4 совпадают. Перекрасим вершину x в цвет вершины s_1. При этом раскраска грани S_1 станет продолжаемой на граф G_1. Отсюда следует, что раскраска φ_0 продолжаема на граф G.

(4) *Грань S не инцидентна 2-вершинам.*

Это следует из (3) и условия $G \in \mathbf{G_I}$.

(5) *В графе G нет вершин, не принадлежащих C_S и смежных с двумя вершинами из C_S.*

Пусть вершина $x \notin C_S$ смежна с вершинами $s_i, s_j \in C_S$. Из условий $G \in \mathbf{G_I}$, $t(G) = 0$ и свойств (1), (3) следует, что длина каждого цикла, образованного цепью $s_i x s_j$ и (s_i, s_j)-подцепью цикла C_S, не меньше 6. В этом случае длина цикла C_S не меньше 8 — противоречие.

(6) *В графе G нет разделяющих 6-циклов, отделяющих от грани S более одной вершины.*

Пусть $C = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ — такой разделяющий цикл. Рассмотрим плоский граф G_1, полученный добавлением к графу $Ext(C)$ вершины y, смежной с вершинами x_1, x_3, x_5 (рис. 4). Покажем, что $G_1 \in \mathbf{G_I}$. Ясно, что $t(G_1) = 0$ и в графе G_1 нет хорд грани S. Если бы некоторый 5-цикл в G_1 имел два общих ребра с циклом C_S, то в графе G существовала бы цепь вида $x_1 z_1 z_2 x_3$, два ребра которой принадлежали бы C_S. В этом случае 5-цикл $(x_1, x_2, x_3, z_2, z_1)$ в графе G также имел бы два общих ребра с C_S — противоречие.

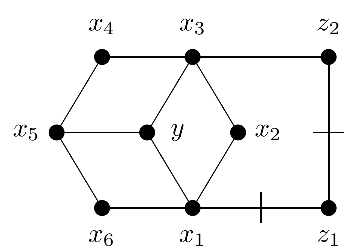


Рис. 4

Так как в графе G_1 меньше вершин, чем в G, то раскраска грани S продолжаема на граф G_1. По теореме 1 полученная 3-раскраска цикла C продолжаема на граф $Int(C)$. Следовательно, раскраска φ_0 продолжаема на G — противоречие.

(7) *Если в графе G вершины $s, s' \in C_S$ соединены цепью P длины 3, то либо $ss' \in E(C_s)$ либо цепь P принадлежит циклу C_S.*

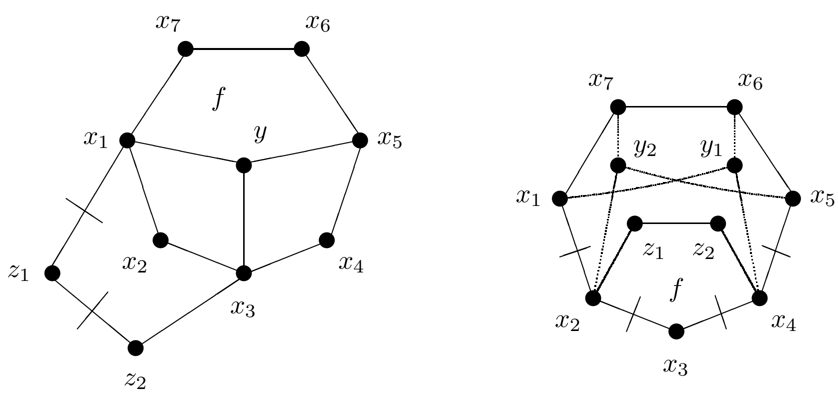
Пусть $P = s x_1 x_2 s'$. Предположим что $ss' \notin E(C_s)$ и цепь P не принадлежит циклу C_S. Из свойств (2), (5) следует, что ни одна из вершин x_1, x_2 не принадлежит C_S. Обозначим через C_1, C_2 простые циклы, образованные в графе G цепью P и двумя (s, s')-подцепями цикла C_S. Так как $ss' \notin E(C_s)$ и $G \in \mathbf{G_I}$, то либо C_1 либо C_2 является 6-циклом. Пусть $C_1 = (s, x_1, x_2, s', z_2, z_1)$ — 6 цикл в G (где $z_1, z_2 \in C_S$). Согласно (4) в графе G степень каждой вершины z_1, z_2

не меньше 3. Из (3) и условия $t(G) = 0$ следует, что в G нет ребер x_1z_1, x_2z_1, $s'z_1$, sz_2, x_1z_2 и x_2z_2. Следовательно, вершины z_1 и z_2 смежны с некоторыми вершинами y_1, y_2, расположенными строго внутри цикла C_1. Из (6) получаем $y_1 = y_2$, что противоречит условию $t(G) = 0$.

(8) *В графе G нет разделяющих 7-циклов, отделяющих от грани S более одной вершины.*

Доказательство. Предположим, что такие разделяющие циклы есть. Выберем разделяющий 7-цикл $C = (x_1, x_2, \ldots, x_7)$, отделяющий от S наибольшее число вершин. Из (1) и условия $t(G) = 0$ следует, что в графе $Int(C)$ отсутствуют хорды цикла C. Следовательно, каждый 5-цикл в $Int(C)$ имеет не более трех общих ребер с циклом C.

Предположим, что $Int(C) \in \mathbf{G_{III}}$. Пусть 5-грань $f = (x_1, y, x_5, x_6, x_7)$ имеет три общих ребра с циклом C. Рассмотрим плоский граф G_1, полученный из графа $Ext(C)$ добавлением вершины y, смежной с вершинами x_1, x_3, x_5 (рис. 5, а). Из определения G_1 следует, что $t(G_1) = 0$ и в графе G_1 нет хорд грани S. Докажем, что $G_1 \in \mathbf{G_I}$. Предположим, что в графе G_1 некоторый 5-цикл, например (x_1, y, x_3, z_2, z_1), имеет два общих ребра с циклом C_S. В этом случае в графе G 5-цикл $(x_1, x_2, x_3, z_2, z_1)$ также имеет два общих ребра с C_S — противоречие. Так как в графе G_1 меньше вершин, чем в G, то раскраска φ_0 грани S продолжаема на G_1. В силу теоремы 1 раскраска 6-цикла $C_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y)$ продолжаема на граф $Int(C_1)$. Следовательно, раскраска φ_0 продолжаема на G.



а *б*

Рис. 5

Пусть $Int(C) \in \mathbf{G_{II}}$. В этом случае некоторая 5-грань $f = (z_1, x_2, x_3, x_4, z_2)$ имеет два общих ребра с циклом C. Рассмотрим графы G_1 и G_2, полученные добавлением к графу $Ext(C)$ вершин y_1 и y_2 соответственно (рис. 5, б). Ясно, что $t(G_1) = t(G_2) = 0$ и в графах G_1, G_2 нет хорд грани S. Если $G_1 \in \mathbf{G_I}$ (или $G_2 \in \mathbf{G_I}$), то раскраска φ_0 продолжаема на граф G_1 (соответственно G_2). В силу утверждения 1 раскраска 7-цикла C продолжаема на граф $Int(C)$. В этом случае раскраска φ_0 продолжаема на G — противоречие.

Предположим, что $G_1 \notin \mathbf{G_I}$ и $G_2 \notin \mathbf{G_I}$. Из максимальности цикла C и условия $G \in \mathbf{G_I}$ следует, что в графе G_1 ребра x_1x_2 и x_2x_3 являются общими для 5-цикла $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1)$ и цикла C_S. Аналогично, рассматривая граф G_2 заключаем, что $x_3x_4, x_4x_5 \in C_S$. В этом случае в графе G 5-грань f имеет два общих ребра с C_S — противоречие.

Наконец, рассмотрим случай $Int(C) \in \mathbf{G_I}$. Обозначим через G_1 плоский граф, полученный из графа $Ext(C)$ добавлением вершины y_1, смежной с вершинами x_1, x_4, x_6. Ясно, что $t(G_1) = 0$ и в графе G_1 нет хорд грани S. Если $G_1 \in \mathbf{G_I}$, то аналогично ранее рассмотренным случаям находим, что раскраска φ_0 продолжаема на граф G. Пусть $G_1 \notin \mathbf{G_I}$. Из максимальности цикла C и условия $G \in \mathbf{G_I}$ следует, что в графе G_1 два ребра 5-цикла $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1)$ должны принадлежать C_S. Пусть $x_1x_2, x_2x_3 \in C_S$. Рассмотрим граф G_2, полученный из $Ext(C)$ добавлением вершины y_2, смежной с вершинами x_2, x_5, x_7. Применяя к графу G_2 те же рассуждения, что и к графу G_1, заключаем, что $x_3x_4 \in C_S$. Аналогично можно доказать, что любое ребро цикла C принадлежит циклу C_S. В этом случае имеем $C = C_S$, что противоречит выбору цикла C. Свойство (8) доказано.

(9) *В графе G нет 4-циклов.*

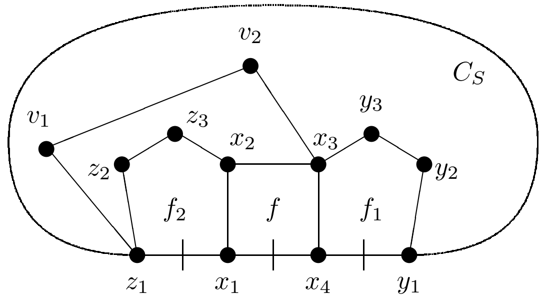
Доказательство. Согласно (1) в G нет разделяющих 4-циклов. Пусть имеется 4-грань $f = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Из свойств $(2), (3), (5)$ следует, что по крайней мере одна вершина x_1, x_3 не принадлежит циклу C_S. Аналогично, по крайней мере одна вершина x_2, x_4 не принадлежит C_S. Обозначим через G_1 плоский граф, полученный отождествлением в графе G вершин x_1, x_3, и через G_2 — плоский граф, полученный отождествлением в G вершин x_2, x_4. Из (1) и условия $t(G) = 0$ следует, что в графах G_1 и G_2 нет петель, кратных ребер и 3-циклов. Свойство (7) показывает, что в графах G_1, G_2 нет хорд грани S. Если $G_1 \in \mathbf{G_I}$ или $G_2 \in \mathbf{G_I}$, то ракраска φ_0 продолаема на граф G_1 (соответственно G_2), а значит и на граф G.

Предположим, что $G_1 \notin \mathbf{G_I}$ и $G_2 \notin \mathbf{G_I}$. Ввиду (1) возможны следующие два случая.

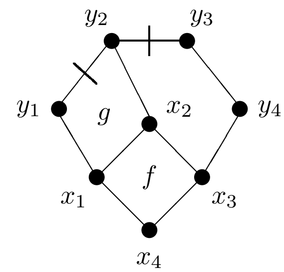
1) В графе G существуют такие 5-грани f_1, f_2, что в графе G_i $(i = 1, 2)$ граничный цикл грани f_i имеет два общих ребра с циклом C_S. Так как $G \in \mathbf{G_I}$, то можно считать, что $f_1 = (x_4, y_1, y_2, y_3, x_3)$, где $x_1x_4, x_4y_1 \in E(C_S)$. Отсюда получаем $f_2 = (x_1, z_1, z_2, z_3, x_2)$, где $x_1z_1 \in E(C_S)$ (рис. 6, а). Если в графе G_1 грань f_2 не отделена 4-циклом от грани S, то ввиду минимальности G раскраска φ_0 продолжаема на граф G_1. В этом случае раскраска φ_0 продолжаема на G.

Пусть в графе G_1 грань f_2 имеет отделяющий 4-цикл. В этом случае в графе G вершины z_1 и x_3 соединены цепью $P = z_1v_1v_2x_3$ длины 3 (рис. 6, а). В силу условия $t(G) = 0$ хотя бы две вершины грани f_2 не принадлежат цепи P. Следовательно, в графе G имеется разделяющий 6-цикл $(x_1, z_1, v_1, v_2, x_3, x_4)$, отделяющий от грани S не менее двух вершин, что противоречит (6).

2) При отождествлении вершин x_1 и x_3 в графе G_1 образуется новый 5-цикл $(x_1, y_1, y_2, y_3, y_4)$, имеющий два общих ребра с циклом C_S. В этом случае в графе G имеется разделяющий 7-цикл $C = (x_1, y_1, y_2, y_3, y_4, x_3, x_4)$. Согласно свойству (8) внутри цикла C нет вершин графа G, отличных от x_2. Без ограничения общности можно считать, что вершина x_2 смежна с y_2 (рис. 6, б). Из (3) и условия $G \in \mathbf{G_I}$ следует, что $y_1y_2, y_2y_3 \in E(C_S)$.



а



б

Рис. 6

Рассмотрим 4-грань $g = (x_1, x_2, y_2, y_1)$. Заметим, что при отождествлении вершин y_1 и x_2 5-грань $(x_2, y_2, y_3, y_4, x_3)$ преобразуется в 5-грань $(y_1, y_2, y_3, y_4, x_3)$, имеющую два общих ребра с циклом C_S. Если аналогичное свойство выполняется при отождествлении вершин x_1 и y_2, то грань g удовлетворяет предположениям для случая 1). Пусть при отождествлении вершин x_1 и y_2 образуется новый 5-цикл, имеющий два общих ребра с C_S. В силу свойства (8) этим 5-циклом может быть только $(x_1, x_4, x_3, y_4, y_3)$. Из (3) и условия $G \in \mathbf{G_I}$ следует, что $x_3x_4, x_3y_4 \in E(C_S)$. Тем самым, в графе G 5-цикл $(x_2, y_2, y_3, y_4, x_3)$ имеет два общих ребра (y_2y_3 и x_3y_4) с циклом C_S — противоречие. Свойство (9) доказано.

(10) *В графе G нет циклов длины 6 и 7, отличных от цикла C_S.*

Ввиду свойств (1) и (9) достаточно доказать, что в G нет разделяющих 6- и 7-циклов. Если в G есть разделяющий 7-цикл, то согласно (8) в G имеется 4-грань, что противоречит (9). Пусть C — разделяющий 6-цикл. Из свойств (6) и (9) следует, что $Int(C)$ состоит из двух 5-граней, имеющих общую 2-вершину y. Пусть x_1, x_2 — вершины, смежные с y. Рассмотрим плоский граф G_1, полученный из графа G удалением вершины y и добавлением ребра x_1x_2. Из доказанных свойств графа G следует, что в G_1 нет кратных ребер, 3-циклов и хорд грани S. Кроме того, в графе G_1 не образуются новые 5-циклы. Следовательно, $G_1 \in \mathbf{G_I}$. Это означает, что раскраска φ_0 продолжаема на граф G_1 и на граф G.

(11) *Степень любой вершины в G не меньше 3.*

Это следует из условия $G \in \mathbf{PG_{45}}$ и свойств (4), (9), (10).

4. Конфигурация Грецша

Назовем *гранью Грецша* (или Г-*гранью*) любую 5-грань в G, инцидентную не менее чем четырем вершинам степени 3.

(12) *В графе G имеется не менее 13 граней Грецша.*

Доказательство. Обозначим через p число 3-вершин в G, и через g_i — число 5-граней, инцидентных в точности i вершинам степени 3. По доказанному в графе G имеются только 5-грани и единственная 7-грань S. Следовательно,

$$2m = 5f + 2. \tag{$*$}$$

Из $(*)$ и формулы Эйлера получаем

$$2n = 2m - 2f + 4 = 3f + 6. \tag{$**$}$$

Из (11) следует, что

$$2m \geq 3p + 4(n - p) = 4n - p.$$

Отсюда и из $(*), (**)$ получаем

$$p \geq 4n - 2m = 6f + 12 - 5f - 2 = f + 10. \tag{$***$}$$

Так как грань S инцидентна не более чем семи 3-вершинам, то

$$3p \leq f + g_2 + 2g_3 + 3g_4 + 4g_5 + 6.$$

Перепишем последнее неравенство в виде

$$f \geq 3p - g_2 - 2g_3 - 3g_4 - 4g_5 - 6$$

и сложим его с очевидными неравенствами

$$f \geq g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + 1,$$

$$f \geq g_3 + g_4 + g_5 + 1.$$

В результате получим

$$3f \geq 3p - g_4 - 2g_5 - 4.$$

Отсюда и из $(***)$ следует, что

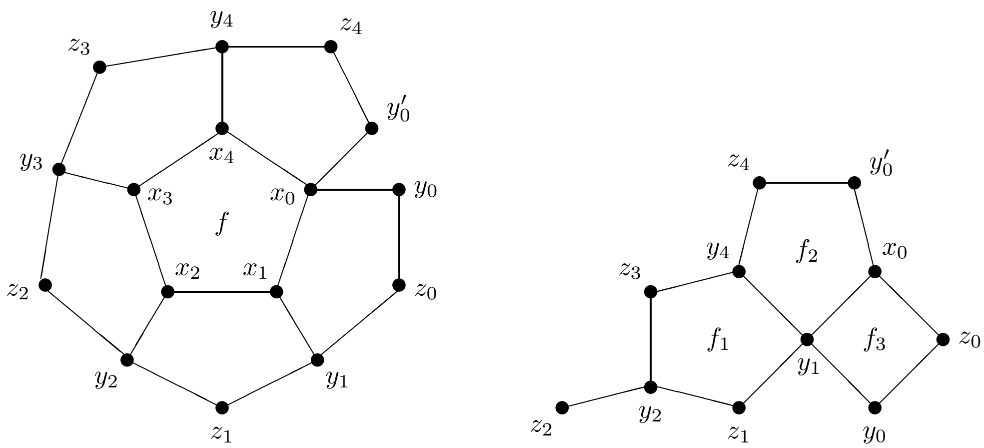
$$2(g_4 + g_5) \geq g_4 + 2g_5 \geq 3p - 3f - 4 \geq 3f + 30 - 3f - 4 = 26.$$

Отсюда получаем $g_4 + g_5 \geq 13$. Свойство (12) доказано.

Выберем в графе G такую Г-грань $f = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, что $d(x_1) = d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = 3$ и граничный цикл грани f не имеет общих ребер с циклом C_S (рис. 7, а). Тогда вершины x_1, x_2, x_3, x_4 не принадлежат C_S. Пусть плоский граф G_1 получен из G удалением вершин x_1, x_2, x_3 и отождествлением вершин y_2, y_3 а также вершин y_1 и x_4. Заметим, что в графе G_1 имеются 5-грани $f_1 = (y_1, z_1, y_2, z_3, y_4)$, $f_2 = (x_0, y_1, y_4, z_4, y_0')$ и 4-грань $f_3 = (x_0, y_0, z_0, y_1)$ (рис. 7, б).

Из свойств $(1), (9), (10)$ следует, что $t(G_1) = 0$ и в графе G_1 нет петель, кратных ребер и разделяющих 4-циклов. Поэтому в графе G_1 ни одна из 5-граней f_1, f_2 не отделена 4-циклом от грани S. Свойство (7) показывает, что в графе G хотя бы одна вершина y_2, y_3 не принадлежит C_S. Следовательно, в графе G_1 вершины из C_S не отождествлены.

Докажем, что в G_1 нет хорд грани S. Предположим, что хорда в S образуется при отождествлении вершин y_2 и y_3. Не теряя общности, можно считать, что $y_2 \in C_S$ и в графе G вершина y_3 смежна с некоторой вершиной $s \in C_S$ (рис. 8). В этом случае имеем $y_3 \notin C_S$. Из (7) следует, что вершины y_2 и s смежны в C_S. Таким образом, в графе G имеется разделяющий 5-цикл (y_2, x_2, x_3, y_3, s), что противоречит (1). Пусть хорда в S образуется при отождествлении вершин y_1 и x_4. Тогда $y_1, y_4 \in C_S$. Заметим, что длина кратчайшей (y_1, y_4)-подцепи цикла C_S не превосходит 3. Объединение этой цепи с цепью $y_1 x_1 x_0 x_4 y_4$ образует в графе G разделяющий цикл длины не более 7, что противоречит свойствам $(1), (10)$.



а *б*

Рис. 7

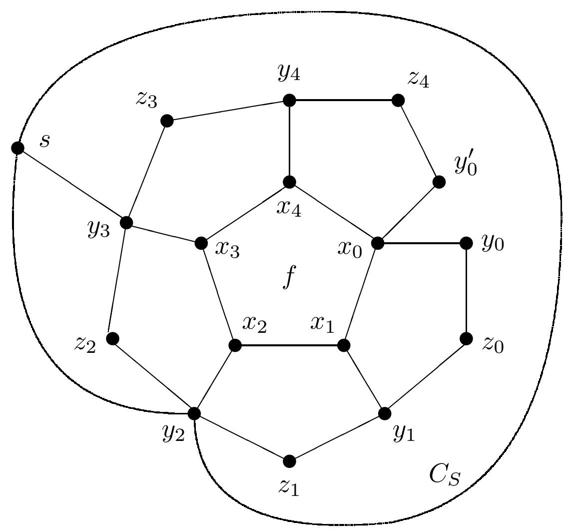


Рис. 8

Покажем, что раскраска φ_0 продолжаема на граф G_1. Действительно, если это неверно, то из минимальности графа G следует, что для графа G_1 выполняется одно из условий (б), (в) теоремы 3. В этом случае имеем $G_1 \notin \mathbf{G_I}$. При этом в графе G_1 через ребро y_1y_4 проходит разделяющий 5-цикл C, имеющий два общих ребра с циклом C_S. Заметим, что хотя бы одна 5-грань f_1 или f_2 находится во внешней компоненте цикла C и не имеет отделяющего 4-цикла (см. рис. 7, б). Отсюда следует, что раскраска φ_0 продолжаема на граф G_1.

Покажем, как из 3-раскраски графа G_1 можно получить 3-раскраску графа G. Рассмотрим полученную раскраску графа $G - \{x_1, x_2, x_3\}$, в которой вершины y_2 и y_3 окрашены цветом α, а вершины y_1, x_4 — цветом β. Если $\alpha = \beta$, то недостающие вершины красим в порядке x_1, x_2, x_3. Если $\alpha \neq \beta$, то вершину x_2 красим в цвет β, а затем окрашиваем вершины x_1 и x_3. В результате получим правильную 3-раскраску графа G, что противоречит сделанным предположениям. Теорема 3 доказана.

Список литературы

[1] В. А. Аксенов, *О продолжении 3-раскраски на плоских графах*, Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, Вып. **26** (1974), 3–19.

[2] В. А. Аксенов, О. В. Бородин, А. Н. Глебов, *О продолжении 3-раскраски с двух вершин в плоском графе без 3-циклов*, Дискрет. анализ и исслед. операций., **9**:1, Сер. 1. (2002), 3–26.

[3] В. А. Аксенов, О. В. Бородин, А. Н. Глебов, *Продолжение 3-раскраски с 6-грани на плоский граф без 3-циклов*, Дискрет. анализ и исслед. операций., **10**:3, Сер. 1. (2003), 3–11.

[4] O. V. Borodin, *A new proof of Grünbaum's 3-color theorem*, Discrete Math., **169**:1-3 (1997), 177–183.

[5] H. Grötzsch, *Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel*, Wiss. Ztschr. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Natur. R., **8**:1 (1959), 109–120.

[6] B. Grünbaum, *Grötzsch's theorem on 3-coloring*, Michigan Math. J., **10**:3 (1963), 303–310.

[7] T. R. Jensen, C. Thomassen, *The color space of a graph*, J. Graph Theory., **34**:3 (2000), 234–245.

Валерий Анатольевич Аксенов
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: akc@belka.sm.nsc.ru

Олег Вениаминович Бородин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: brdnoleg@math.nsc.ru

Алексей Николаевич Глебов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: angle@math.nsc.ru