S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 1, стр. 38–46 (2004) УДК 514.752.4, 517.984
MSC 35Q53, 53A10

ИЕРАРХИЯ УРАВНЕНИЙ ВЕСЕЛОВА–НОВИКОВА И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ МИНИМАЛЬНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ ТОРОВ В $\mathbb{C}P^2$

А. Е. МИРОНОВ

Abstract. We associate a periodic two-dimensional Schrödinger operator to every Lagrangian torus in $\mathbb{C}P^2$ and define the spectral curve of a torus as the Floquet spectrum on this operator on the zero energy level. In this event minimal Lagrangian tori correspond to potential operators. We show that the Novikov–Veselov hierarchy of equations induces integrable deformations of a minimal Lagrangian torus in $\mathbb{C}P^2$ preserving the spectral curve.

1. Введение

В данной статье мы покажем, что иерархия уравнений Веселова–Новикова [1] задает интегрируемые деформации конечнозонных минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$.

Поверхность Σ в $\mathbb{C}P^2$ называется лагранжевой, если ограничение формы Фубини–Штуди на Σ равно нулю. Пусть S^5 — единичная сфера в $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{H}: S^5 \to \mathbb{C}P^2$ — расслоение Хопфа. Будем задавать конформное лагранжево погружение $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}P^2$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ через композицию $r : \Omega \to S^5$ и $\mathcal{H}$.

Имеет место лемма.

Лемма 1. *Компоненты r_j вектор–функции $r \in S^5 \subset \mathbb{C}^3$ удовлетворяют уравнению Шредингера в магнитном поле*

$$Lr_j = \partial_x^2 r_j + \partial_y^2 r_j + i(\beta_x \partial_x r_j + \beta_y \partial_y r_j) + 4e^v r_j = 0,$$

Mironov, A.E., The Novikov–Veselov hierarchy of equations and integrable deformations of minimal Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$.

Работа поддержана РФФИ (грант 03-01-00403), МК-1017.2004.1, НШ-2185.2003.1 и Программой фундаментальных исследований РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

Поступила 26 июля 2004 г., опубликована 16 сентября 2004 г.

где $2e^v(dx^2+dy^2)$ *— индуцированная метрика на поверхности* $\varphi(\Omega)$*, а* $\beta(x,y)$ *— лагранжев угол, определяемый равенством*

$$e^{i\beta} = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3(\sigma),$$

z_1, z_2, z_3 *— координаты в* $\mathbb{C}^3$*,* x, y *— координаты в* Ω*,* σ *— репер образованный векторами* $r, \frac{r_x}{|r_x|}, \frac{r_y}{|r_y|}$.

Лемма 1 позволяет ввести следующее определение.

Лагранжев тор, заданный двояко периодическим конформным отображением

$$\varphi = \mathcal{H} \circ r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2,$$

называется *конечнозонным*, если отвечающий ему оператор Шредингера L с периодическими коэффициентами, является конечнозонным на нулевом уровне энергии, т.е. если блоховские функции (совместные собственные функции L и операторов трансляций — операторов сдвига на периоды) оператора L на нулевом уровне энергии параметризуются римановой поверхностью Γ конечного рода.

При этом риманова поверхность Γ называется *спектром* лагранжева тора, а ее род — *спектральным родом* тора.

Понятие спектра и спектрального рода тора впервые введено Таймановым [2] для произвольных гладких торов в $\mathbb{R}^3$. Аналогом оператора Шредингера здесь служит оператор Дирака.

Так как отображение φ двояко периодическое, то компоненты вектор-функции r являются блоховскими функциями оператора L.

Конечнозонные операторы Шредингера по отношению к одному уровню энергии введены Дубровиным, Кричевером и Новиковым [3], где также указаны данные обратной задачи, по которым восстанавливаются потенциал и магнитное поле и приведены явные формулы.

Минимальные лагранжевы поверхности в $\mathbb{C}P^2$ — это, в точности, те поверхности, у которых лагранжев угол постоянен (см., например, [4]). Следовательно, им отвечают потенциальные операторы Шредингера

$$L = \partial_x^2 + \partial_y^2 + 4e^v.$$

В этом случае лемма 1 является аналогом известного утверждения, что компоненты вектор–функции, задающей конформное минимальное погружение плоской области в трехмерное евклидово пространство, являются гармоническими функциями.

Тор Клиффорда в $\mathbb{C}P^2$ имеет спектральный род 0. Кастро и Урбано [5] и Джойс [6] построили примеры минимальных лагранжевых торов спектральных родов 2 и 4. Отметим, что в случае гладкой спектральной кривой спектральный род конечнозонного минимального лагранжевого тора является четным, поскольку спектральная кривая, отвечающего ему, потенциального оператора Шредингера обладает голоморфной инволюцией с двумя неподвижными точками [1].

Шарипов [7] доказал, что метрика минимального тора в S^5 удовлетворяет уравнению Цицейки. Им также построены конечнозонные решения этого уравнения. На самом деле, как уже отмечалось в [8], конструкция Шарипова пригодна для построения всех минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$. Для этого нужно применить к отображению из $\mathbb{R}^2$ в S^5, построенному Шариповым, отображение Хопфа.

Из работы [7] остается неясность по поводу существования минимальных лагранжевых торов произвольных спектральных родов, поскольку в ней не обсуждалась проблема периодичности построенных отображений. Этот пробел восполняет работа Кэрбери и Макинтоша [9], в которой доказано, что для каждого спектрального рода g существует $(\frac{g}{2}-2)$-мерное семейство минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$.

Методами работы [10] можно показать, что все минимальные гладко погруженные лагранжевы торы являются конечнозонными. Действительно, метрика минимального лагранжева тора удовлетворяет уравнению Цицейки

$$\partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 4e^{-2v} - 4e^v.$$

Михайлов [11] доказал, что уравнение Цицейки интегрируемо (как бесконечномерная гамильтонова система). Отсюда можно показать, что все его гладкие вещественные двояко периодические решения являются конечнозонными. Конечнозонные решения характеризуются тем, что они стационарны относительно некоторого высшего потока [12]. В нашем случае это вытекает из того, что функция $\partial_{t_i} v$, где t_i — высшее время, удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + 8e^{-2v} + 4e^v)\partial_{t_i} v = 0$$

на торе $\mathbb{R}^2/\Lambda$, где Λ — решетка периодов. Так как спектр эллиптического оператора на торе дискретен, то функции $\partial_{t_i} v$ линейно зависимы и существует высшее время, относительно которого v стационарно.

Основной результат работы заключается в следующем. Пусть отображение

$$r : \mathbb{R}^2 \to S^5$$

задает конечнозонный минимальный лагранжев тор $T \subset \mathbb{C}P^2$ спектрального рода $g > 4$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Существует отображение $\widetilde{r}(t), t = (t_1, t_2, \dots), \widetilde{r}(0) = r$, задающее деформации тора T в классе минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$. Отображение $\widetilde{r}$ удовлетворяет уравнениям*

$$L\widetilde{r} = \partial_x^2 \widetilde{r} + \partial_y^2 \widetilde{r} + 4e^{\widetilde{v}} \widetilde{r} = 0,$$

$$\partial_{t_n} \widetilde{r} = A_n \widetilde{r},$$

где A_n — оператор порядка $(2n+1)$ по переменным (x, y). Потенциал $V = 4e^{\widetilde{v}}, \widetilde{v}(0) = v$, деформируется согласно иерархии Веселова–Новикова

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [L, A_n] + B_n L,$$

где B_n — оператор порядка $(2n-1)$ по переменным (x, y). Деформации $\widetilde{r}(t)$ сохраняют спектр тора T и его конформный тип. Поток, отвечающий t_1, сохраняет площадь тора T.

Первое уравнение иерархии Веселова–Новикова имеет вид

$$V_{t_1} = \partial_z^3 V + \partial_{\bar{z}}^3 V + \partial_z(VU) + \partial_{\bar{z}}(\bar{U}V),$$

$$\partial_{\bar{z}} U = 3\partial_z V.$$

Введенные в [13] локальные деформации поверхностей в $\mathbb{R}^3$ под действием модифицированного уравнения Веселого–Новикова, как показано Таймановым [14], имеют глобальный смысл и переводят торы в торы с сохранением функционала Уилмора. В отличии от нашей конструкции, в [13] деформация торов задается деформацией не радиус-вектора, а гауссова отображения. При доказательстве того, что поверхность остается замкнутой под действием таких деформаций существенно используется специфика модифицированного уравнения Веселова–Новикова. В нашем же случае замкнутость поверхностей вытекает из явного вида $\widetilde{r}(t)$ (см. ниже). Отметим также, что утверждение о сохранении площади тора T является аналогом утверждения о сохранении функционала Уилмора при деформации торов в $\mathbb{R}^3$ [14].

Доказательство теоремы 1 основано на лемме 1 и конструкции Шарипова [7].

Автор благодарит И. А. Тайманова за полезные обсуждения.

2. Доказательство теоремы 1

Так как отображение φ лагранжево и конформное, то несложно убедиться (см, [4]), что

$$\langle r, r_x\rangle = \langle r, r_y\rangle = \langle r_x, r_y\rangle = 0,\ |r_x|^2 = |r_y|^2 = 2e^v,$$

где $\langle .,.\rangle$ — эрмитово произведение в $\mathbb{C}^3$. Следовательно, из определения лагранжевого угла β получаем

$$R = \begin{pmatrix} r \\ e^{-i\frac{\beta}{2}}\frac{r_x}{|r_x|} \\ e^{-i\frac{\beta}{2}}\frac{r_y}{|r_x|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^1 & r^2 & r^3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}}r^1_x & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}}r^2_x & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}}r^3_x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}}r^1_y & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}}r^2_y & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}}r^3_y \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(3),$$

где r^1, r^2 и r^3 — компоненты вектора r. Матрица R удовлетворяет уравнениям

$$R_x = AR,\ R_y = BR, \tag{1}$$

где матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}e^{\frac{v}{2}+i\frac{\beta}{2}} & 0 \\ -\sqrt{2}e^{\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}} & if & -\frac{v_y}{2}+i(h+\frac{\beta_y}{2}) \\ 0 & \frac{v_y}{2}+i(h+\frac{\beta_y}{2}) & -if \end{pmatrix} \in \mathrm{su}(3),$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}e^{\frac{v}{2}+i\frac{\beta}{2}} \\ 0 & ih & \frac{v_x}{2}+i(-f+\frac{\beta_x}{2}) \\ -\sqrt{2}e^{\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}} & -\frac{v_x}{2}+i(-f+\frac{\beta_x}{2}) & -ih \end{pmatrix} \in \mathrm{su}(3),$$

$f(x,y)$ и $h(x,y)$ — некоторые функции. Из уравнения нулевой кривизны

$$A_y - B_x + [A,B] = 0$$

вытекает следующая лемма (см. [15]):

Лемма 2. *Имеют место уравнения*

$$2\mathcal{G}_y + 2\mathcal{F}_x = (\beta_{xx} - \beta_{yy})e^v,$$

$$2\mathcal{F}_y - 2\mathcal{G}_x = (\beta_y v_x + \beta_x v_y)e^v,$$

$$\Delta v = 4(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)e^{-2v} - 4e^v - 2(\mathcal{F}\beta_x + \mathcal{G}\beta_y)e^{-v},$$

где $\mathcal{F} = fe^v, \mathcal{G} = he^v$.

Из (1) получаем равенства

$$r_{xx} = \frac{1}{2}(-4e^v r + r_x(2if + v_x + i\beta_x) + r_y(2ih - v_y + i\beta_y)),$$

$$r_{yy} = \frac{1}{2}(-4e^v r + r_x(-2if - v_x + i\beta_x) + r_y(-2ih + v_y + i\beta_y)),$$

из которых вытекает лемма 1.

Далее будем рассматривать минимальные лагранжевы торы. Из леммы 2 вытекает, что $\Delta\mathcal{F} = \Delta\mathcal{G} = 0$. Следовательно, т.к. функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ двояко периодические, то $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — константы и из леммы 2 вытекает уравнение Цицейки.

Рассмотрим следующие уравнения со спектральным параметром λ

$$\partial_z R(\lambda) = A(\lambda)R(\lambda),\ \partial_{\bar z} R(\lambda) = B(\lambda)R(\lambda), \tag{2}$$

где $z = x + iy$,

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & v_z & -\frac{i}{\lambda}e^{-v} \\ -e^v & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -e^v & 0 & 0 \\ 0 & -i\lambda e^{-v} & v_{\bar z} \end{pmatrix},$$

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} r(\lambda) \\ r_z(\lambda) \\ r_{\bar z}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Уравнения (2) при $\lambda = 1$ эквивалентны уравнениям (1) ($\beta = 0$), а уравнение нулевой кривизны для $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ при любом λ эквивалентно уравнению Цицейки. В случае конечнозонных решений уравнений (2) найдется матрица $W(x, y, \lambda)$ рационально зависящая от λ такая, что

$$W_z = [A(\lambda), W],\ W_{\bar z} = [B(\lambda), W],$$

(см. [16]). Коэффициенты рациональной по λ и μ функции

$$Q(\lambda, \mu) = \det(W - \mu E),$$

где E — единичная матрица, не зависят от x и y. Спектр минимального лагранжевого тора задается в (λ, μ)–плоскости уравнением $Q(\lambda, \mu) = 0$. Отсюда следует, что спектр является трехлистным накрытием λ-плоскости, т.е. является тригональной кривой.

Для построения минимальных конечнозонных лагранжевых торов нам необходимо напомнить следующую конструкцию. Конечнозонные вещественные потенциальные операторы Шредингера строятся по следующим спектральным данным [1]: Γ — неособая риманова поверхность четного рода $g = 2g_0$, пара отмеченных точек $\infty_1, \infty_2 \in \Gamma$, неспециальный дивизор $D = P_1 + \dots + P_g$, локальные параметры k_1^{-1} и k_2^{-1} около точек ∞_1 и ∞_2. Поверхность Γ должна обладать голоморфной инволюцией

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma,\ \sigma^2 = 1,$$

с двумя неподвижными точками ∞_1 и ∞_2 такой, что

$$\sigma(k_s^{-1}) = -k_s^{-1},\ D + \sigma D = \infty_1 + \infty_2 + K,$$

где $s = 1, 2,$ K — канонический класс на Γ. Для того, чтобы оператор L был вещественным, поверхность Γ должна обладать перестановочной с σ антиголоморфной инволюцией

$$\tau : \Gamma \to \Gamma,\ \tau^2 = 1,$$

такой, что

$$D = \tau(D),\ \tau(\infty_1) = \infty_2,\ k_1(\tau(P)) = \overline{k_2(P)}.$$

Существует единственная функция $\psi(P, x, y)$, называемая функцией Бейкера–Ахиезера, которая мероморфна на $\Gamma \backslash \{\infty_1, \infty_2\}$, имеет простые полюса на дивизоре D и обладает асимптотиками

$$\psi(P, x, y) = \exp(k_1 z)\left(1 + \frac{\xi(x, y)}{k_1} + \dots\right),\ P \to \infty_1,$$

$$\psi(P, x, y) = \exp(k_2 \bar{z})\left(1 + \frac{\eta(x, y)}{k_2} + \dots\right),\ P \to \infty_2.$$

Функция ψ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi + 4e^v \psi = 0,$$

где $e^v = -\xi_{\bar{z}} = -\eta_z$.

Далее мы изложим конструкцию Шарипова для построения конечнозонных решений уравнения Цицейки [7] (в [7] вместо антиголоморфной инволюции τ рассматривается, в наших обозначениях, антиголоморфная инволюция $\sigma\tau$). Пусть кривая Γ обладает мероморфной функцией λ с дивизором нулей и полюсов $3\infty_1 - 3\infty_2$, такой, что

$$\lambda(\sigma(P)) = -\lambda(P),\ \lambda(\tau(P))\overline{\lambda(\sigma(P))} = 1. \tag{3}$$

Выберем k_1 и k_2 так, чтобы в окрестностях ∞_1 и ∞_2 функция λ имела вид

$$\lambda = ik_1^{-3},\ P \to \infty_1,$$

$$\lambda = \frac{k_2^3}{i},\ P \to \infty_2.$$

Выбор таких спектральных данных обеспечивает гладкость и вещественность потенциала. Из единственности функции Бейкера–Ахиезера вытекают равенства

$$\psi_{zz} = \frac{\xi_{z\bar{z}}}{\xi_{\bar{z}}}\psi_z + \frac{k_1^3}{\xi_{\bar{z}}}\psi_{\bar{z}} = v_z\psi_z - \frac{i}{\lambda}e^{-v}\psi_{\bar{z}}, \tag{4}$$

$$\psi_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{k_2^3}{\eta_z}\psi_z + \frac{\eta_{z\bar{z}}}{\eta_z}\psi_{\bar{z}} = -e^{-v}i\lambda\psi_z + v_{\bar{z}}\psi_{\bar{z}}, \tag{5}$$

$$\psi_{z\bar{z}} = \xi_{\bar{z}}\psi = \eta_z\psi = -e^v\psi, \tag{6}$$

$$\psi(P) = \overline{\psi(\tau(P))},\ \psi_{\bar{z}}(P) = \overline{\psi_z(\tau(P))},\ \psi_z(P) = \overline{\psi_{\bar{z}}(\tau(P))}. \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$F(P, Q) = \langle e(P), e(Q)\rangle,$$

где $e(P) = (\psi(P), \psi_z(P)e^{-\frac{v}{2}}, \psi_{\bar{z}}(P)e^{-\frac{v}{2}})$. Из (7) следует, что

$$F(P, Q) = \psi(P)\psi(\tau(Q)) + \psi_z(P)\psi_{\bar{z}}(\tau(Q))e^{-v} + \psi_{\bar{z}}(P)\psi_z(\tau(Q))e^{-v}.$$

Из (3)–(6) получаем

$$F_z(P, Q) = -ie^{-2v}\left(\frac{1 - \lambda(P)\overline{\lambda(Q)}}{\lambda(P)}\right)\psi_{\bar{z}}(P)\psi_{\bar{z}}(\tau(Q)),$$

$$F_{\bar{z}}(P, Q) = -ie^{-2v}\left(\frac{\lambda(P)\overline{\lambda(Q)} - 1}{\overline{\lambda(Q)}}\right)\psi_z(P)\psi_z(\tau(Q)).$$

Функция λ задает трехлистное накрытие $\mathbb{C}P^1$ кривой Γ. Пусть $\lambda(P_1) = \lambda(P_2) = \lambda(P_3) = 1$. Тогда функция $F(P_i, P_j)$ не зависит от x и y.

Положим

$$r_j = C_j \psi(P_j),$$

где $C_j = \frac{1}{|\psi(P_j)|}$. В этом случае будут выполнены уравнения (1), где матрицы A и B лежат в алгебре Ли su(3) (см. [7]).

Интегрируемые деформации тора T задает функция Бейкера–Ахиезера со следующими асимптотиками

$$\psi(P,x,y,t) = \exp(k_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} k_1^{2n+1} t'_n) \left(1 + \frac{\xi(x,y,t)}{k_1} + \dots\right), \ P \to \infty_1,$$

$$\psi(P,x,y,t) = \exp(k_2 \bar{z} + \sum_{n=1}^{\infty} k_2^{2n+1} \bar{t}'_n) \left(1 + \frac{\eta(x,y,t)}{k_2} + \dots\right), \ P \to \infty_2,$$

где $t'_j = t_j + it_j$. Функция $\psi(P,x,y,t)$ обладает свойствами (4)–(7).

Функцию ψ можно выписать в явном виде через тэта-функцию Прима инволюции σ (см. [1]). На Γ существует базис циклов $a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g$ такой, что

$$\sigma(a_i) = a_{i+g_0}, \ \sigma(b_i) = -b_{i+g_0}, i = 1,\dots,g_0$$

и отвечающий ему базис абелевых дифференциалов $\omega_1,\dots,\omega_g$, для которого выполнены равенства

$$\int_{a_j} \omega_k = 2\pi i \delta_{jk}.$$

Многообразием Прима кривой Γ называется многообразие

$$P = \mathbb{C}^{g_0} / \{2\pi i \mathbb{Z}^{g_0} + \Omega \mathbb{Z}^{g_0}\},$$

где компоненты симметричной матрицы Ω являются периодами следующих дифференциалов: $\Omega_{ij} = \int_{b_j} \eta_i, \ \eta_i = \omega_i + \omega_{i+g_0}$. Обозначим через $\eta(P)$ отображение

$$\eta : \Gamma \to P, \ \eta(P) = \left(\int_{P_0}^{P} \eta_1, \dots, \int_{P_0}^{P} \eta_{g_0}\right),$$

где $P_0 \in \Gamma$ — некоторая фиксированная точка. Через Ω_k и $\widetilde{\Omega}_k, \ k = 0,1,\dots$ обозначим мероморфные дифференциалы на Γ с единственными полюсами соответственно в точках ∞_1 и ∞_2 вида $d(k_s^{-(2k+1)}), s = 1,2$ и нормированные равенством нулю a-периодов: $\int_{a_j} \Omega_k = \int_{a_j} \widetilde{\Omega}_k = 0$. Пусть

$$V_k = \left(\int_{b_1} \Omega_k, \dots, \int_{b_{g_0}} \Omega_k\right), \ \widetilde{V}_k = \left(\int_{b_1} \widetilde{\Omega}_k, \dots, \int_{b_{g_0}} \widetilde{\Omega}_k\right).$$

Тэта-функция многообразия Прима определяется абсолютно сходящимся рядом

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^{g_0}} \exp\left(\frac{1}{2}\langle \Omega n, n\rangle + \langle z, n\rangle\right),$$

$z = (z_1,\dots,z_{g_0}) \in \mathbb{C}^{g_0}$. Тэта-функция обладает свойствами периодичности

$$\theta(z + 2\pi i n + \Omega m) = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \Omega m, m\rangle + \langle z, m\rangle\right)\theta(z),$$

$m, n \in \mathbb{Z}^{g_0}$. Функция ψ имеет следующий вид (см. [1]):

$$\psi = \frac{\theta(\eta(P) + zV_0 + \bar{z}\widetilde{V}_0 + t_1'V_1 + \bar{t}_1'\widetilde{V}_1 + \dots - e)}{\theta(\eta(P) - e)\theta(zV_0 + \bar{z}\widetilde{V}_0 + t_1'V_1 + \bar{t}_1'\widetilde{V}_1 + \dots - e)}$$

$$\times \exp\left(z\left(\int_{P_0}^{P}\Omega_0 - \alpha_0\right) + \bar{z}\int_{\infty_1}^{P}\widetilde{\Omega}_0 + t_1'\left(\int_{P_0}^{P}\Omega_1 - \alpha_1\right) + \bar{t}_1'\int_{\infty_1}^{P}\widetilde{\Omega}_1 + \dots\right),$$

α_j — некоторые константы, $e \in \mathbb{C}^{g_0}$ — некоторый вектор. Положим

$$\widetilde{r}_j(t) = C_j(t)\psi(P_j, x, y, t),$$

где $C_j(t) = \frac{1}{|\psi(P_j,x,y,t)|}$.

Из формулы для функции ψ следует, что если отображение $\mathcal{H} \circ \widetilde{r}$ является периодическим при $t = 0$, то оно будет периодическим для произвольных t, причем с теми же периодами. Функция $\widetilde{r}_j$ удовлетворяет уравнениям из теоремы 1 (см. [1]).

Покажем, что поток, отвечающий t_1, сохраняет площадь. Площадь тора равна $S = \frac{1}{2}\int V dz d\bar{z}$. Перепишем уравнение Веселова–Новикова в виде

$$V_{t_1} = (V_{zz} + UV)_z + (V_{\bar{z}\bar{z}} + \bar{U}V)_{\bar{z}}.$$

Так как U и V — двояко периодические функции, то форма $V_{t_1} dz d\bar{z}$ является точной. Теорема 1 доказана.

Приведем пример римановой поверхности, обладающей указанными выше инволюциями σ и τ. Пусть Γ является гладким пополнением поверхности, заданной в (λ, μ)-плоскости уравнением

$$\mu^3 = \mu Q_1(\lambda) + Q_2(\lambda),$$

где

$$Q_1(\lambda) = q_{-2k}\lambda^{-2k} + \dots + q_{2k}\lambda^{2k},\ \bar{q}_{-j} = q_j,$$
$$Q_2(\lambda) = p_{-(2n+1)}\lambda^{-(2n+1)} + \dots + p_{2n+1}\lambda^{2n+1},\ \bar{p}_{-j} = -p_j.$$

Поверхность Γ обладает голоморфной инволюцией

$$\sigma = (\lambda, \mu) = (-\lambda, -\mu)$$

с двумя неподвижными точками $\infty_1 = (0, \infty)$ и $\infty_2 = (\infty, \infty)$ и антиголоморфной инволюцией

$$\tau(\lambda, \mu) = \left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, -\bar{\mu}\right).$$

Список литературы

[1] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Конечнозонные двумерные потенциальные оператор Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения*, ДАН СССР, **279**:1 (1984), 20–24.

[2] И. А. Тайманов, *Представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей в* $\mathbb{R}^3$, Функцион. анализ и его прил., **32**:4 (1998), 49–62.

[3] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, И. М. Кричевер, *Уравнения Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности*, ДАН СССР, **229**:1 (1976), 15–18.

[4] А. Е. Миронов, *О новых примерах гамильтоново–минимальных и минимальнах лагранжевых подмногообразиях в* $\mathbb{C}^n$ *и* $\mathbb{C}P^n$, Матем. сб., **195**:1 (2004), С. 89–102.

[5] I. Castro, F. Urbano. *Examples of unstable Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in* $\mathbb{C}^2$, Compositio Mathematica, **111** (1998), 1-14.

[6] D. Joyce, *Special Lagrangian 3-folds and integrable Systems*, Advanced Studies in Pure Math., Math. Soc. Japan (to appear).

[7] Р. А. Шарипов, *Минимальные торы в пятимерной сфере*, Теор. и матем. физика, **87**:1 (1991), 48–56.

[8] H. Ma, J. Ma, *Totally real minimal tori in CP^2*, arXive: math.DG /0106141.

[9] E. Carberry, I. Mcintosh, *Minimal lagrangian 2-tori in $\mathbb{C}P^2$ come in real families of every dimention*, London J. of Math., **69**:2 (2004), 531–544.

[10] N. Hitchin, *Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere*, J. Diff. Geom., **31** (1990), 627–710.

[11] A. V. Mikhailov, *The reduction problem and the scattering method*, Physica 3D, **1** (1981), 73–117.

[12] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, *Нелинейные уравнения типа Кортвега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия*, Успехи матем. наук, **31**:1 (1976), 55–136.

[13] B. G. Konopelchenko, *Induced surfaces and their integrable dynamics*, Stud. Appl. Math., **96**:1 (1996), 9–51.

[14] I. A. Taimanov, *Modified Novikov–Veselov equation and differential geometry of surfaces*, Amer. Math. Soc. Transl., **179**, Ser. 2 (1997), 133–151.

[15] А. Е. Миронов, *О гамильтоново-минимальных лагранжевых торах в $\mathbb{C}P^2$*, Сибирский матем. журнал, **44**:6 (2003), 1324-1328.

[16] И. М. Кричевер, *Нелинейные уравнения и эллиптические кривые*, Современные проблемы математики, ВИНИТИ, Т. 23, 1983, С. 79–136.

Андрей Евгеньевич Миронов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: mironov@math.nsc.ru