S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 1, стр. 76–90 (2004) УДК 519.172.2

MSC 05C15

2-ДИСТАНЦИОННАЯ РАСКРАСКА РАЗРЕЖЕННЫХ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

О. В. БОРОДИН, А. О. ИВАНОВА, Т. К. НЕУСТРОЕВА

Abstract. Clearly, the 2-distance chromatic number $\chi_2(G)$ of any graph G with maximum degree Δ is at least $\Delta+1$. We prove that if G is planar and its girth is large enough (w.r.t. a fixed Δ), then $\chi_2(G)=\Delta+1$.

1. Введение

Ниже под графом всюду понимается обыкновенный граф без петель и кратных ребер. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаются множества вершин и ребер графа G, соответственно.

Раскраска $f : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ графа G называется 2-*дистанционной*, если любые две вершины, находящиеся на расстоянии не более 2, окрашены в различные цвета. Наименьшее число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G называется 2-*дистанционным хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi_2(G)$.

Г. Вегнером [5] была высказана гипотеза о том, что $\chi_2(G)$ любого плоского графа G с максимальной степенью Δ удовлетворяет неравенствам

$$\chi_2(G) \le \begin{cases} \Delta+5 & \text{при } 4 \le \Delta \le 7; \\ \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 1 & \text{при } \Delta \ge 8 \end{cases}$$

(см. также монографию Т. Р. Йенсена и Б. Тофта [4, п. 2.18]). Я. ван ден Хойвел и Ш. Мак Гиннесс [3] доказали, что $\chi_2(G) \le 2\Delta + 25$ для любого плоского графа G. Независимо, Г. Агнарсон и М. М. Холдорсон [2] установили, что $\chi_2(G) \le \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 2$ при $\Delta \ge 749$. О.В. Бородиным и др. [1] доказано, что $\chi_2(G) \le \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil + 1$ при $\Delta \ge 47$.

Borodin, O.V., Ivanova, A.O., Neustroeva, T.K., 2-Distance colouring of sparse planar graphs.

Работа первого автора поддержана РФФИ (гранты 03-01-00796 и 02-01-00039).

Поступила 29 октября 2004 г., опубликована 16 ноября 2004 г.

Очевидно, что $\chi_2(G) \geq \Delta+1$ для любого графа G (поскольку в любом графе есть звезда $K_{1,\Delta}$). В данной работе доказано, что если G — плоский, а его обхват (т.е. длина минимального цикла) g при фиксированном Δ достаточно велик, то $\chi_2(G) = \Delta + 1$. Легко видеть, что при $\Delta = 2$ существуют графы с $\chi_2 = 4$ и произвольно большим обхватом, например, C_{3k+1}.

Теорема 1. *Пусть G — планарный граф, тогда $\chi_2(G) = \Delta + 1$ в каждом из следующих случаев:*
(i) $\Delta = 3$ *и* $g \geq 24$*;*
(ii) $\Delta = 4$ *и* $g \geq 15$*;*
(iii) $\Delta = 5$ *и* $g \geq 13$*;*
(iv) $\Delta = 6$ *и* $g \geq 12$*;*
(v) $\Delta \geq 7$ *и* $g \geq 11$*;*
(vi) $\Delta \geq 9$ *и* $g = 10$*;*
(vi) $\Delta \geq 16$ *и* $g = 9$.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть граф G' — контрпример к теореме 1, т. е. имеет $\Delta(G') = \Delta \geq 3$, его обхват $g(G')$ не меньше, чем в соответствующем пункте теоремы 1, а $\chi_2(G') > \Delta + 1$. Пусть далее G — наименьший по числу ребер граф со свойствами: $\Delta(G) \leq \Delta$, $g(G) = g \geq g(G')$, $\chi_2(G) > \Delta + 1$. Множество графов с этими свойствами непусто, так как, например, G' всеми ими обладает. Доказательство теоремы 1 состоит в доказательстве несуществования графа G, что противоречит сделанному нами предположению о существовании графа G'.

Не нарушая общности, можно считать, что граф G связен. Обозначим через δ его минимальную степень. Легко видеть, что $\delta \geq 2$.

Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ запишем в виде

$$((g-2)|E| - g|V|) + (2|E| - g|F|) = -2g,$$

где F — множество граней графа G.

Отсюда

$$\sum_{v\in V}\Big(\frac{g-2}{2}d(v) - g\Big) + \sum_{f\in F}(r(f) - g) = -2g, \tag{1}$$

где $d(v)$ — степень вершины v, а $r(f)$ — ранг грани f. Пусть *заряд* $\mu(v)$ каждой вершины v графа G равен $\frac{g-2}{2}d(v) - g$, а *заряд* каждой грани f графа G равен $r(f) - g$. Поскольку заряд каждой грани неотрицателен, из (1) имеем

$$\sum_{v\in V}\Big(\frac{g-2}{2}d(v) - g\Big) < 0. \tag{2}$$

Заметим, что заряд 2-вершины при всех g равен -2, а заряды вершин степени не менее 3 положительны. Для каждого значения Δ мы опишем ряд структурных свойств графа G, опираясь на которые перераспределим заряды вершин так, чтобы новый заряд каждой вершины стал неотрицательным. Поскольку сумма зарядов вершин при перераспределении сохраняется, мы получим противоречие с (2), что и завершит доказательство теоремы 1.

Для всех Δ используется общее правило перераспределения зарядов:

R1: Любая вершина v с $d(v) \geq 3$ отдает заряд k каждой выходящей из нее k-цепи (т. е. состоящей из в точности k вершин степени 2).

При некоторых Δ мы будем вводить дополнительные правила, причем в их номер будет входить Δ. Например, правило R3 будет касаться случая $\Delta = 3$.

Сделаем общее замечание по доказательству структурных свойств.

Замечание. В силу минимальности G граф, полученный из него удалением ребра, имеет требуемую раскраску. Легко видеть, что если мы сможем перекрасить концы этого ребра в цвет, не встречающийся на смежных вершинах и вершинах на расстоянии 2 от соответствующего конца, то полученная раскраска будет 2-дистанционной. Удаленное ребро на рисунке будем перечеркивать.

2.1. **Случай** $\Delta(G) = 3$**.** Назовем (k, l, m)-*вершиной* вершину степени 3, инцидентную $\geq k$-, $\geq l$- и $\geq m$-цепям. Для доказательства нам понадобятся следующие структурные свойства графа G.

Лемма 1. *Пусть* $\Delta = 3$*. Тогда в* G *нет:*
(i) *$\geq$6-цепей;*
(ii) *(5, 4, 1)-вершин;*
(iii) *(5, 3, 2)-вершин;*
(iv) *(4, 4, 2)-вершин;*
(v) *(4, 3, 3)-вершин.*

Что касается (5,5,0)-вершины v, то мы не можем исключить ее присутствия в G, так как существует частичная раскраска φ графа G, которую нельзя продолжить на v. Действительно, пусть v смежна с 3-вершиной z_1, а $x_1 \dots x_5 z_2$ и $y_1 \dots y_5 z_3$, где $d(z_1) = d(z_2) = d(z_3) = 3$, — цепи, выходящие из нее. Пусть $\varphi(u) = \varphi(x_5) = \varphi(y_5) = 1, \varphi(z_2) = \varphi(z_3) = 2$, а $\varphi(z_1) = 3$. Без ограничения общности, пусть $\varphi(x_1) = 2$, тогда для раскраски вершин $x_2,\ x_3,\ x_4$ остается только два цвета — 3, 4.

Однако имеет место более слабое структурное свойство.

Лемма 2. *В графе* G *не существует смежных (5,5,0)- и (5,4,0)-вершин.*

2.1.1. *Доказательство леммы 1.* (i) Предположим, что 6-цепь существует (см. рис. 1). Тогда удаляем перечеркнутое ребро и рассмотрим 2-дистанционную раскраску полученного графа. Без ограничения общности, будем считать, что левый конец окрашен в цвет 1 (здесь и в дальнейшем зафиксированные раскраской цвета обводим кружками). Обесцветим четыре внутренние вершины конфигурации. На рисунке показано, как мы красим обесцвеченные вершины: одна из них получает цвет 1, а символы N_i задают порядок раскраски остальных. Читателю остается убедиться, что в момент окраски очередной вершины имеется не более трех ограничений на выбор цвета.

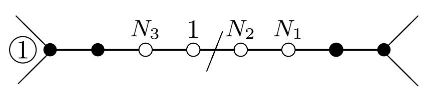


Рис. 1.

(ii) На рис. 2 показана сводимость данной конфигурации. Нетрудно убедиться, что тремя вариантами, показанными на рисунке, исчерпываются все способы раскраски границы. Здесь и далее, в каждом из вариантов мы обесцвечиваем внутренние вершины конфигурации и указываем способ их раскраски.

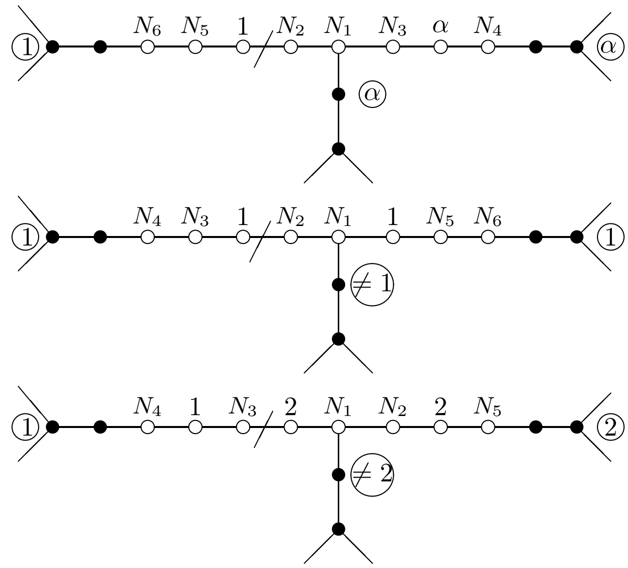
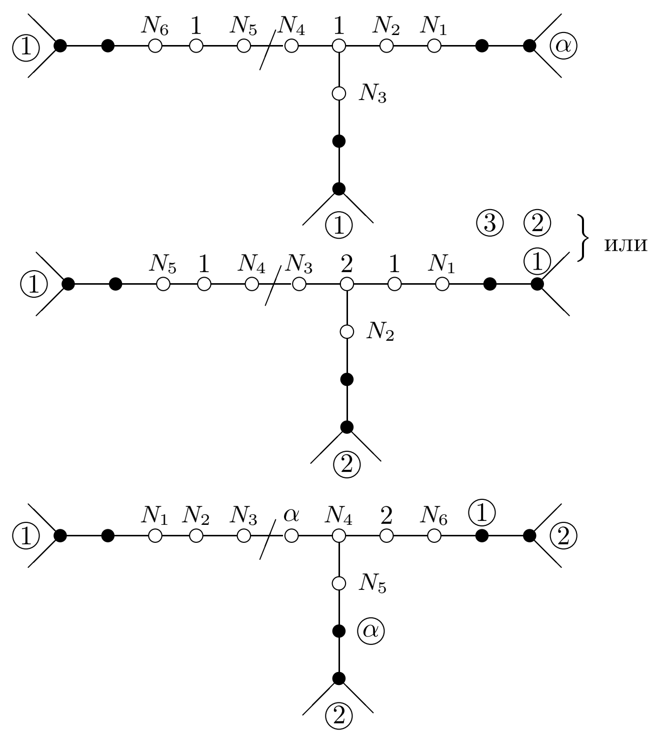


Рис. 2.

(iii) На рис. 3 приводится шесть решений, для различных способов раскраски границы. Второе решение подходит для двух вариантов. Читателю следует убедиться, что ни один из вариантов раскраски границы не упущен и в каждом случае построена 2-дистанционная раскраска графа G.



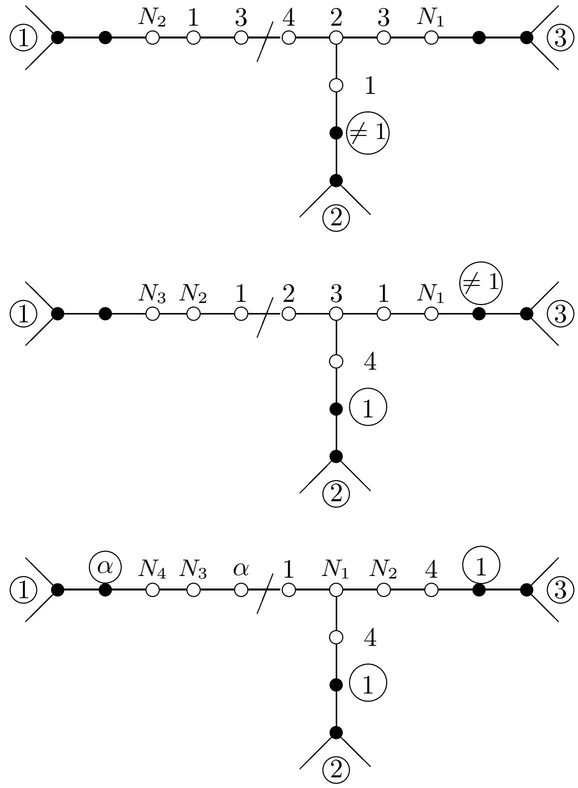
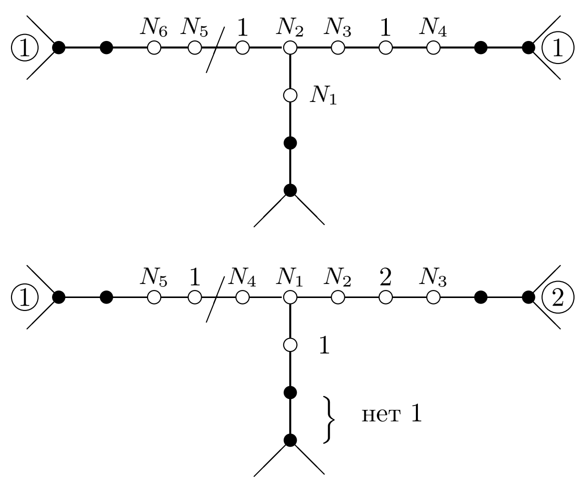


Рис. 3.

(iv) На рис. 4 показаны три возможных варианта раскраски границы конфигурации и соответствующие им решения. Заметим, что во втором из них ни на одной из нижних вершин нет цвета 1, а в третьем одна из них окрашена в 1.



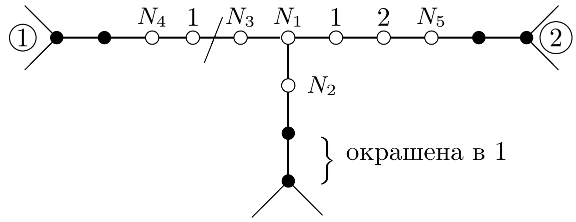


Рис. 4.

(v) Рис. 5 показывает решения для трех возможных вариантов раскраски границы данной конфигурации. Следует обратить внимание, что во втором варианте если $N_3 \neq 1$, то $N_4 = 1$. $\square$

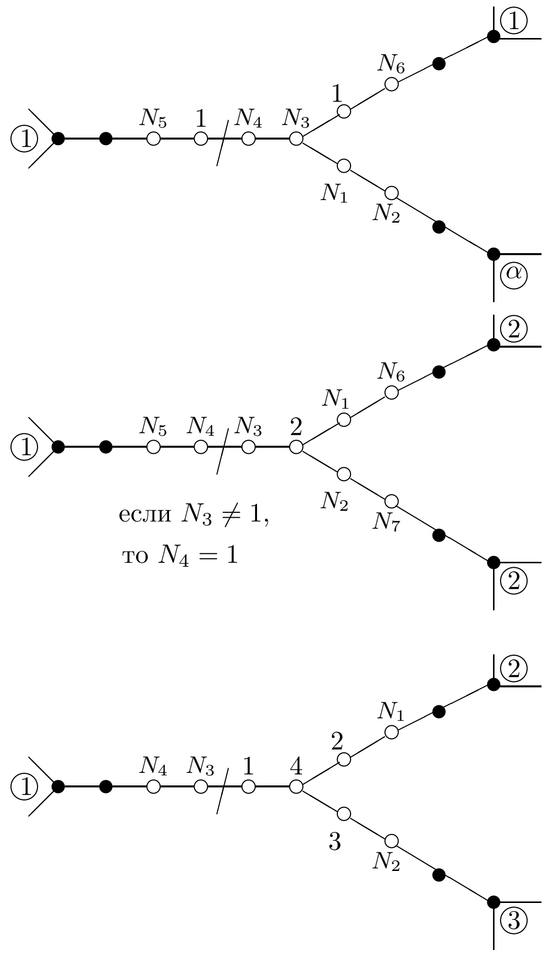


Рис. 5.

2.1.2. *Доказательство леммы 2.* На рис. 6 наверху находится (5,5,0)-вершина, а снизу — (5,4,0)-вершина. Сначала красим 4-цепь и нижнюю центральную вершину, как показано на рисунке. Затем по лемме 1 (i) красим оставшиеся неокрашенными четыре нижние вершины степени 2. При этом верхняя центральная вершина v получает единственно возможный цвет, который обозначим через α. В дальнейшем раскраска нижних вершин меняться не будет. Остается раскрасить верхнюю часть.

Имеется три варианта раскраски границы верхней части конфигурации, два из которых имеют сходное решение и показаны на рис. 6a, а третий, (α, 2), рассмотрен на рис. 6b.

Обратимся к рис. 6a. Сначала покрасим левую часть. Раскраска правой зависит от раскраски ее границы. Решение для первого варианта ($\neq \alpha$) показано сверху, а для второго ($\alpha, \beta \neq 2$) — снизу. □

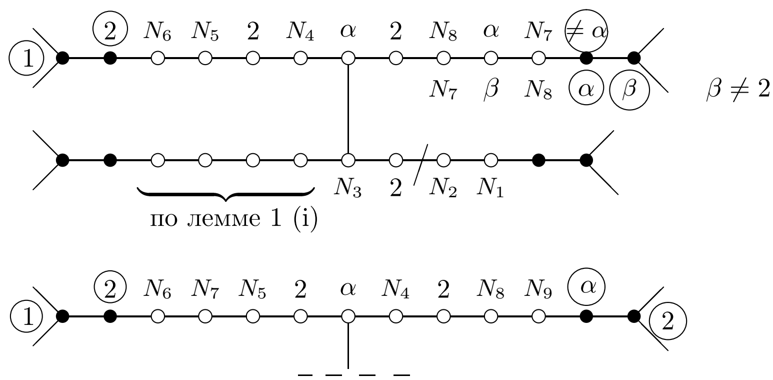


Рис. 6.

2.1.3. *Завершение доказательства для* $\Delta(G) = 3$. В дополнение к общему правилу R1 в случае $\Delta(G) = 3$ используется следующее правило:

R3. Каждая (5,5,0)-вершина получает заряд 1 от смежной 3-вершины.

Покажем, что после перераспределения $\mu^*(v) \geq 0$ для любой $v \in V(G)$, что будет противоречить (1) и завершит доказательство.

Пусть $d(v) = 2$, тогда $\mu(v) = -2$. Согласно правилу R1 любая k-цепь получает заряд $2k$, который можно равномерно распределить по ее k вершинам степени 2. Следовательно, $\mu^*(v) = -2 + 2 = 0$.

Остается рассмотреть случай $d(v) = 3$. Напомним, что $\mu(v) = 9$. Пусть v является (k, l, m)-вершиной. Сначала предположим, что v не отдает 1 вершинам степени 3 по правилу R3. Тогда по правилу R1 заряд вершины v может стать отрицательным только если $k+l+m \geq 10$. Согласно лемме 1, таковой является только (5,5,0)-вершина. В этом случае v получает 1 по правилу R3, а значит $\mu^*(v) \geq 9 - 10 + 1 = 0$.

Пусть v отдает 1 хотя бы один раз. Будем считать, что $k \geq l \geq m$. Тогда $k + l \leq 8$, $m = 0$ по лемме 2. Если v отдает 1 лишь по одному ребру, то $\mu^*(v) \geq 9 - 8 - 1 = 0$. Если v отдает 1 по двум или трем ребрам, то $k \leq 5$, $l = m = 0$ по лемме 1 (i), а следовательно $\mu^*(v) \geq 9 - 5 - 3 \times 1 > 0$.

2.2. **Случай** $\Delta \geq 4$**.** Вершину v будем называть *средней*, если $d(v) < \Delta$, а $\mu(v) \geq 2d(v)$, и *младшей*, если $2 < d(v) < \Delta$ и v не является средней. Покажем, что $\mu^* \geq 0$ для средних и Δ-вершин, а потом для младших вершин графа. Для удобства читателей приведем таблицу зарядов вершин, где двойная черта отделяет младшие вершины от средних, а заряд Δ-вершины выделен полужирным шрифтом:

Таблица 1.

$g \backslash d$	2	3	4	5	6	7	8	9	...	16
15	-2	$\frac{9}{2}$	**11**							
13	-2	$\frac{7}{2}$	9	$\mathbf{\frac{29}{2}}$						
12	-2	3	8	13	**18**					
11	-2	$\frac{5}{2}$	7	$\frac{23}{2}$	16	$\mathbf{\frac{41}{2}}$				
10	-2	2	6	10	14	18	22	**26**		
9	-2	$\frac{3}{2}$	5	$\frac{17}{2}$	12	$\frac{31}{2}$	19	$\frac{45}{2}$	...	**47**

Следующее правило перераспределения зарядов будет действовать для всех $\Delta \geq 5$:

R2: Любая средняя и Δ-вершина отдает заряд 1 другому концу каждой инцидентной ей 1-цепи, и заряд 2 — концу 0-цепи.

Дополнительные правила (для $\Delta = 4$ и ≥ 16) следующие:

R4: Если (2,2,1)- или (2,2,2)-вершина v соединена 2-цепью с 4-вершиной w, то v получает заряд $\frac{1}{2}$ от w.

Назовем среднюю вершину v *старшей*, если $\mu(v) \geq \frac{5}{2}d(v)$.

R16: Если (2,2,0)-вершина v смежна со старшей или Δ-вершиной w, то v получает от w заряд $\frac{1}{2}$ в дополнение к 2, полученной по общему правилу R2 (т.е. всего v получает от w заряд $\frac{5}{2}$).

2.2.1. *Проверка того, что $\mu^*(v) \geq 0$ для Δ- и средних вершин.* Нам понадобятся два структурных свойства графа G при произвольном Δ.

Лемма 3. *В G не существует ≥ 3-цепей, ограниченных хотя бы с одной стороны вершиной степени меньше Δ.*

Доказательство. Пусть в G существует 3-цепь $vv_1v_2v_3w$, где $d(v) < \Delta$ и $d(v_i) = 2$ при $1 \leq i \leq 3$ (см. рис. 7). Граф $G - v_1v_2$, в силу замечания перед разделом 2.1, 2-дистанционно раскрашиваем. Покрасим сначала вершину v_1 (она имеет не более Δ ограничений), затем v_2 (не более 4 ограничений). □

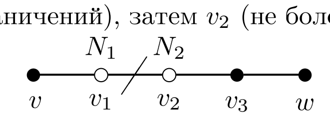


Рис. 7.

Следствие $3'$. В G не существует ≥ 4-цепей.

Введем следующее определение: под $(k_1, \ldots, k_d)$-*вершиной* понимается d-вершина, инцидентная d различным цепям, где i-я цепь ($1 \leq i \leq d$) содержит не менее k_i вершин степени 2.

Лемма 4. *В G нет $(3, 3, \ldots, 3)$-вершины v степени Δ.*

Доказательство. Пусть x_i — вершины, находящиеся от v на расстоянии 2, где $1 \leq i \leq \Delta$, а u — вершина, смежная с v и x_1 (см. рис. 8). Раскрасим $G - ux_1$, обесцветим вершины u, v и все x_i, а потом покрасим их в порядке обесцвечивания. □

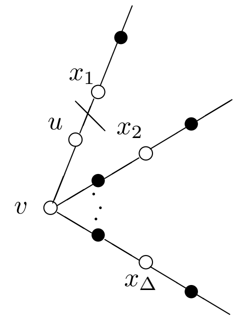


Рис. 8.

Отметим, что при всех значениях g заряд Δ-вершины v не меньше $3\Delta - 1$ (см. таблицу 1). Для Δ-вершин при $5 \le \Delta \le 9$ поставленный в данном разделе вопрос решается легко. Действительно, согласно правилам R1, R2 и следствию $3'$ вершина v отдает по каждой цепи либо 2, либо 3 единицы заряда, а по лемме 4 найдется ≤ 2-цепь, инцидентная v, откуда $\mu^*(v) \ge 3\Delta - 1 - 3(\Delta - 1) - 2 \times 1 = 0$.

Пусть теперь $\Delta = 4$.

Лемма 5. *В G нет (3,3,3,2)- и (2,2,1)-вершин, имеющих общую 2-цепь.*

Доказательство. См. рис. 9. □

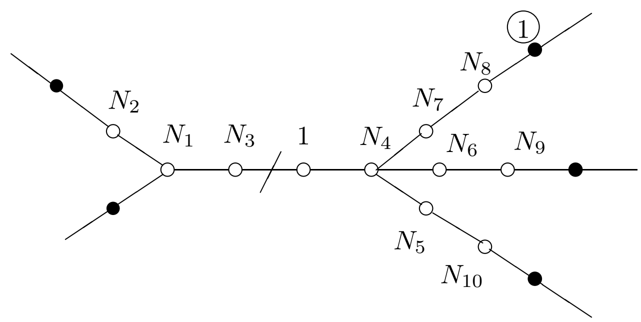


Рис. 9.

Вершина v степени 4 при $g = 15$ имеет $\mu(v) = 11$. По правилам R1, R4 заряд $\mu^*(v)$ мог бы быть отрицательным только в тех случаях, когда v имеет либо четыре инцидентных ей 3-цепи, либо три 3-цепи и одну 2-цепь, по которой нужно передать заряд $\frac{5}{2}$. Однако это противоречит леммам 4 и 5, соответственно.

Пусть, наконец, $\Delta \ge 16$. Здесь нам понадобится еще одно структурное свойство.

Лемма 6. *В G нет (3,…,3,0)-вершины степени Δ смежной с (2,2,0)-вершиной.*

Доказательство. См. рис. 10. □

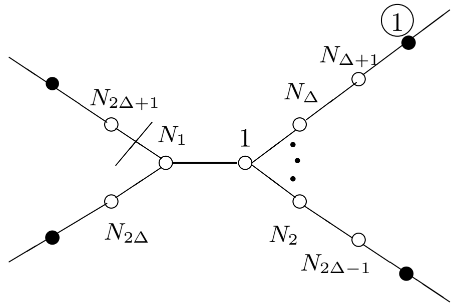


Рис. 10.

Вершина v степени $\Delta \geq 16$ при $g = 9$ имеет $\mu(v) = \frac{7}{2}\Delta - 9$. Для доказательства используем те же рассуждения, что и для $\Delta = 4$, при этом вместо правила R4 применяем правило R16, а вместо леммы 5 — лемму 6. Тем самым завершаем доказательство для Δ-вершин.

Теперь обратимся к средней вершине v; в этом случае доказательство проще. А именно, $\mu(v) \geq 2d$ по определению, поэтому при $5 \leq \Delta \leq 9$ (при $\Delta = 4$ средних вершин нет) по правилам R1, R2 и лемме 3 вершина v отдает по каждой цепи не более 2 единиц заряда, т.е. $\mu^*(v) \geq 2d - 2d = 0$.

Пусть $\Delta \geq 16$. Для средней вершины v, которая не является старшей, рассуждаем аналогично случаю $5 \leq \Delta \leq 9$. Если v — старшая вершина, то по правилам R1, R2, R16 и лемме 3 она отдает по каждой цепи не более $\frac{5}{2}$ единиц заряда, а значит $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2}d - \frac{5}{2}d = 0$.

2.2.2. *Проверка того, что $\mu^*(v) \geq 0$ для младшей вершины v.* Напомним, что младшая вершина отдает по каждому ребру, согласно правилу R1 и лемме 3, заряд 1 или 2 вершинам степени 2. В свою очередь она может получить от средних или Δ-вершин, согласно правилу R2 и дополнительным правилам, некоторый положительный заряд. Поэтому достаточно рассмотреть лишь вершину v, у которой общее количество 2-вершин на инцидентных ей цепях больше $\mu(v)$. Для таких вершин нам потребуются новые структурные свойства графа G.

Случай $\Delta = 4$.

Лемма 7. (*i*) *Если в графе G есть (2,2,2)-вершина v, то все выходящие из нее 2-цепи, заканчиваются 4-вершинами.*

(*ii*) *Если в графе G есть (2,2,1)-вершина v, то хотя бы одна выходящая из нее 2-цепь заканчивается 4-вершиной.*

Доказательство. (i) Пусть существуют цепи $vw_ix_iy_i$, где $d(w_i) = d(x_i) = 2$, для $1 \leq i \leq 3$, а $d(y_1) = 3$, $d(y_2) \geq 3$, $d(y_3) \geq 3$. Пусть φ — раскраска графа $G - vw_1$. Обесцветим v и все w_i и допустим, что цвет 1 не встречается на вершинах x_1, x_2, x_3 (см. рис. 11).

Покрасим v в 1. Теперь каждая из w_i имеет не меньше 2 допустимых цветов, отличных от цветов 1, $\varphi(x_i)$ и $\varphi(y_i)$. Мы не сможем раскрасить w_i, $1 \leq i \leq 3$, лишь в том случае, когда все списки допустимых цветов для этих вершин состоят из двух цветов и, более того, одних и тех же, например, {2,3}. Это означает, что на каждой паре вершин x_i, y_i присутствуют цвета 4 и 5.

Можно считать, что $\varphi(x_1) = 4$, $\varphi(y_1) = 5$, а цвет α отсутствует на y_1 и смежных с ней вершинах. Тогда красим x_1 и w_2 в α, w_1 — в 4, а v и w_3 — в цвета из множества $\{1, 2, 3\} - \alpha$.

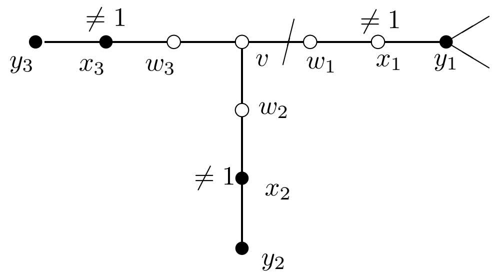


Рис. 11.

(ii) На рис. 12 показана сводимость данной конфигурации. В силу симметрии два варианта, показанные на рисунке, исчерпывают все способы раскраски границы конфигурации. Заметим, что на левом рисунке ни одна из двух нижних вершин не окрашена в цвет 2. □

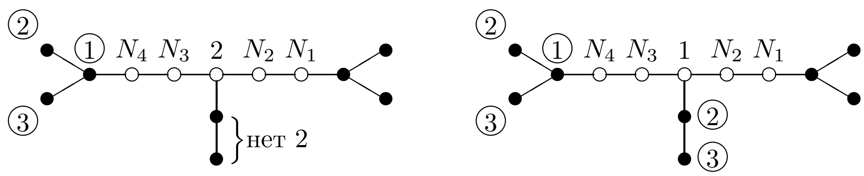


Рис. 12.

При $g = 15$ младшими являются только 3-вершины и пусть v — одна из них.

Поскольку $\mu(v) = \frac{9}{2}$, достаточно рассмотреть лишь (2,2,2)-, (2,2,1)-вершины. Если v — (2,2,2)-вершина, то по каждой инцидентной ей 2-цепи она получает заряд $\frac{1}{2}$ по правилу R4 и лемме 7 (i), а отдает 2 по R1. Следовательно, $\mu^*(v) = \frac{9}{2} - 3 \times 2 + 3 \times \frac{1}{2} = 0$.

Пусть v — (2,2,1)-вершина, тогда хотя бы по одной инцидентной ей 2-цепи она получает заряд $\frac{1}{2}$ по правилу R4 и лемме 7 (ii), а отдает 5 по R1. Следовательно, $\mu^*(v) \geq \frac{9}{2} - 5 + \frac{1}{2} = 0$.

Случай $\Delta = 5$ и 6.

Здесь $d(v) = 3$, а $3 \leq \mu(v) \leq \frac{7}{2}$. Среди вершин, которые могли бы иметь после распределения зарядов отрицательное значение μ^*, могут быть только (2,2,0)-, (2,1,1)-, (2,2,1)- и (2,2,2)-вершины. Заметим, что при $\Delta \geq 5$ вершин типа (2,1,1) в графе G нет (см. рис. 13), а следовательно нет и вершин типов (2,2,1) и (2,2,2). Если v — (2,2,0)-вершина, то ввиду конфигурации на рис. 14 она получает заряд 2 от смежной с ней средней или Δ-вершины по правилу R2, откуда $\mu^*(v) \geq 3 - 2 \times 2 + 2 > 0$.

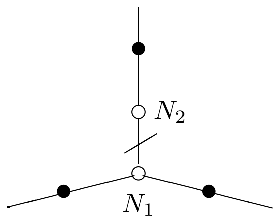


Рис. 13.

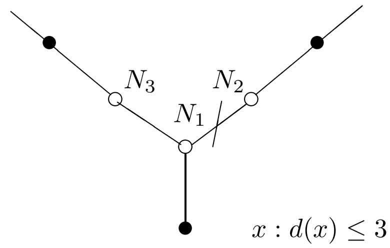


Рис. 14.

Случай $\Delta \geq 7$ и $\Delta \geq 9$.

Младшие вершины при $g = 10, 11$ — это вершины степени 3 и 4. Пусть сначала $d(v) = 3$, тогда $\mu(v) \geq 2$. Напомним, что вершин типа (2,1,1) в графе G нет. Заметим, что при $\Delta \geq 7$ конфигурации, изображенной на рис. 15, в G нет. Тогда, если v — (1,1,1)-вершина, то она получает заряд 1 по каждой 1-цепи от средней или Δ-вершины по правилу R2, откуда $\mu^*(v) \geq 2 - 3 \times 1 + 3 \times 1 > 0$.

Если v — (2,1,0)- или (2,2,0)-вершина, то она получает заряд 2 от смежной средней или Δ-вершины по правилу R2 ввиду конфигурации рис. 16, откуда $\mu^*(v) \geq 2 - 2 \times 2 + 2 = 0$.

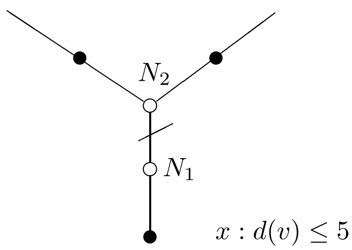


Рис. 15.

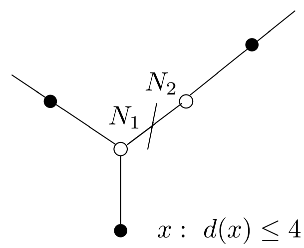


Рис. 16.

Пусть теперь $d(v) = 4$, тогда $\mu(v) \geq 6$, но даже (2,2,1,1)-вершины в графе G при $\Delta \geq 7$ нет (см. рис. 17), а значит $\mu^*(v) \geq 0$.

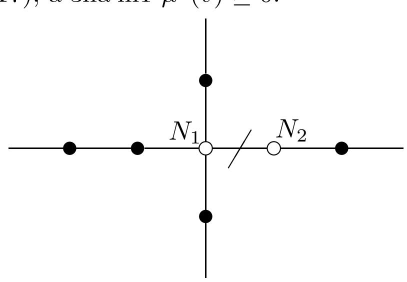


Рис. 17.

Случай $\Delta \geq 16$.

Теперь $3 \leq d(v) \leq 5$. Пусть сначала $d(v) = 3$, тогда $\mu(v) = \frac{3}{2}$.

Если v — (2,2,0)-вершина, то она получает от смежной старшей (заметим, что степень старшей вершины не меньше 9) или Δ-вершины суммарный заряд $\frac{5}{2}$ по правилам R2 и R16 ввиду конфигурации на рис. 18. Отсюда $\mu^*(v) \geq \frac{3}{2} - 2 \times \times 2 + \frac{5}{2} = 0$.

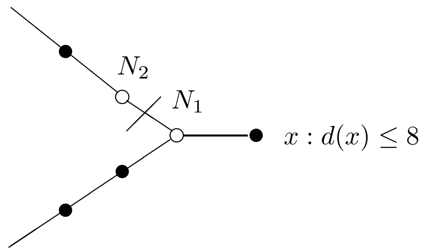


Рис. 18.

Напомним еще раз, что вершин типа (2,1,1) в графе G нет.

Пусть v — (1,1,1)-вершина, тогда она получает заряд 1 по каждой 1-цепи от средней или Δ-вершины по правилу R2 ввиду конфигурации на рис. 15, т. е. $\mu^*(v) \geq \frac{3}{2} - 3 \times 1 + 3 \times 1 > 0$.

Пусть v — (2,1,0)-вершина, не являющаяся (2,2,0)-вершиной, тогда она получает заряд 2 от смежной средней или Δ-вершины по правилу R2 ввиду конфигурации на рис. 19, откуда $\mu^*(v) \geq \frac{3}{2} - 3 + 2 > 0$.

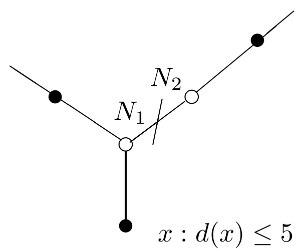


Рис. 19.

Пусть v — (2,0,0)-вершина, не являющаяся (2,1,0)-вершиной, тогда она получает заряд 2 хотя бы от одной смежной средней или Δ-вершины по правилу R2 ввиду конфигурации на рис. 20, а значит $\mu^*(v) \geq \frac{3}{2} - 2 + 2 > 0$.

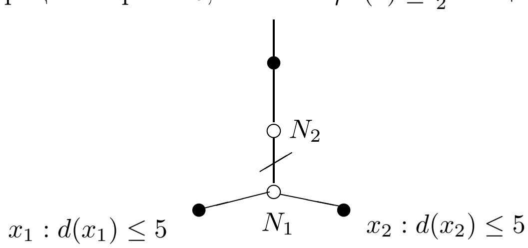


Рис. 20.

Пусть v — (1,1,0)-вершина, не являющаяся (2,1,0)-вершиной, тогда по правилу R2 ввиду конфигурации на рис. 21 она получает заряд 1 или 2 от средней или Δ-вершины по 1- или 0-цепи, соответственно. Отсюда $\mu^*(v) \geq \frac{3}{2} - 2 + 1 > 0$.

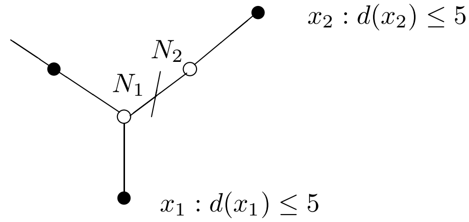


Рис. 21.

Пусть теперь $d(v) = 4$, тогда $\mu(v) = 5$. Поскольку (2,2,1,1)-вершин в графе G нет, остается рассмотреть (2,2,2,0)-вершину. Она получает заряд 2 от смежной средней или Δ-вершины по правилу R2 ввиду конфигурации на рис. 22, откуда $\mu^*(v) \geq 5 - 6 + 2 > 0$.

Пусть, наконец, $d(v) = 5$, тогда $\mu(v) = \frac{17}{2}$. Вершин типа (2,2,2,2,1) в графе G нет (см. рис. 23), а для остальных 5-вершин $\mu^*(v) \geq 0$ по правилу R1.

Теорема 1 доказана.

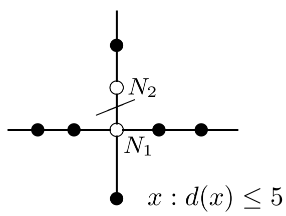


Рис. 22.

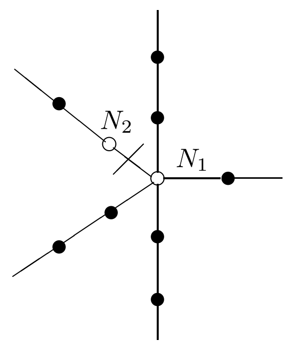


Рис. 23.

Список литературы

[1] О.В. Бородин, Х. Брусма, А.Н. Глебов, Я. Ван ден Хойвел, *Минимальные степени и хроматические числа квадратов плоских графов*, Дискрет. анализ и исслед. операций, Сер. 1, **8**:1 (2001), 9—33.

[2] G. Agnarsson, M.M. Halldórsson, *Coloring powers of planar graphs*, unpublished manuscript, 2000.

[3] J. Van den Heuvel, S. McGuinness, *Colouring the square of a planar graph*, unpublished manuscript, 1999.

[4] T.R. Jensen, B. Toft, *Graph Coloring Problems*, New York, John–Wiley & Sons, 1995.

[5] G. Wegner, *Graphs with given diameter and a coloring problem*, Technical Report. University of Dortmund, 1977.

Олег Вениаминович Бородин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: brdnoleg@math.nsc.ru

Анна Олеговна Иванова
Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского 48,
677000 Якутск, Россия
E-mail address: shmgnanna@mail.ru

Татьяна Кимовна Неустроева
Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского 48,
677000 Якутск, Россия
E-mail address: podn2001@mail.ru