

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 10, стр. С.1–С.86 (2013)

ТРУДЫ
IV МЕЖДУНАРОДНОЙ МОЛОДЕЖНОЙ
ШКОЛЫ-КОНФЕРЕНЦИИ
“ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ”
ЧАСТЬ I

Под редакцией С. И. Кабанихина и М. А. Шишленина

2013

С.1

СОДЕРЖАНИЕ

Арбузов Э. В.	
О свойствах интегрального оператора Коши с осциллирующим ядром.....	С.3
Белоносова А. В., Белоносов В. С.	
Прямые и обратные задачи акустического зондирования дна водоемов.....	С.10
Главный В. Г., Пененко А. В., Двойнишников С. В.	
О статистической оценке ошибки оператора СЛАУ в задаче калибровки лазерного измерителя толщины горячего проката.....	С.16
Кабанихин С. И., Криворотько О. И.	
Численное решение уравнения эйконала.....	С.28
Пененко А. В., Рахметуллина С. Ж.	
Алгоритмы локализации источников загрязнения атмосферного воздуха на основе данных автоматизированной системы экологического мониторинга.....	С.35
Чередниченко В. Г.	
О двух исторических примерах полиномиальной аппроксимации...	С.55
Шарабарина А. С., Белоносова А. В., Белоносов А. С., Виноградов С. П.	
Численное решение прямой динамической задачи акустического зондирования дна водоемов.....	С.59
Юрченко М. А., Белоносова А. В., Белоносов А. С.	
Об одном алгоритме решения обратной кинематической задачи сейсмоки.....	С.74

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 10, стр. С.3–С.9 (2013)

УДК 517.518.12

MSC 31B10

О СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ
С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ЯДРОМ

Э.В. АРБУЗОВ

ABSTRACT. The Cauchy integral operator with oscillating kernel are considered on the space of functions represented by Riesz potentials. An estimate for their norm in the Lebesgue space is obtained. The estimate depends on negative power of the oscillation parameter.

Keywords: Cauchy integral operator, Riesz fractional derivatives.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть Ω ограниченная область в комплексной области \mathbb{C} , отождествляемой с \mathbb{R}^2 . Для $a = a_1 + ia_2$ и вещественного числа τ определим оператор

$$P_{\tau,\Omega}u(x) = \int_{\Omega} e^{i\tau a \cdot y} \frac{u(y)}{y-x} dy, \quad (1)$$

где $a \cdot y = a_1 y_1 + a_2 y_2$, $x = x_1 + ix_2$.

Ранее, для интегрального оператора $P_{\tau,\Omega}$, рассматриваемого на функциях из пространств Гёльдера и Лебега были получены оценки его нормы в соответствующих пространствах, зависящие от степени величины $1/\tau$. На основании полученных свойств оператора P_{τ} в работе [1] была доказана формула типа Карлемана для решения задачи Коши для эллиптических второго порядка на плоскости, а в работе [2] решена обратная задача восстановления потенциала по данным Коши для уравнения $\Delta u + au = 0$.

В данной работе рассматриваются свойства этого оператора, на функциях из пространств риссовых потенциалов, определяемых с помощью дробного интегрирования по Риссу. Показано, что норма данного оператора

ARBUZOV, E.V., ON PROPERTIES OF THE CAUCHY INTEGRAL OPERATOR WITH OSCILLATING KERNEL.

© 2013 Арбузов Э.В.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00147).

Поступила 1 февраля 2013 г., опубликована 31 мая 2013 г.

в лебеговских пространствах оценивается величиной $1/\tau^\alpha$, если функция $u(y)$ имеет дробную производную порядка α .

Для $0 < \alpha < 1$, следуя работам С.Г. Самко [3, 4] определим риссову производную D^α равенством

$$D^\alpha u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{d_{n,1}(\alpha)} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{u(y) - u(x-y)}{|y|^{n+\alpha}} dy, \quad (2)$$

где $d_{n,1}(\alpha)$ - нормировочная постоянная, не равная нулю (ее точное значение приведено в указанных работах), и рассмотрим пространство функций $L_{pp\alpha}^\alpha(\mathbb{R}^n)$:

$$L_{pp\alpha}^\alpha(\mathbb{R}^n) = \{u(x) \in L_{p\alpha}(\mathbb{R}^n), \quad D^\alpha u(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)\}, \quad p_\alpha = \frac{np}{n - \alpha p}.$$

Основной результат работы приведен в следующем утверждении.

Теорема 1.1. Пусть функция $u(x) \in L_{pp\alpha}^\alpha(\mathbb{R}^2)$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 2/\alpha$, u $p_\alpha = \frac{2p}{2-\alpha p}$.

Тогда $P_{\tau,\Omega}u(x) \in L_{p_1}(\mathbb{R}^2)$, $p_1 = \frac{2p}{2-p}$, u в этом пространстве справедливо равенство

$$P_{\tau,\Omega}u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha;\tau,\Omega}(x,y) D^\alpha u(y) dy = K_{\tau,\Omega}^\alpha D^\alpha u(x),$$

где функция $K_{\alpha;\tau,\Omega}(x,y)$ определяется следующей формулой

$$K_{\alpha;\tau,\Omega}(x,y) = \frac{e^{i\tau a \cdot y}}{\gamma_2(\alpha)(y-x)} + \frac{1}{\gamma_2^2(\alpha)d_{2,1}(\alpha)} \times \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(z-x)|y-z|^{2-\alpha}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{s-x} \frac{z-s}{|z-s|^{2+\alpha}} \int_{\Omega} \frac{e^{i\tau a \cdot s'}}{|s-s'|^{n-\alpha}} ds' ds dz, \quad (3)$$

где $\gamma_2(\alpha) = 2^\alpha \pi \Gamma(\frac{\alpha}{2}) / \Gamma(\frac{2-\alpha}{2})$.

При этом выполняется оценка

$$\|P_{\tau,\Omega}u\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{c_\alpha}{\tau^\alpha} \|u\|_{L_{pp\alpha}^\alpha(\mathbb{R}^2)}.$$

Следствие 1.2. Если $Su(x) = P_{\tau,\Omega}P_{\tau,\Omega}u(x)$, то при выполнении условий оценки теоремы 1.1 справедлива оценка $\|S\|_{L_{pp\alpha}^\alpha(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{c}{\tau^\alpha} \|u\|_{L_{pp\alpha}^\alpha(\mathbb{R}^2)}$.

При доказательстве этих утверждений будут использоваться некоторые свойства риссового интегро-дифференцирования, которые приводятся в следующем разделе.

2. СВОЙСТВА РИССОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ПРОИЗВОДНЫХ

Действие потенциалов Рисса

$$I^\alpha u(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

в пространствах Лебега описывают следующие утверждения, доказательство которых приведено, например, в [5, 6].

Теорема 2.1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\alpha > 0$.

Тогда оператор I^α ограничен из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $L_q(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда

$$0 < \alpha < n, \quad 1 < p < n/\alpha, \quad 1/q = 1/p - \alpha/n.$$

Показатель $p_\alpha = \frac{np}{n-\alpha p}$ называется предельным показателем Соболева.

Теорема 2.2. Для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ оператор $I_\Omega^\alpha f = \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$, непрерывно отображает пространство $L_p(\Omega)$ в пространство $L_q(\Omega)$ при

$$0 < \alpha < n, \quad 1 < p < n/\alpha, \quad 1/q > 1/p - \alpha/n \quad (1 \leq q \leq p_\alpha).$$

Дробная производная $D^\alpha f$, определенная по формуле (2), сходится абсолютно на функциях f , имеющих ограниченные производные.

В работах [3, 4] показано, что дробное дифференцирование связано с преобразованием Фурье следующим соотношением:

$$F[D^\alpha u](x) = |x|^\alpha F[u](x), \quad u \in S. \quad (4)$$

В следующем утверждении (также доказанном в работах [3, 4]) показывается, что равенство $D^\alpha I^\alpha \varphi = \varphi$ выполняется на всей области определения риссова потенциала в рамках L_p -пространств. В данном случае гиперсингулярный интеграл применяется к функции $I^\alpha \varphi$, где $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$, и уже может не являться абсолютно сходящимся, поэтому он будет пониматься как условно сходящийся по норме пространства L_p .

Теорема 2.3. Пусть $f = I^\alpha \varphi$, $0 < \alpha < n$, $1 \leq p \leq n/\alpha$, $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Оператор $D^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon^\alpha f$ является левым обратным к риссову потенциалу в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$D^\alpha f = D^\alpha I^\alpha \varphi = \varphi.$$

Следующая теорема дает описание пространств риссовых потенциалов $I^\alpha(L_p)$ в терминах гиперсингулярных интегралов ([3, 4]).

Теорема 2.4. Пусть функция $f(x)$ является локально суммируемой и $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Для того чтобы $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $p_\alpha = \frac{np}{n-\alpha p}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) \in L_{p_\alpha}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad D^\alpha f \in L_p(\mathbb{R}^n).$$

В пространстве $L_{pr}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ финитные функции образуют плотное множество ([3]).

Теорема 2.5. Пространство C_0^∞ плотно в $L_{pr}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < n/\alpha$, $p < r \leq p_\alpha$, $p_\alpha = \frac{np}{n-\alpha p}$.

Также при доказательстве основных результатов будут использоваться следующие утверждения.

При $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) < n$ выполняется равенство ([3, 4])

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} \frac{1}{|y-z|^{n-\beta}} dy = \frac{\gamma_n(\alpha)\gamma_n(\beta)}{\gamma_n(\alpha+\beta)} \frac{1}{|x-z|^{n-(\alpha+\beta)}}. \quad (5)$$

При $0 < \alpha < (n+1)/2$ потенциал Рисса от функции $e^{ia \cdot y}$ является условно сходящимся и вычисляется по следующей формуле ([4, 7])

$$I^\alpha(e^{ia \cdot y}) = \frac{1}{|a|^\alpha} e^{ia \cdot x}. \quad (6)$$

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для функции $\frac{u(z)}{z-x}$, при $0 < \alpha < 1$ в силу определения (2) справедливы выражения

$$D^\alpha \left[\frac{u(z)}{z-x} \right] (y) = \frac{D^\alpha u(y)}{y-x} + \frac{1}{d_{n,1}(\alpha)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z| > \varepsilon} \frac{u(y-z)}{|z|^{2+\alpha}} \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{y-z-x} \right) dz = \frac{D^\alpha u(y)}{y-x} +$$

$$\frac{1}{d_{n,1}(\alpha)} \frac{1}{y-x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z| > \varepsilon} \frac{u(y-z)}{|z|^{2+\alpha}} \frac{(-z)}{y-z-x} dz. \quad (7)$$

При $u \in C^1$ гиперсингулярный интеграл $D^\alpha[u]$ абсолютно сходится, поэтому дробная производная существует и ограничена.

Так как $\alpha < 1$, с учетом формулы (5), модуль второго слагаемого в формуле (8) можно оценить следующей величиной

$$\frac{c_u}{|y-x|} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dz}{|z|^{1+\alpha} |y-z-x|} < \frac{c_{\alpha,u}}{|y-x|^{1+\alpha}}.$$

Поэтому, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, и сделав замену $y-z=t$, получим

$$D^\alpha \left[\frac{u(z)}{z-x} \right] (y) = \frac{D^\alpha u(y)}{y-x} + \frac{1}{d_{n,1}(\alpha)(y-x)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u(t)}{t-x} \frac{t-y}{|t-y|^{2+\alpha}} dt.$$

При этом, модуль второго слагаемого оценивается величиной

$$\frac{c_\alpha}{|y-x|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(t)|}{|t-x|} \frac{t-y}{|t-y|^{1+\alpha}} dt,$$

т.е. дробным интегралом порядка $1-\alpha$ от функции $\frac{|u(t)|}{|t-x|}$.

Таким образом,

$$\left| D^\alpha \left[\frac{u(z)}{z-x} \right] (y) \right| \leq \frac{|D^\alpha u(y)|}{|y-x|} + \frac{c_{1,\alpha}}{|y-x|} I^{1-\alpha} \left[\frac{|u(t)|}{|t-x|} \right] (y), \quad (9)$$

и при $u \in C^1$ и $|y| < R$

$$\left| D^\alpha \left[\frac{u(z)}{z-x} \right] (y) \right| \leq \frac{c_{\alpha,u,R}}{|x-y|^{1+\alpha}}. \quad (10)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. Пусть $u \in S$, $0 < \alpha < 1$. Тогда существует число $p_0 \in (1, \frac{2}{1+\alpha})$, такое что функция $\frac{u(y)}{y-x} \in L_{p_0, q_0}^\alpha(\mathbb{R}^2)$, где $q_0 = 2p_0/(2-\alpha p_0)$, и выполняется равенство

$$\frac{u(y)}{y-x} = I^\alpha D^\alpha \left(\frac{u(z)}{z-x} \right) (y).$$

Доказательство. В силу теоремы 2.4 требуется показать, что существуют числа p_0, q_0 , такие что выполняются условия:

$$\frac{u(y)}{y-x} \in L_{q_0}(\mathbb{R}^2), \quad D^\alpha \left(\frac{u(z)}{z-x} \right) (y) \in L_{p_0}(\mathbb{R}^2),$$

и $q_0 = \frac{2p_0}{2-\alpha p_0}$.

Так как $u \in S$, то функция $\frac{u(y)}{y-x} \in L_{\tilde{p}}(\mathbb{R}^2)$ для $1 \leq \tilde{p} < 2$. Следовательно, по теореме 2.1

$$I^{1-\alpha} \left[\frac{|u(t)|}{|t-x|} \right] (y) \in L_{\tilde{q}}(\mathbb{R}^2), \quad \frac{2}{1+\alpha} \leq \tilde{q} < \frac{2}{\alpha}.$$

Поэтому, так как $D^\alpha u \in L_{p'}(\mathbb{R}^2)$, при $1 < p' < \infty$ (в силу равенства $D^\alpha u = F^{-1}[|x|^\alpha \hat{u}]$), то из формулы (9) следует, что

$$D^\alpha \left[\frac{u(z)}{z-x} \right] (y) = \frac{v(y)}{y-x},$$

где функция $v(y) \in L_{\tilde{q}}(\mathbb{R}^2)$ для $\frac{2}{1+\alpha} \leq \tilde{q} < \frac{2}{\alpha}$.

Далее, в силу оценки (10) дробная производная

$$D^\alpha \left[\frac{u(z)}{z-x} \right] (y) \in L_{p_0}(B_R), \quad 1 \leq p_0 < \frac{2}{1+\alpha},$$

где B_R - шар радиуса R .

Выбирая для $1 \leq p_0 < \frac{2}{1+\alpha}$ число r так, чтобы

$$\frac{2}{(1+\alpha)p_0} < r < \frac{2}{2-p_0},$$

получим, что

$$\frac{2}{1+\alpha} < rp_0 < \frac{2}{\alpha}, \quad p_0 \frac{r}{r-1} > 2,$$

и функция $\frac{v(y)}{y-x} \in L_{p_0}(\mathbb{R}^2 \setminus B_R)$, в силу неравенства Гёльдера.

Таким образом, дробная производная $D^\alpha \left[\frac{u(z)}{z-x} \right] (y) \in L_{p_0}(\mathbb{R}^2)$ для $1 \leq p_0 < \frac{2}{1+\alpha}$. При этом,

$$q_0 = \frac{2p_0}{2-\alpha p_0} \in \left(\frac{2}{2-\alpha}, 2 \right),$$

а при данных значениях q_0 функция $\frac{u(y)}{y-x} \in L_{q_0}(\mathbb{R}^2)$.

Используя результат леммы, доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть $u \in S$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$P_\tau^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\tau a \cdot y} \frac{u(y)}{y-x} dy = \frac{1}{\tau^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha;\tau}(x, y) D^\alpha u(y) dy = \frac{1}{\tau^\alpha} K_\tau^\alpha D^\alpha u(x), \quad (11)$$

где

$$K_{\alpha;\tau}(x, y) = \frac{e^{i\tau a \cdot y}}{|a|^\alpha \gamma_2(\alpha)(y-x)} + \frac{1}{\gamma_2^2(\alpha) d_{2,1}(\alpha) |a|^\alpha} \times \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(z-x)|y-z|^{2-\alpha}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\tau a \cdot s}}{s-x} \frac{z-s}{|z-s|^{2+\alpha}} ds dz, \quad (12)$$

при этом справедлива оценка

$$|K_{\alpha;\tau}(x, y)| \leq \frac{c_\alpha}{|x-y|}.$$

Доказательство. Указанная в теореме оценка следует из формулы (5).
В силу того, что $D^\alpha u(z) \in L_p(\mathbb{R}^2)$ для всех $p \in (1, \infty)$, функция

$$|K_{\alpha;\tau}(x, y)D^\alpha u(y)| \in L_1(\mathbb{R}^2),$$

поэтому в формуле для $K_\tau^\alpha D^\alpha u(y)$ можно применить теорему Фубини.

Меняя во втором слагаемом порядок интегрирования и используя представление $u = I^\alpha D^\alpha u$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^\alpha} K_\tau^\alpha u(x) &= \frac{1}{\tau^\alpha \gamma_2(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\tau a \cdot y}}{|a|^\alpha (y-x)} D^\alpha u(y) dy + \\ &\quad \frac{1}{\gamma_2^2(\alpha) d_{2,1}(\alpha) |a|^\alpha \tau^\alpha} \times \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\tau a \cdot s}}{s-x} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{z-s}{|z-s|^{2+\alpha} (z-x)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{D^\alpha u(y)}{|y-z|^{2-\alpha}} dy dz ds = \\ &\quad \frac{1}{\tau^\alpha \gamma_2(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\tau a \cdot y}}{|a|^\alpha (y-x)} D^\alpha u(y) dy + \\ &\quad \frac{1}{\gamma_2(\alpha) d_{2,1}(\alpha) |a|^\alpha \tau^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\tau a \cdot s}}{s-x} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{z-s}{|z-s|^{2+\alpha} (z-x)} I^\alpha D^\alpha u(z) dz ds = \\ &\quad \frac{1}{\tau^\alpha \gamma_2(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\tau a \cdot y}}{|a|^\alpha (y-x)} D^\alpha u(y) dy + \\ &\quad \frac{1}{\gamma_2(\alpha) d_{2,1}(\alpha) |a|^\alpha \tau^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\tau a \cdot s}}{s-x} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{z-s}{|z-s|^{2+\alpha} (z-x)} u(z) dz ds, \end{aligned}$$

применяя формулу (8), можно записать, что

$$\frac{1}{\tau^\alpha} K_\tau^\alpha u(x) = \frac{1}{\gamma_2(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\tau a \cdot y}}{\tau^\alpha |a|^\alpha} D^\alpha \left[\frac{u(z)}{z-x} \right] (y) dy,$$

откуда с помощью формулы (6) получаем, что

$$\frac{1}{\tau^\alpha} K_\tau^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} D^\alpha \left[\frac{u(z)}{y-z} \right] (y) I^\alpha [e^{i\tau a \cdot s}] (y) dy,$$

и после смены порядка интегрирования ($u \in S$), приходим к равенству

$$\frac{1}{\tau^\alpha} K_\tau^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\tau a \cdot s} I^\alpha D^\alpha \left[\frac{u(z)}{z-x} \right] (s) ds = P_\tau^\alpha u(x).$$

Замечание. В случае ограниченной области Ω для оператора $P_{\tau,\Omega}$ справедливо равенство

$$P_{\tau,\Omega} u(x) = \int_{\Omega} e^{i\tau a \cdot y} \frac{u(y)}{y-x} dy = \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha;\tau,\Omega}(x, y) D^\alpha u(y) dy = K_{\tau,\Omega}^\alpha D^\alpha u(x), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} K_{\alpha;\tau,\Omega}(x, y) &= \frac{e^{i\tau a \cdot y}}{\gamma_2(\alpha)(y-x)} + \frac{1}{\gamma_2^2(\alpha) d_{2,1}(\alpha)} \times \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(z-x)|y-z|^{2-\alpha}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{s-x} \frac{z-s}{|z-s|^{2+\alpha}} \int_{\Omega} \frac{e^{i\tau a \cdot s'}}{|s-s'|^{n-\alpha}} ds' ds dz, \quad (14) \end{aligned}$$

при этом справедлива оценка

$$|K_{\alpha;\tau}(x, y)| \leq \frac{c_{\alpha,\Omega}}{\tau^\alpha |x-y|}.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Так как $u \in L_{pp\alpha}^\alpha(\mathbb{R}^2)$, то существует последовательность функций $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, такая что $u_n \rightarrow u$ в $L_{pp\alpha}^\alpha$, т.е. при $n \rightarrow \infty$

$$\|u - u_n\|_{L_{p\alpha}(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0, \quad \|D^\alpha u - D^\alpha u_n\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0.$$

В этом случае

$$P_{\tau,\Omega}u(x) = P_{\tau,\Omega}(u - u_n)(x) + P_{\tau,\Omega}(u_n)(x).$$

По замечанию к теореме 3.1

$$P_{\tau,\Omega}u_n(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha;\tau,\Omega}(x, z) D^\alpha u_n(z) dz,$$

где $K_{\alpha;\tau,\Omega}(x, z)$ определяется по формуле (14) и $|K_{\alpha;\tau,\Omega}(x, z)| \leq \frac{c_\alpha}{\tau^\alpha |z-x|}$, следовательно, $K_{\tau,\Omega}^\alpha : L_p(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_{p_1}(\mathbb{R}^2)$.

Таким образом,

$$P_{\tau,\Omega}u(x) = P_{\tau,\Omega}(u - u_n)(x) + K_{\tau,\Omega}^\alpha(D^\alpha u_n - D^\alpha u)(x) + K_{\tau,\Omega}^\alpha D^\alpha u(x).$$

В силу ограниченности области Ω интеграл $P_{\tau,\Omega}u \in L_{p_1}(\mathbb{R}^2)$, и при $n \rightarrow \infty$

$$\|P_{\tau,\Omega}(u - u_n)\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^2)} \leq c_{\alpha,\Omega}^1 \|u - u_n\|_{L_{p\alpha}(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0.$$

Так как $|K_{\tau,\Omega}^\alpha D^\alpha u| \leq I^1 |D^\alpha u|$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\|K_{\tau,\Omega}^\alpha(D^\alpha u - D^\alpha u_n)\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^2)} \leq c_\alpha^2 \|D^\alpha u - D^\alpha u_n\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0.$$

Следовательно, $P_{\tau,\Omega}u = K_{\tau,\Omega}^\alpha D^\alpha u$ в $L_{p_1}(\mathbb{R}^2)$ и

$$\|P_{\tau,\Omega}u\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{c_\alpha}{\tau^\alpha} \|D^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{c_\alpha}{\tau^\alpha} \|u\|_{L_{pp\alpha}^\alpha(\mathbb{R}^2)}.$$

Утверждение следствия 1.2 следует из доказанной оценки и теоремы 2.2 в силу ограниченности области Ω .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арбузов Э. В., Бухгейм А. Л. *Формула Карлемана для уравнения Гельмгольца на плоскости*, Сиб. Мат. Ж., **47** № 3 (2006), 518–526.
- [2] Bukhgeim A. L. *Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **16** № 1 (2008), 19–33.
- [3] Самко С. Г. *О пространствах риссовых потенциалов*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **40** № 5 (1976), 1143–1172.
- [4] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев Д. Л. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [5] Stein E. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [6] Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, Москва, 1989.
- [7] Ландкоф Н. С. *Основы современной теории потенциала*, Наука, Москва, 1966.

ЭДУАРД ВИТАЛЬЕВИЧ АРБУЗОВ
 ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН,
 ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,
 630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
 E-mail address: arbuzov@math.nsc.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 10, стр. С.10–С.15 (2013)

УДК 517.95

MSC 35L20

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ АКУСТИЧЕСКОГО
ЗОНДИРОВАНИЯ ДНА ВОДОЕМОВ

А.В. БЕЛОНОСОВА, В.С. БЕЛОНОСОВ

ABSTRACT. Acoustic waves in complex media formed by a horizontal water layer on the boundary of an elastic half-space are considered. The waves are generated by a point source on a free water surface. A direct initial-boundary value problem is formulated for the corresponding partial differential equations. If the mechanical parameters of the elastic medium depend only on depth, the inverse dynamic problem of finding the acoustic impedance of the medium is solved.

Keywords: complex medium, acoustic waves, direct problem, inverse dynamic problem, acoustic impedance.

1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим процесс распространения акустических колебаний в сложной среде, состоящей из плоского горизонтального слоя воды, лежащего на границе упругого полупространства. Считается, что вода занимает область $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -h < z < 0\}$ трехмерного пространства $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, а упругая среда находится в полупространстве $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, z > 0\}$. Символом $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ обозначим вектор смещения точки (x, y, z) относительно положения равновесия в момент времени t ; u_x, u_y, u_z — компоненты вектора \mathbf{u} .

BELONOSOVA, A.V., BELONOSOV, V.S., DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF RESERVOIR BOTTOM SOUNDING.

© 2013 Белоносова А.В., Белоносов В.С.

Работа поддержана Президиумом РАН (программа фундаментальных исследований № 15, проект № 121) и Сибирским отделением РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 30).

Поступила 19 апреля 2013 г., опубликована 31 мая 2013 г.

Хорошо известно (см. [1]), что в жидкости поле смещений при звуковых колебаниях является потенциальным, то есть $\mathbf{u} = \nabla\varphi$. Потенциал φ удовлетворяет волновому уравнению

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi,$$

где c — скорость звука, Δ — оператор Лапласа. Вызываемое звуковыми колебаниями избыточное давление определяется формулой

$$p = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho_0 c^2 \Delta \varphi,$$

ρ_0 — плотность жидкости. Предполагается, что акустические колебания порождены источником, расположенным на поверхности воды в точке $(0, 0, -h)$. Такой источник моделируется при помощи граничного условия

$$(2) \quad p(x, y, -h, t) = -f(t)\delta(x)\delta(y).$$

Колебания в полупространстве Π описываются системой уравнений теории упругости. Всюду в дальнейшем будем считать упругую среду изотропной с параметрами Ламе λ , μ и плотностью ρ . При этих условиях общая система теории упругости принимает вид

$$(3) \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + (\nabla \lambda) \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla \mu \cdot (U + U^*),$$

где U — матрица Якоби отображения $(x, y, z) \mapsto \mathbf{u}(x, y, z)$.

На границе раздела жидкой и твердой сред нормальные смещения и напряжения должны быть непрерывны, а тангенциальные напряжения равны нулю. Иными словами, при $z = 0$ имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = u_z, \quad p = -\sigma_z, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

σ_z , τ_{xz} и τ_{yz} — соответствующие компоненты тензора напряжений. В данном случае эти условия означают, что

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-0} &= u_z \Big|_{z=+0}, \\ p(x, y, -0, t) &= -\left(\lambda \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=+0}, \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \Big|_{z=+0} &= \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \Big|_{z=+0} = 0. \end{aligned}$$

Наконец, при $t \leq 0$ среда покоилась, то есть

$$(5) \quad \varphi \Big|_{t \leq 0} = 0, \quad \mathbf{u} \Big|_{t \leq 0} = \mathbf{0}.$$

Прямой задачей будем далее называть задачу о построении скалярной функции φ и вектор-функции \mathbf{u} , которые заданы соответственно в областях Ω и Π , удовлетворяют уравнениям (1)–(4) при всех $t \in \mathbb{R}$, а при неположительных t — условиям (5). Граничное воздействие $f(t)$ считается известным и равным нулю при $t \leq 0$.

2. ОДНОМЕРНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Пусть функции λ , μ , ρ дважды непрерывно дифференцируемы и зависят только от глубины z . Тогда прямую задачу (1)–(5) можно привести к «одномерной». Следуя [2], положим

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u}(x, y, z, t) dx dy = \mathbf{W}(z, t) \equiv (W_x, W_y, W_z).$$

Нетрудно понять, что компоненты W_x и W_y тождественно равны нулю. Действительно, в цилиндрических координатах r , θ , z функции u_x и u_y имеют вид

$$u_x = A(r, \theta, z, t) \cos(\psi(r, \theta, z, t)), \quad u_y = A(r, \theta, z, t) \sin(\psi(r, \theta, z, t)).$$

В силу симметрии исходной задачи, эти значения не должны зависеть от поворотов системы координат вокруг оси z . Инвариантность относительно поворота на угол α означает, что

$$A(r, \theta + \alpha, z, t) = A(r, \theta, z, t), \quad \psi(r, \theta + \alpha, z, t) = \psi(r, \theta, z, t) + \alpha.$$

Положив $\alpha = -\theta$, получим

$$A(r, \theta, z, t) \equiv A(r, z, t), \quad \psi(r, \theta, z, t) = \psi(r, 0, z, t) + \theta \equiv \psi_0 + \theta.$$

Следовательно,

$$u_x = A(r, z, t) \cos(\psi_0 + \theta), \quad u_y = A(r, z, t) \sin(\psi_0 + \theta).$$

Переходя в формулах для W_x и W_y к интегрированию в полярных координатах, находим

$$(6) \quad \begin{aligned} W_x(z, t) &= \int_0^\infty A(r, z, t) \left(\int_0^{2\pi} \cos(\psi_0 + \theta) d\theta \right) r dr = 0, \\ W_y(z, t) &= \int_0^\infty A(r, z, t) \left(\int_0^{2\pi} \sin(\psi_0 + \theta) d\theta \right) r dr = 0. \end{aligned}$$

Так как скорость распространения акустических колебаний конечна, а инициализирующее воздействие сосредоточено в точке $(0, 0, -h)$, то при любых фиксированных (z, t) вектор-функция $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ финитна по (x, y) . Предположив, что $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ тождественно равна нулю при $x^2 + y^2 \geq R^2(z, t)$, и воспользовавшись формулой Грина, получаем

$$(7) \quad \begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^{k+m} \mathbf{u}}{\partial x^k \partial z^m} dx dy &= \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{\partial^{k+m-1} \mathbf{u}}{\partial x^{k-1} \partial z^m} \cos \alpha ds = 0, \\ \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^{k+m} \mathbf{u}}{\partial y^k \partial z^m} dx dy &= \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{\partial^{k+m-1} \mathbf{u}}{\partial y^{k-1} \partial z^m} \cos \beta ds = 0. \end{aligned}$$

Здесь $k > 0$, $m \geq 0$; α и β — углы между внешней нормалью к окружности $x^2 + y^2 = R^2$ и осями x , y соответственно.

Если теперь продифференцировать уравнение (1) по переменной z , а затем проинтегрировать систему (1)–(5) по переменным (x, y) , используя равенства

(6) и (7), то для функции $w(z, t) \equiv W_z(z, t)$ получится следующая начально-краевая задача

$$(8) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad -h < z < 0;$$

$$(9) \quad \rho_0 c^2 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=-h} = f(t);$$

$$(10) \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \right], \quad z > 0;$$

$$(11) \quad w \Big|_{z=-0} = w \Big|_{z=+0};$$

$$(12) \quad \rho_0 c^2 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=-0} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=+0};$$

$$(13) \quad w \Big|_{t \leq 0} = 0.$$

3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Итак, «прямая задача» о распространении акустических колебаний, возбуждаемых точечным источником в вертикально-неоднородной среде, сводится к решению системы (8)–(13). Предположим, что эта система имеет решение $w(z, t)$, измерим его значения $g(t) \equiv w(-h, t)$ на поверхности $z = -h$ и попытаемся использовать функцию g для восстановления механических параметров упругой среды. Иными словами, рассмотрим следующий вопрос: как найти строение упругой среды, если известны точечное воздействие $f(t)$ и соответствующий ему режим колебаний $g(t)$ на поверхности $z = -h$? Будет показано, что при определенных условиях этими данными однозначно определяется так называемый акустический импеданс, то есть произведение плотности $\rho(z)$ и скорости распространения продольных волн $v_p(z) = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$.

Прежде всего отметим, что по функциям f и g легко восстанавливается режим колебаний $w(z, t)$ в водной среде $-h < z < 0$. В самом деле, добавив к уравнениям (8)–(9) дополнительное условие $w(-h, t) = g(t)$, придем к классической задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad -\infty < t < \infty, \quad -h < z < 0; \\ \rho_0 c^2 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= f(t), \quad w \Big|_{z=-h} = g(t). \end{aligned}$$

Точное решение этой задачи дается формулой Даламбера (см. [3]):

$$w(z, t) = \frac{1}{2} [g(t + \zeta) + g(t - \zeta)] + \frac{1}{2c\rho_0} \int_{t-\zeta}^{t+\zeta} f(\tau) d\tau, \quad \zeta = \frac{z+h}{c}.$$

Подставляя найденное значение $w(z, t)$ в (11) и (12), приходим к следующей *обратной задаче*: найти акустический импеданс ρv_p для уравнения (10), если известно, что для некоторого его решения, удовлетворяющего условию (13), выполнены соотношения

$$(14) \quad w \Big|_{z=+0} = G(t) \equiv \frac{1}{2} [g(t + h/c) + g(t - h/c)] + \frac{1}{2c\rho_0} \int_{t-h/c}^{t+h/c} f(\tau) d\tau,$$

$$(15) \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=+0} = F(t) \equiv \frac{\rho_0 c}{2} [g'(t + h/c) - g'(t - h/c)] + \\ + \frac{1}{2} [f(t + h/c) + f(t - h/c)].$$

Такая обратная задача подробно изучена в [4]–[5]. Приведем алгоритм восстановления импеданса, вытекающий из результатов [4]–[5].

Перепишем уравнение (10) в канонической форме. Положим

$$\xi(z) = \int_0^z \frac{dy}{v_p(y)}, \quad \sigma(\xi) = \rho(z(\xi)) \cdot v_p(z(\xi)).$$

Физический смысл величины $\xi(z)$ — время прохождения продольных волн из глубины $z > 0$ до границы полупространства П. Перейдем от z к новой независимой переменной ξ , а от $w(z, t)$ — к $u(\xi, t) = \sqrt{\sigma(\xi)} w(z(\xi), t)$. После простых преобразований уравнение (10) превратится в

$$(16) \quad u_{\xi\xi} - q(\xi)u = u_{tt}, \quad \xi > 0, \quad t \in R; \quad q(\xi) = (\ln \sqrt{\sigma})'' + [(\ln \sqrt{\sigma})']^2.$$

Нижние индексы обозначают здесь операции дифференцирования по ξ и t . Условия (13)–(15) приобретают вид

$$(17) \quad (u_{\xi} - ku) \Big|_{\xi=0} = \sigma^{-1/2}(0)F(t), \quad u \Big|_{\xi=0} = \sigma^{1/2}(0)G(t), \quad u \Big|_{t \leq 0} = 0,$$

где $2k = \sigma'(0)/\sigma(0)$.

Предположим для простоты, что параметры λ , μ , ρ на достаточно большой глубине $z \geq H > 0$ постоянны. При этом условии в [4]–[5] установлено, что если $F(t)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^1(R)$ и обращается в нуль для отрицательных t , то производная $G'(t)$ также принадлежит $W_2^1(R)$, а преобразования Фурье

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(t) dt, \quad \Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} G'(t) dt$$

определены на множестве $\{\omega : \text{Im } \omega \leq 0, \omega \neq 0\}$ и связаны соотношением

$$\Psi(\omega) = P(\omega)\Phi(\omega).$$

Здесь $P(\omega)$ — так называемая переходная функция среды. Таким образом, данные f и g исходной обратной задачи позволяют найти $P(\omega)$.

В свою очередь, переходная функция $P(\omega)$ однозначно определяет спектральную функцию распределения $r(\lambda)$ линейного оператора, порожденного в пространстве $L_2(0, \infty)$ дифференциальным выражением $u_{\xi\xi} - q(\xi)u$ с граничным условием $u_{\xi}(0) - ku(0) = 0$:

$$r'(\lambda) = -\frac{\sigma(0)}{\pi\sqrt{\lambda}} \cdot \text{Re } P(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda > 0.$$

При $\lambda \leq 0$ функция $r(\lambda)$ тождественно равна нулю.

Если спектральная функция уже найдена, то коэффициенты соответствующего дифференциального оператора могут быть восстановлены несколькими способами. Один из самых эффективных методов, предложенный М.Г. Крейном, приводит к интегральному уравнению свертки

$$s(\xi, \eta) + \int_0^{\eta} K(\xi - \zeta) \cdot s(\zeta, \eta) d\zeta = 1, \quad 0 \leq \xi \leq \eta,$$

с ядром

$$K(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos(\omega\xi) d \left\{ r(\omega^2) - \frac{2\omega}{\pi} \right\}.$$

Это уравнение имеет единственное решение $s(\xi, \eta)$, которое можно найти известным методом Левинсона. Искомые коэффициенты $q(\xi)$, k и акустический импеданс $\sigma(\xi)$ выражаются через s явными формулами

$$q(\xi) = \frac{1}{s(2\xi, 2\xi)} \frac{d^2}{d\xi^2} s(2\xi, 2\xi), \quad k = \frac{d}{d\xi} \ln s(2\xi, 2\xi) \Big|_{\xi=0},$$

$$\sigma(\xi) = \sigma(0) \cdot s^2(2\xi, 2\xi).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Толстой, К.С. Клей, *Акустика океана*, Мир, Москва, 1969.
- [2] А.С. Алексеев, *Обратные динамические задачи сейсмоки*, в Сб. «Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных» под ред. М.М. Лаврентьева, Наука, Москва, 1967, 9–84.
- [3] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1972.
- [4] А.С. Алексеев, В.С. Белоносов, *Спектральные методы в одномерных задачах теории распространения волн*, Труды ИВМиМГ СО РАН, Сер. мат. моделирование в геофизике, вып. 6 (1998), 7–37.
- [5] A.S. Alekseev, V.S. Belonosov, *Direct and inverse problems of wave propagation through a one-dimensional inhomogeneous medium*, Euro. Jnl of Appl. Math., Cambridge University Press, **10** (1999), 79–96.

Антонина Васильевна Белоносова
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Лаврентьева 6,
630090, Новосибирск, Россия

Владимир Сергеевич Белоносов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: bvs@math.nsc.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 10, стр. С.16–С.27 (2013)

УДК 519.6

MSC 65J20

**О СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ ОШИБКИ ОПЕРАТОРА
СЛАУ В ЗАДАЧЕ КАЛИБРОВКИ ЛАЗЕРНОГО
ИЗМЕРИТЕЛЯ ТОЛЩИНЫ ГОРЯЧЕГО ПРОКАТА**

В.Г. ГЛАВНЫЙ, А.В. ПЕНЕНКО, С.В. ДВОЙНИШНИКОВ

ABSTRACT. The problem for contactless thickness measurements of hot metal sheet has been considered. Measurement device calibration problem with the set of thickness measurements has been posed. The calibration problem has been recast to the linear ill-conditioned system $A_h x = b_\delta$ with both inaccurate matrix A_h and right-hand side b_δ . A method for estimation of operator error has been proposed.

Keywords: linear inverse problem, operator error, statistical estimation, laser thickness measurements, thickness gauge of metal sheet products; обратная задача, статистическое оценивание ошибки оператора, измерение толщины проката, калибровка лазерного измерителя;

1. ВВЕДЕНИЕ

Повышение эффективности промышленного производства связано с улучшением метрологических характеристик технологических измерительных систем [1, 2]. Объем производства листового металлопроката в РФ составляет 28 млн. тонн в год, для контроля толщины используются измерительные системы с относительной погрешностью 0,05..2%. Ухудшение погрешности технологического контроля на 0,1% эквивалентно потере 28 тыс. тонн проката в год (более

GLAVNY, V.G., PENENKO, A.V., DVOYNISHNIKOV, S.V., ON A STATISTICAL ESTIMATE OF THE OPERATOR ERROR IN LINEAR EQUATION SYSTEM ARISING IN THE CALIBRATION PROBLEM FOR LASER THICKNESS MEASUREMENTS OF HOT METAL SHEET.

© 2013 Главный В.Г., Пененко А.В., Двойнишников С.В.

РАБОТА ВЫПОЛНЕНА ПРИ ПОДДЕРЖКЕ ФОНДА СОДЕЙСТВИЯ РАЗВИТИЮ МАЛЫХ ФОРМ ПРЕДПРИЯТИЙ В НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ СФЕРЕ (ГК. 11303Р/20559).

Поступила 1 февраля 2013 г., опубликована 31 мая 2013 г.

300 млн. рублей). Для достижения высокой точности технологических процессов используют периодические процедуры калибровки и поверки средств измерений.

Для определения толщины горячего проката преимущественно используются бесконтактные радиоизотопные, рентгеновские и лазерные измерители. Радиационные измерители (RM200, F3500 и др.) основаны на анализе доли поглощенных в толще проката высокоэнергетических частиц. Метод их калибровки основан на измерениях эталонных мер толщины, изготовленных из той же марки стали, что и выпускаемый листовой прокат [3].

Альтернативой радиационным бесконтактным являются перспективные измерители лазерного типа (ЛАД-0РЗ, MDCV 83200-2Н и др.). В числе их преимуществ - радиационная безопасность, широкий динамический диапазон и независимость показаний от физико-химических свойств металла, небольшая стоимость. Для измерителей этого типа требуются достаточно сложные процедуры юстировки и калибровки. На момент выполнения работы не было найдено открытых публикаций с описанием способов их точной калибровки.

В данной работе рассмотрена задача калибровки лазерного измерителя толщины горячего листового проката. Задача калибровки сведена к решению линейной некорректной задачи $A_h x = b_\delta$ с ошибкой в операторе и правой части уравнения. Для решения используется обобщенный метод невязки. Статья посвящена способу для оценки ошибки оператора A_h , знание которой обязательно для решения задачи данным методом.

2. ЗАДАЧА КАЛИБРОВКИ ЛАЗЕРНОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ ТОЛЩИНЫ

Задачу калибровки лазерного измерителя толщины проката можно сформулировать в линейной геометрической постановке. С двух сторон проката размещены лазерные дальномеры $M_1 \dots M_P$ - это измерители расстояния по лучу. Лист проката моделируется при помощи двух параллельных плоскостей Π_1 и Π_2 , расстояние между которыми равно текущей толщине проката. Выбрана декартова система координат XYZ. Ноль системы координат совпадает с точкой размещения одного из дальномеров в верхнем полупространстве относительно плоскости Π_1 . Направление оси OZ положительно согласовано с направлением вектора нормали плоскости Π_1 . На рисунке 1 показана схема измерения с использованием шести дальномеров. Для произвольного дальномера, выборочное измерение с индексом «i», удовлетворяют нормированному уравнению плоскости:

$$\langle (\bar{r}_0 + \lambda_i \cdot \bar{n}_0), \bar{\pi}_i \rangle - \rho_i = 0.$$

При калибровке требуется уточнить значения параметров измерительной системы, которые состоят из направляющих векторов $\bar{n}_0^k = l_0^k \cdot (\alpha_0^k; \beta_0^k; \gamma_0^k)$, по направлению которых производится измерение расстояния, и векторов размещения дальномеров $\bar{r}_0^k = (x_0^k; y_0^k; z_0^k)$. Измеряемыми величинами являются измеренные значения расстояний λ_i^k и значения вектора нормали плоскости $\bar{\pi}_i$. Компоненты векторов \bar{r}_0^k и \bar{n}_0^k имеют ограниченные области допустимых значений, которые обусловлены сборкой и юстировкой толщиномера.

Калибровка толщиномера проводится с использованием набора мер толщины стального проката, то есть набора эталонных пластин заданной толщины [3]. Пластины поочередно помещаются в измерительную область толщиномера, и проводится запись измерений $\{\lambda_i^k\}$ для различных вариантов размещения ρ_i

где

$$\begin{aligned} \bar{z}_k &= (x_0^k; y_0^k; z_0^k; (l_0^k \cdot \alpha_0^k); (l_0^k \cdot \beta_0^k); (l_0^k \cdot \gamma_0^k))^T \\ \bar{u}_k^\delta &= \Lambda^k \cdot ([\rho_1 + (H_1 + \delta_1)]; \dots [\rho_N + (H_N + \delta_N)])^T \\ M_k^h &= \begin{pmatrix} (\phi_1 + \eta_1^\phi) & \dots & (\phi_N + \eta_N^\phi) \\ (\psi_1 + \eta_1^\psi) & \dots & (\psi_N + \eta_N^\psi) \\ (\omega_1 + \eta_1^\omega) & \dots & (\omega_N + \eta_N^\omega) \\ (\lambda_1^k + \xi_1^k)(\phi_1 + \eta_1^\phi) & \dots & (\lambda_N^k + \xi_N^k)(\phi_N + \eta_N^\phi) \\ (\lambda_1^k + \xi_1^k)(\psi_1 + \eta_1^\psi) & \dots & (\lambda_N^k + \xi_N^k)(\psi_N + \eta_N^\psi) \\ (\lambda_1^k + \xi_1^k)(\omega_1 + \eta_1^\omega) & \dots & (\lambda_N^k + \xi_N^k)(\omega_N + \eta_N^\omega) \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (2) зависит от значений ρ_i , которые равны расстоянию от центра системы координат до плоскости Π_1 . Измерение значений ρ_i с приемлемым значением погрешности - сложная задача. Для исключения значений ρ_i из задачи можно перейти к вспомогательному уравнению:

$$(3) \quad A_h \bar{z}_0 = \bar{p}_\delta,$$

где \bar{z}_0 - блочное объединение векторов \bar{z}_k ; \bar{p}_δ - вектор, составленный из блочно-линейной комбинации векторов \bar{u}_k^δ , не зависящий от значений ρ_i ; A_h - блочная матрица, составленная из матриц M_k^h ;

Матрицу A_h можно представить в виде:

$$(4) \quad A_h = B \cdot \text{diag}(M_1^h, \dots, M_P^h) = BM_h.$$

Матрица B - это матрица составленная из диагональных подматриц, размером $N \times N$, на диагоналях которых находятся коэффициенты линейного включения измерения с индексом «1» для выбранных дальномеров. Например, используя матрицу $B = (\text{diag}_N(+1) \quad \text{diag}_N(-1))$ можно найти компоненты векторов \bar{r}_0^k и \bar{n}_0^k для дальномеров с индексами 1 и 2, без явного использования значений ρ_i :

$$A_h = (\mathbf{diag}_N(+1) \quad \mathbf{diag}_N(-1)) \cdot \begin{pmatrix} M_1^h & 0 \\ 0 & M_2^h \end{pmatrix} = (+M_1^h \quad -M_2^h).$$

Задачу калибровки может быть сведена к решению уравнения (3) для всех $k=1..P$. Оператор этого уравнения - это матрица элементы которой измеренные с шумом величины. Так как компоненты вектора \bar{z}_0 имеют ограниченные области допустимых значений, то начиная с некоторого уровня шума $\bar{\eta}^\pi$, ξ^k и δ уравнение (3) становится несовместным. Для решения используется обобщенный метод невязки [4, 5]:

$$(5) \quad \min\{\|z\| : z \in D, \|A_h z - p_\delta\|^2 = (\delta + h\|z\| + \mu_\eta(p_\delta, A_h))^2\},$$

в котором δ - ошибка правой части, h - ошибка оператора, $\mu_\eta(p_\delta, A_h)$ - мера несовместности уравнения (3);

Для поиска решения (5) необходимо знать значения параметров h и δ . Параметр δ показывает уровень ошибки в правой части уравнения (3). Оценку для него можно вычислить после установления свойств шумового процесса $\langle \delta_i \rangle$ [6].

Параметр h показывает близость приближенного оператора A_h к его точному значению, и для него должно выполняться неравенство:

$$\|A_h - A_0\| \leq h,$$

где A_0 - точное значение оператора A для уравнения (3) при отсутствии шума. Элементы матрицы A_h зависят от сочетания измеряемых с шумом величин, что затрудняет вычисление значения параметра h .

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОШИБКИ ОПЕРАТОРА

Для выборочной матрицы оператора A_h уравнения (3) значение параметра h будем вычислять по формуле:

$$h = \|A_h - A_0\| = \|B \cdot \text{diag}(M_1^{err}, \dots, M_P^{err})\|.$$

Матрица M_k^{err} - это матрица ошибки для дальномерера с индексом « k »:

$$M_k^{err} = \begin{pmatrix} \eta_1^\phi & \dots & \eta_N^\phi \\ \eta_1^\psi & \dots & \eta_N^\psi \\ \eta_1^\omega & \dots & \eta_N^\omega \\ (\eta_1^\phi(\lambda_1^k + \xi_1^k) + \phi_1 \xi_1^k) & \dots & (\eta_N^\phi(\lambda_N^k + \xi_N^k) + \phi_N \xi_N^k) \\ (\eta_1^\psi(\lambda_1^k + \xi_1^k) + \psi_1 \xi_1^k) & \dots & (\eta_N^\psi(\lambda_N^k + \xi_N^k) + \psi_N \xi_N^k) \\ (\eta_1^\omega(\lambda_1^k + \xi_1^k) + \omega_1 \xi_1^k) & \dots & (\eta_N^\omega(\lambda_N^k + \xi_N^k) + \omega_N \xi_N^k) \end{pmatrix}^T$$

Для h справедливо неравенство:

$$h \leq \|B\| \cdot \|\text{diag}(M_1^{err}, \dots, M_P^{err})\|.$$

Для матрицы $\text{diag}(M_1^{err}, \dots, M_P^{err})$ выполняется лемма:

Лемма 1. Если матрица $A = \text{diag}(B_1, \dots, B_M)$ вещественная, то $\|A\| = \max_{n=1..M} (\|B_n\|)$.

Доказательство. $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{\lambda_{\max}(\text{diag}(B_1^T B_1, \dots, B_M^T B_M))} = \max \left(\sqrt{\lambda(B_1^T B_1)}, \dots, \sqrt{\lambda(B_M^T B_M)} \right) = \max (\|B_1\|, \dots, \|B_M\|). \quad \square$

Тогда задачу вычисления h можно свести к оценке нормы матрицы M_k^{err} :

$$(6) \quad h \leq \|B\| \cdot \max_{k=1..P} (\|M_k^{err}\|) = \|B\| \cdot \max_{k=1..P} (h^k).$$

При вычислении h будем предполагать, что выполняются следующие условия:

Условие 1. Все значения, с физической размерностью расстояния, нормированы на масштабный коэффициент такой, что выполняется условие:

$$\max_{i=1..N} (\{\lambda_i^1 + \xi_i^1\}, \dots, \{\lambda_i^P + \xi_i^P\}, \{H_i + \delta_i\}) \equiv 1$$

Условие 2. Шум измерений $(\eta_i^\phi; \eta_i^\psi; \eta_i^\omega); \xi_i^k; \delta_i$ это выборки из случайных независимых нормально распределенных величин с нулевым средним и дисперсией $\eta_\phi^2, \eta_\psi^2, \eta_\omega^2, \xi_k^2, \delta^2$ соответственно.

Условия (1, 2) определяют исходные данные как безразмерные ограниченные величины с известным законом распределения шума.

Выделим из M_k^{err} три вспомогательных матрицы:

$$M_k^{err1} = \begin{pmatrix} \phi_1 \xi_1^k & \psi_1 \xi_1^k & \omega_1 \xi_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_N \xi_N^k & \psi_N \xi_N^k & \omega_N \xi_N^k \end{pmatrix}$$

$$M_k^{err2} = \begin{pmatrix} \eta_1^\phi & \eta_1^\psi & \eta_1^\omega \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_N^\phi & \eta_N^\psi & \eta_N^\omega \end{pmatrix}$$

$$M_k^{err3} = \begin{pmatrix} (\lambda_1^k + \xi_1^k)\eta_1^\phi & (\lambda_1^k + \xi_1^k)\eta_1^\psi & (\lambda_1^k + \xi_1^k)\eta_1^\omega \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\lambda_N^k + \xi_N^k)\eta_N^\phi & (\lambda_N^k + \xi_N^k)\eta_N^\psi & (\lambda_N^k + \xi_N^k)\eta_N^\omega \end{pmatrix}$$

В силу того, что строки из нулей, добавленным к некоторой матрице снизу или сверху не будут влиять на её вторую норму, действительно неравенство:

$$(7) \quad \|M_k^{err}\| \leq \|M_k^{err1}\| + \|M_k^{err2}\| + \|M_k^{err3}\|.$$

Для нормы $\|M_k^{err}\|$ будем вычислять верхнюю оценку и оценку математического ожидания $E(\|M_k^{err}\|)$, которая может быть использована для решения задачи при большом числе независимых измерений.

3.1. Вычисление верхней границы h_M^k . Для вычисления оценки значения $\|M_k^{err1}\|$ воспользуемся условием нормировки компонент вектора нормали: $(\phi_i)^2 + (\psi_i)^2 + (\omega_i)^2 = 1$. Выполняются следующие неравенства:

$$\|M_k^{err1}\| \leq \|M_k^{err1}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1..N} (\xi_i^k)^2}$$

$$\|M_k^{err2}\| \leq \|M_k^{err2}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1..N} [(\eta_i^\phi)^2 + (\eta_i^\psi)^2 + (\eta_i^\omega)^2]}$$

$$\|M_k^{err3}\| \leq \|M_k^{err3}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1..N} (\lambda_i^k + \xi_i^k)^2 \cdot [(\eta_i^\phi)^2 + (\eta_i^\psi)^2 + (\eta_i^\omega)^2]} \leq$$

$$\sqrt{\max_{i=1..N} (\lambda_i^k + \xi_i^k)^2 \cdot \sum_{i=1..N} [(\eta_i^\phi)^2 + (\eta_i^\psi)^2 + (\eta_i^\omega)^2]} = \max_{i=1..N} (\lambda_i^k + \xi_i^k) \cdot \|M_k^{err2}\|_F$$

Сумма квадратов K независимых нормально распределенных случайных величин $g_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ подчиняется распределению χ_K^2 (хи-квадрат) с K степенями свободы [7]. Для значений g_i с вероятностью $(1 - \alpha)$ выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1..K} (g_i)^2 \leq \chi_{\alpha, K}^2,$$

где $\chi_{\alpha, K}^2$ - квантиль распределения χ_K^2 для уровня значимости α . Для больших значений K распределение стремится к нормальному $\chi_K^2 \approx \mathcal{N}(K, 2K)$.

С учетом свойств измерительного шума с вероятностью $(1 - \alpha)$ выполняются следующие неравенства:

$$\sqrt{\sum_{i=1..N} (\xi_i^k)^2} \leq h_{1M}^k = \sqrt{\chi_{\alpha, N}^2 \cdot \xi_k^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1..N} [(\eta_i^\phi)^2 + (\eta_i^\psi)^2 + (\eta_i^\omega)^2]} \leq h_{2M}^k = \sqrt{\chi_{\alpha, N}^2 \cdot (\eta_\phi^2 + \eta_\psi^2 + \eta_\omega^2)}$$

$$\begin{aligned} \max_{i=1..N} (\lambda_i^k + \xi_i^k) \cdot \sqrt{\sum_{i=1..N} [(\eta_i^\phi)^2 + (\eta_i^\psi)^2 + (\eta_i^\omega)^2]} &\leq \\ h_{3M}^k = \max_{i=1..N} (\lambda_i^k + \xi_i^k) \cdot \sqrt{\chi_{\alpha,N}^2 \cdot (\eta_\phi^2 + \eta_\psi^2 + \eta_\omega^2)} & \\ h_M^k = (h_{1M}^k + h_{2M}^k + h_{3M}^k) &\geq \|M_k^{err}\|. \end{aligned}$$

3.2. Вычисление верхней границы математического ожидания h_E^k . В работе [8] показано, что для любой ограниченной матрицы $A = (a_{ij})$ справедливо неравенство:

$$(8) \quad E\|(a_{ij}g_{ij})\| \leq C \cdot \left(\max_i \sqrt{\sum_j a_{ij}^2} + \max_j \sqrt{\sum_i a_{ij}^2} + \sqrt[4]{\sum_{ij} a_{ij}^4} \right),$$

где $E\|\cdot\|$ - математическое ожидание для нормы матрицы; (g_{ij}) - последовательность независимых одинаково распределенных величин (iid) с нормальным законом распределения $\mathcal{N}(0, 1)$; C - универсальная константа;

При вычислении оценок $E\|M_k^{err2}\|$ и $E\|M_k^{err3}\|$ воспользуемся тождествами:

$$\begin{aligned} M_k^{err2} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\eta_\phi^2} & \sqrt{\eta_\psi^2} & \sqrt{\eta_\omega^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\eta_\phi^2} & \sqrt{\eta_\psi^2} & \sqrt{\eta_\omega^2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{1N} & g_{2N} & g_{3N} \end{pmatrix} \\ M_k^{err3} &= \begin{pmatrix} (\lambda_1^k + \xi_1^k) & (\lambda_1^k + \xi_1^k) & (\lambda_1^k + \xi_1^k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\lambda_N^k + \xi_N^k) & (\lambda_N^k + \xi_N^k) & (\lambda_N^k + \xi_N^k) \end{pmatrix} \circ M_k^{err2} \end{aligned}$$

Матрица (g_{ij}) получена нормировкой столбцов матрицы M_k^{err2} на среднеквадратичное значение столбца. Элементы матрицы (g_{ij}) - это независимые одинаково распределенные величины $\mathcal{N}(0, 1)$.

Выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} E\|M_k^{err1}\| &\leq h_{1E}^k = E(h_{1M}^k) = \sqrt{\chi_{\alpha,N}^2 \cdot \xi_k^2} \\ E\|M_k^{err2}\| &\leq h_{2E}^k = C \cdot \left(\sqrt{N \cdot \max(\eta_\phi^2, \eta_\psi^2, \eta_\omega^2)} + \sqrt{\eta_\phi^2 + \eta_\psi^2 + \eta_\omega^2} + \right. \\ &\quad \left. \sqrt[4]{N \cdot ((\eta_\phi^2)^2 + (\eta_\psi^2)^2 + (\eta_\omega^2)^2)} \right) \\ E\|M_k^{err3}\| &\leq h_{3E}^k = C \cdot \left(\sqrt{\max(\eta_\phi^2, \eta_\psi^2, \eta_\omega^2) \cdot \sum_{i=1..N} (\lambda_i^k + \xi_i^k)^2} + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{(\eta_\phi^2 + \eta_\psi^2 + \eta_\omega^2) \cdot \max_{i=1..N} (\lambda_i^k + \xi_i^k)^2} + \right. \\ &\quad \left. \sqrt[4]{((\eta_\phi^2)^2 + (\eta_\psi^2)^2 + (\eta_\omega^2)^2) \cdot \sum_{i=1..N} (\lambda_i^k + \xi_i^k)^4} \right) \end{aligned}$$

Для математического ожидания $E\|M_k^{err}\|$ выполняется неравенство:

$$h_E^k = (h_{1E}^k + h_{2E}^k + h_{3E}^k) \geq E\|M_k^{err}\|.$$

3.3. Вычисление оценки математического ожидания h_{CE}^k . Оценку для математического ожидания $E\|M_k^{err}\|$ можно вычислить как выборочное среднее, при множественной независимой реализации значений матрицы M_k^{err} . Выборочное среднее является состоятельной оценкой для $E\|M_k^{err}\|$ [7]. Множественные независимые реализации матриц M_k^{err} могут быть получены при многократной реализации шумовых выборок. Определим на основе M_k^{err} случайную модельную матрицу:

$$\tilde{M}_k^{err} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1^\phi & \dots & \tilde{\eta}_N^\phi \\ \tilde{\eta}_1^\psi & \dots & \tilde{\eta}_N^\psi \\ \tilde{\eta}_1^\omega & \dots & \tilde{\eta}_N^\omega \\ \tilde{\eta}_1^\phi(\lambda_1^k + \xi_1^k) + \phi_1 \tilde{\xi}_1^k & \dots & \tilde{\eta}_N^\phi(\lambda_N^k + \xi_N^k) + \phi_N \tilde{\xi}_N^k \\ \tilde{\eta}_1^\psi(\lambda_1^k + \xi_1^k) + \psi_1 \tilde{\xi}_1^k & \dots & \tilde{\eta}_N^\psi(\lambda_N^k + \xi_N^k) + \psi_N \tilde{\xi}_N^k \\ \tilde{\eta}_1^\omega(\lambda_1^k + \xi_1^k) + \omega_1 \tilde{\xi}_1^k & \dots & \tilde{\eta}_N^\omega(\lambda_N^k + \xi_N^k) + \omega_N \tilde{\xi}_N^k \end{pmatrix}$$

полученную из \tilde{M}_k^{err} путем замены значений измерительного шума $(\eta_i^\phi; \eta_i^\psi; \eta_i^\omega); \xi_i^k$ на значения из случайных выборок модельного шума $(\tilde{\eta}_i^\phi; \tilde{\eta}_i^\psi; \tilde{\eta}_i^\omega); \tilde{\xi}_i^k$.

Пусть свойства модельных шумовых процессов совпадают с свойствами процессов порождающих измерительный шум. Тогда свойства модельных шумовых процессов полностью определяются известными значениями дисперсии $\eta_\phi^2, \eta_\psi^2, \eta_\omega^2, \xi_k^2, \delta^2$ соответственно, и выполняется тождество:

$$E\|M_k^{err}\| = E\|\tilde{M}_k^{err}\|.$$

Прямое моделирование значений матрицы \tilde{M}_k^{err} невозможно, так как точные значения $\lambda_i^k, \phi_i, \psi_i, \omega_i$ неизвестны. Используя матрицу \tilde{M}_k^{err} построим матрицу \tilde{R}_k^{err} , в которой вместо точных значений $\lambda_i^k, \phi_i, \psi_i, \omega_i$ используются результаты соответствующих измерений:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_k^{err} &= \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1^\phi & \dots & \tilde{\eta}_N^\phi \\ \tilde{\eta}_1^\psi & \dots & \tilde{\eta}_N^\psi \\ \tilde{\eta}_1^\omega & \dots & \tilde{\eta}_N^\omega \\ \tilde{\eta}_1^\phi(\lambda_1^k + \xi_1^k + \tilde{\xi}_1^k) + (\phi_1 + \eta_1^\phi) \tilde{\xi}_1^k & \dots & \tilde{\eta}_N^\phi(\lambda_N^k + \xi_N^k + \tilde{\xi}_N^k) + (\phi_N + \eta_N^\phi) \tilde{\xi}_N^k \\ \tilde{\eta}_1^\psi(\lambda_1^k + \xi_1^k + \tilde{\xi}_1^k) + (\psi_1 + \eta_1^\psi) \tilde{\xi}_1^k & \dots & \tilde{\eta}_N^\psi(\lambda_N^k + \xi_N^k + \tilde{\xi}_N^k) + (\psi_N + \eta_N^\psi) \tilde{\xi}_N^k \\ \tilde{\eta}_1^\omega(\lambda_1^k + \xi_1^k + \tilde{\xi}_1^k) + (\omega_1 + \eta_1^\omega) \tilde{\xi}_1^k & \dots & \tilde{\eta}_N^\omega(\lambda_N^k + \xi_N^k + \tilde{\xi}_N^k) + (\omega_N + \eta_N^\omega) \tilde{\xi}_N^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Значения матрицы \tilde{R}_k^{err} могут быть многократно реализованы при численном моделировании шумовых процессов $(\tilde{\eta}_i^\phi; \tilde{\eta}_i^\psi; \tilde{\eta}_i^\omega); \tilde{\xi}_i^k$.

Матрицу \tilde{M}_k^{err} можно представить в виде суммы:

$$\tilde{M}_k^{err} = \tilde{R}_k^{err} + \Delta \tilde{M}_k^{err},$$

где

$$\Delta \tilde{M}_k^{err} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ -(\tilde{\eta}_1^\phi \tilde{\xi}_1^k) & \dots & -(\tilde{\eta}_N^\phi \tilde{\xi}_N^k) \\ -(\tilde{\eta}_1^\psi \tilde{\xi}_1^k) & \dots & -(\tilde{\eta}_N^\psi \tilde{\xi}_N^k) \\ -(\tilde{\eta}_1^\omega \tilde{\xi}_1^k) & \dots & -(\tilde{\eta}_N^\omega \tilde{\xi}_N^k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ -(\eta_1^\phi \tilde{\xi}_1^k) & \dots & -(\eta_N^\phi \tilde{\xi}_N^k) \\ -(\eta_1^\psi \tilde{\xi}_1^k) & \dots & -(\eta_N^\psi \tilde{\xi}_N^k) \\ -(\eta_1^\omega \tilde{\xi}_1^k) & \dots & -(\eta_N^\omega \tilde{\xi}_N^k) \end{pmatrix}$$

Матрица $\Delta \tilde{M}_k^{err}$ это матрица ошибок аппроксимации точных значений $\lambda_i^k, \phi_i, \psi_i, \omega_i$ приближенными значениями. Элементы этой матрицы зависят от неизвестных значений измерительного шума и известных значений модельного шума.

Для матрицы \tilde{M}_k^{err} выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} \|\tilde{M}_k^{err}\| &\leq \|\tilde{R}_k^{err}\| + \|\Delta \tilde{M}_k^{err}\|, \\ E\|\tilde{M}_k^{err}\| &\leq E\|\tilde{R}_k^{err}\| + E\|\Delta \tilde{M}_k^{err}\|. \end{aligned}$$

С учетом того, что законы распределения модельного и измерительного шума совпадают, для $E\|\Delta \tilde{M}_k^{err}\|$ выполняется:

$$E\|\Delta \tilde{M}_k^{err}\| = 2 \cdot E \left\| \begin{pmatrix} (\tilde{\eta}_1^\phi \xi_1^k) & (\tilde{\eta}_1^\psi \xi_1^k) & (\tilde{\eta}_1^\omega \xi_1^k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tilde{\eta}_N^\phi \xi_N^k) & (\tilde{\eta}_N^\psi \xi_N^k) & (\tilde{\eta}_N^\omega \xi_N^k) \end{pmatrix} \right\|$$

Верхняя оценка для $E\|\Delta \tilde{M}_k^{err}\|$ может быть вычислена с использованием неравенства (8), аналогично вычислению оценок h_{2E}^k и h_{3E}^k . Приведем неравенство для $E\|\Delta \tilde{M}_k^{err}\|$ к виду:

$$E\|\Delta \tilde{M}_k^{err}\| = 2 \cdot E \left\| \begin{pmatrix} (\xi_1^k \sqrt{\eta_\phi^2}) & (\xi_1^k \sqrt{\eta_\psi^2}) & (\xi_1^k \sqrt{\eta_\omega^2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\xi_1^k \sqrt{\eta_\phi^2}) & (\xi_1^k \sqrt{\eta_\psi^2}) & (\xi_1^k \sqrt{\eta_\omega^2}) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{1N} & g_{2N} & g_{3N} \end{pmatrix} \right\|$$

где, (g_{ij}) - матрица независимых значений из нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$ полученная путем нормировки столбцов матрицы модельного шума. Выполняется неравенство:

$$\begin{aligned} E\|\Delta \tilde{M}_k^{err}\| &\leq 2 \cdot C \cdot \left(\sqrt{\max(\eta_\phi^2, \eta_\psi^2, \eta_\omega^2) \cdot \sum_{i=1..N} (\xi_i^k)^2} + \right. \\ &\left. \sqrt{(\eta_\phi^2 + \eta_\psi^2 + \eta_\omega^2) \cdot \max_{i=1..N} (\xi_i^k)^2} + \sqrt{((\eta_\phi^2)^2 + (\eta_\psi^2)^2 + (\eta_\omega^2)^2) \cdot \sum_{i=1..N} (\xi_i^k)^4} \right). \end{aligned}$$

С вероятностью $(1 - \alpha)$ выполняется неравенство:

$$\begin{aligned} E\|\Delta \tilde{M}_k^{err}\| &\leq 2 \cdot C \cdot \left(\sqrt{\max(\eta_\phi^2, \eta_\psi^2, \eta_\omega^2) \cdot \chi_{\alpha, N}^2 \cdot \xi_k^2} + \right. \\ &\left. \sqrt{(\eta_\phi^2 + \eta_\psi^2 + \eta_\omega^2) \cdot u_\alpha^2 \cdot \xi_k^2} + \sqrt{((\eta_\phi^2)^2 + (\eta_\psi^2)^2 + (\eta_\omega^2)^2) \cdot (N \cdot u_\alpha^4 \cdot (\xi_k^2)^2)} \right), \end{aligned}$$

где u_α - процентиль нормального распределения ($u_{0,0005} \approx 3,29$), то есть с вероятностью $(1 - \alpha)$ выполняется $\xi_i^k < [u_\alpha \cdot \sqrt{\xi_k^2}]$. Определим ошибку аппроксимации как правую часть предыдущего неравенства:

$$\begin{aligned} d_{CE}^k &= 2 \cdot C \cdot \sqrt{\xi_k^2} \cdot \left(\sqrt{\chi_{\alpha, N}^2 \cdot \max(\eta_\phi^2, \eta_\psi^2, \eta_\omega^2)} + u_\alpha \cdot \sqrt{\eta_\phi^2 + \eta_\psi^2 + \eta_\omega^2} + \right. \\ &\left. u_\alpha \cdot \sqrt{N \cdot ((\eta_\phi^2)^2 + (\eta_\psi^2)^2 + (\eta_\omega^2)^2)} \right). \end{aligned}$$

Для значения $E\|M_k^{err}\|$ с вероятностью $(1 - \alpha)$ выполняется неравенство:

$$h_{CE}^k = E\|R_k^{err}\| + d_{CE}^k \geq E\|M_k^{err}\|.$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Проверка предлагаемых оценок выполнена с помощью численного эксперимента. Вычислено 100 тыс. итераций для случайно числа $N=30..3000$ и случайных характеристик толщиномера. Для каждого значения N вычислено от 15 до 62 экспериментальных точек. Диапазон изменения параметров перекрывал области реальных эксплуатационных параметров. Толщина эталонной пластины выбиралась в диапазоне 1..15 мм. Наклон вектора нормали листа относительно OZ выбирался из диапазона $\pm 10^\circ$. Смещение пластины изменялось в диапазоне ± 150 мм, относительно центра измерительной области. Среднеквадратичные значения шума выбирались случайным образом в диапазоне от 0 до 1% относительно ожидаемого среднего значения измеряемой величины. На рисунке 3 приведены результаты моделирования, ось абсцисс это число N .

На первом графике показано распределение точных сумм частичных ошибок ($\|M_k^{err1}\| + \|M_k^{err2}\| + \|M_k^{err3}\|$), приведенных к точному значению ошибки $\|M_k^{err}\|$. Представление полной ошибки $\|M_k^{err}\|$ в виде суммы избыточно с коэффициентом 1,4...1,45. Все графики вычисленных оценок показаны с учетом избыточности представления суммы. В качестве корректирующего множителя использовано значений 0,7.

На втором графике показано распределение нормированной оценки h_M^k . Вычисленные значения лежат в диапазоне от 100% до 200%. Для вычисленной оценки выполняется условие $0,7 \cdot h_M^k \geq \|M_k^{err}\|$.

Третий график показывает распределение нормированной оценки $0,7 \cdot h_E^k$. При вычислении оценки h_E^k константа C , в неравенстве (8), принималась равной $C = 0,93$. Верхняя граница распределения убывает с ростом числа N . Для $N > 200$ все значения попадают в диапазон от 110% до 150%. Для вычисленной оценки выполняется условие $0,7 \cdot h_E^k \geq \|M_k^{err}\|$.

На четвертом графике показано распределение для нормированной оценки $0,7 \cdot h_{CE}^k$. Оценка h_{CE} центрирована относительно значения 100%, и ее разброс убывает с ростом N . Для $N > 200$ разброс не превышает $\pm 20\%$.

Оценка h_{CE} обладает наименьшим разбросом среди всех оценок, но для нее нарушается условие (с вероятностью $P \approx 0,5$): $\|A_h - A_0\| \leq h$. Оценка h_E^k имеет хорошее качество для $N > 100$. Комбинация этих двух оценок позволяет задать смещение для h_{CE} , чтобы всегда выполнялось условие $\|A_h - A_0\| \leq h$. Это возможно, так как с заданной вероятностью выполняется условие $h_E^k \geq h_{CE}$.

На пятом графике показано распределение для комбинированной нормированной оценки $h_{ES}^k = (0,7 \cdot h_E^k + h_{CE})/2$. Верхняя граница распределения для комбинированной оценки убывает с ростом N , и для $N > 200$ все значения попадают в диапазон от 100% до 130%.

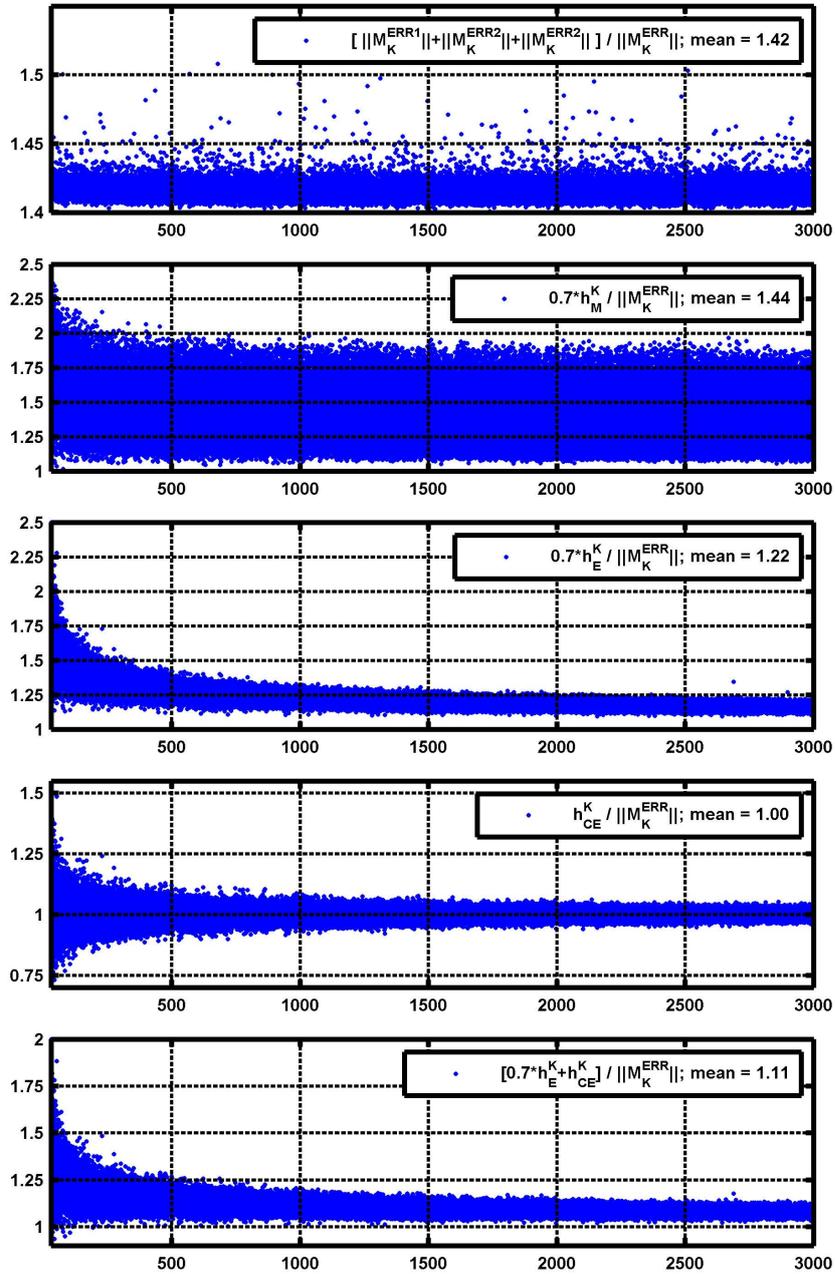


Рис. 2. Вычисленные распределения для нормированных оценок h_M^k , h_E^k , h_{CE}^k .

5. ВЫВОДЫ

Предложен способ вычисления оценок ошибки оператора СЛАУ в задаче калибровки лазерного измерителя толщины, основанный на статистическом подходе при оценке характеристик измерительного шума.

С помощью численного эксперимента выполнена проверка качества предлагаемых оценок в широком диапазоне изменения параметров. Показано, что для $N > 200$ погрешность вычисления для оценки h_{ES}^k не выходит за диапазон $+0\%..+30\%$, а эта оценка может использоваться при решении задачи калибровки лазерного измерителя толщины с помощью метода обобщенной невязки.

Предложенный способ вычисления статистической оценки ошибки оператора СЛАУ реализован на практике в 2012 году в составе комплекса лазерного измерителя толщины горячего проката ЛАД-0РЗ, находящегося в опытной эксплуатации в цехе горячего проката Новосибирского металлургического завода им. Кузьмина, г.Новосибирск.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V.G. Meledin *Informatics of Optoelectronic Measurements: Science and Innovative Industrial Technologies*, Journal of Engineering Thermophysics, **18** (2009), pp. 99-128.
- [2] В.Г. Меледин *Информатика оптоэлектронных измерений: наука и инновационные промышленные технологии*, Новосибирск: Изд-во ИТ СО РАН, (2008), С. 1-75.
- [3] Л. С. Бабаджанов, М. Л. Бабаджанова, А.В. Жилиякова, М.Ю. Прилепко, *Сравнительные измерения мер толщины стального проката*, Законодательная и прикладная метрология, **4** (2012), С.33-С.35
- [4] А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола, *Численные методы решения некорректных задач*, М.: Наука, (1990), С. 1-232.
- [5] А.Г. Ягола, *Некорректные задачи с априорной информацией*, Сибирские электронные математические известия, **7** (2010), С.343-С.361
- [6] В.Ю. Терезиж, *Введение в статистическую теорию обратных задач*, М.: Физматлит, 2005, С. 1-376.
- [7] Дж. Бендат, А. Пирсол, *Измерение и анализ случайных процессов*, пер. с англ. - М.: МИР, 1971, С. 1-408.
- [8] Rafal Latala, *Some estimates of norms of random matrices*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), pp. 1273-1282.

Владимир Геннадьевич Главный
Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 1,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: glavny@ngs.ru

Алексей Владимирович Пененко
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 6,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: a.penenko@gmail.com

Сергей Владимирович Двойнишников
Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 1,
630090, Новосибирск, Россия

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 10, стр. С.28–С.34 (2013)

УДК 512.5

MSC 13A99

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА

С.И. КАБАНИХИН, О.И. КРИВОРОТЬКО

Аннотация. Проведен сравнительный анализ двух численных методов решения уравнения эйконала: метода С.К. Годунова второго порядка и метода характеристик. Для применения метода С.К. Годунова вводится нестационарное уравнение с искусственной временной переменной t , решение которого стремится к решению уравнения эйконала с ростом t . Приведены результаты численных расчетов. Полученный алгоритм использован для расчета переднего фронта волны цунами в случае линейного источника.

Ключевые слова: уравнение эйконала, метод Годунова, метод би-характеристик, амплитуда переднего фронта.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение эйконала применяется во многих разделах геометрической оптики, акустики, электроники, механики при определении линий, вдоль которых распространяются волны различной физической природы.

В разделе 1 представлено два подхода для численного решения задачи Коши для уравнения эйконала. В первом, с учетом гиперболического типа нелинейного уравнения эйконала построена монотонная схема С.К. Годунова второго порядка [1, 2]. Во втором, уравнение эйконала сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [3, 4]. В разделе 2 продемонстрировано действие алгоритмов на модельных примерах. В разделе 3 показано использование уравнение эйконала для расчета переднего фронта волны цунами в случае линейного источника [5].

КАБАНИХИН, S.I., КРИВОРОТЬКО, O.I., NUMERICAL SOLUTION EIKONAL EQUATION.

© 2013 Кабанихин С.И., Криворотько О.И.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00773), проект 12-2013 сотрудничества СО РАН и НАН Украины.

Поступила 5 мая 2013 г., опубликована 31 мая 2013 г.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Рассмотрим начальную задачу для уравнения эйконала:

$$\begin{cases} \tau_x^2 + \tau_y^2 = c^{-2}(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \tau(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $c(x, y)$ – скорость распространения волны в среде, $\tau(x, y)$ означает время, за которое возмущение из точки (x_0, y_0) достигнет точки (x, y) , (x_0, y_0) – координата точечного источника волн.

1.1. **Схема Годунова решения уравнения эйконала.** Решение задачи (1.1) находится как установившееся решение нестационарного уравнения

$$\phi_t + \phi_x \phi_x + \phi_y \phi_y = c^{-2}(x, y) \quad (1.2)$$

с граничным условием в точечном источнике $\phi(x_0, y_0) = 0$. На внешних границах рассматриваемой области $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, L_x), y \in (0, L_y)\}$ задаются условия отсутствия отражения.

Если первые сомножители в левых частях произведений в (1.2) обозначить через $U = \phi_x, V = \phi_y$ и интерпретировать U и V как компоненты скорости, то получим уравнение близкое к уравнению конвективного переноса

$$\phi_t + U\phi_x + V\phi_y = c^{-2}(x, y). \quad (1.3)$$

Для численного решения уравнения (1.3) используем противопоточную схему второго порядка точности, которая является вариантом схемы Годунова [1] для данного уравнения. В соответствии с этой численной схемой, в каждой расчетной точке равномерной сетки

$$\begin{aligned} \omega &:= \{(x_i, y_j) \in \Omega \mid x_i = ih_x, y_j = jh_y, i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1}\}, \\ h_x &= L_x / (N_x - 1), \quad h_y = L_y / (N_y - 1), \end{aligned}$$

вычисляются аппроксимации частных пространственных производных и соответствующих компонент «скорости» с использованием специально ограниченных вторых разделенных разностей

$$\begin{aligned} \phi(x_{i-1j}, x_{ij}, x_{i+1j}) &= \frac{\phi_{i+1j} - 2\phi_{ij} + \phi_{i-1j}}{h_x^2}, \\ \phi(x_{i-2j}, x_{i-1j}, x_{ij}) &= \frac{\phi_{ij} - 2\phi_{i-1j} + \phi_{i-2j}}{h_x^2}, \\ \phi(x_{ij}, x_{i+1j}, x_{i+2j}) &= \frac{\phi_{i+2j} - 2\phi_{i+1j} + \phi_{ij}}{h_x^2}, \\ \phi_x^+ &= \frac{\phi_{i+1j} - \phi_{ij}}{h_x} - \frac{1}{2}h_x \text{minmod}(\phi(x_{i-1j}, x_{ij}, x_{i+1j}), \phi(x_{ij}, x_{i+1j}, x_{i+2j})), \\ \phi_x^- &= \frac{\phi_{ij} - \phi_{i-1j}}{h_x} + \frac{1}{2}h_x \text{minmod}(\phi(x_{i-2j}, x_{i-1j}, x_{ij}), \phi(x_{i-1j}, x_{ij}, x_{i+1j})), \\ U_{i+1j} &= \phi_x^+, U_{ij} = \phi_x^-, \quad V_{ij+1} = \phi_y^+, V_{ij} = \phi_y^-. \end{aligned}$$

Здесь величины ϕ_y^+ и ϕ_y^- вычисляются аналогичным образом, как ϕ_x^+ и ϕ_x^- ,

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} 0, & ab < 0, \\ a, & |a| \leq |b|, \\ b, & |b| < |a|. \end{cases}$$

Согласно принципу противопоточности, аппроксимация пространственных производных отбирается по знаку скорости и ее абсолютной величине по следующему алгоритму:

1. Если $U_{ij} \geq 0, U_{ij} \geq -U_{i+1j}$, то $m_{ij} = 1$ и $m_{i+1j} = 0$ в противном случае.
2. Если $U_{i+1j} \leq 0, U_{i+1j} \leq -U_{ij}$, то $m_{i+1j} = 1$ и $m_{ij} = 0$ в противном случае.
3. Если $m_{ij} + m_{i+1j} = 2$, то $m_{i+1j} = 1$ и $m_{ij} = 0$.

Аппроксимации производных и компонента x вектора «скорости переноса» записываются следующим образом:

$$\left(\hat{\phi}_x\right)_{ij}^k = m_{ij}\phi_x^- + m_{i+1j}\phi_x^+, \quad \tilde{U}_{ij} = m_{ij}U_{ij} + m_{i+1j}U_{i+1j}.$$

Аналогично вычисляются аппроксимации производных по y и соответствующей компоненты скорости \tilde{V} . Граничные условия на внешней границе аппроксимируют со вторым порядком условие отсутствия отражения:

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{k+1} &= \phi_{ij}^k - \Delta t \left(\tilde{U}_{ij} \left(\hat{\phi}_x\right)_{ij}^k + \tilde{V}_{ij} \left(\hat{\phi}_y\right)_{ij}^k - c_{ij}^{-2} \right), \quad i = \overline{2, N_x - 3}, j = \overline{2, N_y - 3} \\ \phi_{i_0, j_0}^k &= 0, \\ \phi_{ij}^k &= \phi_{i+3j}^k - 3\phi_{i+2j}^k + 3\phi_{i+1j}^k, \quad i = 0, 1, j = \overline{0, N_y - 1}, \\ \phi_{ij}^k &= \phi_{i-3j}^k - 3\phi_{i-2j}^k + 3\phi_{i-1j}^k, \quad i = N_x - 2, N_x - 1, j = \overline{0, N_y - 1}, \\ \phi_{ij}^k &= \phi_{i, j+3}^k - 3\phi_{i, j+2}^k + 3\phi_{i, j+1}^k, \quad i = \overline{0, N_x - 1}, j = 0, 1, \\ \phi_{ij}^k &= \phi_{i, j-3}^k - 3\phi_{i, j-2}^k + 3\phi_{i, j-1}^k, \quad i = \overline{0, N_x - 1}, j = N_y - 2, N_y - 1. \end{aligned}$$

Здесь k – номер расчетного слоя по времени, (i_0, j_0) – номер точечного источника (x_0, y_0) на расчетной сетке ω .

1.2. Метод бихарактеристик решения уравнения эйконала. Введем в рассмотрение функцию $b(x, y) = 1/c(x, y)$ и вектор $p = (p_1, p_2) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x}, \frac{\partial \tau}{\partial y}\right)$. Дифференцируя уравнение эйконала $|p|^2 = b^2(x, y)$ по x и y , получим

$$pp_x = bb_x, \quad pp_y = bb_y. \quad (1.4)$$

Из определения вектора p следует, что $(p_1)_y = (p_2)_x$ и, значит, (1.4) можно привести к виду:

$$p\nabla p_1 = bb_x, \quad p\nabla p_2 = bb_y. \quad (1.5)$$

Разделим (1.5) на $b^2(x, y)$ и перепишем вдоль кривых $\frac{dx}{dt} = pb^{-2}(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = pb^{-2}(x, y)$:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \ln b(x, y), \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \ln b(x, y).$$

Вдоль этих же кривых $\tau(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tau}{dt} = \nabla \tau \frac{dx}{dt} = b^{-2}(x, y)|p|^2 = 1.$$

Если выбрать параметр t так, чтобы $\tau = 0$ при $t = 0$, то тогда $t = \tau$ и параметр t будет равен времени прохождения сигнала от (x_0, y_0) до (x, y) . Введем произвольный единичный вектор ν^0 и решим задачу Коши для системы

обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p_1 \cdot b^{-2}(x, y), & \frac{dy}{dt} = p_2 \cdot b^{-2}(x, y); \\ \frac{dp_1}{dt} = \frac{b_x(x, y)}{b(x, y)}, & \frac{dp_2}{dt} = \frac{b_y(x, y)}{b(x, y)}; \\ (x, y)|_{t=0} = (x_0, y_0), & p|_{t=0} = p^0 \equiv b(x_0, y_0)\nu^0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Систему (1.6) мы решаем методом Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации. В результате мы найдем x, y, p_1 и p_2 как функции от t и параметров x_0, y_0 и p^0 :

$$x = h_1(t, x_0, y_0, p^0), y = h_2(t, x_0, y_0, p^0), p_1 = \psi_1(t, x_0, y_0, p^0), p_2 = \psi_2(t, x_0, y_0, p^0).$$

Первые два равенства при фиксированной (x_0, y_0) определяют в пространстве переменных x, y, t двухпараметрическое семейство бихарактеристик. Проекцию бихарактеристики на пространство (x, y) называют лучом. Первые два равенства задают луч параметрически [3].

Пусть $t \in (0, T)$. Построим разбиение области $(0, T)$: $t_k = k \frac{T}{N_t}, k = 0, 1, \dots, N_t$, и обозначим $(x_k, y_k) := (x(t_k), y(t_k))$. Тогда $\tau(x_k, y_k)$ вычисляется следующим образом:

$$\tau(x_k, y_k) = \int_0^{x_k} \frac{\partial \tau(x, y_k)}{\partial x} dx. \quad (1.7)$$

2. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Пример 1. Расчет времени прихода первых волн от точечного источника в изотропной среде, расположенного в центре квадратной области размера $L_x = L_y = 2$ при $c(x, y) = 1$. Область покрывалась сеткой $N_x = N_y = 101$.

Результат, полученный при помощи метода Годунова второго порядка точности и метода бихарактеристик показан на рисунке 2.1.

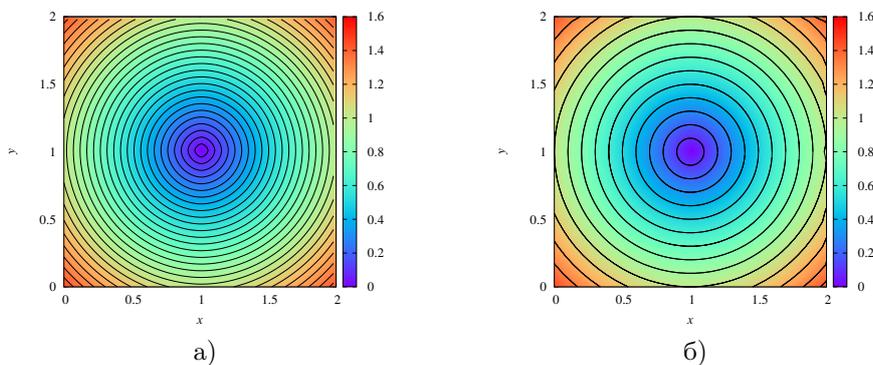


Рис. 2.1. Времена прихода первых волн от точечного источника при $c(x, y) = 1$, полученные: а) методом Годунова, б) методом бихарактеристик.

Отметим, что полученные численные решения уравнения эйконала близки к явному точному решению $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Погрешности методов подробно представлены в [2].

Пример 2. Расчет времени прихода первых волн в глубокой воде, ограниченной прямоугольной областью размера $L_x = 5$ км, $L_y = 10$ км. Область покрывалась сеткой $N_x = 200$, $N_y = 300$.

Рельеф дна изображен на рисунке 2.2. На рисунке 2.3 приведены расчеты времени прихода первых волн от точечного источника и линии источников для методов бихарактеристик и Годунова, соответственно.

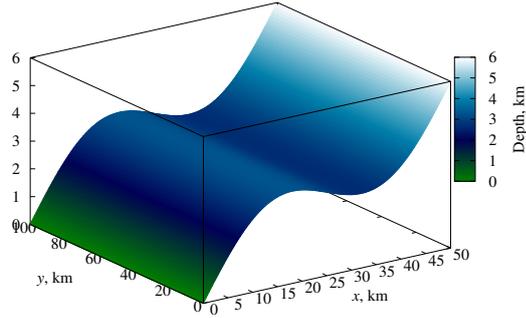


Рис. 2.2. Рельеф дна. Все размеры указаны в километрах.

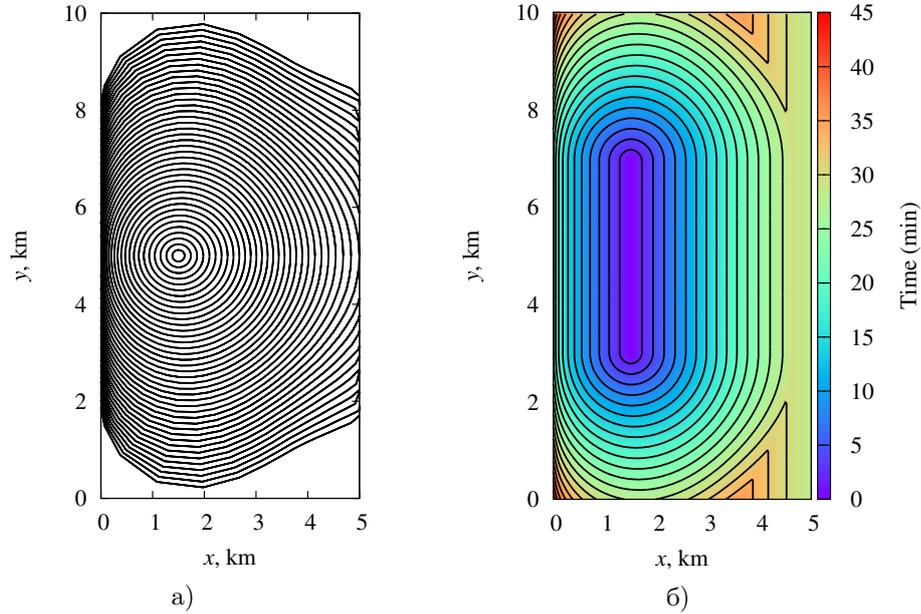


Рис. 2.3. Расчет времени прихода первых волн: а) от точечного источника; б) от линии источников.

Отметим, что метод Годунова уступает методу бихарактеристик в скорости расчетов (примерно в 3 раза). Однако метод Годунова хорошо показывает себя

на источнике произвольной геометрии, в то время как метод бихарактеристик накапливает ошибки при суммировании результата для точечных источников (произвольный источник разбивается на точечные источники, для каждого из которых получаем волновую картину методом бихарактеристик).

3. АМПЛИТУДА ПЕРЕДНЕГО ФРОНТА ВОЛНЫ ЦУНАМИ

С решением уравнения эйконала тесно связана задача определения амплитуды переднего фронта волны, порожденной слабо меняющимся по переменной y разломом дна $u(x, y, 0) = g(y) \cdot \delta(x)$, алгоритм решения которой подробно изложен в работе [5].

Система уравнений мелкой воды, описывающая движение длинных волн (волн цунами), после некоторых замен [5] сводится к задаче на полуплоскости:

$$\begin{cases} \eta_{tt} = \operatorname{div} (c^2(x, y) \operatorname{grad} \eta), & x, y > 0, t > 0; \\ \eta|_{t < 0} \equiv 0, \quad \eta_x|_{x=0} = \frac{1}{2}g(y) \cdot \delta(t), & y > 0, t > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь $c(x, y) = \sqrt{gH(x, y)}$, $H(x, y)$ – глубина в точке (x, y) , $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

При помощи замены переменных $z = \tau(x, y)$, $\alpha = y$, где $\tau(x, y)$ является решением задачи Коши для уравнения эйконала

$$\begin{cases} \tau_x^2 + \tau_y^2 = c^{-2}(x, y), & x > 0, y \in \mathbb{R}, \\ \tau(0, y) = 0, \quad \tau_x > 0, & y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.2)$$

и замены $v(z, \alpha, t) = \eta(x, y, t)$, $b(z, \alpha) = c(x, y)$, задача (3.1) переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{zz} + b^2 v_{\alpha\alpha} + 2b^2 \tau_y v_{z\alpha} + (b^2(\tau_{xx} + \tau_{yy}) + 2\frac{b_z}{b} + 2bb_\alpha \tau_y) v_z + \\ \quad + 2b(b_z \tau_y + b_\alpha) v_\alpha, \quad z, \alpha > 0, t > 0, \\ v|_{t < 0} = 0, \quad v_z|_{z=0} = -\frac{g(\alpha)}{2\sqrt{\frac{1}{b^2(0, \alpha)} - \tau_y^2}} \delta(t) + \frac{\tilde{h}(\alpha, t)}{2\sqrt{\frac{1}{b^2(0, \alpha)} - \tau_y^2}}. \end{cases}$$

Представляя решения последней задачи в виде $v(z, \alpha, t) = s(z, \alpha) \cdot \theta(t - z) + \bar{v}(z, \alpha, t)$, $t > z > 0$, и приравнивая коэффициенты при дельта-функции $\delta(t - z)$, получим задачу для амплитуды волны $s(z, \alpha)$:

$$\begin{cases} 2s_z + 2b^2 \tau_y s_\alpha + (b^2(\tau_{xx} + \tau_{yy}) + 2\frac{b_z}{b} + 2bb_\alpha \tau_y) s = 0, & z, \alpha > 0, \\ s(0, \alpha) = \frac{g(\alpha)}{2\sqrt{\frac{1}{b^2(0, \alpha)} - \tau_y^2}}, & \alpha > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь $\tilde{v}(z, \alpha, t)$ – некоторая гладкая функция, $\theta(t - z)$ – тета-функция Хевисайда.

Построенный численный алгоритм решения задачи Коши для волнового уравнения позволяет определить амплитуду фронта волны в интересующей точке в пространственной области в фиксированный момент времени T . Источник $g(y) \cdot \delta(t)$ может быть представлен в виде ряда точечных источников, в силу чего решения задачи (3.2) сводится к решению задачи (1.1) для каждого точечного источника (данный подход был предложен в работе [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С.К. Годунов, *Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики*, Матем. сборник, **47**, № 3, С. 271-306, 1959.
- [2] Д.И. Иванов, И.Э. Иванов, И.А. Крюков, *Алгоритмы приближенного решения некоторых задач прикладной геометрии, основанные на уравнении типа Гамильтона-Якоби*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **45**, № 8, С. 1345-1358, 2005.
- [3] С.И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
- [4] A.Yu. Bezhaev, M.M. Lavrentiev (jr.), An.G. Marchuk, V.V. Titov. *Determination of tsunami sources using deep ocean wave records*, Bull. Nov. Comp. Center, Math. Model. in Geoph., **11**, pp. 53-63, 2006.
- [5] S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorot'ko, *A numerical method for determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation*, Applied Computational Mathematics, **12**, № 1, pp. 91-96, 2013.
- [6] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, издание 4, Москва: Наука, 1981.
- [7] В.П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Москва: Наука, 1976.
- [8] В.Г. Романов, *О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа*, Дифференциальные уравнения, **2**, № 25, С. 275-283, 1989.
- [9] Воронина Т.А. *Определение пространственного распределения источников колебаний по дистанционным измерениям в конечном числе точек*, СибЖВМ, Т. 7, № 3, 2004, С. 203-211.

КАБАНИХИН СЕРГЕЙ ИГОРЕВИЧ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,
пр-т Лаврентьева 6,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

КРИВОРОТЬКО ОЛЬГА ИГОРЕВНА
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 10, стр. С.35–С.54 (2013)

УДК 504.064.36

MSC 49M29

АЛГОРИТМЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ИСТОЧНИКОВ
ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА НА ОСНОВЕ
ДАННЫХ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ
ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

А.В. ПЕНЕНКО, С.Ж. РАХМЕТУЛЛИНА

АБСТРАКТ.

A chemical substance emitted by a source is transported with an convection-diffusion process in the atmosphere. The problem is to estimate source parameters. The work is devoted to the implementation of different atmospheric pollutant source estimation methods to be used in the monitoring system of the city. The monitoring system consist of several automatic measurement devices providing point concentration measurements data. Considered approaches to the source estimation are based on variational principle with the use of adjoint equations for the convection-diffusion models with source-term uncertainty.

Keywords: Source localization, advection-diffusion equations, variational methods, adjoint problems.

PENENKO, A.V., RACHMETULLINA, S., ALGORITHMS FOR ATMOSPHERIC EMISSION SOURCE LOCALIZATION BASED ON THE AUTOMATED ECOLOGICAL MONITORING SYSTEM DATA.

© 2013 Пененко А.В., Рахметуллина С.Ж.

Работа частично поддержана Программами фундаментальных исследований №4 Президиума РАН и №3 ОМН РАН, проектом РФФИ №11-01-00187-а, Интеграционными проектом 35 СО РАН, бюджетной программой 120 “Грантовое финансирование”, Комитет науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, госконтрактом № 14.740.11.0350 по программе “Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области математики” ФЦП “Научно-педагогические кадры инновационной России”.

Поступила 1 февраля 2013 г., опубликована 31 декабря 2013 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

В системе экологического мониторинга атмосферного воздуха г.Усть-Каме-ногорска функционирует автоматизированная система наблюдений за качеством воздуха, метеопараметрами, радиационным фоном, уровнем воды [1].

В результате внедрения данной системы появилась возможность использования оперативных данных мониторинга состояния атмосферного воздуха и базы данных ретроспективных наблюдений для решения задач, связанных с природоохранным прогнозированием. Актуальными задачами в системе мониторинга качества атмосферного воздуха промышленного города являются: моделирование и прогнозирование загрязнения атмосферного воздуха; локализация и оценка мощностей источников загрязнения; определение зон наиболее подверженных влиянию загрязняющих веществ, выделяемых источниками примеси. Совместное использование методов математического моделирования, информационных технологий, и данных наблюдений является эффективным инструментом для решения задач экологического мониторинга. Это позволяет не только оценивать ситуацию в любой момент времени в условиях постоянно меняющихся параметров, но и своевременно осуществлять подготовку предложений для принятия управленческих решений по организации мероприятий, направленных на улучшение качества атмосферного воздуха.

Разработке методик обнаружения источников загрязнения для задач атмосферы и охраны окружающей среды посвящены работы [2–11] и многие другие.

В данной работе мы рассматриваем подходы к локализации источников, базирующийся на классическом вариационном принципе Лагранжа с использованием сопряженных уравнений и учитывающий неопределённости в моделях и в результатах наблюдений [3, 5–7]. В данном случае искомой является функция источников. Сложность задачи состоит в том, что по относительно небольшому количеству данных измерений требуется определить функцию на пространственно-временной области, т.е. задача является недоопределенной. Достоинством подхода является то, что в случае линейной модели физических процессов, обратная задача тоже является линейной.

Ещё один подход состоит в том, что неизвестное представляется в форме набора координат точечных источников [9–12]. Рассмотрение наборов координат позволяет снизить недоопределенность задачи, однако в такой постановке задача поиска источника становится нелинейной. В данной статье эти методы не рассматриваются.

2. ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

2.1. Дифференциальная формулировка модели. Задача решается в пространственно-временной области $D_t = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y, 0 \leq t \leq T\}$. Для отработки алгоритмов поиска источников, рассмотрена упрощённая двумерная математическая модель процессов переноса и турбулентного обмена загрязняющих примесей в атмосфере:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A_x \varphi + A_y \varphi &= f, \\ \varphi|_{t=0} &= \underline{\varphi}. \end{aligned}$$

Где операторы A_x, A_y в дифференциальной форме записываются как:

$$(2) \quad A_x \varphi = \begin{cases} -\mu_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, & x = 0, \\ u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\mu_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}), & x \in (0, X), \\ \mu_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, & x = X, \end{cases}$$

$$(3) \quad A_y \varphi = \begin{cases} -\mu_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, & y = 0 \\ v \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (\mu_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}), & y \in (0, Y), \\ \mu_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, & x = Y \end{cases}$$

Здесь t – время; f – функция описывающая источники примесей; μ_x, μ_y – горизонтальные коэффициенты турбулентности; u, v – компоненты вектора скорости ветра в направлениях осей декартовой системы координат; φ – функция, описывающая распределение концентрации загрязняющего вещества, достаточно гладкая для того, чтобы имели смысл все требуемые для описания модели операторы; φ – начальное распределение концентраций.

Задача решается при постоянных значениях функций u, v . Для получения актуальных значений скорости ветра использован Интернет сервис погоды компании Yandex [13]. Для определения коэффициентов турбулентности использованы эмпирические формулы и формулы Смагоринского [14].

Для удобства дальнейшего изложения будем записывать систему (1) в операторном виде

$$(4) \quad L\varphi = f.$$

Более точная модель микроклимата города, а также её численная реализация представлены в [14].

2.2. Алгоритм численной реализации модели. Для приближённого решения задачи прямого моделирования полей концентрации примеси использован конечный-разностный метод [15]. Для этого в области D_t вводится сеточная область D_t^h , состоящая из сеток по времени с шагом τ и числом узлов Nt , и сеток по пространству с шагами $\Delta x, \Delta y$ и числами узлов Nx, Ny соответственно. Рассмотрим в D_t^h неявную схему:

$$(5) \quad \frac{\varphi^n - \varphi^{n-1}}{\tau} + (\Lambda_x + \Lambda_y)\varphi^n = f^n,$$

$$(6) \quad \varphi_0 = \varphi.$$

Здесь Λ_x, Λ_y – разностные аналоги операторов (2),(3), $n = 1, \dots, Nt - 1$ – номер шага по времени. Для аппроксимации диффузионных слагаемых дифференциальных операторов используются стандартные трехточечные схемы, а для аппроксимации слагаемых, описывающих перенос – схема направленных разностей. Эволюционная задача (5)-(6) с помощью метода расщепления по пространственным переменным аппроксимируется последовательностью задач:

$$(7) \quad \frac{\varphi_1^n - \varphi^{n-1}}{\tau} + \Lambda_x \varphi_1^n = f^n,$$

$$(8) \quad \frac{\varphi_2^n - \varphi_1^n}{\tau} + \Lambda_y \varphi_2^n = 0,$$

$$(9) \quad \varphi^n = \varphi_2^n.$$

На каждом временном шаге реализация схемы (7)-(9) сведется к решению СЛАУ:

$$(10) \quad \begin{aligned} (E_x + \tau \Lambda_x) \varphi_1^n - (\varphi_1^{n-1} + \tau f^n) &= 0, \\ (E_y + \tau \Lambda_y) \varphi_2^n - \varphi_1^n &= 0, \\ \varphi^n &= \varphi_2^n, \end{aligned}$$

где φ_1, φ_2 - значения функции состояния на дробных шагах расщепления, E_x, E_y - единичные матрицы. Задачу поиска полей концентраций по известным источникам будем называть прямой.

Во всех дальнейших численных экспериментах параметры области D_t принимаются следующие: $X = Y = 17150$ м., $Nx = Ny = 50$, $Nt = 60$, $\tau = 30$ сек, $\Delta x = \Delta y = 350$ м. Результаты решения прямой задачи для одного точечного источника представлены на Рис. 1.

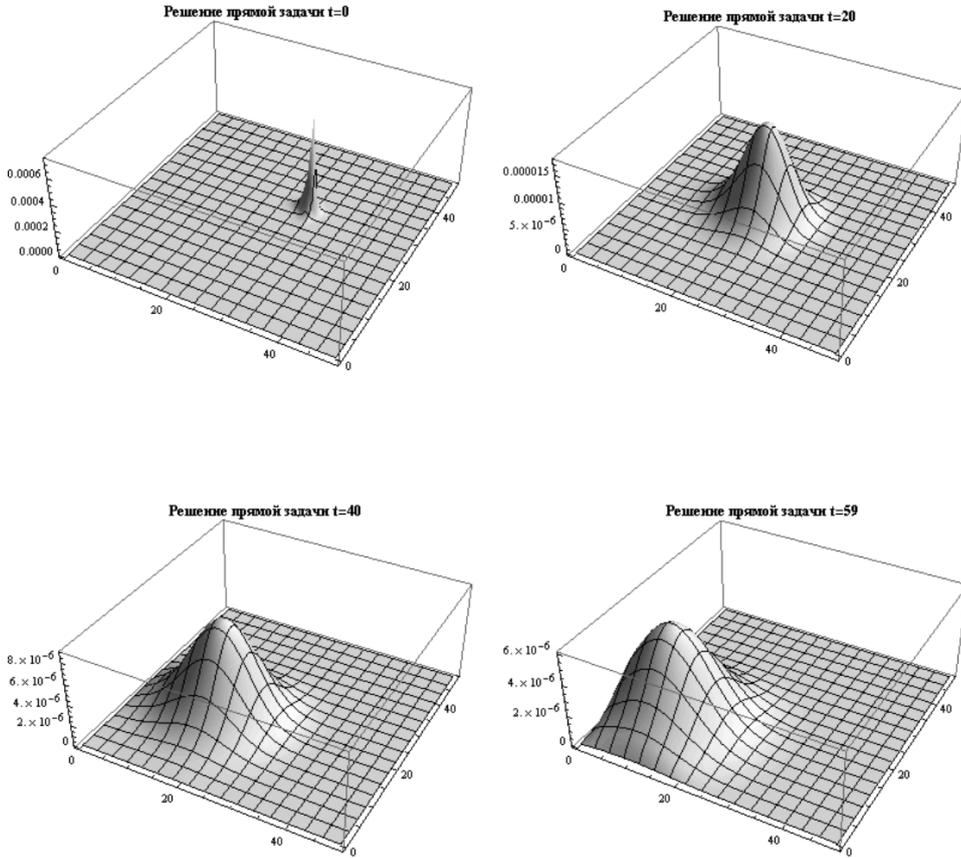


Рис. 1. Результаты моделирования процесса распространения примесей от точечного источника для различных шагов по времени ($n=0,20,40,59$)

3. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКОВ ПРИМЕСЕЙ ПО ДАННЫМ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ НАБЛЮДЕНИЙ

3.1. Постановка задачи. Известны значения функции состояния в пунктах наблюдения:

$$\psi_m = \varphi(x_m, y_m, t_m) = \varphi(\bar{x}_m, t_m), \quad m = 1, \dots, M$$

где M - число наблюдений, а m - номер наблюдения, $\bar{x}_m = (x_m, y_m)$. По ним требуется оценить:

- мощность точечного источника Q , если известны его пространственные координаты;
- координаты источника.

Расположение модельных постов наблюдений взяты в соответствии с расположением постов наблюдений автоматизированной системы мониторинга.

3.2. Задача об оценке мощностей источников с известными пространственными координатами. В силу линейности прямой задачи по правой части, оценка мощностей источников может базироваться на нахождении фундаментальных решений прямой задачи для каждого источника и оценки их мощностей, с использованием данных измерений.

Пусть у нас есть набор фундаментальных решений для известного набора источников $\{f_i\}_{i=1}^N$:

$$L(\varphi_i) = f_i$$

Предположим, что реальное поле концентраций определяется как результат воздействия источников $\{f_i\}_{i=1}^N$ с мощностями $\{q_i\}_{i=1}^N$:

$$L(\varphi) = \sum_{i=1}^N q_i f_i = \sum_{i=1}^N L(q_i \varphi_i).$$

Пусть также у нас есть набор из M измерений ψ_m функций состояния φ в точках пространства и времени $\{\bar{x}_m, t_m\}_{m=1}^M$: $\{\psi_m = \varphi(\bar{x}_m, t_m)\}_{m=1}^M$. Будем искать решение в виде

$$(11) \quad \varphi = \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i$$

Тогда относительно неизвестных мощностей $\{q_i\}_{i=1}^N$ можно составить систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\bar{x}_1, t_1) & \dots & \varphi_i(\bar{x}_1, t_1) & \dots & \varphi_N(\bar{x}_1, t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(\bar{x}_m, t_m) & \dots & \varphi_i(\bar{x}_m, t_m) & \dots & \varphi_N(\bar{x}_m, t_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(\bar{x}_M, t_M) & \dots & \varphi_i(\bar{x}_M, t_M) & \dots & \varphi_N(\bar{x}_M, t_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_i \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_m \\ \dots \\ \psi_M \end{pmatrix}.$$

Результаты программной реализации этого алгоритма представлены на рисунке 2. При проведении численного эксперимента решена прямая задача с тремя постоянно действующими источниками разных мощностей, расположенных в точках сетки с индексами и мощностями: $(10, 40), Q = 5, (25, 15), Q = 8, (35, 45), Q = 2$.

В момент времени $n = 59$ зафиксированы замеры в точках с индексами $(20, 35)$, $(5, 30)$, $(15, 10)$, $(10, 20)$

На Рис. 2 слева представлен результат решения данной прямой задачи и отмечены точки проведения замеров.

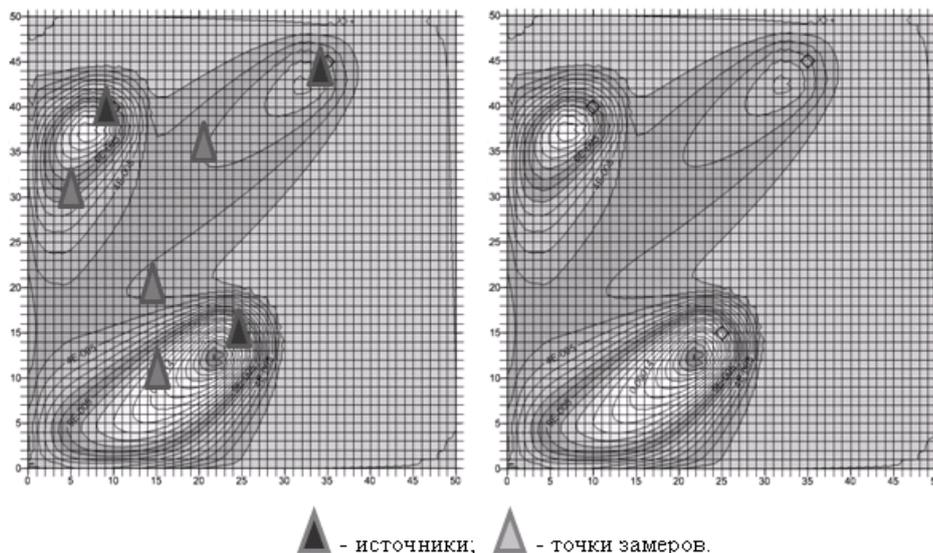


Рис. 2. Слева решение прямой задачи для последнего момента времени, на котором отмечены источники и точки измерений. Справа приведен результат моделирования концентраций от оцененных источников

После оценки мощностей в соответствии с (11) было построено поле концентраций с найденными мощностями, Рис. 2 справа. Построенное поле с хорошей точностью совпадает с заданным решением прямой задачи. Результаты реализации этого алгоритма в информационной системе мониторинга представлены на Рис. 3.

3.3. Вариационная постановка задачи обнаружения источников. Другой подход к задаче поиска источников состоит в том, чтобы непосредственно связать неизвестные источники с результатами наблюдений. Такую связь можно получить как частный случай системного подхода к прямому и обратному моделированию, развитому в [16, 17] и построенному на вариационных принципах. Основные элементы подхода - решение прямых и сопряженных задач, расчёт функций чувствительности для функционалов общего вида, включая функционалы наблюдений и ограничений, расчёт функций неопределённостей по заданному целевому функционалу и решение системы уравнений обратных связей между вариациями параметров и функциями чувствительности - неопределённости.

Введение специальных функций неопределённостей в жесткую структуру математических моделей позволяет решать обратные задачи для поиска интересующих значений. Так как наша цель в данной работе - поиск источников, то



Рис. 3. Результат моделирования концентраций от оцененных источников в информационной системе мониторинга города Усть-Каменогорска

функция неопределённости r добавляется в правую часть операторного уравнения (4)

$$(12) \quad L\varphi = f + r.$$

Новая функция вводится в уравнение для того, чтобы явно показать, что f соответствует априорно известным источникам, а r – неизвестным.

Построение основного функционала для организации моделирования осуществляется с учетом:

- математических моделей физических процессов;
- доступных данных об источниках;
- данных о системе наблюдений;
- результатов наблюдений.

Численные схемы для решения поставленных задач получаются посредством минимизации влияния неопределённостей, включаемых в функционал моделей и данных.

Изменим операторное описание (12), сделав его однородным:

$$L\varphi - (f + r) = L(\varphi, Y, r) = 0,$$

где параметры $\mathbf{Y} \in R(D_t)$ – все функции, параметры, входные данные и источники, участвующие в постановке задач и не являющиеся переменными состояния, $R(D_t)$ – область допустимых значений параметров.

Наряду с дифференциальной постановкой задачи прямого моделирования, будем рассматривать обобщенную формулировку модели [16]

$$(13) \quad I(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*) = \int_{D_t} L(\varphi, Y, r) \varphi^* dDdt = (L(\varphi, Y, r), \varphi^*),$$

где $\varphi^* \in Q^*(D_t)$ – сопряженная функция из гильбертова пространства функций $Q^*(D_t)$, для которых будут иметь смысл все проводимые дальше операции, (\cdot, \cdot)

- здесь и далее будут обозначать соответствующие скалярные произведения на рассматриваемых функциональных пространствах.

При $\varphi^* = \varphi$ интегральное тождество (13) определяет функционал энергетического типа, т.е.

$$I(\varphi, Y, \varphi) = 0.$$

Он представляет собой уравнение баланса полной энергии системы (1).

Для обнаружения источников загрязняющих примесей по данным измерений концентраций используется совокупность данных и модели наблюдений, представленных функционалами наблюдений [16]:

$$\psi_m \equiv \Phi_m(\varphi) = \int_{D_t} \tilde{W}(\varphi)(\bar{x}, t) \chi_m(\bar{x}, t) d\bar{x} dt = (\tilde{W}(\varphi), \chi_m)$$

В нашем случае $\tilde{W}(\varphi) = \varphi$, ψ_m - измеренные значения концентрации в точке m с координатами (x_m, y_m, z_m, t_m) , $\chi_m(\bar{x}, t) = \delta(x - x_m, y - y_m, t - t_m)$ - весовые функции.

Поскольку нас интересует чувствительность по отношению к вариациям неопределённости в источниках, то будем считать, что вариации других параметров отсутствуют, тогда

$$(14) \quad \delta\psi_m = (\text{grad}_r \Phi_m(\varphi), \delta r) = (\Gamma_m, \delta r), \quad \Gamma_m = \text{grad}_r \Phi_m(\varphi).$$

при условии, что φ удовлетворяет (12).

В случае линейных моделей процессов, линейных моделей наблюдений и линейных, по отношению к функциям состояния, функционалов, можно составить соотношения для чувствительности не только для вариаций $\delta\psi_m$ и δr , но и для самих величин ψ_m и r . В линейном случае для построения соотношений для расчёта функций чувствительности можно не решать прямые задачи, которые в свою очередь, требуют знания всех входных данных, включая источники.

Для получения соотношений (14) достаточно решить совокупность сопряженных задач и по ним определить функции чувствительности (ФЧ) функционала наблюдений по отношению к источникам. Действительно, рассматривая расширенный функционал системы

$$(15) \quad \tilde{\Phi}_m(\varphi, \{Y, r\}, \varphi^*) = \Phi_m(\varphi) + I(\varphi, \{Y, r\}, \varphi^*) = (\varphi, \chi_m) + (L\varphi, \varphi^*) - (f + r, \varphi^*),$$

и вычислив его первую вариацию относительно переменной r , получим

$$\begin{aligned} & \bar{\delta}_r \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) = \\ & = \delta_\varphi \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) + \delta_r \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) + \\ & + \delta_{\varphi^*} \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r, \delta r)). \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_\varphi \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) &= (\chi_m + L^* \varphi^*(r), \delta\varphi(r)), \\ \delta_r \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) &= (-\varphi^*(r), \delta r), \\ \delta_{\varphi^*} \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) &= (L\varphi(r) - (f + r), \delta\varphi^*(r, \delta r)). \end{aligned}$$

Тогда, при выполнении соотношений

$$\begin{aligned} L\varphi(r) - (f + r) &= 0, \\ \chi_m + L^* \varphi^*(r) &= 0, \end{aligned}$$

полная вариация расширенного функционала относительно всех переменных примет вид

$$(16) \quad \begin{aligned} \delta\psi_m &= \bar{\delta}_r \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) = \\ &= \delta_r \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) = (-\varphi^*(r), \delta r), \end{aligned}$$

и $\Gamma_m = -\varphi^*(r)$.

На уровне численных схем, верно следующее утверждение: если φ - решение задачи (10), и сопряженная функция φ^* удовлетворяет системе

$$(17) \quad \begin{aligned} \varphi^{*Nt} &= 0, \\ (E + \tau\Lambda_y)^* \varphi_2^{*n} &= \varphi^{*n+1} - \tau\chi_m^n, \\ (E + \tau\Lambda_x)^* \varphi_1^{*n} &= \varphi_2^{*n}, \\ \varphi^{*n} &= \varphi_1^{*n}, \end{aligned}$$

то выполняется тождество Лагранжа [18]

$$(18) \quad \langle \varphi, \chi_m \rangle = \langle -\varphi_m^*, f \rangle.$$

Здесь φ^* - сопряженная функция, χ_m - функция измерений для измерения m , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение на пространстве сеточных функций, а B^* - матрица, сопряженная к некоторой матрице B , относительно этого скалярного произведения. В рассматриваемой системе мониторинга χ_m - дельта-Кронекера с носителем в точке расположения газоанализатора. Функции чувствительности Γ_m в конечно-мерном случае становятся сеточными функциями.

Без ограничения общности будем считать, что "фоновый" источник f равен 0. Иначе из данных измерений нужно вычесть значения концентраций, определяемых источником f .

3.4. Алгоритм локализации источников загрязнения на основе трансформаций Гаусса. Из тождества Лагранжа для результатов измерений можно получить соотношения:

$$(19) \quad \psi_m = \Gamma_m \mathbf{r}$$

Поскольку для расчета этих соотношений использовались модели наблюдений и функционалы с их участием, то в левой части (19) находятся смоделированные образы измеряемых величин. При подстановке в левую часть вместо моделируемых образов самих результатов измерений, получим систему линейных уравнений для приближённой оценки вектора r . Рассмотрим соотношение (19) как систему линейных уравнений относительно искомым компонентом функции $r \in R_{Nx*Ny*Nt}$. Перепишем их в виде:

$$(20) \quad \Gamma r = \psi$$

где $\Gamma = \{\Gamma_m\}_{m=1}^M$ - вещественна прямоугольная $M \times Nx * Ny * Nt$ матрица, составленная из ФЧ.

Если система (20) переопределена (т.е. когда число наблюдений больше, чем число искомым параметров источников), то ее решения получаются с помощью метода наименьших квадратов или первой (левой) трансформации Гаусса. Задача сводится к решению системы вида:

$$(21) \quad \Gamma^* \Gamma r = \Gamma^* \psi$$

В зависимости от величины, система (21) решается либо прямыми алгоритмами, либо итерационными методами. Такой вариант реализуется, когда расположение немногочисленных источников известно, и требуется найти их мощности.

Когда система (20) недоопределена (т.е. когда число наблюдений меньше, чем количество искомым функций), одно из решений можно получить с помощью правой трансформации Гаусса [3]

$$\Gamma\Gamma^*\mathbf{X} = \psi,$$

$$r = \Gamma^*\mathbf{X},$$

где $\Gamma\Gamma^*$ - неотрицательно определённая $M \times M$ матрица Грама для совокупности векторов ФЧ Γ_m . Такой вариант возникает в случае локализации источников.

Точечный источник расположен в точке с индексами (30,30), момент его действия $n = 0$. Результаты определения координат источника представлены на Рис. 4. Источник изображен в виде треугольника. Координаты источника восстановлены по данным наблюдений на момент времени $n = 59$ и матрице сопряженных функций, соответствующим наблюдениям в точках (30,40); (10,30); (20,25); (10,10); (20,15), пункты наблюдений обозначены квадратами. Процесс поиска координат источника представлен в динамике, начиная с момента времени $n = 0$, когда произошёл выброс, заканчивая моментом измерения $n = 59$. Изолинии на Рис. 4 отображают функцию источника.

Можно заключить, что функция источников дает оценку расположения источника, однако её глобальный максимум может быть расположен в точках наблюдений [6]. Найденные с помощью описанного алгоритма координаты источника и координаты заданного источника согласуются, что подтверждает возможность использования описанного алгоритма в системе мониторинга. В дальнейшем мы рассмотрим несколько способов преодоления "максимума функции источника в точке измерения".

3.5. Алгоритм локализации источников в пересечении функций наблюдаемости (видимости). Первый рассмотренный способ [5] состоит в том, чтобы использовать множества уровня функции чувствительности. Действительно, в процессе мониторинга, ФЧ можно использовать для определения областей наблюдаемости территорий для данной системы наблюдений. Функция $\Gamma_m(\mathbf{x}, t)$ характеризует вклад каждого источника, локализованного в точке сеточной области $(\mathbf{x}, t) \in D_t^h$ в суммарное значение ψ_m . Введем в рассмотрение функции, описывающие носители ФЧ в диапазоне значений выше заданного уровня значимости ε

$$H_m(\Gamma_m(\vec{x}, t), \varepsilon) = \text{supp}_\varepsilon \Gamma_m(\vec{x}, t) = \begin{cases} 1, & |\Gamma_m| \geq \varepsilon \\ 0, & |\Gamma_m| < \varepsilon \end{cases}.$$

Области, где $|\Gamma_m| < \varepsilon$ не учитываются, так как относительный вклад расположенных в них источников в измеренные значения функционала несущественен. Символ supp обозначает носитель соответствующей функции. Таким образом, пара функций $\{\Gamma_m, H_m\}$ может использоваться для оценок области наблюдаемости с помощью системы наблюдений. При этом, H_m дает конфигурацию области, где могут быть источники, сигнал от которых поступает в систему

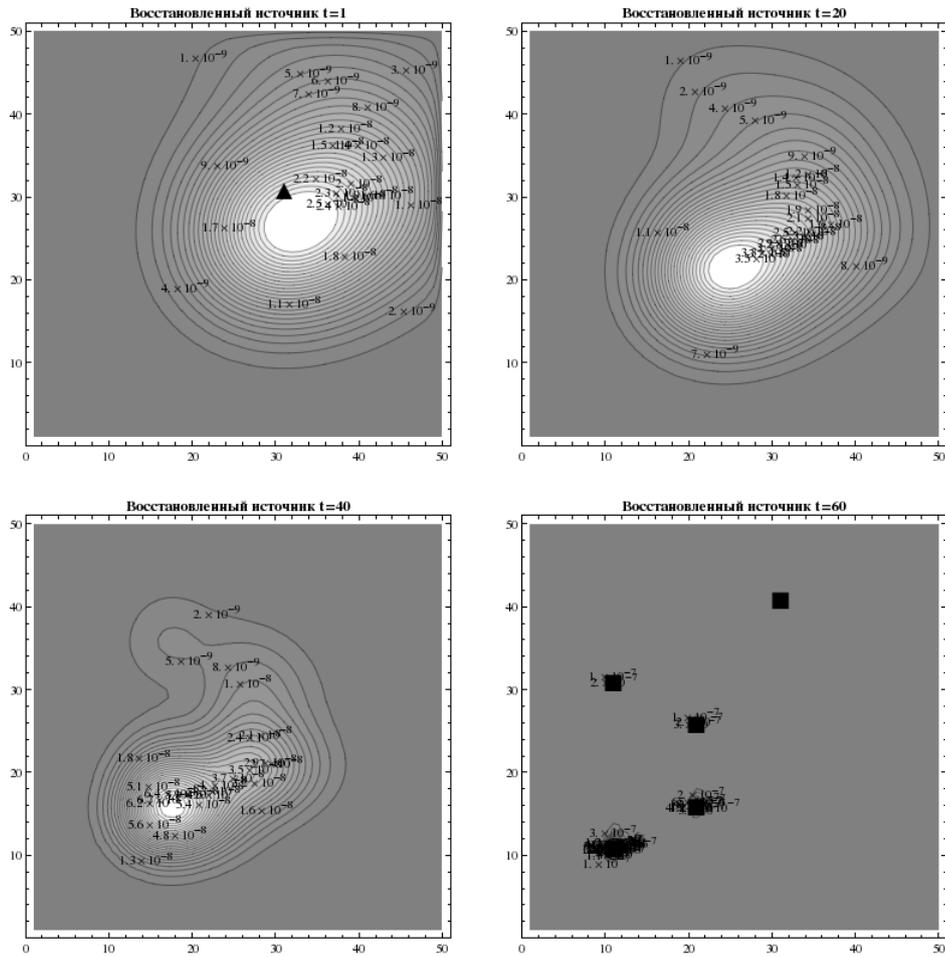


Рис. 4. Функция источника, полученная с помощью второй трансформации Гаусса для различных шагов по времени (n=0,20,40,59).

и аккумулируется в ψ_m . Кроме порога для функций чувствительности, аналогичный порог μ вводится и для данных измерений, чтобы отличать наблюдение в котором "есть сигнал источника" от наблюдения, в котором его "нет". Введем непересекающиеся множества индексов

$$M_V = \{m | \psi_m \geq \mu\}$$

$$M_{IV} = \{m | \psi_m < \mu\}$$

Тогда в качестве оценки расположения источника используется функция - индикатор

$$S = \prod_{m \in M_V} H_m(\Gamma_m(\vec{x}, t), \varepsilon) \cdot \prod_{m \in M_{IV}} (1 - H_m(\Gamma_m(\vec{x}, t), \varepsilon))$$

Результаты реализации алгоритма определения зоны наблюдаемости (видимости) представлены на рисунках Рис. 5 - Рис. 7. В данном случае, смоделированные измерения имели величины

$$\psi = \{5.69625e - 11, 4.54809e - 7, 7.63687e - 7, 4.61298e - 6, 2.31334e - 6\}.$$

И в качестве порога для учета наблюдения выбрано значение $\mu = 4.54809e-7$. Источник примесей на рисунках обозначен треугольником, точки наблюдения - квадратами. Процесс определения области чувствительности представлен в динамике, для моментов времени с индексами: $t = 1, t = 20, t = 40, t = 60$ (когда был произведен замер в точках наблюдения).

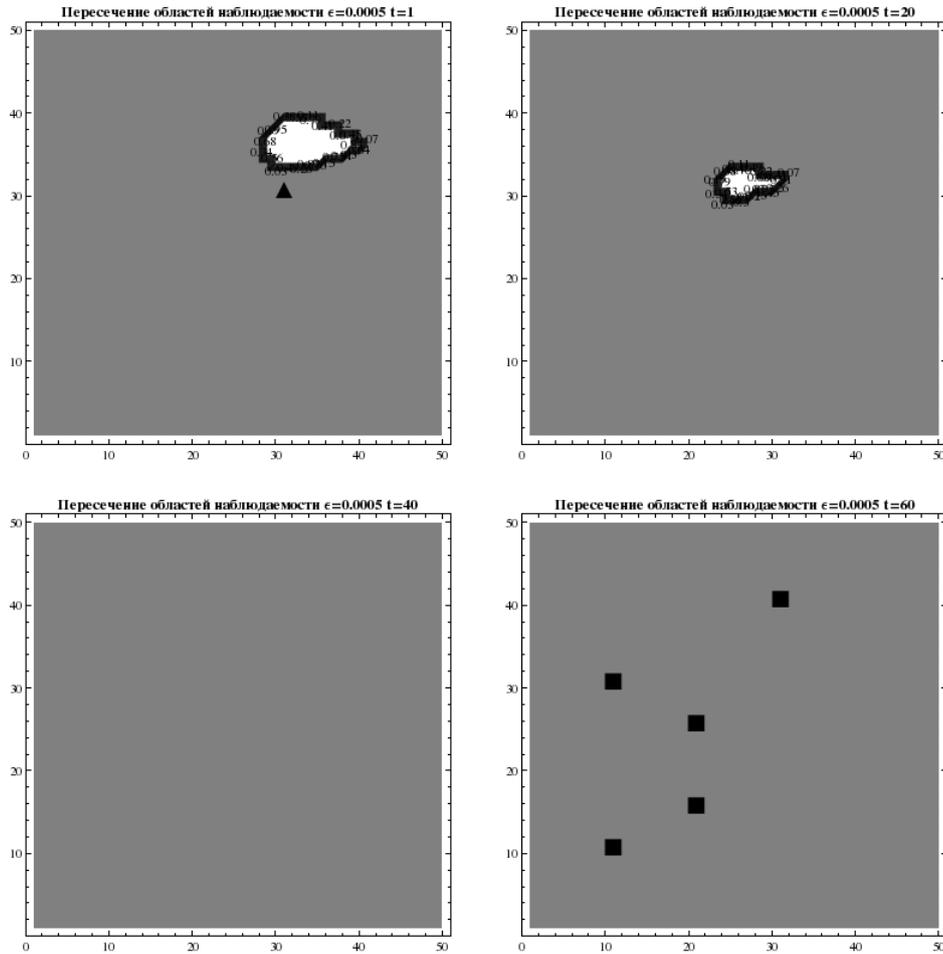


Рис. 5. Результат оценки расположения источника по областям наблюдаемости для различных шагов по времени ($n=0,20,40,59$).

Вычислительный эксперимент показал, что алгоритм можно использовать для оценки расположения источника, однако ключевым является вопрос выбора порогов (см. Рис. 7, где источник оказался за пределами множества при

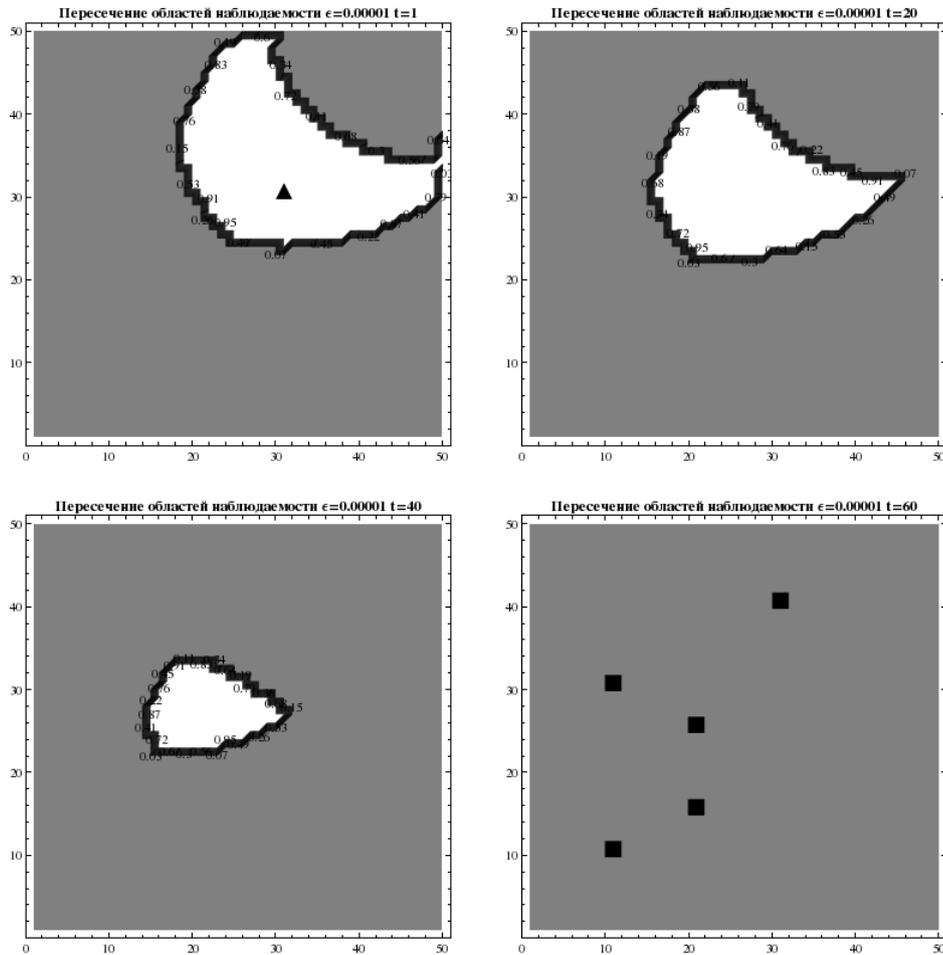


Рис. 6. Результат оценки расположения источника по областям наблюдаемости для различных шагов по времени ($n=0,20,40,59$).

слишком строгом пороге для функции чувствительности). Некоторые варианты такого выбора на основе априорной информации о мощностях источников были предложены в [18].

3.6. Алгоритм локализации источников на основе освещённости. В работе [7] предложена процедура увеличения эффективности алгоритма восстановления на основе второй трансформации Гаусса, в основе которой лежит идея о том, что решение задачи нужно искать в метрике, в которой характеристика множества функций $\{\Gamma_m\}_{m=1}^M$ для построения источников,

$$E = [\Gamma_1 \quad \dots \quad \Gamma_M] V^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_M \end{bmatrix},$$

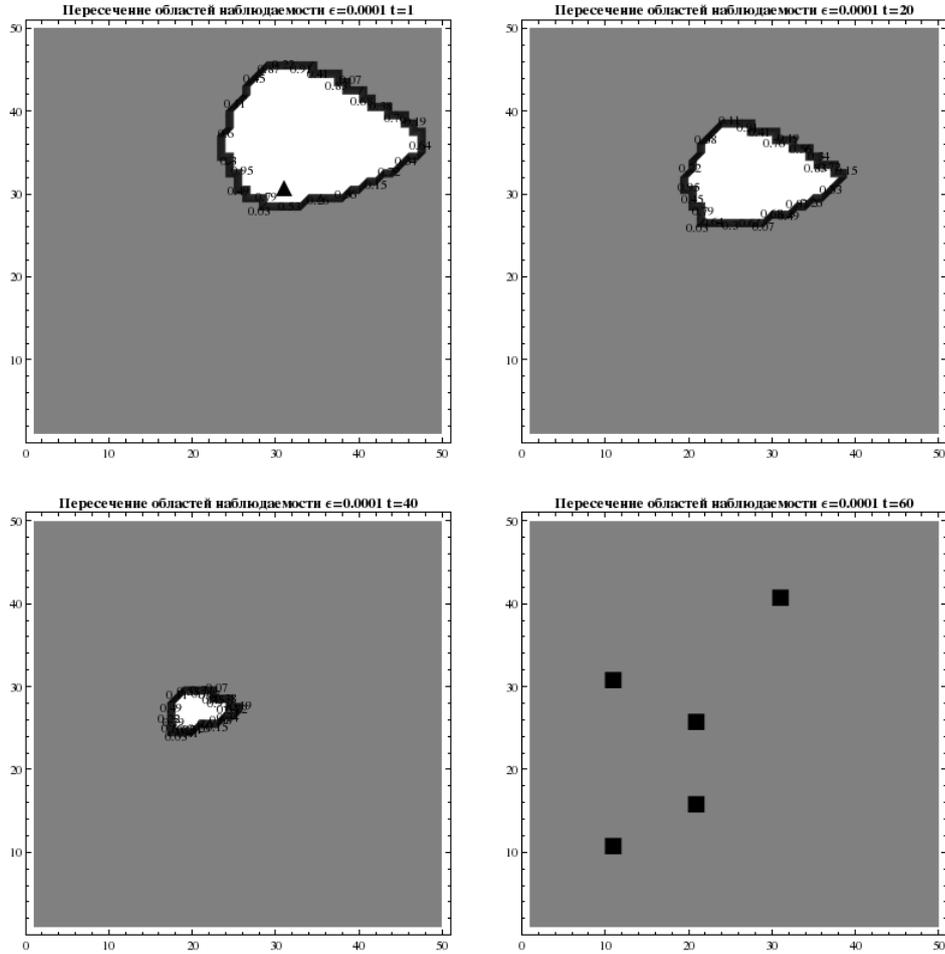


Рис. 7. Результат оценки расположения источника по областям наблюдаемости для различных шагов по времени ($n=0,20,40,59$).

$$V = \{ \langle \Gamma_l, \Gamma_m \rangle \}_{l,m=1}^M,$$

названная освещением (illumination), должна быть однородной по пространству. В рассмотренном нами примере, освещение для исходного набора сопряженных функций представлено на Рис. 8.

Метрика описывается таким весом v , что система для поиска источников представляется в виде

$$\Gamma r = \psi,$$

$$r = \left[\begin{array}{c} \frac{\Gamma_1}{v} \\ \vdots \\ \frac{\Gamma_M}{v} \end{array} \right]^* X.$$

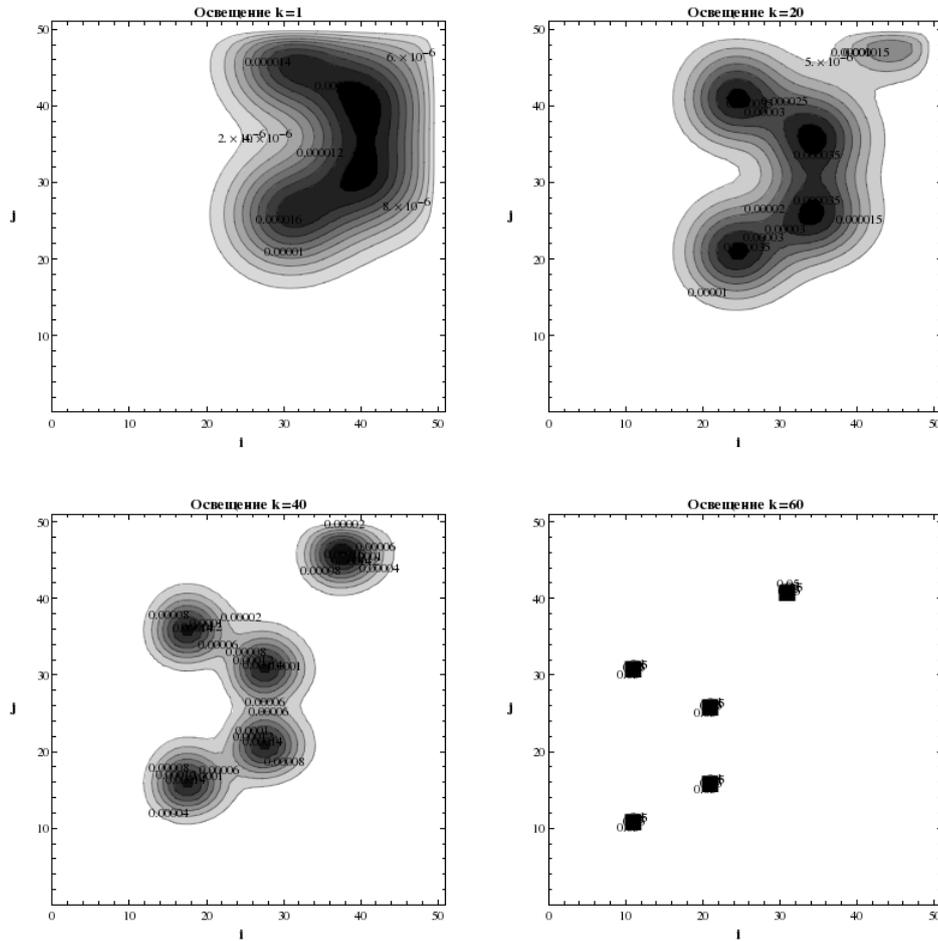


Рис. 8. Функции освещения (illumination) для системы измерений, отмеченной квадратами для различных шагов по времени ($n=0,20,40,59$).

Для получения базиса в [7] предложен следующий итерационный алгоритм, который начинается с однородного веса

$$v^1 := 1.$$

Дальше до стабилизации весов проводятся итерации

$$\Gamma_l^k := \frac{\Gamma_l}{v^k}.$$

$$H_{lm}^k = \langle \Gamma_l^k, \Gamma_m \rangle.$$

$$v^{k+1} := v^k \sqrt{ \left[\Gamma_1^k \quad \dots \quad \Gamma_M^k \right] (H^k)^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_1^k \\ \vdots \\ \Gamma_M^k \end{bmatrix} }.$$

После применения этого алгоритма, освещение становится однородным. Попробуем восстановить единственный точечный источник, работающий в начальный момент времени. Результаты представлены на Рис. 9. Далее локализуем точечный источник, работающий в середине временного интервала Рис. 10.

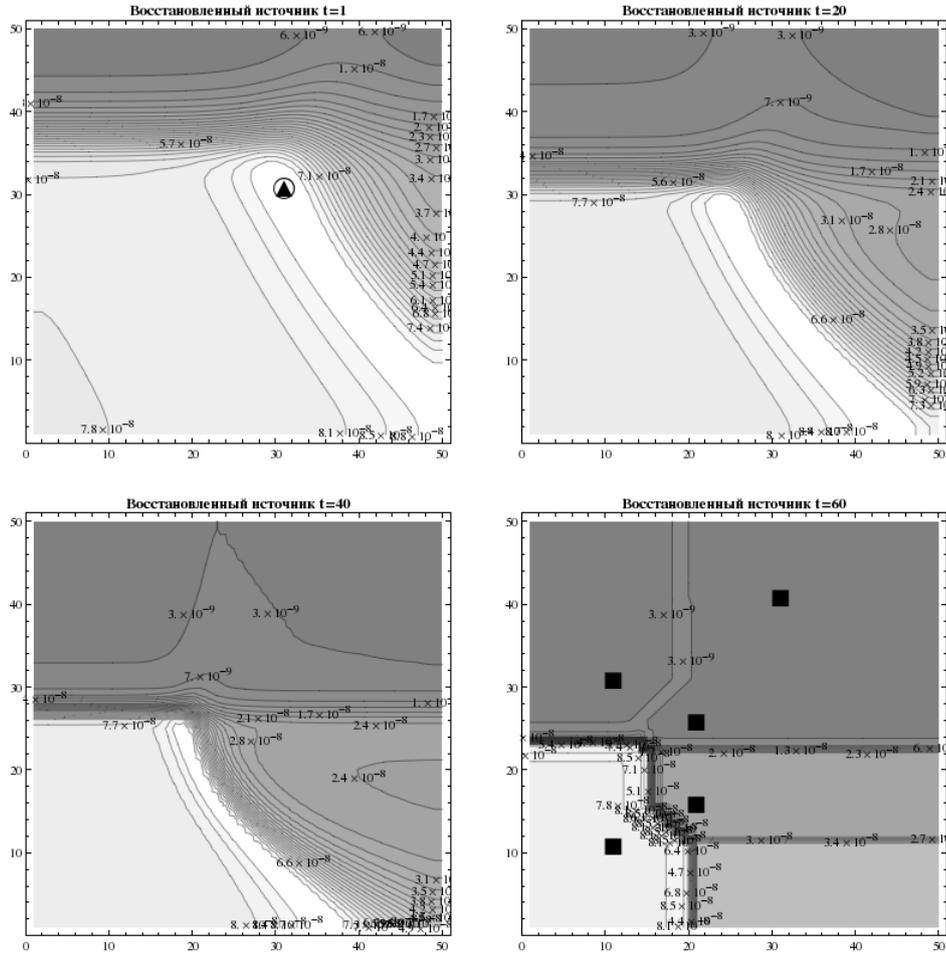


Рис. 9. Результат восстановления точечного источника, работавшего в начальный момент времени (отмеченного треугольником), на основе данных измерений (отмеченных квадратами) для различных шагов по времени ($n=0,20,40,59$). Контурами отмечены линии уровня функции источников. Максимум функции источников отмечен кругом.

Можно отметить, что в случае точных данных, точки максимумов совпали с расположением источника. При этом, у функции источников возникают отрицательные значения. Кроме того, если сравнить этот результат с результатами на Рис. 4 и Рис. 5 - 7, то можно отметить, что функция источников становится более сложной.

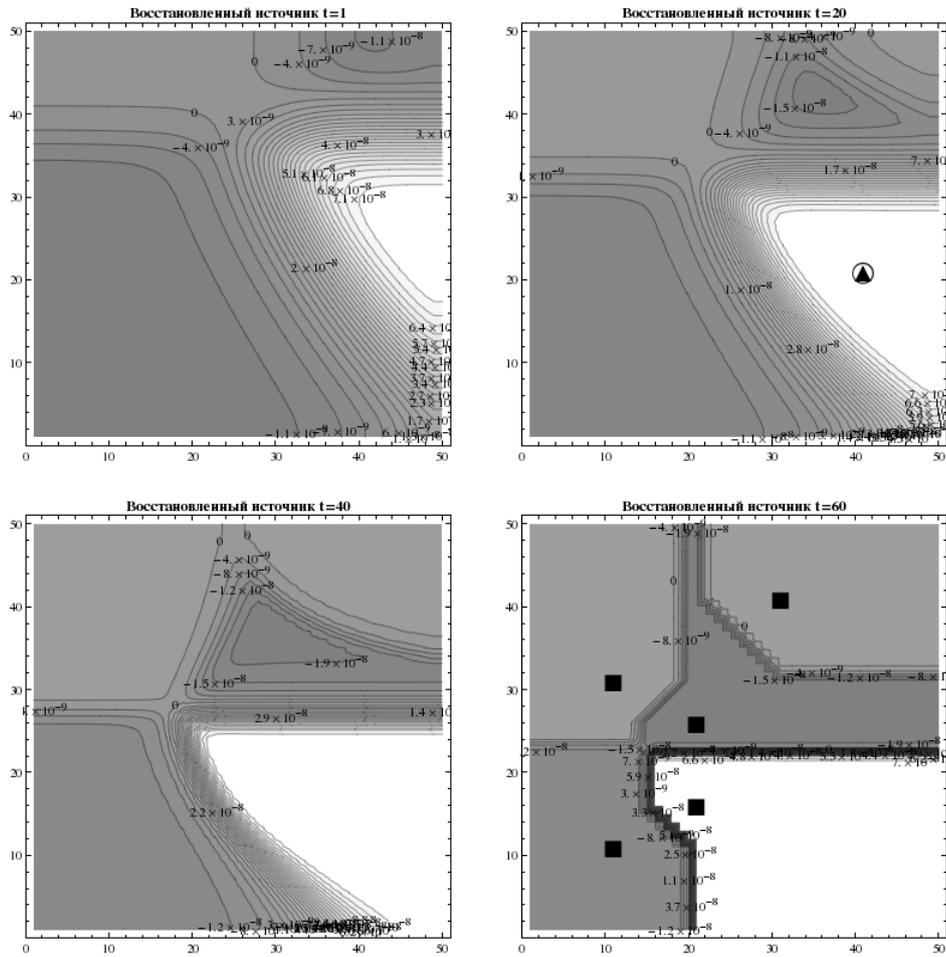


Рис. 10. Результат восстановления точечного источника, сработавшего в середине временного интервала (треугольник) на основе данных измерений (отмеченных квадратами) для различных шагов по времени ($n=0,20,40,59$). Максимум функции источников отмечен кругом.

Исследуем, как распределяются максимумы решения в зависимости от точности данных. Для этого рассмотрим пример, в котором данные измерений возмущаются случайным шумом:

$$\tilde{\psi}_m = (1 + \sigma^2 \xi) \psi_m,$$

где ξ - реализация нормально распределённой случайной величины с нулевым средним и единичной дисперсией. На Рис. 11 приведены расположения максимумов полученных таким образом функций источников в зависимости от величины стандартного отклонения σ .

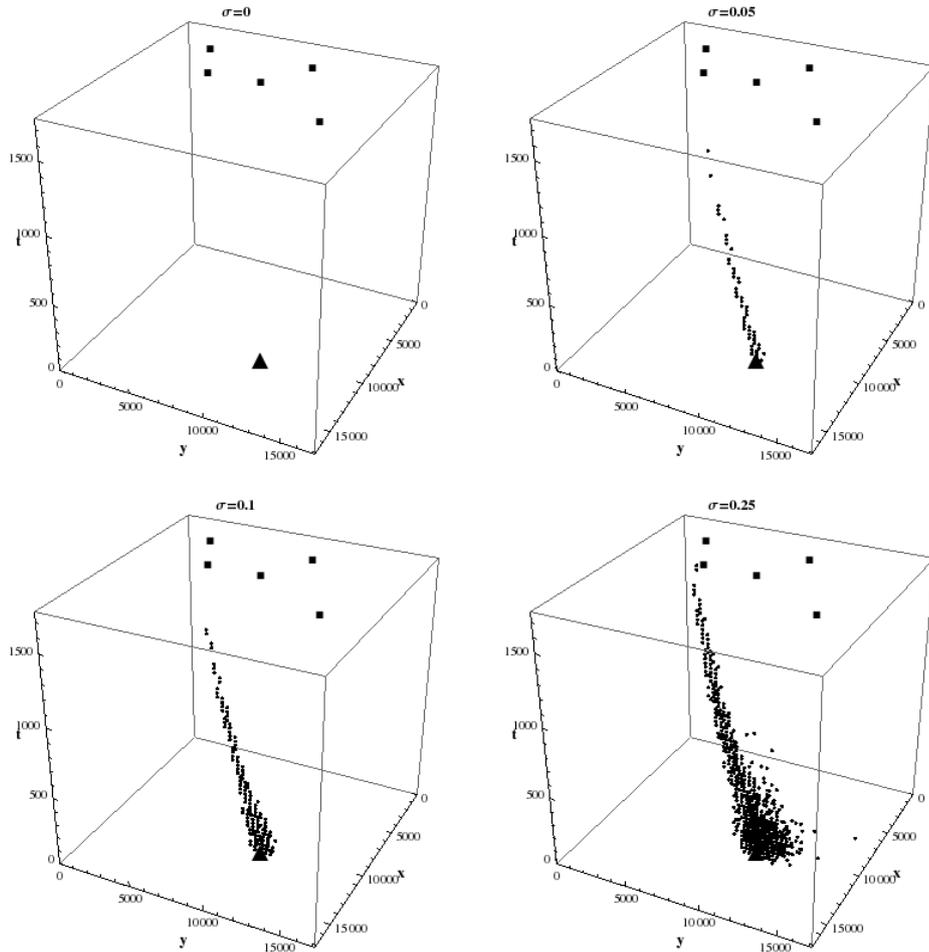


Рис. 11. Результат восстановления точечного источника при различных уровнях шума в данных, сработавшего в начальный момент времени (треугольник), по данным, измеренным в последний момент времени (квадраты). Максимумы функции источников отмечены точками.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Таким образом, вычислительные технологии для решения задач обнаружения источников были построены на основе двумерной модели конвекции-диффузии примеси. Алгоритмы решения прямых и сопряженных задач для этой модели были реализованы посредством методов расщепления. Рассмотрены алгоритмы поиска мощностей источников с известными пространственно-временными локализациями на основе фундаментальных решений прямой задачи. Для локализации источников были использованы алгоритмы на основе правой трансформации Гаусса и пересечения линий уровня функций чувствительности результатов измерений к источникам. Проведены численные эксперименты. Анализируя их результаты можно заключить, что самыми точными в

задаче об обнаружении единственного точечного источника оказались результаты алгоритма на основе освещённости, если в качестве оценки расположения выбирать максимум функции источников. В численных экспериментах алгоритм показал себя устойчивым к случайным возмущениям в данных обратной задачи. Однако сама функция источников, порождаемая алгоритмом, является более сложной, чем аналогичные функции, получаемые алгоритмами на основе простой правой трансформации Гаусса и пересечения множеств уровня функций чувствительности.

5. БЛАГОДАРНОСТИ

Реализацию алгоритмов решения прямых и сопряженных задач провел Идиль Талгатович Битимбаев. Алексей Александрович Бубликов реализовал веб-интерфейс представления данных системы мониторинга и результатов расчетов на карте Усть-Каменогорска. Авторы благодарят за ценные обсуждения Владимира Викторовича Пененко, Наталью Федоровну Денисову и Еркена Муксуновича Турганбаева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корешков Г.Л. Центр экологической безопасности: ответственность за решение проблем / Экофера.- 2012.- № 12.- С. 25- 29.
- [2] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Москва: Наука.- 1982.- С. 320.
- [3] Pudykiewicz J.A. Application of adjoint tracer transport equation for evaluating source parameters // Atmospheric Environment.- 1998 .- V.32 .- № 17.- P. 3039– 3050.
- [4] Агошков В.И. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущения в задаче об оптимальных траекториях // Вычислительная математика и математическое моделирование.- 2000.- ИВМ РАН, Москва.- С. 36– 53.
- [5] Penenko, V., A. Baklanov and E. Tsvetova Methods of sensitivity theory and inverse modeling for estimation of source term // Future Generation Computer Systems, 2002, 18, pp. 661– 671.
- [6] Issartel J.P. Rebuilding source of linear tracers after atmospheric concentration measurements // Atmos. Chem. Phys. Discuss.- 2003.- № 3.- P.3173 –3203 .
- [7] Issartel J.P. Emergence of a tracer source from air concentration measurements, a new strategy for linear assimilation // Atmos. Chem. Phys., 5 , 2005 , 249 –273
- [8] Krysta M. Source reconstruction for accidental releases of radionuclides / M. Krysta, M. Bocquet, N.Quelo // In Air,Water and Soil Quality Modelling for Risk and Impact Assessment.- Springer.- 2007 .- P.153 –161 .
- [9] Hamdi, A. The recovery of a time-dependent point source in a linear transport equation: application to surface water pollution // Inverse Problems.- 2009 .- V.25 .- P.1 –18 .
- [10] El Badia A. Identification of multiple moving pollution sources in surface waters or atmospheric media with boundary observations / A. Badia, T. Ha-Duong and Hamdi // Inverse Problems.- 2012 .- V.28 .- P.2 –22 .
- [11] Sharan M., Issartel J.-P., Singh S.-K. A point-source reconstruction from concentration measurements in low-wind stable conditions // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, Volume 138, Issue 668, pages 1884– 1894, October 2012 Part A
- [12] Penenko, A. Localization of point emission source systems for advection-diffusion equation in DMI. Scientific Report 08- 05 Enviro-RISKS: Man-induced Environmental Risks: Monitoring, Management and Remediation of Man-made Changes in Siberia (eds. Alexander Baklanov and Evgeny Gordov, Editors). Volume 2 : Atmospheric Pollution and Risk. Copenhagen 2008.
- [13] <http://export.yandex.ru/weather-ng/forecasts/36403.xml>
- [14] Пененко В.В. Модели и методы для задач охраны окружающей среды / В.В. Пененко, А.Е. Алоян. – Новосибирск: Наука, 1985. – 254 с.
- [15] Пененко В.В. Технологии численного моделирования. Вариационные принципы в природоохранном прогнозировании / В.В. Пененко, А.В. Пененко // методические указания. МОиН РК, ВКГТУ им. Д. Серикбаева. - Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2011.

- [16] Пененко В.В. Вычислительные аспекты моделирования динамики атмосферных процессов и оценки влияния различных факторов на динамику атмосферы // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики.- 1975.- С. 61- 76.
- [17] Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов Гидрометиздат.- 1981. Ленинград - 352 с.
- [18] Пененко А.В. Обнаружение источников загрязнений с помощью вариационных методов. Выч. Тех. 2008 V. 13. Спец.выпуск ч. 3 44– 50

АЛЕКСЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ПЕНЕНКО
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,
ПР. АКАДЕМИКА ЛАВРЕНТЬЕВА 6,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: a.penenko@gmail.com

РАХМЕТУЛЛИНА САУЛЕ ЖАДЫГЕРОВНА
ВОСТОЧНО-КАЗАХСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Д.СЕРИКБАЕВА,
УЛ. ПРОТОЗАНОВА А.К., 69,
070004, УСТЬ-КАМЕНОГОРСК, КАЗАХСТАН
E-mail address: rakhmetullinas@mail.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 10, стр. С.55–С.58 (2013)

УДК 511.3

MSC 32E30

О ДВУХ ИСТОРИЧЕСКИХ ПРИМЕРАХ
ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В.Г. ЧЕРЕДНИЧЕНКО

АБСТРАКТ. We give the modification the standard methods of approximation leading to convergent processes.

Keywords: polynomial approximation, rational functions, Runge.

Исследуем аппроксимацию полиномами на отрезке $[-1, 1]$ с равноотстоящими узлами функций

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \frac{1}{1 + ax^2}, \quad a > 0;$$

вторая из них носит имя Рунге. Мы соединили эти функции, быть может, впервые из-за их общего свойства: при увеличении числа узлов получаются расходящиеся процессы. В литературе [1–8] объясняют это наличием точки разрыва производной для первой функции и близостью особых (комплексных) точек к узлам интерполяции во втором случае. За счет специального выбора узлов эту трудность можно преодолеть. Отметим так же, что нет проблем при аппроксимации модуля рациональными функциями.

Здесь предлагается модификация стандартных способов аппроксимации, приводящая к сходящимся процессам и не только для указанных примеров.

Пусть N — натуральное число,

$$X_k = \frac{k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N + 1 \quad (X_0 = 0, X_N = 1, X_{N+1} = 1 + \frac{1}{N}).$$

Через $L_{2(N+1)}$ обозначим интерполяционный полином для функции $y = |x|$ с узлами $\pm x_k$.

Новизна предлагаемого подхода в добавлении крайних узлов, находящихся за пределами отрезка, где производится интерполяция.

CHEREDNICHENKO, V.G., ON TWO HISTORICAL EXAMPLES OF POLYNOMIAL APPROXIMATION.

© 2013 ЧЕРЕДНИЧЕНКО В.Г.

Поступила 20 марта 2013 г., опубликована 31 мая 2013 г.

Сделаем замену $t = x^2$, приходим к полиному

$$Q_{N+1}(t) = L_{2(N+1)}(x); \quad Q_{N+1}(t_k) = \sqrt{t_k}, \quad k = 0, 1, \dots, N+1.$$

Введем функцию (погрешность аппроксимации)

$$h_{N+1}(t) = \sqrt{t} - Q_{N+1}(t), \quad M = \max_{0 \leq t \leq 1} h_{N+1}(t).$$

Для $N = 3$, например, имеем

X_k	0	1/3	2/3	1	4/3
t_k	0	1/9	4/9	1	16/9
y_k	0	1/3	2/3	1	4/3

$$Q_4(t) = \frac{47}{12}t - \frac{25}{3}t^2 + \frac{23}{3}t^3 - \frac{9}{4}t^4; \quad h_4(t) = \sqrt{t} - Q_4(t).$$

Оценим M в зависимости от N .

Лемма 1. Пусть непрерывная неотрицательная функция $h(t)$ имеет невозрастающую на $[a, b]$ производную, тогда

$$M \leq h(a) + (b-a)h'(a), \quad M = \max_{a \leq t \leq b} h(t).$$

Это, по существу, теорема Лагранжа о конечном приращении. Используем лемму для $h_{N+1}(t)$, $t_{N-1} \leq t \leq t_N$.

Лемма 2. Имеет место

$$M \leq \frac{2N-1}{N^2} |h'_{N+1}(t_{N-1})|, \quad M = \max_{t_{N-1} \leq t \leq t_N} |h_{N+1}(t)|.$$

Функция $h_{N+1}(t)$ задана, однако найдем ее приближенное значение в зависимости от N . Принимая во внимание приближенное равенство

$$Q'_{N+1}(t_{N-1}) \approx \frac{Q_{N+1}(t_N) - Q_{N+1}(t_{N-1})}{t_N - t_{N-1}} = \frac{N}{2N-1},$$

получаем

Лемма 3. Имеет место

$$|h'_{N+1}(t_{N-1})| \approx \frac{N}{2(N-1)(2N-1)}.$$

Соединение лемм 2, 3 дает

Теорема 1. Погрешность аппроксимации функции $y = |x|$ полиномом $L_{2(N+1)}(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ с равноотстоящими узлами $X_k = \pm \frac{k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N+1$ оценивается неравенством

$$M \leq \frac{1}{2N(N-1)}, \quad N \geq 2.$$

По такой же схеме исследуем функцию Рунге ($a = 16$)

$$g(t) = \frac{1}{1+16t}, \quad t = x^2, \quad X_k = \frac{k}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N+1.$$

Введем интерполяционный полином $P_{N+1}(t)$ и погрешность аппроксимации:

$$P_{N+1}(t_k) = g(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N+1; \quad h_{N+1}(t) = g(t) - P_{N+1}(t).$$

Например, для $N = 4$ имеем

X_k	0	1/4	2/4	3/4	1	5/4
t_k	0	1/16	1/4	9/16	1	25/16
y_k	1	1/2	1/5	1/10	1/17	1/26

$$P_5(t) = 1 - 11t + 5t^2 - 100t^3 + 83t^4 - 24t^5, \quad h_5(t) = g(t) - P_5(t).$$

Выразим эти функции через N . Во-первых,

$$g'(t_{N-1}) = \frac{-16N^4}{(17N^2 - 32N + 16)^2}.$$

Далее

$$\begin{aligned} P'_{N+1}(t_{N-1}) &\approx \frac{P_{N+1}(t_{N-2}) - P_{N+1}(t_{N-1})}{t_{N-2} - t_{N-1}} = \\ &= \frac{-16N^4}{(17N^2 - 64N + 64)(17N^2 - 32N + 16)}. \end{aligned}$$

Соединяя два последних равенства, получаем

Лемма 4. *Имеет место*

$$h'_{N+1}(t_{N-1}) \approx \frac{16^2 N^4 (2N - 3)}{(17N^2 - 32N + 16)^2 (17N^2 - 64N + 64)}.$$

Теорема 2. *Погрешность полиномиальной аппроксимации функции Рунге на отрезке $[-1, 1]$ с равноотстоящими узлами*

$$X_k = \pm \frac{k}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N + 1$$

оценивается неравенством

$$M \leq \frac{16^2 N^2 (2N - 3)(2N - 1)}{(17N^2 - 32N + 16)^2 (17N^2 - 64N + 64)}.$$

Пример. $y = \frac{1}{1+16x^4}$, $[-1, 1]$.

В этом случае при равноотстоящих узлах получаем расходящийся процесс. Ситуацию исправляет, как и ранее, введение дополнительных узлов, причем их может быть и больше двух. Нетрудно привести и другие примеры.

Расширим применяемый нами метод аппроксимации.

Пусть $Q_N(x)$ — интерполяционный полином для функции $f(x)$ с произвольно расположенными узлами:

$$Q_N(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad x_k \in [a, b].$$

Тогда полином

$$Q_{N+1}(x) = Q_N(x) + \gamma \Omega_{N+1}(x), \quad \Omega_{N+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_N)$$

решает ту же интерполяционную задачу при любом γ с погрешностью

$$h(x, \gamma) = f(x) - Q_{N+1}(x), \quad \max_{a \leq x \leq b} |h(x, \gamma)| = \overline{M(\gamma)}, \quad M = \min_{\gamma} \overline{M(\gamma)}.$$

Пример. $f(x) = x^3$, $[0, 1]$.

Используя узлы $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, получаем

$$Q_1(x) = x, \quad Q_2(x) = x + \gamma x(x - 1), \quad h(x) = x(x - 1)(x - x_2), \quad x_2 = \gamma - 1.$$

Управляющий параметр γ переведен в узел x_2 . Величина $\overline{M(\gamma)} = M(x_2)$ находится здесь явно.

$$M(x_2) \leq \frac{1}{4}L(x_2), \quad L(x_2) = \max_{0 \leq x \leq 1} |x - x_2| = \begin{cases} 1 - x_2, & x_2 \leq \frac{1}{2}; \\ x_2, & x_2 \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad L(x_2) = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{3}{2}, \quad Q_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad |x^3 - Q_2| \leq \frac{1}{8}.$$

Пусть теперь $f(x) = x^3, [-1, 1]$, тогда

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x + \gamma(x-1)(x+1), \quad h(x) = (x^2 - 1)(x - x_2), \quad x_2 = \gamma,$$

$$M(x_2) \leq L(x_2),$$

$$L(x_2) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |x - x_2| = \begin{cases} 1 + x_2, & x_2 \geq 0; \\ 1 - x_2, & x_2 \leq 0, \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 0, \quad Q_2(x) = x, \quad |x^3 - Q_2| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.П. Ильин, *Численный анализ. Часть I*, Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики, СО РАН, 2004 г., 334 с.
- [2] Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш, *Численные методы и программное обеспечение*, М.: Мир, 2001, 576 с.
- [3] Р.В. Хемминг, *Численные методы*, М.: Наука, 1972, 400 с.
- [4] В.М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, М.: МГУ, 1976, 304 с.
- [5] Н.Н. Андреев, С.А. Теляковский, В.А. Юдин *Приближение индивидуальных функций — от Чебышева до наших дней. Сборник статей под редакцией академика В.П. Скулычева. Российская наука: день нынешний и день грядущий*, Academia. 1999, 416 с.
- [6] К. Ланцош, *Практические методы прикладного анализа*, М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961, 524 с.
- [7] И.П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, М.- Л., Гостехиздат, 1949, 340 с.
- [8] D.J. Newman, *Rational approximation to $|x|$* , Mich.Math.Journ., 1964, 11, №1, p.11-14.
- [9] В.Г. Чередниченко, *Рациональная интерполяция, аналитическое решение*, Сибирский математический журнал, 43:1 (2002), 188-193с.

Виктор Григорьевич Чередниченко

Новосибирский государственный технический университет,

пр. Карла Маркса, 20,

630092, Новосибирск, Россия

E-mail address: prof.cherednichenko@yandex.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 10, стр. С.59–С.73 (2013)

УДК 519.688

MSC 13A99

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ПРЯМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
АКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ
ДНА ВОДОЕМОВ**А.С. ШАРАБАРИНА, А.В. БЕЛОНОСОВА, А.С. БЕЛОНОСОВ,
С.П. ВИНОГРАДОВ

ABSTRACT.

Some questions of applicability of the one dimensional inverse dynamic problem in spectral statement are discussed [7]. Field data measurements in deep-water lakes of Siberia using high-frequency pulsed oscillation sources are interpreted. A numerical algorithm for simulation of synthetic seismograms is developed on the basis of the ray method.

Key words: direct and inverse dynamic problem in spectral statement, Lamé equations, wave field, ray method.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучением осадконакоплений в глубоководных пресных озерах Сибири занимаются давно и наиболее интенсивно на Байкале. Наименее

SHARABARINA, A.S., BELONOSOVA, A.V., BELONOSOV, A.S., VINOGRADOV, S.P.,
NUMERICAL SOLUTION OF THE DIRECT PROBLEM OF RESERVOIR BOTTOM SOUNDING.

© 2013 ШАРАБАРИНА А.С., БЕЛОНОСОВА А.В., БЕЛОНОСОВ А.С., ВИНОГРАДОВ С.П.

Работа поддержана РФФИ поддержана РФФИ, грант 12-01-00773.

Поступила 3 апреля 2013 г., опубликована 31 мая 2013 г.

исследовано Телецкое озеро, которое, как считают многие ученые, является молодым и поэтому не представляет интереса для дальнейшего его изучения.

Однако на самом деле вопрос о возрасте озера ещё не закрыт. Проведенные сотрудниками лаборатории математических задач геофизики ИВМиМГ СОРАН в 2007 году исследования верхних слоев осадков озера методом непрерывного сейсмопрофилирования с использованием высокоразрешающего геопрофилографа позволяют предположить, что на самом деле возраст Телецкого озера превышает несколько млн. лет. Этот же вывод они подтвердили и в 2008 году после изучения скоростей осадконакоплений в центральных частях участков от Ежона до Беле.

Интерпретацию накопленных данных полевых измерений планируется осуществлять на основе решения одномерной обратной динамической задачи сейсмоки в спектральной постановке. В такой постановке эта задача впервые была рассмотрена в 1962 г. А.С. Алексеевым [1]. Строгое решение этой задачи дается в работе А.С. Алексеева и В.С. Белоносова [2].

Обратная задача формулируется следующим образом: Найти строение упругой среды, расположенной под дном водоема, если известны точечное воздействие и соответствующий ему режим колебаний (отклик) на поверхности воды.

В работе [7] приводятся теоретические выкладки, на основе которых спектральная задача адаптируется к приведенной постановке, в которой среда состоит из толстого слоя воды и тонких слоев осадков.

Для решения обратной задачи по разработанным алгоритмам применительно к реальным данным необходимо произвести предварительное тестирование на модельных примерах. Для этого требуется решать прямую задачу в условиях реалистичной модели среды. Готовых программ решения задачи в такой постановке не имеется. Поставленная прямая задача решается в данной работе лучевым методом. Решение обратной задачи в полной постановке планируется получить в ходе дальнейшей работы.

Необходимые формулы для решения прямой динамической задачи в полной постановке приводятся в п. 2. Однако при численной реализации такого алгоритма возникают существенные трудности, связанные с вычислением интегралов от быстро осциллирующих функций. Это обусловлено тем, что применяемый источник колебаний работает на частотах $\div 4000$ Гц, на два порядка превышающих принятый в разведочной геофизике частотный диапазон ($2\div 30$ Гц). Описанный метод хорошо работает для традиционных сейсмических источников. Однако численное решение прямой динамической задачи в полной постановке требует большого объема работы и на данном этапе не реализовано.

Вместо этого расчет волнового поля выполняется на основе асимптотического лучевого метода. Реализация лучевого метода применительно к одномерной задаче приводится в п. 3.

2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

2.1. **Прямая динамическая задача в полной постановке.** В работе [7] получены постановки прямых динамических задач и их одномерные интерпретации. Прямая задача сводится к решению начально-краевой задачи:

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad -h < z < 0,$$

$$(2.2) \quad \rho_0 c^2 \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=-h} = f(t),$$

$$(2.3) \quad \rho(z) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \right], \quad z > 0,$$

$$(2.4) \quad w(-0, t) = w(+0, t),$$

$$(2.5) \quad \rho_0 c^2 \frac{\partial w}{\partial z}(-0, t) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z}(+0, t),$$

$$(2.6) \quad w(z, t) = 0, \quad t \leq 0,$$

где $w \equiv w(z, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} u_z(x, y, z, t) dx dy$ – интегральное среднее «вертикальной» компоненты u_z вектора смещений $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ точки (x, y, z) относительно положения равновесия в момент времени t . Также в [7] показано, что в случае радиально-симметричной среды, аналогичные интегральные средние для «латеральных» компонент u_x, u_y оказываются равными нулю, и в этом смысле обратная динамическая задача сводится к одномерной постановке.

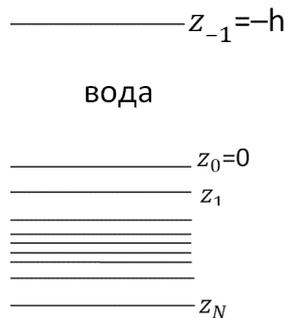


Рис. 2.1. Слоисто-однородная среда

2.2. Алгоритм численного решения задачи. На рис 2.1 приведена модель слоисто-однородной среды. К соотношениям (2.1–2.6) добавим ещё одно — условие отсутствия приходящих волн:

$$(2.7) \quad \frac{\partial w}{\partial t}(z_N, t) + V_N \frac{\partial w}{\partial z}(z_N, t) = 0.$$

Здесь V_N — скорость при $z \geq z_N$.

К условиям (2.4–2.6) добавляем следующие:

$$(2.8) \quad w \Big|_{z_k=-0} = w \Big|_{z_k=+0}, \quad k = 1 \dots N - 1,$$

$$(2.9) \quad \rho_{k-1} V_{k-1}^2 \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{z_k=-0} = \rho_k V_k^2 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z_k=+0}, \quad k = 1 \dots N - 1.$$

где V_k — скорость при $z_k \leq z \leq z_{k+1}$.

Применим к уравнениям (2.1–2.9) преобразование Фурье по времени

$$v(z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ti\omega} w(z, t) dt.$$

Обозначив за $\tilde{f}(\omega)$ преобразование Фурье функции $f(t)$, после очевидных преобразований, получим:

$$\begin{aligned} -\omega^2 v(z, \omega) &= c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z, \omega), \quad -h < z < 0, \\ -\rho\omega^2 v(z, \omega) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z} \right], \quad z > 0, \\ \rho_0 c^2 \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= \tilde{f}(\omega), \\ v(-0, \omega) &= v(+0, \omega), \\ \rho_0 c^2 \frac{\partial v}{\partial z}(-0, \omega) &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z}(+0, \omega), \\ -i\omega v(z_N, \omega) + V_N \frac{\partial v}{\partial z}(z_N, \omega) &= 0. \end{aligned}$$

Решение системы строится как линейная комбинация $c_1 y_1(z, \omega) + c_2 y_2(z, \omega)$ двух линейно независимых решений уравнения:

$$\begin{aligned} -\omega^2 y &= c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}, \quad -h < z < 0, \\ -\rho\omega^2 y &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial y}{\partial z} \right], \quad z > 0, \end{aligned}$$

с условиями склейки

$$\begin{aligned} y(-0, \omega) &= y(+0, \omega), \\ \rho_0 c^2 \frac{\partial y}{\partial z}(-0, \omega) &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial y}{\partial z}(+0, \omega). \end{aligned}$$

В качестве $y_1(z, \omega)$ удобно взять решение Задачи Коши:

$$\begin{aligned} -\omega^2 y_1 &= c^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2}, \quad -h < z < 0, \\ -\rho \omega^2 y_1 &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial y_1}{\partial z} \right], \quad z > 0 \\ y_1(-0, \omega) &= y_1(+0, \omega), \\ \rho_0 c^2 \frac{\partial y_1}{\partial z}(-0, \omega) &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial y_1}{\partial z}(+0, \omega), \\ y_1(-h) &= 1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial z}(-h) = i. \end{aligned}$$

y_1 находится из уравнения

$$-\omega^2 y_1 = c^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2}, \quad -h < z < 0$$

с начальными условиями

$$y_1(-h) = 1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial z}(-h) = i.$$

В точке $z = 0$ из условия склейки находятся новые начальные условия:

$$\begin{aligned} y_1|_{z=+0} &= y_1|_{z=-0}, \\ \frac{\partial y_1}{\partial z} \Big|_{z=+0} &= \frac{\rho_0 c^2}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial y_1}{\partial z} \Big|_{z=-0}. \end{aligned}$$

Далее с этими начальными условиями решается уравнение

$$-\rho \omega^2 y_1 = \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial y_1}{\partial z} \right], \quad z > 0,$$

до границы z_N .

В качестве y_2 возьмем функцию, сопряженную y_1 , то есть $y_2(z, \omega) = \bar{y}_1(z, \omega)$. Константы c_1 и c_2 находятся из условия отсутствия приходящих волн и из начального условия:

$$\begin{aligned} \rho_0 c^2 \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= \tilde{f}(\omega), \\ -i\omega v(z_0, \omega) + V_0 \frac{\partial v}{\partial z}(z_0, \omega) &= 0. \end{aligned}$$

Подставив в эти уравнения $v(z, \omega) = c_1 y_1 + c_2 y_2$, получим систему

$$\rho_0 c^2 \left(c_1 \frac{\partial y_1}{\partial z}(-h, \omega) + c_2 \frac{\partial y_2}{\partial z}(-h, \omega) \right) = \tilde{f}(\omega),$$

$$-i\omega [c_1 y_1(z_l, \omega) + c_2 y_2(z_l, \omega)] + V_0 \left[c_1 \frac{\partial y_1}{\partial z}(z_l, \omega) + c_2 \frac{\partial y_2}{\partial z}(z_l, \omega) \right] = 0.$$

Отсюда находятся константы c_1 и c_2 . Таким образом, $v(z, \omega)$ можно найти при любом вещественном ω . Если подсчитать $v(z, \omega)$ для достаточно

густой сетки по параметру ω , а потом сделать обратное преобразование Фурье

$$w(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ti\omega} v(z, \omega) d\omega,$$

то получится искомая функция $w(z, t)$.

Как сказано выше в введении, при численной реализации такого алгоритма возникают существенные трудности, связанные с вычислением интегралов от быстроосциллирующих функций.

Здесь следует отметить, что функцию $w(z, t)$ можно рассматривать как решение одномерной динамической задачи для случая плоской волны. Это также оправдывается методикой проведения полевых измерений.

Была выбрана следующая схема возбуждения и регистрации волновых полей: высокочастотный источник находился на поверхности; приёмник погружался на глубину 100 метров; глубина дна была порядка 200 м; отраженные волны регистрировались только от тонкого слоя осадков около десятка метров. В этом случае естественно считать, что приёмник регистрирует плоскую прямую и плоскую отраженную от дна волну.

Применение лучевого метода в условиях данной задачи полностью оправдано, так как в нашем случае длина волны мала по сравнению с геометрическими размерами исследуемой области.

3. ЛУЧЕВОЙ МЕТОД

3.1. Основы теории лучевого метода. В соответствии с принципами лучевого метода [10–12], интенсивность и форма записи для волн, распространяющихся в упругих средах, определяются, как правило, вектором нулевого приближения $\mathbf{u}_0(x, y, z) f_0(t - \tau)$ в разложении поля волны:

$$(3.1) \quad \mathbf{u}(x, y, z, t) = \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n(x, y, z) f_n(t - \tau),$$

где

t — время, отсчитываемое от момента включения источника,

$\tau = \tau(x, y, z)$ — функция поля времен волны,

$\mathbf{u}_n(x, y, z)$ — комплексная амплитуда в n -м приближении,

$f_n(t - \tau)$ — комплексная форма записи волны в n -м приближении.

Каждый следующий член в разложении (3.1) с расстоянием затухает быстрее, чем предыдущий, а по времени имеет более плавный характер:

$$f'_{n+1}(t) = f_n(t).$$

Там, где первое слагаемое в (3.1) мало или резко изменяется вдоль фронта, последующие слагаемые становятся существенными и пренебрегать ими нельзя. Такими областями являются окрестности каустик, петли годографа. В этих областях неправомерно считать поле, учитывая лишь первый, отличный от нуля, член разложения (3.1).

В рамках нулевого приближения лучевого метода учитываются все кинематические и динамические особенности, связанные с распространением волн в неоднородных слоях, с отражением, преломлением и обменом типов P - S волн на границах слоев.

Главная часть суммарного волнового поля, представляемого в виде ряда (3.1), описывается нулевым приближением лучевого метода и связана с переносом энергии вдоль лучевых трубок без учета поперечной диффузии. Это поле имеет разрывы на границах тени. В дальнейшем будем под $\mathbf{u}(x, y, z)$, $f(t)$ понимать величины, отвечающие нулевому члену разложения (3.1) $\mathbf{u}_0(x, y, z)$, $f_0(t)$, соответственно.

Интенсивность. Интенсивность волны на фронте в точке M вычисляется по формуле

$$(3.2) \quad I(M) = \frac{i_0(\theta)}{v_0 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{\rho_0 \cdot v_0}{\rho \cdot v}} \cdot e^{-\sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} l_{\nu}} \cdot \prod_{\nu=1}^{n-1} K_{\nu} \sqrt{\frac{\rho'_{\nu} v'_{\nu} \cos \theta'_{\nu}}{\rho_{\nu} v_{\nu} \cos \theta_{\nu}}},$$

где:

- $i_0(\theta)$ – функция источника (безразмерная);
- θ – угол входа луча из источника;
- ρ_0 – плотность в источнике;
- v_0 – скорость в источнике, отвечающая типу волны в источнике;
- L – полное геометрическое расхождение лучевой трубки в точке M ;
- ρ – плотность в точке M ;
- v – скорость (отвечающая типу волны) в точке M ;
- n – число звеньев луча;
- α_{ν} – коэффициент поглощения в среде ν -го звена луча;
- l_{ν} – длина ν -го звена луча;
- K_{ν} – комплексный коэффициент отражения/преломления, отвечающий выбранной волне, возникшей в результате контакта с ν -й границей;
- ρ_{ν} – плотность в R -среде в точке M_{ν} ; (ν -й точке пересечения луча с пройденными границами);
- v_{ν} – скорость (отвечающая типу падающей волны) в R -среде в точке M_{ν} ;
- θ_{ν} – острый угол между направляющим вектором луча падающей (из R -среды) волны и нормалью к ν -й границе в точке M_{ν} ;
- ρ'_{ν} – плотность в точке M_{ν} в R' -среде;
- v'_{ν} – скорость (отвечающая типу отраженной/преломленной волны) в R' -среде в точке M_{ν} ;
- θ'_{ν} – острый угол между направляющим вектором луча отраженной/преломленной волны (в R' -среде) и нормалью к ν -й границе в точке M_{ν} ;
- R -средой называется среда, из которой луч падает на границу раздела. Q -средой называется среда с противоположной стороны этой границы. Под R' -средой здесь понимается та из сред (R, Q) , в которой волна распространяется после «акта» отражения/преломления.

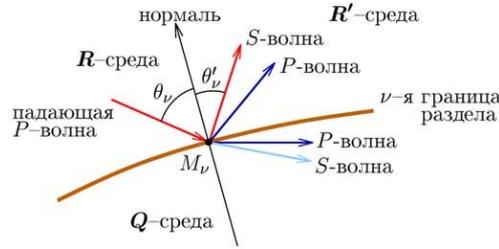


Рис. 3.1

Рисунок 3.1 поясняет ситуацию падения P -волны на ν -ю границу раздела двух твердых сред в точке M_ν . После отражения от границы волна распространяется в качестве поперечной. Направляющие вектора лучей падающей P -волны и отраженной S -волны изображены красными стрелками. Синими стрелками изображены направляющие вектора еще трех вновь возникших волн: отраженной (P) и двух преломленных (P и S). В данном случае средой R' будет прежняя среда R , но в качестве скорости v'_ν берется скорость $V_S(M_\nu)$. Для падающей волны скорость $v_\nu = V_P(M_\nu)$ в той же среде. Значения плотностей ρ_ν, ρ'_ν в данном случае одинаковы.

Если в данном примере в качестве волны после контакта с границей взять одну из преломленных волн, то средой R' будет среда Q .

Вектор смещения. Вектор смещений в точке $M(x, y, z)$ среды можно записать в виде

$$(3.3) \quad \mathbf{u}(M) = I(M) \cdot \mathbf{n},$$

где $I(M)$ – интенсивность волны в точке M , а \mathbf{n} – единичный вектор поляризации волны. Если точка M располагается внутри среды, \mathbf{n} имеет вещественные компоненты и равен

$$\mathbf{n} = \begin{cases} (\tau_1, \tau_2) := \boldsymbol{\tau} & \text{в случае } P\text{-волны,} \\ (-\tau_2, \tau_1) & \text{в случае } S\text{-волны,} \end{cases}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный направляющий вектор луча в точке M .

Случай, когда точка M находится на границе раздела различных сред (в том числе, на свободной поверхности), не рассматривается.

В лучевом приближении представление временного поля применительно к случаю двух переменных имеет вид

$$(3.4) \quad \mathbf{u}(x, z, t) = \text{Im } \mathbf{u}(x, z) f(t - \tau(x, z)),$$

где (x, z) – точка M среды, а под $\mathbf{u}(x, z), f(t)$ понимаются величины, отвечающие нулевому члену разложения (3.1). Обозначив компоненты комплексного вектора смещений $\mathbf{u}(x, z)$, определяемого по формуле (3.3),

через $u^1(x, z), u^2(x, z)$, представим вектор \mathbf{u} в виде

$$(3.5) \quad \mathbf{u}(x, z) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |u^1| \cdot e^{-i\varphi^1} \\ |u^2| \cdot e^{-i\varphi^2} \end{pmatrix},$$

Тогда формулу (3.4) можно записать в виде

$$(3.6) \quad \mathbf{u}(x, z, t) = \begin{pmatrix} |u^1| \cdot F(t - \tau, \varphi^1) \\ |u^2| \cdot F(t - \tau, \varphi^2) \end{pmatrix}.$$

Входящие в правую часть векторного равенства (3.6) функция $F(t, \varphi)$ (форма волны в приемнике) выражается через функцию $f(t)$ (форма волны в источнике) в виде

$$(3.7) \quad F(t, \varphi) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Phi(\omega) e^{i(\omega t + \varphi)} d\omega,$$

где

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt$$

– преобразование Фурье функции $f(t)$.

Перепишем формулу (3.7) в другом виде, более удобном для вычисления

$$F(t, \varphi) = f(t) \cdot \cos \varphi - \bar{f}(t) \cdot \sin \varphi,$$

где через $\bar{f}(t)$ обозначается сопряженная к $f(t)$ по Гильберту функция:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^\infty \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^\infty \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Суммирование волн. Колебания упругой среды, возбуждаемые сосредоточенным источником, могут рассматриваться как результат наложения отдельных волн (отраженных, преломленных) [14]. Если для точки $M(x, z)$, в которой находится приемник, известны характеристики этих волн – время вступлений τ_k , амплитуды $A_k^i = |u_k^i|$ фазы $\varphi_k^i = \arg(u_k^i)$ i -й компоненты ($i = 1, 2$) вектора смещений \mathbf{u}_k , а также задана функция $f(t)$ (сигнал в источнике), то суммарное возмущение $U^i(t)$ (сейсмотрасса i -й компоненты волнового поля в точке M) вычисляется по формуле

$$(3.8) \quad U^i(t) = \sum_{k=1}^n A_k^i (f(t - \tau_k) \cdot \cos \varphi_k^i - \bar{f}(t - \tau_k) \cdot \sin \varphi_k^i),$$

где n – число волн, приходящих в приёмник в рассматриваемый момент времени, $\bar{f}(t)$ – преобразование Гильберта функции $f(t)$.

Сигнал в источнике $f(t)$ обычно задается в явном виде.

Расчет коэффициентов отражения-преломления. Пусть из среды (r) на границу Γ раздела двух сред ((r) и (q)) в точке M падает продольная (поперечная) волна (рис. 3.2). Значение скоростей ($P - S$) волн

в окрестности точки M в (r) – (q) средах будем обозначать, соответственно, $v_{1r}, v_{2r}, v_{1q}, v_{2q}$ (индексы 1, 2 используем вместо p, s). Плотности сред обозначим через ρ_r, ρ_q . Пусть $\mathbf{n}^{(0)} = (n_1, n_2)$ – единичный направляющий вектор луча падающей волны, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ – вектор единичной нормали к границе Γ в точке M , направленный так, что $(\mathbf{n}^{(0)}, \boldsymbol{\nu}) \geq 0$. Направляющие вектора лучей вновь возникших $(P - S)$ волн в (r) – (q) средах обозначим $\mathbf{n}_1^{(r)}, \mathbf{n}_2^{(r)}, \mathbf{n}_1^{(q)}, \mathbf{n}_2^{(q)}$.

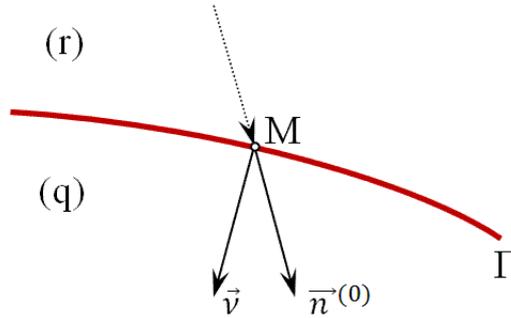


Рис. 3.2

Тогда коэффициенты отражения-преломления находятся из системы:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1^{(r)} \\ K_2^{(r)} \\ K_1^{(q)} \\ K_2^{(q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{15} \\ b_{25} \\ b_{35} \\ b_{45} \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1r} \\ c_{1r} \\ -\rho_r v_{1r} [1 - 2s_{2r}^2] \\ -\rho_r v_{2r} 2s_{2r} c_{1r} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{2r} \\ -s_{2r} \\ \rho_r v_{2r} 2s_{2r} c_{2r} \\ -\rho_r v_{2r} [1 - 2s_{2r}^2] \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \\ b_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_{1q} \\ c_{1q} \\ \rho_q v_{1q} [1 - 2s_{2q}^2] \\ -\rho_q v_{2q} 2s_{2q} c_{1q} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \\ b_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{2q} \\ s_{2q} \\ \rho_q v_{2q} 2s_{2q} c_{2q} \\ \rho_q v_{2q} [1 - 2s_{2q}^2] \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{15} \\ b_{25} \\ b_{35} \\ b_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_{1r} \\ c_{1r} \\ \rho_r v_{1r} [1 - 2s_{2r}^2] \\ -\rho_r v_{2r} 2s_{2r} c_{1r} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} b_{15} \\ b_{25} \\ b_{35} \\ b_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{2r} \\ s_{2r} \\ \rho_r v_{2r} 2s_{2r} c_{2r} \\ \rho_r v_{2r} [1 - 2s_{2r}^2] \end{pmatrix},$$

$$s_{jm} = \delta \cdot \sin \theta_j^{(m)} = (n_1^{(0)} \nu_2 - n_2^{(0)} \nu_1) \frac{v_{jm}}{v_0},$$

$$c_{jm} = \cos \theta_j^{(m)} = \sqrt{1 - s_{jm}^2}, j = 1, 2, m = r, q.$$

$$\delta = \operatorname{sgn}(n_1^{(0)} \nu_2 - n_2^{(0)} \nu_1),$$

(символом \parallel разделены случаи падения $(P||S)$ -волны).

3.2. Лучевой метод применительно к одномерной постановке.

Адаптируем лучевой метод применительно к одномерной постановке. Тогда формула интенсивности (3.2) принимает следующий вид:

$$I(M) = C \cdot \prod_{\nu=1}^{n-1} K_{\nu} \sqrt{\frac{\rho'_{\nu} v'_{\nu}}{\rho_{\nu} v_{\nu}}},$$

где C – некоторая константа, одинаковая для всех положений приемников и играющая здесь роль масштабирующего множителя.

Так как волна распространяется в воде и падает под прямым углом на поверхность, то S -волны отсутствуют и коэффициенты отражения/преломления находятся в явном виде:

$$K_1^r = \frac{p_q \cdot v_{1q} - \rho_r \cdot v_{1r}}{p_q \cdot v_{1q} + \rho_r \cdot v_{1r}}, K_1^q = \frac{2 \cdot p_r \cdot v_{1r}}{p_q \cdot v_{1q} + \rho_r \cdot v_{1r}}.$$

Кроме того, фазы могут принимать лишь значения π или 0° , поэтому при суммировании у нас «зануляется» второе слагаемое под знаком суммы в (3.8). Получается, что преобразование Гильберта нам не нужно, и формулу (3.8) можно переписать в виде

$$U^i(t) = \sum_{k=1}^n A_k^i \cdot f(t - \tau_k) \cos \varphi_k^i.$$

При расчете компонент суммарного вектора смещений будем учитывать только наиболее энергетически значимые волны, приходящие в приемник. Это реализуется на основе специального рекурсивного алгоритма без привлечения кодировки лучей.

В качестве сигнала в источнике выбран импульс Пузырева, определяемый по формуле

$$f(t) = f_0(t - t_0), \text{ где } f_0(t) = e^{-a^2 t^2} \cos bt.$$

Значения t_0, a, b определяются при помощи трех изменяемых параметров T, ω_0, γ в виде

$$t_0 = \frac{T}{2\omega_0}, b = 2\pi \cdot \omega_0, a = \frac{b}{\gamma}.$$

Параметры имеют следующий смысл:

- T – приведенная длительность (с); используется значение 4;
- ω_0 – основная, или несущая, частота (Гц); используется значение 5000;
- γ – эффективная ширина импульса; используется значение 4.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Согласно алгоритму, приведенному в п. 3, составлен комплекс программ на языке С и проведены численные расчеты по моделированию волнового поля для модели среды, приближенной к реальной.

Полевые измерения проводились в месте, указанном на карте красной точкой.

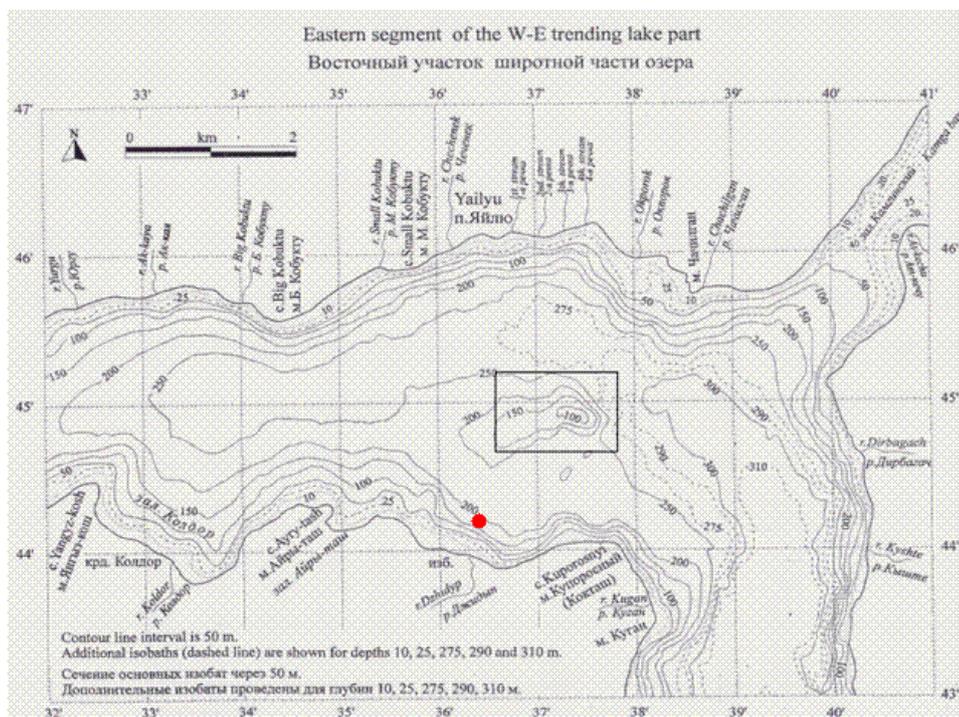


Рис. 4.1. Батиметрическая карта участка Телецкого озера

Геофизиками-интерпретаторами была предложена скоростная модель, приведенная на рисунке 4.2.

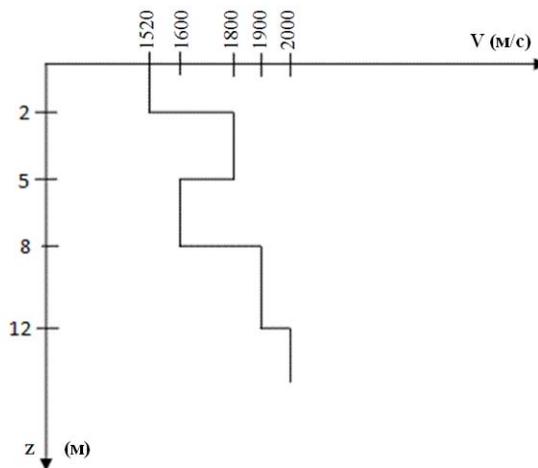


Рис. 4.2. Скоростная модель среды

На основе скоростной модели и батиметрии исследуемого участка была получена сейсмограмма, приведенная на рис. 4.3. Результаты расчетов, по крайней мере в части кинематики, хорошо согласуются с данными полевых измерений, приведенными на рис. 4.3 для сравнения.

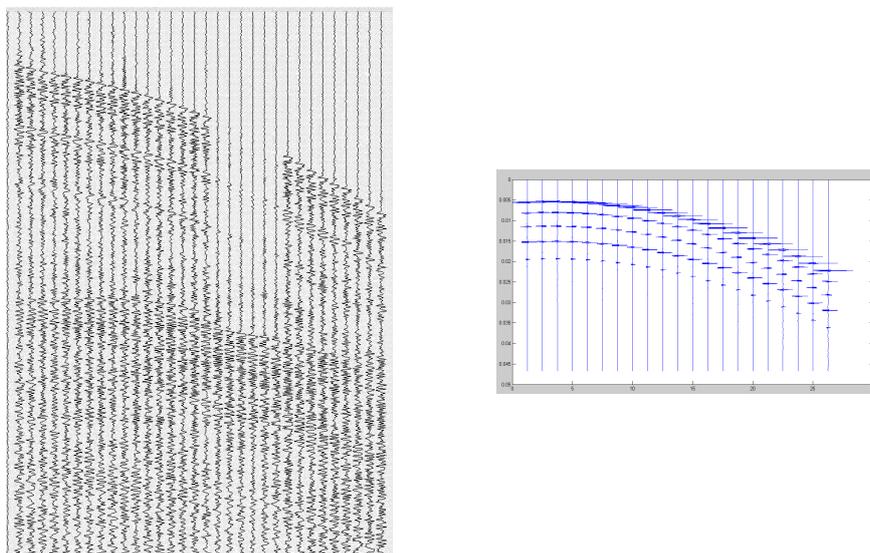


Рис. 4.3. Сейсмограммы полевых измерений (слева) и модельных данных (справа)

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Разработан математический аппарат для исследования возможности применения одномерной обратной динамической задачи в спектральной постановке к задаче высокочастотного зондирования тонкослоистых донных отложений глубоководных водоемов.
- Разработан эффективный алгоритм решения прямой динамической задачи на основе лучевого метода. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными полевых измерений.
- Разработан комплекс программ на языке С, позволяющий строить реалистичные модели волновых полей для одномерных моделей сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.С. Алексеев. *Некоторые обратные задачи теории распространения волн. I. Пространственная задача для волн типа SH.* // Изв. АН СССР. Сер. Геофиз. – 1962. – №11. – с. 1514–1522.
- [2] A.S. Alekseev, V.S. Belonosov. *Direct and inverse problems of wave propagation through a one-dimensional inhomogeneous medium.* // Euro. Jnl of Appl. Math., Cambridge University Press, Vol. 10, 1999.
- [3] И. Толстой, К.С. Клей. *Акустика океана.* // М.:Мир, 1969, 304 с.
- [4] А.С. Алексеев. *Обратные динамические задачи сейсмологии.* // в Сб. «Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных» под ред. М.М. Лаврентьева, М.:Наука, 1967, – с. 9–84.
- [5] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. *Уравнения математической физики.* // М.: Наука, 1972, 735 с.
- [6] А.С. Алексеев, В.С. Белоносов. *Спектральные методы в одномерных задачах теории распространения волн.* // Труды ИВМиМГ СО РАН, Сер. мат. моделирование в геофизике, вып. 6, Новосибирск, 1998, – с. 7–37.
- [7] А.В. Белоносова, В.С. Белоносов. *Прямые и обратные задачи акустического зондирования дна водоемов.* // Настоящий сборник.
- [8] М.Г. Крейн. *Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи.* // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 94, № 6.
- [9] Enders A. Robinson. *Multichannel time series analysis with digital computer programs.* // San Francisco, Holden-Day, 1967, pp. 298.
- [10] А.С. Алексеев, В.М. Бабич. *О лучевом методе вычисления интенсивности волновых фронтов.* // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1958. – №1. – с. 17–31.
- [11] Г.И. Петрашень. *Элементы динамической теории распространения сейсмических волн.* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., 1959. №3, – с. 11–106.
- [12] А.С. Алексеев, Б.Я. Гельчинский. *О лучевом методе вычисления полей волн в случае неоднородных сред с криволинейными границами раздела.* // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., 1959. №3, – с. 107–160.
- [13] А.В. Белоносова, С.С. Таджимухаметова, А.С. Алексеев. *К расчету годографов и геометрического расхождения лучей в неоднородных средах.* // в Сб. «Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных» под ред. М.М. Лаврентьева, М.:Наука, 1967, – с. 124–136.
- [14] Ю.А. Сурков, Т.Б. Яновская. *Программа сложения волн.* // В кн.: Программы для интерпретации сейсмических наблюдений. – Л., Наука, 1972, с. 180–200.

ШАРАБАРИНА АЛЕНА СЕРГЕЕВНА
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
УЛ. ПИРОГОВА 2, 630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: sharabarina.alyona@gmail.com

БЕЛОНОСОВА АНТОНИНА ВАСИЛЬЕВНА
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,
ПР. ЛАВРЕНТЬЕВА 6, 630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: belonosov@academ.org

БЕЛОНОСОВ АНДРЕЙ СЕРГЕЕВИЧ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,
ПР. ЛАВРЕНТЬЕВА 6, 630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
УЛ. ПИРОГОВА 2, 630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: white@sscc.ru

ВИНОГРАДОВ СЕРГЕЙ ПЕТРОВИЧ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,
ПР. ЛАВРЕНТЬЕВА 6, 630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: vsp@omzg.sccc.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 10, стр. С.74–С.86 (2013)

УДК 519.688

MSC 13A99

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ
КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ

М.А. ЮРЧЕНКО, А.В. БЕЛОНОСОВА, А.С. БЕЛОНОСОВ

АБСТРАКТ. A modified algorithm to solve an inverse kinematic problem of seismics based on the method of nonlinear ray seismic tomography is proposed. For parameterization of the medium's model, a special smooth approximation technique using finite basis functions with well-controlled differential and spectral properties is employed. This representation of the solution makes it possible to avoid the smoothing procedure of the velocity grid function. Linear velocity obtained by the local optimization method is taken as an initial approximation.

Key words: seismic tomography, inverse kinematic problem, basis functions, resolution of the identity method.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для определения скоростной характеристики среды, в предположении слоистого строения геологической среды, существует множество методов, которые в тех или иных вариациях используются во всех промышленных пакетах обработки. Все эти методы дают надежные результаты, если среда действительно слоистая и можно использовать корреляционную технику определения локальных элементов годографов и кажущихся скоростей вдоль этих элементов.

YURCHENKO, M.A., BELONOSOVA, A.V., BELONOSOV, A.S., ON AN ALGORITHM TO SOLVE AN INVERSE KINEMATIC PROBLEM OF SEISMICS.

© 2013 Юрченко М.А., Белоносова А.В., Белоносов А.С.

Работа поддержана РФФИ, грант 12-01-00773.

Поступила 22 марта 2013 г., опубликована 31 мая 2013 г.

Однако, на практике в сложных ситуациях предположение о слоистом строении не дает адекватных результатов, и оказывается необходимым рассматривать неслоистые скоростные модели в предположении непрерывного нелинейного изменения скорости в среде, с наличием больших градиентов. Кроме того, существенные ошибки вносит искусственное «спрямление» линии дневной поверхности. Для повышения точности модели необходимо учитывать рельеф.

2. ОБРАТНАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Для простоты будем проводить изложение применительно к 2D постановке. Двумерная постановка отвечает реальной профильной системе наблюдений, используемой в сейсморазведке. Все рассуждения без существенных изменений переносятся на 3D случай.

Рассмотрим полуплоскость $z \geq 0$ пространства $(x, z) \in \mathbb{R}^2$, в которой скорость распространения волны $v(x, z)$ – непрерывно дифференцируемая и строго положительная функция. Обозначим через $\tau(M_1, M_2) = t(x_1, z_1, x_2, z_2)$ – время пробега волны из точки $M_1(x_1, z_1)$ в точку $M_2(x_2, z_2)$.

Согласно принципу Ферма, функция $\tau(M_1, M_2)$ удовлетворяет соотношению:

$$\tau(M_1, M_2) = \min_{\gamma} \int_{\gamma(n, M_1, M_2)} n(x, z) ds,$$

где $n = n(x, z) = \frac{1}{v(x, z)}$, а $\gamma = \gamma(n, M_1, M_2)$ - всевозможные кривые, соединяющие точки M_1 и M_2 .

При фиксированном положении источника колебаний в точке $M_0(x_0, z_0)$, функция $\tau(M)$, рассматриваемая как функция точки $M(x, z)$ среды (временное поле), удовлетворяет уравнению эйконала:

$$|\nabla\tau(M)|^2 = n(M).$$

Обратная кинематическая задача сейсмоки: найти функцию $n(M) = n(x, z)$ по известной функции $\tau(M)$. Обратная кинематическая задача (ОКЗ) сейсмоки или, как её еще называют, задача нелинейной лучевой сейсмотомографии известна с начала XX века. Первый результат решения ОКЗ был получен Г. Герглотцем и Е. Вихертом (1907 г.) [1] для сферически симметричной Земли. В дальнейшем было создано множество различных подходов к её решению, среди которых можно выделить три основные группы:

- Разностные методы, основанные на решении неклассического дифференциального уравнения “двух корней” (А.С. Алексеев, А.В. Белоносова, 1967 г.)[2],
- Локально-оптимизационные методы (А.С. Алексеев, А.С. Белоносов, А.В. Белоносова, В.А. Цецохо, 1996 г.)[3],
- Методы линеаризации, основная идея которых применительно к ОКЗ впервые предложена М.М. Лаврентьевым, В.Г. Романовым

и В.Г. Васильевым в 1969г.[4]. Впоследствии этот метод получил название метода сейсмотомографии.

Методы первой группы наиболее эффективны в смысле временных затрат. Вторая группа методов очень эффективна даже применительно к 3D случаю. Однако из-за сильной некорректности ОКЗ обе группы методов позволяют определять скорость только на сравнительно небольшую глубину из-за отсутствия обратной связи.

Метод линеаризации (сейсмотомографии), являясь методом с обратной связью, позволяет находить скорость на максимально возможную глубину, поэтому этот метод получил такое широкое распространение, и ему посвящена данная статья.

При реализации метода сейсмотомографии, среда представляется в виде набора неизвестных параметров, при чем обычно рельеф не учитывается. Преимущественно используется один и тот же способ параметризации среды, суть которого заключается в разбиении исследуемой области на прямоугольные ячейки, скорость в которых считается постоянной. Для расчета поля времен решается прямая кинематическая задача, требующая той или иной гладкой аппроксимации скоростной модели, необходимой для расчета лучевых траекторий. Применяемый при этом алгоритм гладкой аппроксимации не конкретизируется и не вписывается явно в схему решения ОКЗ. Это ведет к увеличению числа итераций, необходимых для удовлетворительного определения среды. Кроме того, для повышения надежности оценок требуется, чтобы через каждую клетку проходило как можно больше лучей в широком угловом диапазоне. Для этого размер клеток должен быть достаточно большим, что ведет к потере разрешающей способности.

Другой необходимый элемент при реализации метода сейсмотомографии – выбор начального приближения скоростной модели среды. Традиционно, выбирается какая-нибудь линейная скоростная модель с ненулевой вертикальной компонентой градиента, которая затем постепенно уточняется в ходе итерационного процесса. При этом неудачный выбор начального приближения может привести к существенному увеличению «дорогостоящих» итераций, либо вовсе к отсутствию сходимости.

Предлагаемая модификация метода сейсмотомографии обладает рядом преимуществ по-сравнению с «традиционными» реализациями данного метода. В частности, алгоритм позволяет учитывать рельеф, а плотность покрытия исследуемой области лучами может быть уменьшена без ущерба для результата. В следующих пунктах подробно рассмотрим каждый из двух основных элементов реализации метода.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЙ АППАРАТ ГЛАДКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Многие локальные алгоритмы гладкой аппроксимации таблично заданных функций (f_i) на целой равномерной сетке можно свести к оператору

$$(3.1) \quad f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j B(x-j),$$

где $B(x)$ — финитная базисная функция (п. 3.1). Дифференциальные и спектральные свойства континуальной функции $f(x)$, получаемой путем применения оператора (3.1) к сеточной функции (f_i), полностью определяются соответствующими свойствами базисной функции $B(x)$. Один из возможных способов построения базисных функций с заданными свойствами основан на выборе в качестве алгоритма гладкой аппроксимации метода разбиения единицы (МРЕ) [6].

3.1. Построение базисных функций. Применительно к случаю целой равномерной сетки, МРЕ можно представить в виде

$$(3.2) \quad f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_k(x) \phi_k(x),$$

где $\phi_k(x)$ - положительные финитные функции гладкости r с носителями в виде интервалов V_k одинаковой длины L с центрами в целых либо полупелых узлах сетки, образующие разбиение единицы на вещественной прямой, подчиненное покрытию (V_k).

В качестве $\tilde{f}_k(x)$ берутся локальные приближения многочленами $p(x)$ степени m на интервалах V_k , построенные методом наименьших квадратов по n значениям f_i , ближайшими к центру каждого интервала.

Остановимся на построении локальных приближений $\tilde{f}_k(x)$ подробнее. Поставим следующую вспомогательную задачу. Пусть в $(n+1)$ узлах $x_i = i, i = 0, 1, \dots, n$ целой сетки заданы значения (f_i) сеточной функции. Требуется найти коэффициенты многочлена степени $m \leq n$

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_m x^m,$$

наименее уклоняющегося от заданных значений в смысле наименьших квадратов:

$$\sum_{i=0}^n [f_i - p(i)]^2 = \min.$$

Приравняв к нулю частные производные по неизвестным (p_k), приходим к системе:

$$\begin{aligned} p_0 \sum_{i=0}^n 1 + p_1 \sum_{i=0}^n k + \dots + p_m \sum_{i=0}^n k^m &= \sum_{i=0}^n f_k \cdot 1 \\ p_0 \sum_{i=0}^n k + p_1 \sum_{i=0}^n k^2 + \dots + p_m \sum_{i=0}^n k^m + 1 &= \sum_{i=0}^n f_k \cdot k \\ &\dots \\ p_0 \sum_{i=0}^n k^m + p_1 \sum_{i=0}^n k^m + 1 + \dots + p_m \sum_{i=0}^n k^m + m &= \sum_{i=0}^n f_k \cdot k^m. \end{aligned}$$

Образует $(m + 1)$ векторов длины $(n + 1)$:

$$\begin{aligned} u_0 &= (1, 1, 1, \dots, 1) \\ u_1 &= (0, 1, 2, \dots, n) \\ u_2 &= (0, 1^2, 2^2, \dots, n^2) \\ &\dots \\ u_m &= (0, 1^m, 2^m, \dots, n^m). \end{aligned}$$

Тогда систему уравнений для определения вектора $p = (p_0, p_1, \dots, p_m)$ коэффициентов многочлена $p(x)$ можно переписать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} (u_0, u_0) & (u_0, u_1) & \dots & (u_0, u_m) \\ (u_1, u_0) & (u_1, u_1) & \dots & (u_1, u_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_m, u_0) & (u_m, u_1) & \dots & (u_m, u_m) \end{bmatrix} \cdot p = \begin{pmatrix} (u_0, f) \\ (u_1, f) \\ \dots \\ (u_m, f) \end{pmatrix},$$

откуда $p = P \cdot f$, где

$$(3.3) \quad P = \begin{bmatrix} p_{00} & \dots & p_{0n} \\ p_{10} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m0} & \dots & p_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_0, u_0) & \dots & (u_0, u_m) \\ (u_1, u_0) & \dots & (u_1, u_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (u_m, u_0) & \dots & (u_m, u_m) \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

При таком подходе, для обращения матрицы в правой части (3.3) может быть использован любой из точных методов, результат от этого не изменится. Здесь используется метод пополнения, предложенный А.П. Ершовым [7]. Располагая матрицей P для заданных значений n, m значения многочлена $p(x)$ вычисляются по формуле:

$$p(x) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n p_{ji} f_i \right) x^j \equiv \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m p_{ji} x^j \right) f_i$$

без проведения громоздких вычислений по МНК и без потери точности. Отметим, что при $m = n$ многочлен $p(x)$ необходимо совпадает с обычным интерполяционным многочленом.

Тогда в (3.2) $\tilde{f}_k(x)$ вычисляются по формуле:

$$\tilde{f}_k(x) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n p_{ji} f_{k+i} \right) (x - k)^j,$$

Однако в таком громоздком виде (3.2) вычислять $f(x)$ представляется неэффективным и нецелесообразным. Поэтому будем использовать т. н. «базисную функцию данного алгоритма сглаживания» $B(x)$. Базисная функция (БФ) определяется как результат применения этого алгоритма к дискретной δ -функции. Тогда сглаженная функция получается в виде

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i B(x - i).$$

Значения базисной функции $B(x)$, отвечающей описанному алгоритму гладкой аппроксимации, вычисляются по явным формулам. Четыре описанных параметра r, L, m, n позволяют регулировать величину носителя $B(x)$, а также ее дифференциальные и спектральные свойства. Построение базисных функций на основе МРЕ производится во временной области, с одновременным контролем их спектральных свойств в интерактивном режиме.

Иллюстрация применения оператора (3.1) к одной и той же сеточной функции для двух различных вариантов базисных функций (рис. 3.1 – 3.2):

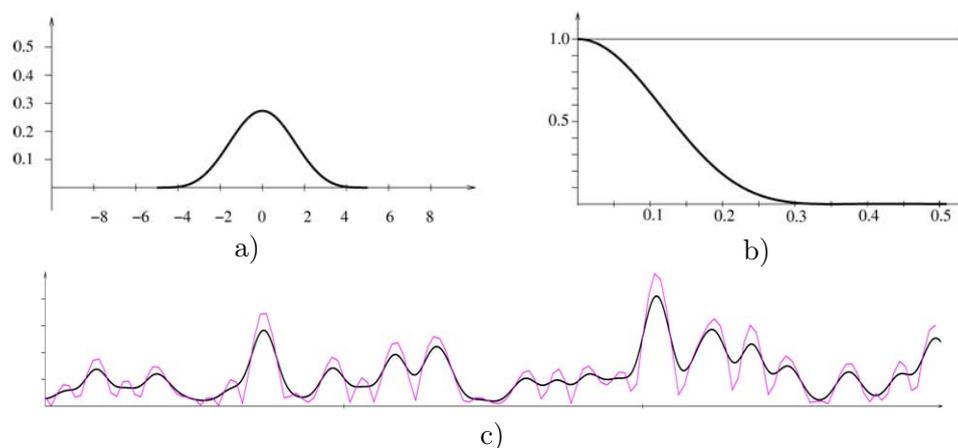


Рис. 3.1. Пример базисной функции ($m = 0, n = 3, L = 8, r = 4$): а) график БФ во временной области; б) спектр БФ; в) Результат применения оператора (3.1) к сеточной функции.

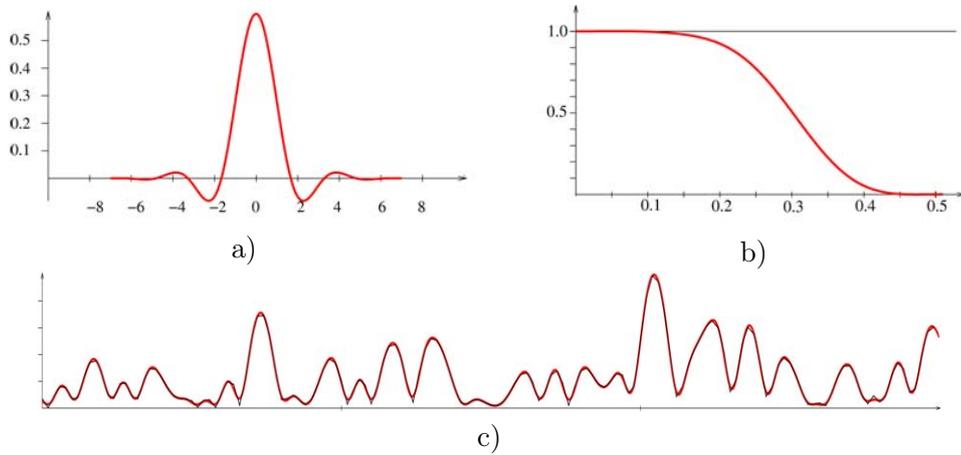


Рис. 3.2. Пример базисной функции ($m = 3, n = 5, L = 10, r = 6$): а) график БФ во временной области; б) спектр БФ; в) Результат применения оператора (3.1) к сеточной функции.

Для построения базисных функций возможны и другие подходы, аналогичные используемым на практике в цифровой фильтрации. Однако, при этом трудно гарантировать достаточную гладкость полученных функций, необходимую для численной реализации расчета лучей конечно-разностными методами и организации лучевой «пристрелки».

3.2. Двумерный случай. В двумерном случае оператор перехода от дискретной сеточной функции со значениями (f_{jk}) в узлах с целочисленными координатами, к континуальной, можно записать в виде

$$(3.4) \quad f(x, z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{jk} B_1(x - j) B_2(z - k)$$

с использованием двух (возможно, различных) одномерных базисных функций B_1, B_2 .

Ввиду финитности базисных функций, индексы j, k в формуле (3.4) в действительности изменяются в конечных пределах.

При расчете значений сглаженной функции в прямоугольной области, для применимости формулы (3.4) сеточную функцию (f_{jk}) необходимо продолжить за границы области на половину длины носителей базисных функций по соответствующей координате.

Используем описанный аппарат гладкой аппроксимации сеточной функции для представления геологической среды. Континуальная гладкая модель среды (функция $n(x, z)$) необходима для расчета лучевых траекторий.

Для гладкого представления скоростной характеристики среды будем использовать оператор (3.4). По сеточным значениям n_{jk} в узлах опорной сетки, функция $n(x, z)$ вычисляется по формуле:

$$(3.5) \quad n(x, z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} n_{jk} B_1(x - j) B_2(z - k).$$

При такой параметризации среды:

- На времена вдоль лучевых траекторий оказывают влияние не только близлежащие узлы (рис. 3.3);
- Не требуется дополнительного сглаживания данных в ходе итерационного процесса;
- Отсутствуют нежелательные краевые эффекты, поскольку узлы продолжения задействованы наравне с основными, и сеточные значения в них изменяются автоматически;
- Плотность покрытия исследуемой области лучами может быть уменьшена без ущерба для результата.

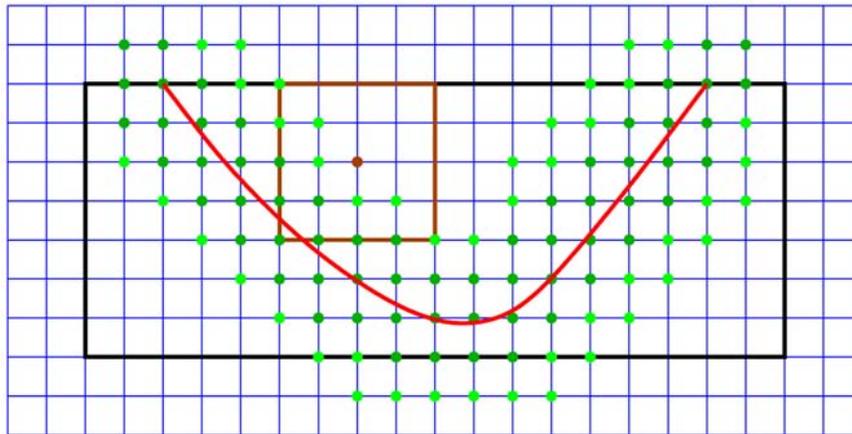


Рис. 3.3. Влияние узлов на построение лучевой траектории.

4. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СЕЙСМОТОМОГРАФИИ

Приведем некоторое обоснование корректности линеаризации оператора решения прямой задачи сейсмологии, лежащей в основе метода Ньютона–Канторовича. Выражение для времени τ вдоль луча $\gamma(n, M_1, M_2)$ в среде $n = n(x, z)$ между точками M_1 и M_2 определяется по формуле:

$$\tau(n, M_1, M_2) = \int_{\gamma(n, M_1, M_2)} n(x, z) ds.$$

Запишем это выражение в виде операторного уравнения $A[n] = \tau$. Заменим производную Фреше $A'_f(n)$ отображения A в точке n производной Гато (которая в случае существования $A'_f(n)$ совпадает с ней):

$$A'(n)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\gamma(n+th)} (n+th) ds - \int_{\gamma(n)} n ds}{t}.$$

Докажем справедливость последнего равенства. Для этого покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma(n+th)} n ds - \int_{\gamma(n)} n ds \right) = 0.$$

Действительно, если обозначить

$$f(t) = \left| \int_{\gamma(n+th)} n ds - \int_{\gamma(n)} n ds \right|,$$

то $f(t) = f(0) + f'(0)t + o(t)$ при этом $f(0) = 0$. Достаточно доказать, что $f'(0) = 0$. Последнее следует из теоремы Ферма, поскольку

$$\int_{\gamma(n)} n ds = \min_{(\gamma)} \int_{\gamma} n ds$$

($\gamma = \gamma(n)$ – оптимальный путь, соединяющий две произвольные точки M_1, M_2).

Общий алгоритм решения обратной кинематической задачи сейсмоки (метод Ньютона-Канторовича):

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{\gamma(n)} n ds = \int_{\gamma(n_0)} n_0 ds + \int_{\gamma(n_0)} (n - n_0) ds + o(\|n - n_0\|) = \\ &= \int_{\gamma(n_0)} n ds + o(\|n - n_0\|). \end{aligned}$$

Выбираем начальное приближение модели среды $n_0(x, z)$. На основе приближенного равенства $\tau = \int_{\gamma(n_0+h)} (n_0+h) ds \approx \int_{\gamma(n_0)} n_0 ds + \int_{\gamma(n_0)} h ds$ система уравнений $\tau_k = \int_{\gamma_k(n)} n ds$ заменяется системой $\tau_k = \int_{\gamma_k(n_0)} n ds$.

Полученное решение принимается в качестве очередного приближения модели среды n_0 .

Используя представление среды в виде (3.5) на очередном шаге итерационного процесса (будем считать его нулевым), имеем

$$\tau_k = \int_{\gamma_k(n_0)} n ds = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} n_{ij} \int_{\gamma_k(n_0)} B_1(x-i)B_2(z-j) ds.$$

Расположив неизвестные n_{ij} в линейном порядке u_1, u_2, \dots, u_M получаем систему из N линейных уравнений с M неизвестными

$$\tau_k = \sum_{m=1}^M a_m^{(k)} u_m, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

где N – число лучей, M – общее число узлов, с коэффициентами,

$$a_m^{(k)} = \int_{\gamma_k(n_0)} B_1(x-i)B_2(z-j) ds$$

(m – номер узла n_{ij} , k – номер луча). Полученная система уравнений решается при помощи хорошо известного алгоритма LSQR [8]. Мы использовали пакет NAG. Отметим, что на практике расчет коэффициентов матрицы системы в виде интегралов вдоль лучей требует не более 20 % от общего машинного времени.

4.1. Оптимальная линейная скорость. Одним из важнейших вопросов в вычислительной математике является способ выбора начального приближения для итерационного алгоритма. При этом неудачный выбор начального приближения может привести к существенному увеличению итераций, либо вовсе к отсутствию сходимости. С учетом этого, мы будем выбирать n_0 специальным образом.

Скорость в среде в окрестности точки M_0 на дневной поверхности будем искать в виде линейной функции $v(x, z) = ax + bz + c$, доставляющей минимум взвешенной сумме квадратов невязок, то есть функционалу

$$\Phi(a, b, c) = \sum_{i,j} w_{ij} [\tau(M_i, M_j, a, b, c) - \tau_{ij}]^2,$$

где w_{ij} – некоторые веса, а τ_{ij} – известное время пробега возмущения между точками M_i и M_j среды (источником и приемником). Такая задача минимизации с простыми ограничениями на неизвестные эффективно решается модифицированным методом Ньютона.

Принимая найденную оптимальную линейную скорость в качестве нулевого начального приближения, окончательно получаем модифицированный алгоритм сейсмотомографии.

Преимущества данного алгоритма:

- Не требуется дополнительного сглаживания данных в ходе итерационного процесса;
- Плотность покрытия исследуемой области лучами может быть уменьшена без ущерба для результата;
- Возможность гибкого повышения разрешающей способности алгоритма путем замены базисных функций;
- Интегральный характер локально-оптимизационного подхода обеспечивает высокую устойчивость к ошибкам в данных полевых измерений и результатах пикировки времен первых вступлений;

- Процедура выбора начального приближения четко определена.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В качестве иллюстрации применения алгоритма приведем результат восстановления «сильно нелинейной» двумерной скорости:

$$v(x, z) = 1,5 + 0,1x - 0,5 \cos\left(\frac{\pi}{5}x\right) + z - 0,12 \cos\left(\frac{\pi}{10}(x - 5)\right)z^2.$$

Исходные данные – встречные и нагоняющие годографы времен рефрагированных волн (рис. 5.1), полученные путем численного решения прямой кинематической задачи лучевым методом.

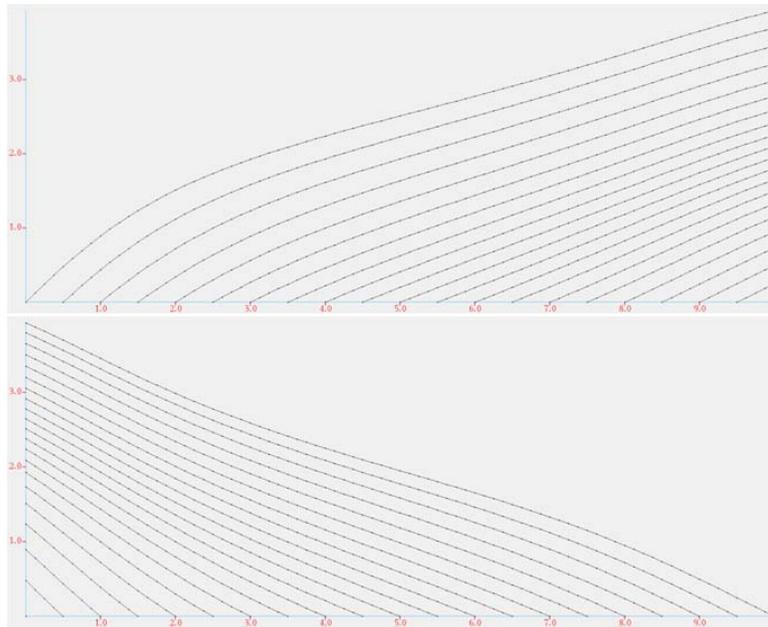


Рис. 5.1. Исходные данные.

На рисунках 5.2 – 5.4 изолинии скорости $v(x, z)$ обозначены зеленым цветом, а изолинии восстановленной скорости – красным.

Как видно из рисунков 5.3 - 5.4 среда восстановлена достаточно точно. Полученная в результате скоростная модель дает «хорошее» гладкое приближение к истинной скорости.

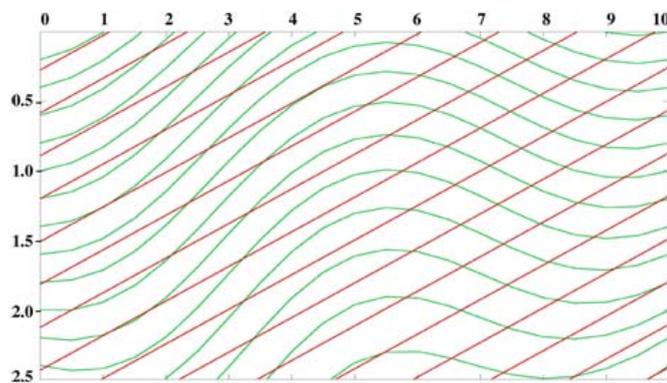


Рис. 5.2. Начальное приближение - оптимальная линейная скорость.

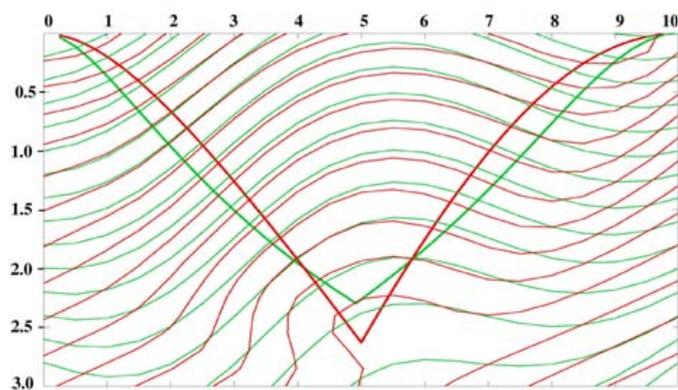


Рис. 5.3. Результат первой итерации.

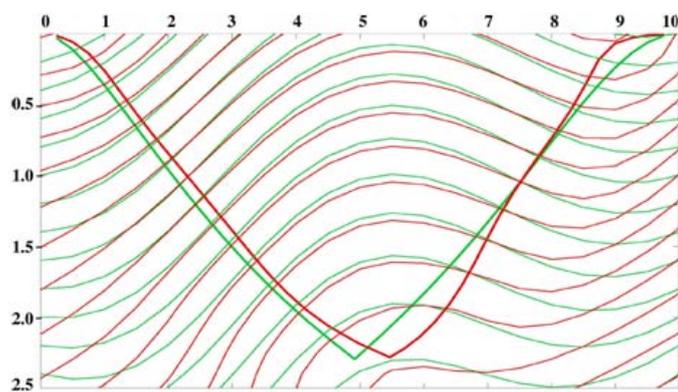


Рис. 5.4. Результат второй итерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Herglotz G. *Über das Bennd orfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdebebenstrahlen.* - Phys. Zeitschr., 1907, Bd. 8, 145.
- [2] А.С. Алексеев, А.В. Белоносова *Об одной постановке обратной кинематической задачи сейсмоки для двумерной непрерывно-неоднородной среды* // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. – М.: Наука, 1967, с. 137–154.
- [3] Alekseev A.S. Belonosov A.S., Belonosova A.V., Tsetsokho V.A. *A Local Optimization Technique for the Solution of the Problem of Non-Linear Seismic Tomography* // J.: Appl. Math. Lett., Vol. 9, No. 2, 1996, pp. 39–45.
- [4] Романов В.Г. *Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа* // Новосибирск, Наука, 1969.
- [5] Козырев В.С., Жуков А.П., Коротков И.П., Жуков А.А., Шнеерсон М.Б. *Учет неоднородностей верхней части разреза в сейсморазведке. Современные технологии.* – М., 2003г.
- [6] Tsetsokho, Va. A. Belonosov, A. S., and Belonosova, A. V. *On a method for smooth approximation of a function of several variables* Preprint VC Sib. Otd. AN SSSR, Vol. 8. Novosibirsk, 1974 [Russian].
- [7] Фаддеев Д.К. и Фаддеева В.Н. *Вычислительные методы линейной алгебры* // Физматгиз, 1963, 735 с.
- [8] Paige C.C., Saunders M.A. *LSQR: Sparse linear equations and least squares problems* // ACM Transactions on mathematical software vol.8, no. 2, 1982.

ЮРЧЕНКО МАРИЯ АЛЕКСАНДРОВНА
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
ул. Пирогова 2, 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: yurchenko-m@bk.ru

БЕЛОНОСОВА АНТОНИНА ВАСИЛЬЕВНА
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,
пр. Лаврентьева 6, 630090, Новосибирск, Россия

БЕЛОНОСОВ АНДРЕЙ СЕРГЕЕВИЧ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,
пр. Лаврентьева 6, 630090, Новосибирск, Россия
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
ул. Пирогова 2, 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: white@sscc.ru