S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 1–21 (2013) УДК 510.64
MSC 03B20,03B70

СВОЙСТВО КОНЕЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ НЕГАТИВНЫХ МОДАЛЬНОСТЕЙ

С.А. ДРОБЫШЕВИЧ, С.П. ОДИНЦОВ

Abstract. We prove that the logic N^{Un} with negation as unnecessity operator and that its extension, a Heyting-Ockham logic N^*, have the finite model property and prove the analog of Dziobiak's theorem for extensions of these logics. Namely, we prove that an extension of N^{Un} or N^* is strongly complete wrt the class of finite frames iff it is tabular.

Keywords: Routley semantics, negation as modality, algebraic semantics, Heyting-Ockham algebra.

1. Введение

Первоначально нашей целью было доказательство разрешимости логики Гейтинга-Оккама N^* методом фильтрации, а также доказательство аналога теоремы В. Джёбяка для расширений этой логики. Однако в процессе работы над статьей мы решили рассмотреть данные проблемы и для других негативных модальностей.

Логика Гейтинга-Оккама N^* была впервые введена в контексте логического программирования, а именно в качестве базы для изучения фундированной семантики логических программ с отрицанием [5]. Она была сформулирована как расширение логики К. Дошена N [8] (см. также [9]), которая, в свою очередь, была введена для изучения операторов отрицания более слабых, чем отрицание минимальной логики Йохансcона. Отрицание в N интерпретировалось как модальный оператор невозможности, а роль немодального фрагмента для неё играла позитивная логика. Стоит отметить, что еще более слабое субминимальное отрицание рассматривалось ранее Д. Вакареловым [17]. Логика N

Drobyshevich, S.A., Odintsov, S.P., Finite model property for negative modalities.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект РФФИ-11-07-00560-а, проект РФФИ-12-01-00168-а).

Поступила 18 мая 2012 г., опубликована 3 января 2013 г.

является расширением логики Вакарелова с субминимальным отрицанием. Аксиомы логики N^* позволяют определить в ней интуиционистское отрицание и в данной статье мы сформулируем N^* как модальную логику над интуиционистской логикой. Кроме того, отрицание логики N^* обладает также свойствами еще одного негативного модального оператора — не-необходимости. Это позволит нам рассматривать N^* как расширение двух логик, которые мы будем называть N^{Un} и N^{Imp}.

По существу, логики N^{Un} и N^{Imp} представляют собой нотационные варианты логик $HK(Imp)$ (где Imp обозначает impossibility — невозможность) и $HK(Un)$ (Un обозначает unnecessity — не-необходимость), соответственно, которые были введены К. Дошеном [7]. Всего М. Божич и К. Дошен [2, 7] ввели четыре базовые модальные логики над интуиционистской логикой. Определение различных логик для каждого из модальных операторов необходимости, возможности, невозможности и не-необходимости связано с тем, что интуиционистское отрицание не позволяет сформулировать стандартные дуальности между этими операторами и, таким образом, ни один из них не может быть определён через другие. Аналог интуционистского оператора не-необходимости также рассматривался Д. Вакареловым [17] под именем субминимального отрицания. При этом минимальное и субминимальное отрицания Вакарелова не являлись нормальными модальными операторами, для их интерпретации требовалось вводить в семантику конус нормальных миров.

Из того, что N^* является расширением как N^{Un}, так и N^{Imp} следует, что отрицание в ней может быть рассмотрено и как оператор невозможности, и как оператор не-необходимости. Невозможность и не-необходимость можно расценивать как два фундаментальных подхода к формулировке общего понятия отрицания. Сам Дошен считал, что именно оператор невозможности является естественным обобщением оператора отрицания. Однако есть интересные примеры логик, где отрицание интерпретируется именно как оператор не-необходимости. Р. Сильван в [15] ввел логику CC_ω как расширение известной паранепротиворечивой логики Да Косты C_ω при помощи правила контрапозиции. Как видно из семантики этой логики, предложенной в [15], отрицание логики CC_ω является частным случаем оператора не-необходимости.

Несмотря на то, что логика N^* обладает естественными аксиоматизацией и семантическими характеризациями (как алгебраической, так и реляционной), ее изучение наталкивается на значительные трудности. Одним из примеров является свойство конечных моделей для N^*, для доказательства которого пришлось построить гибридное исчисление для N^* (т.е. исчисление, использующее элементы семантики логики в своём синтаксисе). В данной статье мы постараемся найти более традиционное доказательство свойства конечных моделей при помощи метода фильтрации. Однако, получившаяся конструкция будет сложнее, чем, например, метод фильтрации для логик N^{Un} и N^{Imp}, который мы также здесь сформулируем.

Доказав полноту логики относительно класса конечных моделей, мы получаем возможность доказать ее разрешимость, однако в большинстве случаев утрачиваем свойство сильной полноты. Впервые это отметил Джёбяк в [11], где было доказано, что всякая промежуточная логика или нормальная модальная логика (над классической логикой) сильно полна относительно класса конечных шкал, если и только если она таблична. Возникает естественный вопрос о том, может ли этот результат быть распространён на логику N^*, которая является случаем интуиционистской нормальной модальной логики. В этой работе мы докажем аналог теоремы Джёбяка для N^*, а также для N^{Un}. Доказать аналогичный результат для логики N^{Imp} не удается. Это связано с тем, что класс подпрямо неразложимых алгебр логики N^{Imp} не допускает естественной характеризации, которую имеют подпрямо неразложимые алгебры логик N^{Un} и N^*. В этом смысле, оператор не-необходимости ведет себя более естественно, чем оператор невозможности.

2. Предварительные замечания

В этом разделе мы сформулируем аксиоматизации для логик N^{Imp}, N^{Un} и N^*, их семантики Крипке, а также рассмотрим трансляции этих логик в логику первого порядка.

Все три логики определяются в языке $\mathcal{L} = \{\vee, \wedge, \to, \neg, \bot\}$. Таким образом, интуиционистский немодальный фрагмент будет сформулирован при помощи константы противоречия $\bot$ вместо интуиционистского отрицания, а $\neg$ будет представлять оператор невозможности в случае N^{Imp} и оператор не-необходимости в случае N^{Un}. Отрицание логики N^* представляет собой модальный оператор, который объединяет свойства отрицаний логик N^{Imp} и N^{Un}.

Как обычно, формулы в данном языке будут строиться из пропозициональных переменных, входящих в фиксированное множество $Prop$, и константы противоречия $\bot$ при помощи логических связок $\vee$, $\wedge$, $\to$ и $\neg$ (дизъюнкция, конъюнкция, импликация и отрицание, соответственно). Множество формул в языке $\mathcal{L}$ будем обозначать $For_{\mathcal{L}}$. В дальнейшем, если не оговорено обратного, под *формулой* будем понимать формулу в языке $\mathcal{L}$.

Списки аксиом всех трёх логик содержат аксиомы интуиционистской логики Int:

$I1.\ p \to (q \to p)$;	$I2.\ (p \wedge q) \to p$;
$I3.\ (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$;	$I4.\ (p \wedge q) \to q$;
$I5.\ (p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$;	$I6.\ p \to (p \vee q)$;
$I7.\ (p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$;	$I8.\ q \to (p \vee q)$;
$I9.\ \bot \to p$.	

Список аксиом для N^{Un} получается добавлением следующих аксиом для отрицания:

$$N1.\ \neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q,$$
$$N2.\ \neg(p \to p) \to q,$$

а список аксиом для N^{Imp} добавлением (к списку аксиом для Int):

$$N3.\ \neg p \wedge \neg q \to \neg(p \vee q),$$
$$N4.\ \neg((p \to p) \to \bot),$$

Аксиомы интуиционистской логики вместе с аксиомами $N1$–$N4$ составляют список аксиом логики N^*.

В случае всех трёх логик правилами вывода являются правило подстановки, *modus ponens* и следующее *правило контрапозиции*:

$$\frac{\varphi \to \psi}{\neg\psi \to \neg\varphi}.$$

Мы будет отождествлять логику с множеством её теорем, таким образом, *логикой* будем называть множество формул в данном языке, замкнутое относительно *modus ponens* и подстановки, а *нормальной логикой* — логику, замкнутую дополнительно относительно правила контрапозиции. Через $\mathsf{NExt}\Delta$ будем обозначать класс нормальных расширений данной логики Δ (то есть класс всех нормальных логик, содержащих Δ как подмножество).

Аксиомы интуиционистской логики и правило контрапозиции позволяют доказать, что логики N^{Un}, N^{Imp}, N^*, а также все их нормальные расширения замкнуты относительно правила замены эквивалентных:

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\chi(\varphi) \leftrightarrow \chi(\psi)},$$

где $\varphi \leftrightarrow \psi$ — сокращение для $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

С каждой логикой Δ мы свяжем отношение следования $\vdash_\Delta$. Для $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq For_\mathcal{L}$ отношение $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$ имеет место в том и только в том случае, если формула $(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi$ лежит в Δ для некоторых $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$. В [5] логика N^* была сформулирована как модальная логика над позитивной, а не интуиционистской логикой, однако, ввиду того, что интуиционистская константа $\bot$ может быть определена в N^* как $\bot = \neg(p \to p)$ (в силу аксиомы $N2$), в данной работе мы будем считать её модальной логикой над интуиционистской логикой (строго говоря, мы будем работать с дефинициальным расширением логики N^*, определенной в [5]). Более того, в [13] список аксиом для логики N^* вместо аксиомы $N4$ содержал аксиому $\neg((p \to p) \to \neg(q \to q))$, но, поскольку $\neg(q \to q)$ есть в точности определение константы $\bot$, мы можем заменить эту формулу аксиомой $N4$.

Заметим, что оба закона Де Моргана выполнены в логике N^* относительно модального оператора отрицания. Как обычно, интуиционистское отрицание может быть определено через константу $\bot$ как $-\varphi = \varphi \to \bot$.

Зададим реляционную семантику для рассматриваемых логик.

Определение 2.1. N^{Un}-(N^{Imp}-)шкалой *назовём тройку* $\mathcal{W} = \langle W, \leq, R\rangle$, *где*

- W *— непустое множество (возможных миров);*
- $\leq$ *— частичный порядок на* W*;*
- $R \subseteq W^2$ *— отношение достижимости такое, что*
  (i) $(\leq^{-1} \circ R) \subseteq R$ *в случае* N^{Un} *и*
  (ii) $(\leq \circ R) \subseteq R$ *в случае* N^{Imp}.

$\mu = \langle \mathcal{W}, v\rangle$ *является* N^{Un}-(N^{Imp}-)моделью*, если* $\mathcal{W}$ *— это* N^{Un}*-(*N^{Imp}*-)шкала, а* $v : Prop \to 2^W$ *— означивание, удовлетворяющее* условию монотонности*:*

$$x \in v(p) \text{ и } x \leq y \Rightarrow y \in v(p).$$

Индуктивно определим *отношение выполнимости* между мирами модели и формулами.

Определение 2.2. *Для произвольных* N^{Un}*-(*N^{Imp}*-)модели* $\mu = \langle W, \leq, R, v\rangle$ *и* $x \in W$ *зададим:*

- $\mu, x \not\models \bot$;
- $\mu, x \models p \Leftrightarrow x \in v(p)$;
- $\mu, x \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \mu, x \models \varphi$ *и* $\mu, x \models \psi$;
- $\mu, x \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mu, x \models \varphi$ *или* $\mu, x \models \psi$;
- $\mu, x \models \varphi \to \psi \Leftrightarrow \forall y \geq x\ (\mu, y \models \varphi \Rightarrow \mu, y \models \psi)$;

- *(i)* $\mu, x \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow \exists y\ (xRy$ *и* $\mu, y \nvDash \varphi)$ *в случае* N^{Un} *и*
  (ii) $\mu, x \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow \forall y\ (xRy \Rightarrow \mu, y \nvDash \varphi)$ *в случае* N^{Imp}.

Семантика для N^* может быть получена, если наложить определённые ограничения на класс всех N^{Un}-шкал (N^{Imp}-шкал), но здесь мы сформулируем другую семантику, в которой для интерпретации отрицания используется оператор Раутли $*$ (см. [14]), хорошо известный специалистам по релевантной логике.

Определение 2.3. Шкала Раутли — *это тройка* $\mathcal{W} = \langle W, \leq, * \rangle$, *где* W *и* $\leq$ *определены как для* N^{Un} *и* N^{Imp}, *а* $*$ — *анти-монотонная функция на* W *(т.е.* $x \leq y$ *влечёт* $y^* \leq x^*$ *для* $x, y \in W$*).*

Модель Раутли — *шкала Раутли вместе с означиванием, удовлетворяющим условию монотонности (см. определение 2.1).*

Отношение выполнимости для логики N^* получается из отношения выполнимости для N^{Un} (N^{Imp}) заменой случая отрицания на:

$$\mu, x \vDash \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mu, x^* \nvDash \varphi.$$

Как обычно, мы говорим, что формула выполняется в модели, если она выполняется на всех мирах этой модели и обозначаем это как $\mu \vDash \varphi$ (то есть $\mu \vDash \varphi \Leftrightarrow \forall x \in W :\ \mu, x \vDash \varphi$), и говорим, что формула выполняется на шкале, если она выполняется на всякой модели над этой шкалой (то есть $\mathcal{W} \vDash \varphi \Leftrightarrow$ для любой $\mu = \langle \mathcal{W}, v \rangle :\ \mu \vDash \varphi$).

Для всех классов моделей стандартным образом доказывается, что условие монотонности распространяется на все формулы.

Предложение 2.4. [7, 13] *Для произвольных модели Раутли (N^{Un}-модели, N^{Imp}-модели)* $\mu = \langle W, \leq, *, v \rangle$ *($\mu = \langle W, \leq, R, v \rangle$),* $x \in W$ *и формулы* φ *выполнено:*

$$\mu, x \vDash \varphi \text{ и } x \leq y \Rightarrow \mu, y \vDash \varphi.$$

Более того, все три логики полны относительно соответствующих семантик:

Теорема 2.5. [7, 13] *Для всякой формулы* φ*:* $\varphi \in N^*$ *(N^{Un}, N^{Imp}), если и только если* $\mathcal{W} \vDash \varphi$ *для любой шкалы Раутли* $\mathcal{W}$ *(N^{Un}-шкалы, N^{Imp}-шкалы, соответственно).*

Пусть $\mathcal{K}$ — класс N^{Un}-шкал (N^{Imp}-шкал, шкал Раутли). Полагаем

$$L\mathcal{K} = \{\varphi \mid \mathcal{W} \vDash \varphi \text{ для всех } \mathcal{W} \in \mathcal{K}\}.$$

Вместо $L\{\mathcal{W}\}$ пишем $L\mathcal{W}$. Для $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq For_{\mathcal{L}}$ отношение $\Gamma \vDash_{\mathcal{K}} \varphi$ означает, что для любой модели μ над шкалой из $\mathcal{K}$ и любого мира x данной модели из $\mu, x \vDash \Gamma$ следует $\mu, x \vDash \varphi$.

Пусть $\Delta \in \mathsf{NExt}N^{Un}(\mathsf{NExt}N^{Imp}, \mathsf{NExt}N^*)$, а $\mathcal{K}$ — класс N^{Un}-шкал (соответственно, N^{Imp}-шкал, шкал Раутли). Логика Δ *полна* относительно класса шкал $\mathcal{K}$, если $\Delta = L\mathcal{K}$. Логика Δ *сильно полна* относительно класса шкал $\mathcal{K}$, если отношения $\vdash_\Delta$ и $\vDash_{\mathcal{K}}$ совпадают.

Теперь мы зададим вложения наших модальных логик в логику первого порядка. Прежде всего, определим вариант так называемой стандартной трансляции модальных формул в язык логики первого порядка. Логическими связками этого первопорядкового языка являются $\wedge$, $\vee$, $\to$ и, для простоты, как $\neg$, так и $\bot$. Сигнатура имеет вид $\sigma = \{\{P_i \mid p_i \in Prop\}, A, O\}$, где P_i — это унарные предикатные символы соответствующие каждой $p_i \in Prop$, а A и O — бинарные предикатные символы, соответствующие отношению R (или функции $*$) и частичному порядку из определений шкал, соответственно. Этот первопорядковый язык часто называют *языком соответствия*. Определим индуктивно:

Определение 2.6.
- $ST_x(p_i) = P_i(x)$;
- $ST_x(\bot) = \bot$;
- $ST_x(\varphi \wedge \psi) = ST_x(\varphi) \wedge ST_x(\psi)$;
- $ST_x(\varphi \vee \psi) = ST_x(\varphi) \vee ST_x(\psi)$;
- $ST_x(\varphi \to \psi) = \forall y(O(x, y) \to (ST_y(\varphi) \to ST_y(\psi)))$;
- *(i)* $ST_x(\neg\varphi) = \exists y(A(x, y) \wedge \neg(ST_y(\varphi)))$ *в случае* N^{Un} *и*
  (ii) $ST_x(\neg\varphi) = \forall y(A(x, y) \to \neg(ST_y(\varphi))$ *в случае* N^{Imp}.

Сделаем несколько замечаний. Через $ST_y(\varphi)$ обозначается результат замены всех свободных вхождений x в $ST_x(\varphi)$ на y, при этом связанные переменные переименовываются так, чтобы избежать коллизий. Единственной свободной переменной каждой формулы $ST_x(\varphi)$ будет переменная x. Ясно, что для записи любой формулы $ST_x(\varphi)$ достаточно двух индивидных переменных x и y. Заметим также, что символ $\neg$ в левой части определения соответствует модальному отрицанию логик N^{Un}, N^{Imp} и N^*, тогда как в правой части он соответствует классическому отрицанию логики первого порядка.

Оба случая определения формулы $ST_x(\neg\varphi)$ подходят, когда мы рассматриваем логику N^*.

Пусть теперь $\mu = \langle W, \leq, R, v\rangle$ — N^{Un}-(N^{Imp}-)модель. Определим первопорядковую структуру $\mathcal{M}_\mu = \langle W; \{P^{\mathcal{M}} \mid p \in Prop\}, O^{\mathcal{M}}, A^{\mathcal{M}}\rangle$, где

- $P_i^{\mathcal{M}} = \{x \in W \mid x \in v(p_i)\}$, для всех $p_i \in Prop$,
- $O^{\mathcal{M}}(x, y) \Leftrightarrow x \leq y$ выполняется в модели μ,
- $A^{\mathcal{M}}(x, y) \Leftrightarrow xRy$ выполняется в μ.

В случае модели Раутли полагаем

$$A^{\mathcal{M}}(x, y) \Leftrightarrow (x^* = y) \text{ в } \mu = \langle W, \leq, *, v\rangle,$$

где μ — модель Раутли.

Определенная нами трансляция сохраняет истинность в следующем смысле:

Предложение 2.7. *Для любых формулы* $\varphi \in For_{\mathcal{L}}$, N^{Un}*-(*N^{Imp}*-)модели* $\mu = \langle W, \leq, R, \rangle$ *(или модели Раутли* $\mu = \langle W, \leq, *, \rangle$*) и* $w \in W$ *имеем:*

$$\mu, w \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}_\mu \models ST_x(\varphi)[w \leftarrow x],$$

где ST_x *— соответствующая трансляция, а* $[w \leftarrow x]$ *обозначает результат подстановки* w *вместо свободных вхождений переменной* x.

Доказательство. Можно воспользоваться несложной индукцией по структуре формул.

□

3. Алгебраическая семантика

Здесь мы рассмотрим алгебраическую семантику логик N^{Un} и N^{Imp} и напомним основные факты об алгебраических моделях логики N^* [13].

Определение 3.1. (1) *Алгебра* $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, 0, 1\rangle$ *называется* Un-алгеброй*, если выполнены условия: (i) редукт* $\mathcal{A}^H := \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *алгебры* $\mathcal{A}$ *является алгеброй Гейтинга; (ii) операция отрицания удовлетворяет тождествам:*

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y \text{ и } \neg 1 = 0.$$

(2) *Алгебра* $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, 0, 1\rangle$ *называется* Imp-алгеброй*, если выполнены следующие условия: (i) редукт* $\mathcal{A}^H := \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$*алгебры* $\mathcal{A}$ *является алгеброй Гейтинга; (ii) операция отрицания удовлетворяет тождествам:*

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \text{ и } \neg 0 = 1.$$

(3) Un*-Алгебра называется* алгеброй Гейтинга-Оккама (HO-алгеброй)*, если она является также* Imp*-алгеброй.*

Заметим, что редукт HO-алгебры без импликации является решеткой Оккама [3, 16]. Именно поэтому мы называем N^* логикой Гейтинга-Оккама.

Как отмечено в [18], в диссертации Д. Вакарелова [17] изучались логики с регулярным и ко-регулярным отрицаниями, которые являются собственными подмножествами логик N^{Imp} и N^{Un}, соответственно. Вакареловым введена также алгебраическая семантика для логик с регулярным и ко-регулярным отрицаниями, поэтому какая-то часть приводимых в данном разделе результатов должна вытекать из результатов Вакарелова. Ввиду недоступности диссертации [17], мы приводим все результаты с доказательствами.

Мы используем $-a$ как сокращение для $a \rightarrow 0$. Через $\leq_{\mathcal{A}}$ обозначается решеточный порядок алгебры $\mathcal{A}$. Нижний индекс в обозначении $\leq_{\mathcal{A}}$ будет опускаться, если это не приводит к недоразумениям. Выражение $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ сокращается как $a \leftrightarrow b$.

Лемма 3.2. *Пусть* $\mathcal{A}$ *—* Un*-алгебра или* Imp*-алгебра. Для любых* $a, b, c \in \mathcal{A}$ *верны соотношения:*

(1) $a \rightarrow b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$;
(2) $a \leftrightarrow b = 1 \Leftrightarrow a = b$;
(3) $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$;
(4) $(a \vee b) \rightarrow c = (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$;
(5) $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$;
(6) *если* $a \leq b$*, то* $\neg b \leq \neg a$.

Доказательство. Пункты (1)–(5) верны ввиду того, что $\mathcal{A}^H$ — алгебра Гейтинга. Пусть $a \leq b$, то есть $a = a \wedge b$ и $b = a \vee b$. Для Un-алгебры вычислим с помощью закона Де Моргана $\neg a = \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$, откуда $\neg b \leq \neg a$. В случае Imp-алгебры используем равенство $b = a \vee b$ и второй закон Де Моргана $\neg b = \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$. Опять получаем $\neg b \leq \neg a$.

□

Непосредственно из определений вытекает

Предложение 3.3. *Класс* $\mathcal{V}^{Un}$ *всех* Un*-алгебр и класс* $\mathcal{V}^{Imp}$ *всех* Imp*-алгебр являются многообразиями, класс* $\mathcal{V}^*$ *всех* HO*-алгебр является подмногообразием в* $\mathcal{V}^{Un}$ *и в* $\mathcal{V}^{Imp}$.

Напомним, что многообразие V называется *конгруэнц-дистрибутивным*, если для любой $\mathcal{A} \in V$, решетка конгруэнций алгебры $\mathcal{A}$ дистрибутивна. Многообразие V называется *конгруэнц-перестановочным*, если в любой алгебре $\mathcal{A} \in V$ конгруэнции перестановочны относительно композиции. *Арифметическое многообразие* — это многообразие, которое конгруэнц-перестановочно и конгруэнц-дистрибутивно. Согласно теореме Піксли (см. [4]) многообразие V является арифметическим, если и только если существует терм $m(x,y,z)$ такой, что тождества

$$m(x,y,x) = m(x,y,y) = m(y,y,x) = x$$

верны в V.

Предложение 3.4. *Многообразия $\mathcal{V}^{Un}$, $\mathcal{V}^{Imp}$ и $\mathcal{V}^*$ арифметические.*

Доказательство. Как и в случае алгебр Гейтинга (см. [4]), мы можем воспользоваться термом

$$m(x,y,z) := ((x \to y) \to z) \wedge ((z \to y) \to x) \wedge (x \vee z)$$

для доказательства арифметичности многообразий $\mathcal{V}^{Un}$, $\mathcal{V}^{Imp}$ и $\mathcal{V}^*$.

□

Для многообразия алгебр V обозначим через $Eq(V)$ его эквациональную теорию, то есть множество всех тождеств, которые выполняются на всех алгебрах из V.

Далее термин “алгебра” обозначает Un-алгебру или Imp-алгебру. Для алгебры $\mathcal{A}$ определим стандартным образом $\mathcal{A}$-оценку v как гомоморфизм из алгебры формул в $\mathcal{A}$. Говорим, что формула φ *верна* на $\mathcal{A}$, пишем $\mathcal{A} \vDash \varphi$, если $v(\varphi) = 1$ для любой $\mathcal{A}$-оценки v или, что эквивалентно, если тождество $\varphi = 1$ верно на $\mathcal{A}$. Положим $L\mathcal{A} := \{\varphi \mid \mathcal{A} \vDash \varphi\}$ для алгебры $\mathcal{A}$ и $L\mathcal{K} := \bigcap\{L\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{K}\}$ для класса $\mathcal{K}$, состоящего из Un-алгебр (Imp-алгебр). Стандартным образом можно доказать следующее

Предложение 3.5. *Для любой Un-(Imp-)алгебры $\mathcal{A}$ и для любого класса Un-(Imp-)алгебр $\mathcal{K}$, множества $L\mathcal{A}$ и $L\mathcal{K}$ являются нормальными логиками, расширяющими N^{Un} (N^{Imp}).*

Благодаря тому, что логики N^{Un}, N^{Imp} и их нормальные расширения замкнуты относительно правила замены, мы можем обычным образом определить алгебры Линденбаума для этих логик. С каждой логикой $\Delta \in \mathsf{NExt}N^{Un}$ ($\Delta \in \mathsf{NExt}N^{Imp}$) свяжем отношение эквивалентности $\equiv_\Delta$ на множестве формул. Для формул φ и ψ полагаем

$\varphi \equiv_\Delta \psi$, если и только если $\Delta \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Смежный класс формулы φ относительно $\equiv_\Delta$ обозначается $[\varphi]_\Delta$, то есть $[\varphi]_\Delta := \{\psi \mid \psi \equiv_\Delta \varphi\}$. Полагаем $L_\Delta := \{[\varphi]_\Delta \mid \varphi \in For\}$. Поскольку логика Δ замкнута относительно правила замены, отношение $\equiv_\Delta$ будет конгруэнцией на алгебре формул. Это позволяет определить на множестве L_Δ операции $\vee, \wedge, \to$ и $\neg$ следующим образом:

$[\varphi]_\Delta * [\psi]_\Delta := [\varphi * \psi]_\Delta$, где $* \in \{\vee, \wedge, \to\}$;
$\neg[\varphi]_\Delta := [\neg\varphi]_\Delta$.

Полагаем $1_\Delta = [p_0 \to p_0]_\Delta$ и $0_\Delta = [\bot]_\Delta$. Алгебра

$$\mathcal{L}(\Delta) := \langle L_\Delta, \vee, \wedge, \to, \neg, 0_\Delta, 1_\Delta \rangle$$

называется *алгеброй Линденбаума* логики Δ. Аксиомы интуиционистской логики позволяют доказать, что $\langle L_\Delta, \vee, \wedge, \to, \neg, 0_\Delta, 1_\Delta\rangle$ — алгебра Гейтинга. В алгебрах Гейтинга равенство $a = b$ эквивалентно $a \leftrightarrow b = 1$, а неравенство $a \leq b$ эквивалентно $a \to b = 1$ (см. лемму 3.2), поэтому из закона Де Моргана $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ следует выполнимость тождества $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ на $\mathcal{L}(\Delta)$ для $\Delta \in \mathsf{NExt}\ N^{Un}$. Аналогичным образом, тождество $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ выполняется на $\mathcal{L}(\Delta)$ для $\Delta \in \mathsf{NExt}\ N^{Imp}$. Поскольку $\neg(p \to p) \to q \in N^{Un}$, равенство $\neg 1 = 0$ верно на $\mathcal{L}(\Delta)$ для $\Delta \in \mathsf{NExt}\ N^{Un}$. Ввиду $\neg\bot \in N^{Imp}$ равенство $\neg 0 = 1$ верно на $\mathcal{L}(\Delta)$ для $\Delta \in \mathsf{NExt}\ N^{Imp}$.

Таким образом, мы доказали следующее

Предложение 3.6. *Для любой логики $\Delta \in \mathsf{NExt}\ N^{Un}$ ($\Delta \in \mathsf{NExt}\ N^{Imp}$) ее алгебра Линденбаума $\mathcal{L}(\Delta)$ является Un-(Imp-)алгеброй.*

Решетку подмногообразий многообразия V обозначаем $Sub(V)$. Для $\Delta \in \mathsf{NExt}\ N^{Un}(\mathsf{NExt}\ N^{Imp})$ полагаем

$$V(\Delta) := \{\mathcal{A} \mid \Delta \subseteq L\mathcal{A}\}.$$

Очевидно, что $V(\Delta) \in Sub(\mathcal{V}^{Un})(Sub(\mathcal{V}^{Imp}))$.

Покажем, что каждая логика $\Delta \in \mathsf{NExt}\ N^{Un}(\mathsf{NExt}\ N^{Imp})$ характеризуется многообразием $V(\Delta)$.

Теорема 3.7. *Для любых логики $\Delta \in \mathsf{NExt}\ N^{Un}(\mathsf{NExt}\ N^{Imp})$ и формулы φ верна следующая эквивалентность:*

$$\varphi \in \Delta, \text{ если и только если } \varphi = 1 \in Eq(V(\Delta)).$$

В частности,

$$\varphi \in N^{Un}(N^{Imp}), \text{ если и только если } \varphi = 1 \in Eq(\mathcal{V}^{Un})(Eq(\mathcal{V}^{Imp})).$$

Доказательство. Рассмотрим логику $\Delta \in \mathsf{NExt}\ N^{Un}(\mathsf{NExt}\ N^{Imp})$. Если $\varphi \in \Delta$, то $\varphi = 1 \in Eq(V(\Delta))$ по определению многообразия $V(\Delta)$.

Для доказательства обратной импликации проверим, что алгебра Линденбаума $\mathcal{L}(\Delta)$ лежит в $V(\Delta)$. Пусть $\varphi \in \Delta$, а v — $\mathcal{L}(\Delta)$-оценка. Если $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n)$ и $v(p_1) = [\psi_1]_\Delta, \ldots, v(p_n) = [\psi_n]_\Delta$, то $v(\varphi) = [\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n)]_\Delta = 1_\Delta$ ввиду $\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \Delta$. Таким образом, тождество $\varphi = 1$ выполнено на $\mathcal{L}(\Delta)$ и $\mathcal{L}(\Delta) \in V(\Delta)$.

Предположим, что $\varphi \notin \Delta$ и $\mathcal{L}(\Delta)$-оценка v такова, что $v(p) = [p]_\Delta$ для всех $p \in Prop$. Тогда $v(\varphi) = [\varphi]_\Delta \neq 1_\Delta$. Следовательно, $\varphi = 1 \notin Eq(V(\Delta))$. □

Теперь мы рассмотрим обратное отображение из $Sub(\mathcal{V}^{Un})$ ($Sub(\mathcal{V}^{Imp})$) в $\mathsf{NExt}\ N^{Un}$ ($\mathsf{NExt}\ N^{Imp}$). Для подмногообразия $V \in Sub(\mathcal{V}^{Un})(Sub(\mathcal{V}^{Imp}))$ полагаем

$$L(V) := \{\varphi \mid \varphi = 1 \in Eq(V)\}.$$

Предложение 3.8. *Для каждого подмногообразия $V \in Sub(\mathcal{V}^{Un})(Sub(\mathcal{V}^{Imp}))$ выполняется $L(V) \in \mathsf{NExt}\ N^{Un}$ ($\mathsf{NExt}\ N^{Imp}$). Более того, $V = V(L(V))$.*

Доказательство. Рассмотрим подмногообразие $V \in Sub(\mathcal{V}^{Un})$. Из теоремы 3.7 следует, что $N^{Un} = L(\mathcal{V}^{Un})$. Включение $V \subseteq \mathcal{V}^{Un}$ влечет $N^{Un} = L(\mathcal{V}^{Un}) \subseteq L(V)$. По определению множество $L(V)$ замкнуто относительно правила подстановки. Проверим, что $L(V)$ замкнуто относительно правил *modus ponens* и контрапозиции. Пусть $\varphi,\ \varphi \to \psi \in L(V)$. Возьмем произвольные алгебру

$\mathcal{A} \in V$ и $\mathcal{A}$-оценку v. Тогда $v(\varphi) = 1$ и $v(\varphi) \to v(\psi) = 1$. Последнее равенство эквиалентно $v(\varphi) \leq v(\psi)$ по лемме 3.2. Таким образом, $v(\psi) = 1$. Следовательно, $\psi \in L(V)$. Предположим, что $\varphi \to \psi \in L(V)$, то есть $v(\varphi) \leq v(\psi)$ для любых $\mathcal{A} \in V$ и $\mathcal{A}$-оценки v. По лемме 3.2 неравенство $v(\varphi) \leq v(\psi)$ влечет $v(\neg\psi) \leq v(\neg\varphi)$. Таким образом, $\neg\psi \to \neg\varphi \in L(V)$, и мы доказали, что $L(V) \in \mathsf{NExt}\, N^{Un}$.

Проверим равенство $V = V(L(V))$. По определению $Eq(V(L(V))) \subseteq Eq(V)$. Докажем обратное включение. Пусть $\varphi = \psi \in Eq(V)$. По лемме 3.2 верно $\varphi \leftrightarrow \psi = 1 \in Eq(V)$. Следовательно, $\varphi \leftrightarrow \psi \in L(V)$ и $\varphi \leftrightarrow \psi = 1 \in Eq(V(L(V)))$. Применяя еще раз лемму 3.2 получим $\varphi = \psi \in Eq(V(L(V)))$.

Для $V \in Sub(\mathcal{V}^{Imp})$ доказательство проводится аналогичным образом.

□

Теорема 3.9. *Отображения $V : \mathsf{NExt}\, N^x \to Sub(\mathcal{V}^x)$ и $L : Sub(\mathcal{V}^x) \to \mathsf{NExt}\, N^x$ являются взаимно обратными дуальными решеточными изоморфизмами между решетками $\mathsf{NExt}\, N^x$ и $Sub(\mathcal{V}^x)$, где $x \in \{Un, Imp, *\}$.*

Доказательство. Равенство $V = V(L(V))$ установлено в последнем предложении. Равенство $\Delta = L(V(\Delta))$, где $\Delta \in \mathsf{NExt}\, N^x$, следует из определения логики $L(V)$ и теоремы 3.7. Таким образом, $V : \mathsf{NExt}\, N^x \to Sub(\mathcal{V}^x)$ и $L : Sub(\mathcal{V}^x) \to \mathsf{NExt}\, N^x$ являются взаимно обратными биекциями. Очевидно, что оба отображения V и L обращают порядок. Это означает, что $\mathsf{NExt}\, N^x$ и $Sub(\mathcal{V}^x)$ дуально изоморфны как порядки, следовательно, они дуально изоморфны и как решетки.

□

Последнее утверждение означает, что Un-(Imp-)алгебры задают алгебраическую семантику, которая удобна для исследования решеток расширений логик N^{Un} и N^{Imp}.

Определение 3.10. *Непустое подмножество F алгебры $\mathcal{A}$ будем называть* $\neg$-фильтром *на $\mathcal{A}$, если выполнены следующие условия: 1) если $a, b \in F$, то $a \wedge b \in F$; 2) если $a \in F$ и $a \leq b$, то $b \in F$; 3) если $a \to b \in F$, то $\neg b \to \neg a \in F$.*

Другими словами, $\neg$-фильтр на $\mathcal{A}$ — это фильтр на алгебре Гейтинга $\mathcal{A}^H$, удовлетворяющий дополнительно условию 3).

Обозначим через $\mathcal{F}^\neg(\mathcal{A})$ решетку $\neg$-фильтров на алебре A, а через $Con(\mathcal{A})$ — решетку конгруэнций алгебры $\mathcal{A}$. Для $F \in \mathcal{F}^\neg(\mathcal{A})$ и $\theta \in Con(\mathcal{A})$ полагаем

$$\theta_F := \{(a, b) \mid a \leftrightarrow b \in F\} \text{ и } F_\theta := \{a \mid (a, 1) \in \theta\}.$$

Предложение 3.11. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра.*

(1) *Для любого фильтра $F \in \mathcal{F}^\neg(\mathcal{A})$ отношение θ_F является конгруэнцией на $\mathcal{A}$.*
(2) *Для любой конгруэнции $\theta \in Con(\mathcal{A})$ множество F_θ будет $\neg$-фильтром на $\mathcal{A}$.*
(3) *Отображения $F \mapsto \theta_F$, $F \in \mathcal{F}^\neg(\mathcal{A})$, и $\theta \mapsto F_\theta$, $\theta \in Con(\mathcal{A})$ задают взаимно обратные изоморфизмы решеток $\mathcal{F}^\neg(\mathcal{A})$ и $Con(\mathcal{A})$.*

Доказательство. 1. Поскольку $\mathcal{A}^H$ — алгебра Гейтинга, отношение θ_F обладает свойствами конгруэнции относительно позитивных связок. Пусть $a\theta_F b$, то есть $a \to b$ и $b \to a$ лежат в F. Согласно определению $\neg$-фильтров элементы $\neg b \to \neg a$ и $\neg a \to \neg b$ также лежат в F, то есть $\neg a\theta_F\neg b$.

2. Если $\theta \in Con(\mathcal{A})$, то θ является конгруэнцией алгебры Гейтинга $\mathcal{A}^H$. Следовательно, F_θ — фильтр на $\mathcal{A}^H$. Проверим условие 3) из определения 3.10.

Пусть $\mathcal{A}$ — Un-алгебра. Если $a \to b \in F_\theta$, то есть $(a \to b)\theta 1$, то $(a \wedge (a \to b))\theta a$. Следовательно, $(a \wedge b)\theta a$ по лемме 3.2, и $\neg(a \wedge b)\theta \neg a$ по свойствам конгруэнции. Откуда $(\neg(a \wedge b) \to \neg a)\theta(\neg a \to \neg a)$, то есть $\neg(a \wedge b) \to \neg a \in F_\theta$. Из закона Де Моргана Un-алгебр и леммы 3.2 получаем

$$\neg(a \wedge b) \to \neg a = (\neg a \vee \neg b) \to \neg a = (\neg a \to \neg a) \wedge (\neg b \to \neg a) = \neg b \to \neg a.$$

Таким образом, $\neg b \to \neg a \in F_\theta$.

Теперь предположим, что $\mathcal{A}$ — Imp-алгебра. Опять, $b \in F_\theta$ влечет $(a \wedge b)\theta a$. Следовательно, $b = (b \vee (a \wedge b))\theta(a \vee b)$, откуда $\neg(a \vee b)\theta \neg b$ и $\neg b \to \neg(a \vee b) \in F_\theta$. Далее, воспользовавшись законом Де Моргана Imp-алгебр и леммой 3.2 получаем

$$\neg b \to \neg(a \vee b) = \neg b \to (\neg a \wedge \neg b) = (\neg b \to \neg a) \wedge (\neg b \to \neg b) = \neg b \to \neg a.$$

Опять, $\neg b \to \neg a \in F_\theta$.

3. Равенства $F = F_{\theta_F}$ и $\theta = \theta_{F_\theta}$ следуют из того, что F — фильтр, а θ — конгруэнция алгебры Гейтинга $\mathcal{A}^H$. Таким образом, отображения $F \mapsto \theta_F$ и $\theta \mapsto F_\theta$ взаимно обратны. Очевидно, что эти отображения сохраняют отношения включения. Следовательно это порядковые изоморфизмы и, тем самым, решеточные изоморфизмы.

□

Для случая Un-алгебр понятие $\neg$-фильтра может быть упрощено следующим образом:

Предложение 3.12. *Пусть $\mathcal{A}$ — Un-алгебра и $\varnothing \neq F \subseteq \mathcal{A}$. Множество F является $\neg$-фильтром на $\mathcal{A}$, если только и если это фильтр на $\mathcal{A}^H$, удовлетворяющий условию $3'$) если $a \in F$, то $-\neg a \in F$.*

Доказательство. Пусть F — $\neg$-фильтр на $\mathcal{A}$. Если $a = 1 \to a \in F$, то по условию 3) выполнено $\neg a \to \neg 1 = \neg a \to 0 = -\neg a \in F$.

Для доказательства обратной импликации нам понадобится следующая

Лемма 3.13. *Формула $-\neg(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ лежит в N^{Un}.*

Доказательство. Пусть $\mu = \langle W, \leq, R, v\rangle$ — N^{Un}-модель. Проверим, что для любого $x \in W$ из $\mu, x \vDash -\neg(\varphi \to \psi)$ следует $\mu, x \vDash \neg\psi \to \neg\varphi$. Заметим, что

$$\mu, x \vDash \neg\psi \to \neg\varphi \Leftrightarrow \forall y \geq x(\mu, y \vDash \neg\psi \Rightarrow \mu, y \vDash \neg\varphi) \Leftrightarrow$$
$$\forall y \geq x(\exists z(yRz \wedge \mu, z \nvDash \psi) \Rightarrow \exists z(yRz \wedge \mu, z \nvDash \varphi)).$$

В тоже время верны соотношения

$$\mu, x \vDash -\neg(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \forall y \geq x(\mu, y \nvDash \neg(\varphi \to \psi)) \Leftrightarrow$$
$$\forall y \geq x(\forall z(yRz \Rightarrow \mu, z \vDash \varphi \to \psi)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall y \geq x \forall z \forall t((yRz \wedge t \geq z \wedge \mu, t \vDash \varphi) \Rightarrow t \vDash \psi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall y \geq x \forall z((yRz \wedge \mu, z \vDash \varphi) \Rightarrow \mu, z \vDash \psi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall y \geq x \forall z((yRz \wedge \mu, z \nvDash \psi) \Rightarrow \mu, z \nvDash \varphi) \Rightarrow$$
$$\forall y \geq x(\exists z(yRz \wedge \mu, z \nvDash \psi) \Rightarrow \exists z(yRz \wedge \mu, z \nvDash \varphi)).$$

Как отмечено выше, последнее условие эквивалентно $\mu, x \vDash \neg\psi \to \neg\varphi$.

□

Пусть F — фильтр на $\mathcal{A}^H$, удовлетворяющий условию $3'$). Если $a \to b \in F$, то $-\neg(a \to b) \in F$ по условию $3'$). Из последней леммы и теоремы полноты для N^{Un} следует, что $-\neg(a \to b) \leq \neg b \to \neg a$. Таким образом, $\neg b \to \neg a \in F$.

$\square$

Аналог последнего утверждения не удается доказать для Imp-алгебр ввиду того, что формула $-\neg(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ не лежит в N^{Imp}. Поэтому и дальнейшие результаты удается доказать только для логики N^{Un}.

Контрмодель для формулы $-\neg(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ в логике N^{Imp} можно определить следующим образом. Пусть $\mu = \langle\{x, y, z\}, \leq, R, v\rangle$, где x, y и z несравнимы относительно $\leq$, $R = \{(x, y), (x, z), (y, y), (z, z)\}$, $v(p) = \{z\}$, $v(q) = \varnothing$. Легко проверить, что $\mu, x \vDash -\neg(p \to q)$, но при этом $\mu, x \nvDash \neg q \to \neg p$.

Следуя [19] определим $\square$-алгебры.

Алгебра $\mathcal{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, \square, 0, 1\rangle$ называется *$\square$-алгеброй*, если ее редукт $\mathcal{A}^H = \langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ является алгеброй Гейтинга, а оператор $\square$ удовлетворяет свойствам:

$$\square 1 = 1 \text{ и } \square(a \wedge b) = \square a \wedge \square b$$

для всех $a, b \in A$.

Un-алгебре $\mathcal{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, \neg, 0, 1\rangle$ поставим в соответствие алгебру

$$\mathcal{A}^{\square} := \langle A, \vee, \wedge, \to, -\neg, 0, 1\rangle.$$

Предложение 3.14. *Для любой Un-алгебры $\mathcal{A}$ алгебра $\mathcal{A}^{\square}$ является $\square$-алгеброй, то есть оператор “$-\neg$” удовлетворяет свойствам:*

$$-\neg 1 = 1 \text{ и } -\neg(a \wedge b) = -\neg a \wedge -\neg b$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Ясно, что $-\neg 1 = -0 = 1$. Для $a, b \in \mathcal{A}$ вычисляем

$$-\neg(a \wedge b) = -(\neg a \vee \neg b) = (\neg a \vee \neg b) \to 0 = (\neg a \to 0) \wedge (\neg b \to 0) = -\neg a \wedge -\neg b.$$

$\square$

Согласно [19] подмножество F основного множества $\square$-алгебры $\mathcal{A}$ называется *$\square$-фильтром*, если F является фильтром на алгебре Гейтинга $\mathcal{A}^H$ и F замкнут относительно правила $a/\square a$. В [19] доказано, что $\square$-фильтры находятся во взаимно однозначном соответствии с конгруэнциями $\square$-алгебры $\mathcal{A}$, и это соответствие задается отображениями $F \mapsto \theta_F$ и $\theta \mapsto F_\theta$, определяемыми в точности также, как для $\neg$-фильтров и конгруэнций на Un-алгебрах. Воспользовавшись этим фактом и предложением 3.12 мы получаем

Предложение 3.15. *Пусть $\mathcal{A}$ — Un-алгебра. Решетки конгруэнций алгебры $\mathcal{A}$ и $\square$-алгебры $\mathcal{A}^{\square}$ совпадают.*

Поскольку подпрямо неразложимые алгебры определяются как алгебры, чьи решетки конгруэнций имеют наименьший ненулевой элемент, мы выводим

Следствие 3.16. *Un-алгебра $\mathcal{A}$ подпрямо неразложима, если и только если $\square$-алгебра $\mathcal{A}^{\square}$ подпрямо неразложима.*

В [19, Предложение 1.6] получено описание подпрямо неразложимых $\square$-алгебр, которое, в силу последнего следствия, может быть непосредственно перенесено на случай Un-алгебр. Таким образом, получаем

Предложение 3.17. *Un-алгебра $\mathcal{A}$ подпрямо неразложима, если и только если существует элемент $a \in \mathcal{A}$ такой, что $a \neq 1$, и для любого $b \in \mathcal{A}$ если $b \neq 1$, то найдется $n \in \omega$ такое, что $(-\neg)^{(n)} b \leq a$, где*

$$(-\neg)^0 a := a;\ (-\neg)^{n+1} a := (-\neg)^n - \neg a \text{ для } n > 0;$$

$$(-\neg)^{(n)} a := \bigwedge\{(-\neg)^m a \mid m \leq n\}.$$

Двойственность между Un-алгебрами и N^{Un}-шкалами (между HO-алгебрами и шкалами Раутли) определяется аналогично двойственности между алгебрами Гейтинга и шкалами Крипке для интуиционистской логики.

Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \leq, R\rangle (\mathcal{W} = \langle W, \leq, *\rangle)$ — N^{Un}-шкала (шкала Раутли). Определим ее *алгебру конусов* $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ следующим образом:

$$\mathcal{A}(\mathcal{W}) := \langle\langle W, \leq\rangle^+, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg, \varnothing, W\rangle,$$

где

- $\langle W, \leq\rangle^+$ — множество всех конусов (замкнутых вверх подмножеств) частичного порядка $\langle W, \leq\rangle$;
- $\cap$ и $\cup$ — пересечение и объединение множеств;
- $X \Rightarrow Y := \{w \in W \mid \forall u \geq w(u \in X \Rightarrow u \in Y)\}$ для $X, Y \in \langle W, \leq\rangle^+$;
- $\neg X := \{w \in W \mid \exists u(wRu \wedge u \notin X)\}$ для $X \in \langle W, \leq\rangle^+$
  ($\neg X := \{w \in W \mid w^* \notin X\}$ для шкал Раутли).

Поскольку каждая функция означивания $v : Prop \to 2^W$ удовлетворяет условию $v(p) \in \langle W, \leq\rangle^+$, мы можем рассматривать v как $\mathcal{A}(\mathcal{W})$-оценку. Верно и обратное, каждая $\mathcal{A}(\mathcal{W})$-оценка определяет модель над $\mathcal{W}$.

Предложение 3.18. *Пусть $\mathcal{W}$ — N^{Un}-шкала (шкала Раутли).*

(1) *Алгебра конусов $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ является Un-алгеброй (HO-алгеброй).*
(2) *Для любых модели $\mu = \langle\mathcal{W}, v\rangle$ над $\mathcal{W}$, формулы φ и $w \in W$ верна эквивалентность:*

$$\mu, w \vDash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad w \in v(\varphi).$$

В частности, $\mu \vDash \varphi$, если и только если $v(\varphi) = 1_{\mathcal{A}(\mathcal{W})}$.

Доказательство. Для шкал Раутли это утверждение доказано в [13]. Рассмотрим N^{Un}-шкалы.

1. Поскольку редукт $\mathcal{A}(\mathcal{W})^H := \langle\langle W, \leq\rangle^+, \cap, \cup, \Rightarrow, \varnothing, W\rangle$ определяется так же, как алгебра конусов интуиционистской шкалы Крипке $\langle W, \leq\rangle$, мы можем заключить, что $\mathcal{A}(\mathcal{W})^H$ — алгебра Гейтинга. Остается проверить тождества Un-алгебр для операции $\neg$. Для любых $X, Y \in \langle W, \leq\rangle^+$ получаем

$$\neg(X \cap Y) = \{w \in W \mid \exists u(wRu \wedge (u \notin X \vee u \notin Y)\} =$$

$$= \{w \in W \mid \exists u(wRu \wedge u \notin X)\} \cup \{w \in W \mid \exists u(wRu \wedge u \notin Y)\} = \neg X \cup \neg Y.$$

Очевидно, что $\neg W = \varnothing$.

2. Этот пункт доказывается несложной индукцией по сложности формул.

$\square$

Поскольку классы $\mathcal{A}(\mathcal{W})$-оценок и означиваний в шкале $\mathcal{W}$ совпадают, мы получаем

Следствие 3.19. *Для любой N^{Un}-шкалы $\mathcal{W}$, ее алгебры конусов $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ и формулы φ верна эквивалентность*

$$\mathcal{W} \vDash \varphi, \text{ если и только если } \mathcal{A}(\mathcal{W}) \vDash \varphi.$$

Для произвольной Un-(HO-)алгебры $\mathcal{A}$ построим шкалу $\mathcal{W}^{\mathcal{A}}$ такую, что $\mathcal{A}$ вкладывается в алгебру конусов $\mathcal{A}(\mathcal{W}^{\mathcal{A}})$.

Напомним, что фильтр F на $\mathcal{A}$ называется *простым*, если F — собственное подмножество $\mathcal{A}$ и $a \vee b \in F$ эквивалентно $a \in F$ или $b \in F$. Обозначим через $W(\mathcal{A})$ множество всех простых фильтров на $\mathcal{A}$ (здесь мы рассматриваем именно фильтры, а не $\neg$-фильтры) и определим

$$\mathcal{W}^{\mathcal{A}} := \langle W(\mathcal{A}), \subseteq, R^{\mathcal{A}} \rangle (\mathcal{W}^{\mathcal{A}} := \langle W(\mathcal{A}), \subseteq, *^{\mathcal{A}} \rangle),$$

где

- $\subseteq$ — теоретико-множественное включение;
- $XR^{\mathcal{A}}Y$, если и только если $\forall a\, (\neg a \notin X \Rightarrow a \in Y)$
  ($F^{*^{\mathcal{A}}} := \{a \mid \neg a \notin F\}$).

Предложение 3.20. *Для любой Un-(HO-)алгебры $\mathcal{A}$ шкала $\mathcal{W}^{\mathcal{A}}$ является N^{Un}-шкалой (шкалой Раутли).*

Доказательство. Для HO-алгебр это доказано в [13]. Пусть $\mathcal{A}$ — Un-алгебра. Согласно определению 2.1 достаточно проверить, что для любых $X, Y, Z \in W^{\mathcal{A}}$ отношения $Z \supseteq X$ и $XR^{\mathcal{A}}Y$ влекут $ZR^{\mathcal{A}}Y$. Предположим, что $\neg a \notin Z$. Тем более, $\neg a \notin X$. Следовательно, $a \in Y$ ввиду $XR^{\mathcal{A}}Y$.

□

Предложение 3.21. *Для любой Un-(HO-)алгебры $\mathcal{A}$ отображение $a \mapsto X^a$, где $X^a = \{F \in W(\mathcal{A}) \mid a \in F\}$, $a \in \mathcal{A}$, является вложением алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру конусов $\mathcal{A}(\mathcal{W}^{\mathcal{A}})$. Если алгебра $\mathcal{A}$ конечна, то это вложение является изоморфизмом.*

Доказательство. Опять, случай HO-алгебр рассмотрен в [13]. Пусть $\mathcal{A}$ — Un-алгебра. Хорошо известно, что отображение $a \mapsto X^a$ вкладывает алгебру Гейтинга $\mathcal{A}^H$ в алгебру Гейтинга $(\mathcal{A}(\mathcal{W}^{\mathcal{A}}))^H$. Более того, это отображение "на", если $\mathcal{A}$ конечна. Остается проверить, что рассмариваемое отображение сохраняет операцию $\neg$, то есть что $\neg X^a = X^{\neg a}$ для всех $a \in \mathcal{A}$. Если $F \in \neg X^a$, то найдется $F_1 \in W^{\mathcal{A}}$ такой, что $FR^{\mathcal{A}}F_1$ и $F_1 \notin X^a$. Иными словами, $\neg a \notin F$ влечет $a \in F_1$, и $a \notin F_1$. Следовательно, $\neg a \in F$. Мы доказали таким образом, что $\neg X^a \subseteq X^{\neg a}$. Для доказательства обратного включения нужно для простого фильтра F такого, что $\neg a \in F$, построить простой фильтр F_1 такой, что $FR^{\mathcal{A}}F_1$ и $a \notin F_1$. Рассмотрим множество $P = \{a \mid \neg a \notin F\}$. Заметим, что a не принадлежит фильтру $\langle P \rangle$ порожденному P. Действительно, если $a \in \langle P \rangle$, то $a \geq b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$ для некоторых $b_1, \ldots, b_n \in P$. Следовательно, $\neg a \leq \neg(b_1 \wedge \ldots \wedge \neg b_n) = \neg b_1 \vee \ldots \vee \neg b_n \in F$. Поскольку фильтр F простой, выполнено $\neg b_i \in F$ для некоторого i, что противоречит определению множества P. Таким образом, $a \notin \langle P \rangle$ и мы можем построить простой фильтр F_1 такой, что $P \subseteq F_1$ и $a \notin F_1$. Включение $P \subseteq F_1$ означает, что $FR^{\mathcal{A}}F_1$.

□

Из последнего предложения и следствия 3.19 вытекает

Предложение 3.22. *Для любых Un-(НО-)алгебры $\mathcal{A}$ и формулы φ, верна импликация*

$$\mathcal{W}^{\mathcal{A}} \vDash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Если алгебра $\mathcal{A}$ конечна, то

$$\mathcal{W}^{\mathcal{A}} \vDash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \varphi.$$

4. Фильтрации и разрешимость

В данном разделе мы адаптируем метод фильтрации для логик N^{Un}, N^{Imp} и N^* и докажем, что эти логики обладают свойством конечных моделей и разрешимы. Фильтрации для логик N^{Un} и N^{Imp} определяются почти также как для нормальных модальных логик. В случае логики N^* определение значительно сложнее и опирается на идеи из работы [10]. Напомним, что логика *обладает свойством конечных моделей*, если она полна относительно класса конечных шкал.

Будем проводить построения для логик N^{Un} и N^{Imp} одновременно, лишь уточняя различия в доказательствах и формулировках там, где нужно.

Пусть $\mu = \langle W, \leq, R, v\rangle$ — произвольная N^{Un}-(N^{Imp}-)модель. Зафиксируем конечное множество формул Φ в языке $\mathcal{L}$, замкнутое относительно взятия подформул. Как обычно, определим отношение эквивалентности на множестве W относительно Φ.

Определение 4.1. *Будем говорить, что $x, y \in W$* эквивалентны относительно Φ *и обозначать это $x \equiv y$, если для всех $\varphi \in \Phi$ выполнено*

$$\mu, x \vDash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mu, y \vDash \varphi.$$

Нетрудно заметить, что это отношение — действительно отношение эквивалентности, то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Стандартным образом, отношение эквивалентности разбивает множество W на классы эквивалентности вида $[x] = \{y \in W \mid x \equiv y\}$, более того, из конечности Φ следует, что число таких классов также конечно.

Определение 4.2. Фильтрацией N^{Un}-(N^{Imp}-)модели $\mu = \langle W, \leq, R, v\rangle$ *относительно конечного множества формул Φ, замкнутого относительно взятия подформул, мы называем $\mu_\Phi = \langle W_\Phi, \leq_\Phi, R_\Phi, v_\Phi\rangle$, где:*

- $W_\Phi = \{[x] \mid x \in W\}$;
- $[x] \leq_\Phi [y] \Leftrightarrow \forall \varphi \in \Phi\ (\mu, x \vDash \varphi \Rightarrow \mu, y \vDash \varphi)$;
- *(i)* $[x] R_\Phi [y] \Leftrightarrow \forall \neg\varphi \in \Phi\ (\mu, x \nvDash \neg\varphi \Rightarrow \mu, y \vDash \varphi)$ *в случае* N^{Un} *и*
  (ii) $[x] R_\Phi [y] \Leftrightarrow \forall \neg\varphi \in \Phi\ (\mu, x \vDash \neg\varphi \Rightarrow \mu, y \nvDash \varphi)$ *в случае* N^{Imp};
- $v_\Phi : Prop \to 2^{W_\Phi}$ *такое, что для* $p \in \Phi$: $[x] \in v_\Phi(p) \Leftrightarrow x \in v(p)$.

Проверим корректность этого определения.

Предложение 4.3. *Если $\mu = \langle W, \leq, R, v\rangle$ — N^{Un}-(N^{Imp}-)модель, то ее фильтрация $\mu_\Phi = \langle W_\Phi, \leq_\Phi, R_\Phi, v_\Phi\rangle$ является N^{Un}-(N^{Imp}-)моделью.*

Доказательство. Проверим только соответствующие условия согласования между частичным порядком и отношением достижимости.

В случае логики N^{Un} нужно показать следующее: если $[x] \leq_\Phi [y]$ и $[x] R_\Phi [z]$, то $[y] R_\Phi [z]$. Пусть $\neg\varphi \in \Phi$ и $\mu, y \nvDash \neg\varphi$, тогда из условия $[x] \leq_\Phi [y]$ получаем, что $\mu, x \nvDash \neg\varphi$, а из $[x] R_\Phi [z]$, что $\mu, z \vDash \varphi$.

В случае N^{Imp} нужно показать, что $[x] \leq_\Phi [y]$ и $[y]R_\Phi[z]$ влечёт $[x]R_\Phi[z]$. Пусть $\neg\varphi \in \Phi$ и $\mu, x \vDash \neg\varphi$. Тогда $\mu, y \vDash \neg\varphi$ по определению $\leq_\Phi$ и, поскольку $[y]R_\Phi[z]$, получаем $z \nvDash \varphi$. Значит $[x]R_\Phi[z]$.

□

Теперь докажем ключевую лемму метода фильтрации:

Лемма 4.4 (О фильтрации)**.** *Пусть* $\mu = \langle W, \leq, R, v\rangle$ *—* N^{Un}*-модель (*N^{Imp}*-модель), а* Φ *— конечное множество формул, замкнутое относительно взятия подформул. Тогда для произвольных* $x \in W$ *и* $\varphi \in \Phi$ *имеем*

$$\mu, x \vDash \varphi \quad\Leftrightarrow\quad \mu_\Phi, [x] \vDash \varphi.$$

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по сложности $\varphi \in \Phi$.

Сначала заметим, что предложение 2.4 гарантирует, что для $x, y \in W$ из $x \leq y$ следует $[x] \leq_\Phi [y]$, а определение отношения выполнимости, что xRy влечёт $[x]R_\Phi[y]$ в случае обеих логик.

База индукции следует из определения означивания v_Φ. Если $\varphi = p$ — пропозициональная переменная, то $[x] \in v_\Phi(p) \Leftrightarrow x \in v(p)$. Индукционный переход для интуиционистских связок рассматривается в точности также как для интуиционистской логики [6].

Рассмотрим случай отрицания для логики N^{Un}. Пусть $\varphi = \neg\psi$. Если $\mu, x \vDash \neg\psi$, то по определению существует $y \in W$ такой, что xRy и $\mu, y \nvDash \psi$. В этом случае $[x]R_\Phi[y]$ и по индукционному предположению $\mu_\Phi, [y] \nvDash \psi$. Значит, $\mu_\Phi, [x] \vDash \neg\psi$.

Обратно, пусть $\mu, x \nvDash \neg\psi$ и $[y] \in W_\Phi$ такой, что $[x]R_\Phi[y]$. Нужно доказать, что $\mu_\Phi, [y] \vDash \psi$, откуда будет следовать, что $\mu_\Phi, [x] \nvDash \neg\psi$. По определению отношения R_Φ имеем $\mu, y \vDash \psi$, а по индукционному предположению $\mu_\Phi, [y] \vDash \psi$.

Теперь рассмотрим случай отрицания для логики N^{Imp}. Пусть $\mu, x \vDash \neg\psi$. Нужно показать, что для всех $[y] \in W_\Phi$ если $[x]R_\Phi[y]$, то $\mu_\Phi, [y] \nvDash \psi$. Зафиксируем такой $[y]$. По определению отношения R_Φ из $[x]R_\Phi[y]$ следует $\mu, y \nvDash \psi$, а по индукционному предположению $\mu_\Phi, [y] \nvDash \psi$. Таким образом, $\mu_\Phi, [x] \vDash \neg\psi$.

Теперь, если $\mu, x \nvDash \neg\psi$, то существует $y \in W$ такой, что xRy и $y \vDash \psi$. Отсюда выводим, что $[x]R_\Phi[y]$ и $\mu_\Phi, [y] \vDash \psi$, а значит $\mu_\Phi, [x] \nvDash \neg\psi$, что завершает доказательство.

□

Перейдём к адаптации метода фильтрации для логики N^*.

Как и в предыдущем случае, зафиксируем модель Раутли $\mu = \langle W, \leq, *, v\rangle$ и конечное множество формул Φ, замкнутое относительно взятия подформул.

Определение 4.5. *Для конечного множества формул* Φ *и* $\varphi \in \Phi$ *определим* негативную степень *формулы* φ *относительно* Φ *следующим образом:*

- $0 \in ndeg_\Phi(\varphi)$*, если не существует формулы* $\neg\psi \in \Phi$ *такой, что* φ *— подформула* ψ*;*
- $i \in ndeg_\Phi(\varphi)$ *для* $i > 0$*, если найдётся* $\neg\psi \in \Phi$ *такая, что* $(i-1) \in ndeg_\Phi(\neg\psi)$ *и* φ *— подформула* ψ*.*

Для произвольного i обозначим $\Phi_i = \{\varphi \in \Phi \mid i \in ndeg_\Phi(\varphi)\}$. Легко заметить, что Φ, таким образом, представимо в виде $\Phi = \Phi_0 \cup ... \cup \Phi_{N_\Phi}$, где N_Φ — наибольшее натуральное число такое, что Φ_{N_Φ} непусто. Существование такого N_Φ прямо следует из того, что Φ конечно. Заметим также, что это представление не является разбиением, поскольку одна формула может входить в несколько различных множеств Φ_i.

Определение 4.6. *Для всякого* $i = 0, \ldots, N_\Phi$ *обозначим* $\equiv_i$ *отношения на* W *определённые следующим образом:*

- $x \equiv_{N_\Phi} y$, *если* $\forall \varphi \in \Phi_{N_\Phi}$ $(\mu, x \vDash \varphi \Leftrightarrow \mu, y \vDash \varphi)$;
- $x \equiv_i y$, *если* $\forall \varphi \in \Phi_i$ $(\mu, x \vDash \varphi \Leftrightarrow \mu, y \vDash \varphi)$ *и* $x^* \equiv_{(i+1)} y^*$ *для* $i = 0, \ldots, N_\Phi - 1$

для $x, y \in W$.

Нетрудно понять, что каждое из этих отношений является отношением эквивалентности. Таким образом, каждый мир в W представлен не одним классом эквивалентности, а $N_\Phi + 1$ классами эквивалентности, соответствующими каждому из отношений эквивалентности, определённых выше.

Определение 4.7. Фильтрацией модели Раутли $\mu = \langle W, \leq, *, v \rangle$ *относительно конечного множества формул* Φ, *замкнутого относительно взятия подформул, назовём* $\mu_\Phi = \langle W_\Phi, \leq_\Phi, s, v_\Phi \rangle$, *где:*

- $W_\Phi = W' \cup \{\delta\}$, *где* $W' = \{[x]_0, .., [x]_{N_\Phi} \mid x \in W\}$ *и* $\delta \notin W'$;
- *Функция* $s : W_\Phi \to W_\Phi$ *определена следующим образом:*
  i) $(\delta)^s = \delta$, *ii)* $([x]_{N_\Phi})^s = \delta$ *и iii)* $([x]_i)^s = [x^*]_{(i+1)}$ *для* $i = 0, \ldots, N_\Phi - 1$;
- *Отношение* $\leq_\Phi \subseteq W_\Phi^2$ *таково, что*
  i) $[x]_{N_\Phi} \leq_\Phi [y]_{N_\Phi}$, *если* $\forall \varphi \in \Phi_{N_\Phi}$ $(\mu, x \vDash \varphi \Rightarrow \mu, y \vDash \varphi)$;
  ii) $[x]_i \leq_\Phi [y]_i$, *если* $\forall \varphi \in \Phi_i$ $(\mu, x \vDash \varphi \Rightarrow \mu, y \vDash \varphi)$ *и* $([y]_i)^s \leq_\Phi ([x]_i)^s$ *для всех* $i = 0, \ldots, N_\Phi - 1$;
- $v_\Phi : Prop \to 2^{W_\Phi}$ *такое, что для* $p \in \Phi_i$: $[x]_i \in v_\Phi(p) \Leftrightarrow x \in v(p)$.

Проверим корректность этого определения.

Предложение 4.8. *Фильтрация* $\mu_\Phi = \langle W_\Phi, \leq_\Phi, s, v_\Phi \rangle$ *модели Раутли* $\mu = \langle W, \leq, *, v \rangle$ *относительно* Φ *сама является моделью Раутли.*

Доказательство. Корректность определения функции s на мирах вида $[x]_{N_\Phi}$ и на δ очевидна. Для $x_1, x_2 \in [x]_i$ по определению $\equiv_i$ имеем $x_1^* \equiv_{(i+1)} x_2^*$, откуда следует корректность задания s на мирах вида $[x]_i$ для $i = 0, \ldots, N_\Phi - 1$. То, что s анти-монотонна, прямо следует из определения $\leq_\Phi$.

□

Лемма 4.9 (О фильтрации). *Пусть* $\mu = \langle W, \leq, *, v \rangle$ *— модель Раутли, а* Φ *— конечное множество формул языка* $\mathcal{L}$, *замкнутое относительно взятия подформул. Тогда для* $i \in \{0, \ldots, N_\Phi\}$, $x \in W$ *и* $\varphi \in \Phi_i$ *выполнено:*

$$\mu, x \vDash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mu_\varphi, [x]_i \vDash \varphi.$$

Доказательство. Доказательство снова будем вести индукцией по сложности формулы $\varphi \in \Phi_i$.

Заметим сначала, что для $x, y \in W$ условие $x \leq y$ влечёт $[x]_i \leq_\Phi [y]_i$ для всех $i \in \{0, .., N_\Phi\}$.

Для $i = N_\Phi$ это очевидно. Пусть $j \in \{0, .., N_\Phi - 1\}$ и допустим, что для всех индексов больших чем j это доказано. Тогда нужно показать, что $\forall \varphi \in \Phi_j$ $(\mu, x \vDash \varphi \Rightarrow \mu, y \vDash \varphi)$ и $([y]_j)^s \leq_\Phi ([x]_j)^s$. Первая часть выполнена очевидным образом, проверим вторую. Так как $*$ — анти-монотонна, то $x \leq y$ влечёт $y^* \leq x^*$. По сделанному предположению $[y^*]_{(j+1)} \leq_\Phi [x^*]_{(j+1)}$ и по определению s получаем $([y]_j)^s \leq_\Phi ([x]_j)^s$.

Перейдём непосредственно к индукции:

- Случаи, когда φ пропозициональная переменная, $\perp$ или формула вида $\varphi_1 \circ \varphi_2$ для $\circ \in \{\vee, \wedge, \to\}$ доказываются также, как для интуицонистской логики [6]. Единственное, что нужно заметить, это то, что $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in \Phi_i$ влечёт $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_i$ для всех $i = 0, \ldots, N_\Phi$.
- Пусть $\varphi = \neg\psi$, тогда $\mu, x \models \neg\psi \Leftrightarrow \mu, x^* \not\models \psi$. Поскольку $\psi \in \Phi_{(i+1)}$, то $\mu_\Phi, [x^*]_{i+1} \not\models \psi$ и, так как $[x^*]_{i+1} = [x]_i^s$, получаем $\mu_\Phi, [x]_i^s \not\models \psi$, то есть $\mu_\Phi, [x]_i \models \neg\psi$.

$\square$

Из леммы о фильтрации стандартным образом получаем, что

Теорема 4.10. *Логики N^{Un}, N^{Imp} и N^* обладают свойством конечных моделей.*

Поскольку все три логики имеют конечную аксиоматизацию, немедленно получаем, что

Следствие 4.11. *Логики N^{Un}, N^{Imp} и N^* разрешимы.*

5. Сильная полнота относительно конечных шкал

Напомним, что логика Δ называется *табличной*, если многообразие алгебр $V(\Delta)$ порождено конечной алгеброй. Согласно предложению 3.22 логика таблична, если и только если она имеет вид $L\mathcal{W}$, где $\mathcal{W}$ — конечная шкала.

Многообразие алгебр называется *резидуально конечным*, если каждая подпрямо неразложимая алгебра этого многообразия конечна. Говорим, что многообразие алгебр *резидуально* $< n$ $(n \in \omega)$, если каждая подпрямо неразложимая алгебра этого многообразия имеет мощность меньше, чем n.

Предложение 5.1. *Пусть Δ — нормальное расширение логики N^{Un}. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *логика Δ таблична;*
(2) *многообразие $V(\Delta)$ резидуально $< n$ для некоторого $n \in \omega$;*
(3) *многообразие $V(\Delta)$ резидуально конечно.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть многообразие $V(\Delta)$ порождается конечной Un-алгеброй $\mathcal{A}$. По предложению 3.4 это многообразие конгруэнц дистрибутивно, и мы можем применить теорему Йонссона [4, стр. 168, Следствие 6.10], согласно которой все подпрямо неразложимые алгебры из $V(\Delta)$ принадлежат $\mathsf{HS}(\mathcal{A})$. Ясно, что $V(\Delta)$ содержит только конечное (с точностью до изоморфизма) число подпрямо неразложимых алгебр и все эти алгебры конечны.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

3) $\Rightarrow$ 1). В [12] доказано, что если конгруэнц $\wedge$-полудистрибутивное многообразие, заданное в конечном языке, содержит сколь угодно большие конечные подпрямо неразложимые алгебры, то оно содержит бесконечную подпрямо неразложимую алгебру. Многообразие называется конгруэнц $\wedge$-полудистрибутивным, если решетка конгруэнций каждой алгебры данного многообразия удовлетворяет следующему квази-тождеству:

$$x \wedge y = x \wedge z \quad \Rightarrow \quad x \wedge y = x \wedge (y \vee z).$$

Очевидно, что конгруэнц-дистрибутивное многообразие $V(\Delta)$ является конгруэнц $\wedge$-полудистрибутивным, и мы можем применить к нему результат из [12].

Следовательно, многобразие $V(\Delta)$ резидуально $< n$ для некоторого n. Поскольку язык $V(\Delta)$ конечен, оно содержит лишь конечное (с точностью до изоморфизма) число подпрямо неразложимых алгебр. Произведение этих алгебр будет порождать $V(\Delta)$.

$\square$

Теорема 5.2. *Пусть Δ — нормальное расширение логики N^{Un} (N^*). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Логика Δ таблична;*
(2) *Логика Δ сильно полна относительно некоторого класса конечных Un-шкал (шкал Раутли).*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\Delta = L\mathcal{A}$ для конечной Un-алгебры $\mathcal{A}$. Рассмотрим Un-шкалу $\mathcal{W}^{\mathcal{A}}$. Согласно предложению 3.22 верно $\Delta = L\mathcal{W}^{\mathcal{A}}$. Докажем, что логика Δ сильно полна относительно одно-элементного класса $\{\mathcal{W}^{\mathcal{A}}\}$. Пусть $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$. Тогда $(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi \in \Delta$ для некоторых $\psi_1, \ldots, \psi_n$ из Γ. Следовательно, $\mathcal{W}^{\mathcal{A}} \vDash (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi$, откуда легко следует, что $\Gamma \vDash_{\mathcal{W}^{\mathcal{A}}} \varphi$.

Теперь предположим, что $\Gamma \vDash_{\mathcal{W}^{\mathcal{A}}} \varphi$. Пусть $\mathcal{K} = \{\mathcal{M}_\mu \mid \mu$ — модель над $\mathcal{W}^{\mathcal{A}}\}$. Согласно предложению 2.7 для любых $\mathcal{M}_\mu \in \mathcal{K}$ и $w \in W^{\mathcal{A}}$, если $\mathcal{M}_\mu \vDash ST_x(\psi)[w \leftarrow x]$ для всех $\psi \in \Gamma$, то $\mathcal{M}_\mu \vDash ST_x(\varphi)[w \leftarrow x]$. Иными словами, множество формул $ST_x(\Gamma) \cup \{\neg ST_x(\varphi)\}$, где $ST_x(\Gamma) = \{ST_x(\psi) \mid \psi \in \Gamma\}$, не выполнимо в классе моделей $\mathcal{K}$. Докажем, что найдется конечное подмножество Γ_0 в Γ такое, что множество $ST_x(\Gamma_0) \cup \{\neg ST_x(\varphi)\}$ не выполнимо в $\mathcal{K}$.

Пусть $J = \{\Gamma_0 \mid \Gamma_0$ — конечное подмножество в $\Gamma\}$. Предположим, что для каждого $\Gamma_0 \in J$ найдутся модель $\mathcal{M}^{\Gamma_0} \in \mathcal{K}$ и мир $w_{\Gamma_0} \in W^{\mathcal{A}}$ такие, что $\mathcal{M}^{\Gamma_0} \vDash ST_x(\Gamma_0) \cup \{\neg ST_x(\varphi)\}[w_{\Gamma_0} \leftarrow x]$. Как и в стандартном доказательстве теоремы компактности мы можем построить ультрапроизведение $\mathcal{U} = \prod_{\Gamma_0 \in J} \mathcal{M}^{\Gamma_0}/U$ такое, что множество $ST_x(\Gamma) \cup \{\neg ST_x(\varphi)\}$ выполнимо в $\mathcal{U}$. Для каждых $i \in \omega$ и $\mathcal{M}_\mu \in \mathcal{K}$ выполнено $\mathcal{M}^{\Gamma_0} \vDash \forall x \forall y((P_i(x) \wedge O(x,y)) \to P_i(y))$ ввиду того, что $v(p_i)$ — конус относительно $\subseteq$, где v — оценка модели μ. По теореме Лося заключаем, что $\mathcal{U} \vDash \forall x \forall y((P_i(x) \wedge O(x,y)) \to P_i(y))$ для всех $i \in \omega$. Припишем каждому миру $w \in W^{\mathcal{A}}$ переменную x_w и обозначим через $D(\mathcal{W}^{\mathcal{A}})$ экзистенциальное замыкание следующей конъюнкции:

$$\bigwedge\{O(p_u, p_w) \mid u, w \in W^{\mathcal{A}}, u \subseteq w\} \wedge \bigwedge\{\neg O(p_u, p_w) \mid u, w \in W^{\mathcal{A}}, u \not\subseteq w\} \wedge$$

$$\bigwedge\{A(p_u, p_w) \mid u, w \in W^{\mathcal{A}}, uR^{\mathcal{A}}w\} \wedge \bigwedge\{\neg A(p_u, p_w) \mid u, w \in W^{\mathcal{A}}, \neg(uR^{\mathcal{A}}w)\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{M}_\mu \vDash D(\mathcal{W}^{\mathcal{A}})$ для всех $\mathcal{M}_\mu \in \mathcal{K}$. Следовательно, $\mathcal{U} \vDash D(\mathcal{W}^{\mathcal{A}})$. Выполнимость рассмотренных выше предложений в ультрапроизведении $\mathcal{U}$ гарантирует, что $\mathcal{U}$ изоморфно некоторой модели из $\mathcal{K}$, что противоречит невыполнимости множества формул $ST_x(\Gamma) \cup \{\neg ST_x(\varphi)\}$ в классе $\mathcal{K}$. Таким образом, множество $ST_x(\Gamma_0) \cup \{\neg ST_x(\varphi)\}$ не выполнимо в классе $\mathcal{K}$ для некоторого $\Gamma_0 \in J$. Из этого факта и предложения 2.7 следует, что $\mathcal{W}^{\mathcal{A}} \vDash \bigwedge \Gamma_0 \to \varphi$, т.е. $\bigwedge \Gamma_0 \to \varphi \in \Delta$ и $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$.

2)$\Rightarrow$ 1). Пусть логика Δ — сильно полна относительно класса $\mathcal{K}$ конечных Un-шкал. Для произвольной функции $f : \omega^2 \to \omega$ определим множество формул

$$X_f = \{(-\neg)^{f(i,j)}(p_i \leftrightarrow p_j) \to p_0\}.$$

Если $\mu = \langle \mathcal{W}, v \rangle$ — модель над конечной шкалой $\mathcal{W} \in \mathcal{K}$, то $v(p_i) = v(p_j)$ для некоторых $i, j \in \omega$, откуда $\mu \vDash (-\neg)^{f(i,j)}(p_i \leftrightarrow p_j)$. Следовательно, $\mu \vDash X_f$ влечет $\mu \vDash p_0$. Мы доказали, что $X_f \vDash_{\mathcal{K}} p_0$.

Предположим, что $\mathcal{A}$ — бесконечная подпрямо неразложимая алгебра из $V(\Delta)$, и a_0 — опремум алгебры $\mathcal{A}$. Пусть a_i, $i \in \omega$ — последовательность попарно различных элементов алгебры $\mathcal{A}$. Для $i \neq j$ верно $a_i \leftrightarrow a_j \neq 1$. Следовательно, по предложению 3.17 выполняется $(-\neg)^{f(i,j)}(a_i \leftrightarrow a_j) \leq a_0$ для некоторого $f(i,j) \in \omega$. Пусть v — $\mathcal{A}$-оценка такая, что $v(p_i) = a_i$. Тогда $v(\psi) = 1$ для всех $\psi \in X_f$ и $v(p_0) \neq 1$. Это доказывает $X_f \not\vDash_{\Delta} p_0$, что противоречит $X_f \vDash_{\mathcal{K}} p_0$. Таким образом, многообразие $V(\Delta)$ не содержит бесконечных подпрямо неразложимых алгебр. По предложению 5.1 заключаем, что логика Δ таблична.

Случай, когда логика полна относительно класса конечных шкал Раутли рассматривается аналогично.

□

References

[1] P. Blackburn, J. van Benthem, *Modal Logic: A Semantic Perspective*, ETHICS, **98** (1988), 501–517.

[2] M. Božić, K. Došen, *Models for normal intuitionistic modal logics*, Studia Logica, **43** (1984), 217–245. MR0782862

[3] J. Berman, *Distributive lattices with an additional unary operation*, Aequationes Mathematicae, **16** (1977), 165–171. MR0480238

[4] S. Burris, H. P. Sankappanavar. *A course in universal algebra.* Graduate Texts in Math., **78**, New York, Springer, 1981. MR0648287

[5] P. Cabalar, S.P. Odintsov, D. Pearce, *Logical foundations of well-founded semantics*, in: P. Doherty et al. (eds.) Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the 10th International Conference (KR2006), AAAI Press, Menlo Park, California, 2006, 25–36.

[6] A. Chagrov, M. Zakharyaschev. *Modal logic.* Clarendon Press, Oxford, 1997. MR1464942

[7] K. Dosen, *Negative modal operators in intuitionistic logic*, Publication de l'Instutute Mathematique, Nouv. Ser., **35** (1984), 3–14. MR0779614

[8] K. Dosen, *Negation as a modal operator*, Reports on Mathematical Logic, **20** (1986),15–28. MR0881161

[9] K. Dosen, *Negation in the light of modal logic*, in: D. Gabbay et al (eds.), What is negation? Appl. Log. Ser. 13. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, (1999), 77–86. MR1786102

[10] S. A. Drobyshevich, *A hybrid calculus for logic N^*: residual finiteness and decidability*, Algebra and Logic, **50** (2011), 245–256. MR2882199

[11] W. Dziobiak, Strong completeness with respect to finite Kripke models, Studia Logica, **40**, No.3 (1981), 249–252. MR0665719

[12] K.A. Kearnes, R. Willard, *Residually finite, congruence meet semi-distributive varieties of finite type have a finite residual bound*, Proceedings of the American Mathematical Society, **127**, No.10 (1999), 2841–2850. MR1636966

[13] S.P. Odintsov, Combining intuitionistic connectives and Routley negation, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **7** (2010), 21–41. MR2586672

[14] R. Routley, V. Routley, *The semantics of first degree entailment*, Noûs, **6** (1972), 335–359. MR0505279

[15] R. Sylvan, *Variations on Da Costa C Systems and Dual-Intuitionistic Logics I. Analyses of C_ω and CC_ω*, Studia Logica **49** (1990), 47–65. MR1078438

[16] A. Urquhart, *Distributive lattices with a dual homomorphic operation*, Studia Logica **38** (1979), 201–209. MR0544616

[17] D. Vakarelov, *Theory of Negation in Certain Logical Systems. Algebraic and Semantical Approach*, Ph.D. dissertation, University of Warsaw, 1976.

[18] D. Vakarelov, *The non-classical negation in the works of Helena Rasiowa and their impact on the theory of negation*, Studia Logica, **84** (2006), 105–127. MR2271290

[19] F. Wolter, *Superintuitionistic companions of classical modal logics*, Studia Logica, **58** (1997), 229–259. MR1439019

Сергей Павлович Одинцов
Институт математики им. С.Л. Соболева,
пр. Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: odintsov@math.nsc.ru

Сергей Андреевич Дробышевич
Институт математики им. С.Л. Соболева,
пр. Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: drobs@math.nsc.ru