S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 109–112 (2013) УДК 517.43
MSC 47E05

О САМОСОПРЯЖЕННЫХ КОММУТИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ РАНГА ДВА

В.Н. ДАВЛЕТШИНА

Abstract. Commutativity equations for self-adjoint rank two differential operators of orders 4 and $4g+2$ are studied in this paper. New nontrivial examples of such operators with smooth coefficients are constructed.

Keywords: commuting differential operators.

1. Введение

Совместные собственные функции обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{j=0}^{m} q_j(x)\partial_x^j$$

образуют пучок без кручения над спектральной кривой. *Рангом* пары L_n, L_m называется ранг этого пучка. Операторы ранга один явно находятся в терминах тэта-функций многообразий Якоби спектральных кривых (см. [1]). Коэффициенты таких операторов являются мероморфными функциями по x. Задача нахождения операторов ранга больше 1 не решена. В случае эллиптических спектральных кривых операторы ранга два найдены Кричевером и Новиковым [2], операторы ранга три найдены Моховым [3]. Кроме того в [4]–[7] построены примеры операторов рангов 2 и 3, отвечающие спектральным кривым родов 2,3,4. До недавнего времени примеров операторов ранга больше один, отвечающих спектральным кривым рода больше 4 не было известно. Необходимо также отметить, что классификационная теорема для коммутативных колец

Davletshina, On self-adjoint commuting differential operators of rank two.

Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-33058, а также программой по поддержке ведущих научных школ №. НШ-544.2012.1.

Поступила 15 января 2013 г., опубликована 18 февраля 2013 г.

обыкновенных дифференциальных операторов произвольного ранга получена Кричевером [8].

В [9] изучались пары коммутирующих операторов ранга два L_4, L_{4g+2}, спектральная кривая Γ которых задается уравнением

$$w^2 = F_{2g+1}(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \dots + c_0.$$

По лемме Бурхналла–Чаунди L_4, L_{4g+2} удовлетворяют уравнению

$$(L_{4g+2})^2 = F_{2g+1}(L_4).$$

Совместная собственная функция ψ

$$L_4\psi = z\psi, \quad L_{4g+2}\psi = w\psi$$

удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\psi^{''} - \chi_1(x,P)\psi^{'} - \chi_0(x,P)\psi = 0, \quad P = (z,w) \in \Gamma,$$

где χ_0, χ_1 — рациональные функции на Γ. Оператор L_4 формально самосопряжен тогда и только тогда, когда выполнено тождество

$$\chi_1(x,P) = \chi_1(x,\sigma P),$$

где σ — инволюция на Γ, $\sigma(z,w) = (z,-w)$ [9]. Предположим, что L_4 самосопряжен, т.е.

$$L_4 = L_4^* = (\partial_x^2 + V(x))^2 + W(x),$$

где V, W — некоторые функции, тогда справедлива (см. [9])

Теорема 1. *Функции χ_0 и χ_1 имеют вид*

$$\chi_0 = -\frac{Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - V, \qquad \chi_1 = \frac{Q_x}{Q},$$

где Q — полином степени g по z

$$Q = z^g + \alpha_{g-1}(x)z^{g-1} + \ldots + \alpha_0(x), \tag{1}$$

$\alpha_i(x)$ — некоторые функции. Полином Q удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} 4F_g(z) = 4(z-W)Q^2 - 4V(Q_x)^2 + (Q_{xx})^2 - 2Q_xQ_{xxx}+ \\ +2Q(2V_xQ_x + 4VQ_{xx} + Q_{xxxx}). \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнение (2) эквивалентно уравнениям Кричевера на параметры Тюрина полустабильных расслоений. Оператор L_4 коммутирует с оператором L_{4g+2} тогда и только тогда, когда существует Q, удовлетворяющий (2).

В [9] с помощью теоремы 1 построены первые примеры коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающие спектральным кривым произвольного рода: оператор

$$L_4 = (\partial_x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^2 + g(g+1)\alpha_3x$$

коммутирует с оператором L_{4g+2}. Операторы L_4, L_{4g+2} задают коммутативную подалгебру в первой алгебре Вейля. Действие группы автоморфизмов алгебры Вейля на L_4, L_{4g+2} изучались в [10].

В этой работе изучается уравнение (2). Построены новые решения (2) для произвольного g. Эти решения приводят к новым примерам коммутирующих операторов.

Теорема 2. *Оператор*
$$L_4 = (\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0)^2 + g(g+1)\alpha_1 e^x$$
коммутирует с дифференциальным оператором L_{4g+2} *порядка* $4g+2$.

Замечательно, что коэффициенты операторов из теоремы 2 являются гладкими функциями, выраженными через экспоненты. Существование коммутирующих операторов такого простого вида — это полная неожиданность.

2. Доказательство теоремы 2

Продифференцируем (2) по x и поделим на Q, получим линейное уравнение на Q
$$Q_{xxxxx} + 4VQ_{xxx} + 6V_xQ_{xx} + 2Q_x(2z - 2W + V_{xx}) - 2QW_x = 0. \tag{3}$$
Будем искать решение уравнения (3) в виде
$$Q = f_g(z)e^{gx} + f_{(g-1)}(z)e^{(g-1)x} + \ldots + f_0(z), \tag{4}$$
с
$$V(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_0, \quad W(x) = g(g+1)\alpha_1 e^x.$$
Подставим (4) в (3). Получим
$$h_g(z)e^{gx} + \ldots + h_1(z)e^x = 0, \tag{5}$$
где
$$h_s(z) = -2\alpha_1 f_{s-1}(z)(2s-1)(g^2 + g - s^2 + s) + f_s(z)s(4\alpha_0 s^2 + s^4 + 4z).$$
Отметим, что в силу выбора V и W в (5) не содержится слагаемых вида $h_0(z)$ и $h_{g+1}(z)e^{(g+1)x}$. Из уравнений
$$h_1 = \cdots = h_g = 0$$
находим
$$f_{s-1} = \frac{f_s s(4\alpha_0 s^2 + s^4 + 4z)}{2\alpha_1(2s-1)(g^2 + g - s^2 + s)}, \quad 1 \le s \le g.$$
Таким образом, мы выражаем $f_0, \ldots, f_{g-1}$ через f_g. Выбрав в качестве f_g подходящую константу, мы получаем решение Q уравнения (3) (а следовательно, и (2)) в виде (1). Теорема 2 доказана.

Укажем уравнения спектральных кривых, а также операторы, коммутирующие с L_4, при $g = 1, 2$.

1. Пусть $g = 1$. Тогда
$$Q = z + \alpha_0 + \alpha_1 e^x + \frac{1}{4},$$
$$\Gamma : w^2 = \frac{1}{16} z(1 + 4\alpha_0 + 4z)^2,$$
$$L_6 = \partial_x^6 + 3\alpha_1 e^x \partial_x^4 + 6\alpha_1 e^x \partial_x^3 + (\frac{1}{4} + \alpha_0 - 3\alpha_0^2 + \alpha_1(10 + 3\alpha_1 e^x)e^x)\partial_x^2 + \alpha_1(7 + 6\alpha_1 e^x)e^x \partial_x +$$
$$\frac{1}{4}\alpha_1(15 - 8\alpha_0 - 12\alpha_0^2 + 32\alpha_1 e^x + 4\alpha_1^2 e^{2x})e^x.$$

2. Пусть $g = 2$. Тогда
$$Q = z^2 + \frac{1}{4}(20\alpha_0 + 12\alpha_1 e^x + 17)z + 1 + 4\alpha_0^2 + 12\alpha_1 e^x + 9\alpha_1^2 e^{2x} + \alpha_0(5 + 12\alpha_1 e^x),$$

$$\Gamma : w^2 = \frac{1}{16} z(4 + z + 4\alpha_0)^2 (1 + 4z + 4\alpha_0)^2.$$

Из-за громоздкости формул мы приведем оператор L_{10}, коммутирующий с L_4, только при $\alpha_0 = 0$

$$L_{10} = \partial_x^{10} + 5\alpha_1 e^x \partial_x^8 + 20\alpha_1 e^x \partial_x^7 + (\frac{17}{4} + 5\alpha_1(13 + 2\alpha_1 e^x)e^x)\partial_x^6 + 5\alpha_1(25 + 12\alpha_1 e^x)\times$$

$$e^x \partial_x^5 + \frac{5}{4}\alpha_1(157 + 188\alpha_1 e^x + 8\alpha_1^2 e^{2x})e^x \partial_x^4 + \frac{5}{2}\alpha_1(83 + 216\alpha_1 e^x + 24\alpha_1^2 e^{2x})e^x \partial_x^3 + \frac{1}{4}(4 +$$

$$745\alpha_1 e^x + 3475\alpha_1^2 e^{2x} + 860\alpha_1^3 e^{3x} + 20\alpha_1^4 e^{4x})\partial_x^2 + \frac{5}{2}\alpha_1(40 + 327\alpha_1 e^x + 150\alpha_1^2 e^{2x} +$$

$$8\alpha_1^3 e^{3x})e^x \partial_x + \frac{1}{4}\alpha_1(175 + 1865\alpha_1 e^x + 1475\alpha_1^2 e^{2x} + 180\alpha_1^3 e^{3x} + 4\alpha_1^4 e^{4x})e^x.$$

Отметим, что в этих примерах спектральная кривая — это сфера с двойными точками. По-видимому, это верно для любого g.

Список литературы

[1] И.М. Кричевер *Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.* Функц. анализ и его прил. **11**:1, (1977), 15–31. Zbl 0368.35022, Zbl 0346.35028

[2] И.М. Кричевер, С.П. Новиков. *Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.* Успехи Мат. Наук. **35**:6, (1980), 47–68. MR0601756

[3] О.И. Мохов. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **53**:6, (1989), 1291–1315. MR1039965

[4] А.Е. Миронов. *Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два.* Матем. сб., **195**:5, (2004), 103–114. MR2091641

[5] А.Е. Миронов. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2.* Функц. анализ и его прил., **39**:3, (2005), 91–94. MR2174612

[6] А.Е. Миронов. *О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2.* Сибирские электронные матем. изв., **6**, (2009), 533–536. MR2586707

[7] D. Zuo. *Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2.* SIGMA **8**, (2012), 044. MR2958986

[8] И.М. Кричевер. *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов* Функц. анализ и его прил., **12**:3, (1978), 20–31 . MR0509381

[9] A.E. Mironov. *Self–adjoint commuting ordinary differential operators.* arxiv: 1107.3356.

[10] O.I. Mokhov. *On commutative subalgebras of the Weyl algebra that are related to commuting operators of arbitrary rank and genus.* arxiv: 1201.5979.

Давлетшина Валентина Николаевна
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: v.davletshina@gmail.com