S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 10, стр. 113–122 (2013)* УДК 517.9
MSC 52C07

# О РЕШЕТКАХ ДАРБУ–ЕГОРОВА В $\mathbb{R}^n$

Э.И. Шамаев

Abstract. In this article we construct discrete analogues of orthogonal curvilinear coordinate systems of Egorov type in $\mathbb{R}^n$ — Darboux-Egorov lattices by algebro-geometric methods.

**Keywords:** Darboux-Egorov lattices, algebro-geometric methods.

## 1. Введение

Одной из центральных задач дифференциальной геометрии в XIX в. была задача построения и классификации ортогональных криволинейных систем координат в $\mathbb{R}^n$ [1]. Интерес к ортогональным координатам появился вновь в 90-х годах прошлого века в связи с приложениями в интегрируемых системах гидродинамического типа [2] и классификации массивных топологических моделей теории поля [3].

Широкий класс ортогональных систем координат был построен Захаровым с помощью метода одевания [4] и Кричевером с помощью конструкции функций Бейкера–Ахиезера [5]. Подход Кричевера позволяет строить системы координат, выражаемые через тета-функции спектральных кривых. В [6] показано, что в предельном случае, когда спектральная кривая становится приводимой рациональной кривой, конструкция Кричевера дает ортогональные системы координат выраженные через элементарные функции.

Напомним, что диагональная метрика

$$ds^2 = H_1^2(du^1)^2 + \ldots + H_n^2(du^n)^2$$

Shamaev, E.I., On Darboux-Egorov lattices.

© 2013 Shamaev E.I.

The work is partly supported by the grants 12-01-33058 of Russian Foundation for Basic Research, NSh-544.2012.1 of President Grants for Government Support the Leading Scientific Schools of the Russian Federation.

*Received February, 15, 2013, published February, 20, 2013.*

в $\mathbb{R}^n$ называется *метрикой Дарбу–Егорова*, если

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}, \tag{1}$$

где $\beta_{ij}$ — коэффициенты вращения, $\beta_{ij} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial u^i}$.

Цеслиньский, Долива и Сантини [7] предложили в качестве дискретного аналога ортогональных криволинейных систем координат в $\mathbb{R}^n$ рассматривать решетки

$$x : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n$$

такие, что каждый элементарный четырехугольник с вершинами

$$x(u),\ T_i x(u),\ T_j x(u),\ T_i T_j x(u),\ u \in \mathbb{Z}^n, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j,$$

где

$$T_i x(u^1, \dots, u^i, \dots, u^n) = x(u^1, \dots, u^i + 1, \dots, u^n),$$

является вписанным в некоторую окружность. Такие решетки называются *циркулярными.*

Ахметшин, Вольвовский и Кричивер [8] показали, что дискретным аналогом условия (1) является условие ортогональности следующих ребер

$$\langle \Delta_i x(u), \Delta_j^- x(u) \rangle = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j, \tag{2}$$

где $\Delta_i x(u) = T_i x(u) - x(u)$, $\Delta_j^- x(u) = T_i^{-1} x(u) - x(u)$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Решетки, удовлетворяющие условиям вписанности и ортогональности, называются *решетками Дарбу–Егорова* (см. рис. 1).

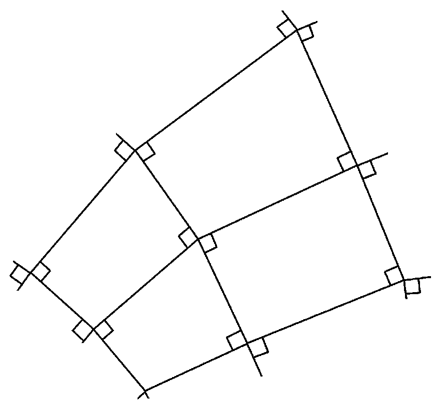

Рис. 1.

Условие *планарности* для решетки формулируется так: для всех $u \in \mathbb{Z}^n$ векторы $\Delta_i x$, $\Delta_j x$, $\Delta_i \Delta_i x$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, линейно зависимы. Заметим, что решетки со свойствами планарности и ортогональности удовлетворяют условию вписанности.

В [8] указаны алгебро-геометрические данные, отвечающие решеткам Дарбу–Егорова. В этой работе мы распространяем конструкцию работы [8] на случай сингулярных приводимых кривых, каждая компонента которых изоморфна $\mathbb{C}P^1$.

Автор благодарит А.Е. Миронова за полезные обсуждения.

## 2. Конструкция Ахметшина–Вольвовского–Кричевера

Пусть $\Gamma$ — гладкая алгебраическая кривая рода $g$ с мероморфной функцией $\lambda$ с простыми полюсами в точках $P_1, \dots, P_n$ и нулями в $Q_1, \dots, Q_n$. Обозначим через $P_1^{\pm}, \dots, P_n^{\pm}$ точки, удовлетворяющие уравнению $\lambda(P) = \pm 1$. Предположим, что на $\Gamma$ заданы два дивизора

$$D = \gamma_1 + \ldots + \gamma_{g+l-1}, \quad R = R_1 + \ldots + R_l.$$

Для $D$ в общем положении существует единственная функция $\psi(u, P)$, $u = (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{Z}^n$, $P \in \Gamma$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) в окрестности $P_i^+$, $i = 1, \dots, n$, функция $\psi$ имеет вид

$$(\lambda - 1)^{-u^i} \left(\xi^i_{0,+} + \xi^i_{1,+}(\lambda - 1) + \xi^i_{2,+}(\lambda - 1)^2 + \ldots\right)$$

и в окрестности $P_i^-$, $i = 1, \dots, n$, — вид

$$(\lambda + 1)^{u^i} \left(\xi^i_{0,-} + \xi^i_{1,-}(\lambda + 1) + \xi^i_{2,-}(\lambda + 1)^2 + \ldots\right);$$

2) вне точек $P_i^{\pm}$, $i = 1, \dots, n$, функция $\psi$ мероморфна с простыми полюсами в $\gamma_j$, $j = 1, \dots, g + l - 1$;

3) выполнены условия нормировки $\psi(u, R_i) = 1$, $i = 1, \dots, l$.

Функция $\psi$ называется функцией Бейкера–Ахиезера. Она может быть явно выражена через тета-функцию кривой $\Gamma$ [8].

**Теорема 1** (Ахметшин, Вольвовский, Кричевер)**.** *Пусть $\Gamma$ — гладкая алгебраическая кривая рода $g$ с голоморфной инволюцией $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ такой, что $\lambda \circ \sigma = -\lambda$.*

*Пусть дивизоры $D$ и $R$ не содержат неподвижные точки $\sigma$ и существует дифференциал $\Omega$ на $\Gamma$ такой, что*

$$\begin{aligned}(\Omega)_0 &= P_1 + \ldots + P_n + D + \sigma(D),\\ (\Omega)_\infty &= Q_1 + \ldots + Q_n + R + \sigma(R).\end{aligned}$$

*Тогда вектор-функция*

$$x(u) = \left(\sqrt{\mathrm{Res}_{Q_1}\Omega}\,\psi(u, Q_1), \dots, \sqrt{\mathrm{Res}_{Q_n}\Omega}\,\psi(u, Q_n)\right), u \in \mathbb{Z}^n, \tag{3}$$

*задает планарную решетку в $\mathbb{C}^n$, т.е. $\Delta_i x$, $\Delta_j x$, $\Delta_i\Delta_i x$, линейно зависимы над полем $\mathbb{C}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, и удовлетворяет условию*

$$\langle \Delta_i x(u), \Delta_j^- x(u)\rangle_{\mathbb{C}} = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad i \neq j,$$

*где $\langle (v^1, \dots, v^n), (w^1, \dots, w^n)\rangle_{\mathbb{C}} = v^1 w^1 + \ldots + v^n w^n$.*

В общем случае построенная решетка (3) является комплексной. В [8] также показано, что если $\Gamma$ допускает антиголоморфную инволюцию $\tau$ такую, что

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma,\ \tau(D) = D,\ \tau(R) = R,\ \tau(Q_i) = Q_i,\ \tau(P_j^+) = P_j^+, 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

и вещественны следующие выражения

$$\sqrt{\mathrm{Res}_{Q_1}\Omega}, \dots, \sqrt{\mathrm{Res}_{Q_n}\Omega},$$

то решетка (3) вещественна и является решеткой Дарбу-Егорова в $\mathbb{R}^n$.

## 3. Решетки Дарбу-Егорова, отвечающие сингулярным спектральным кривым

Пусть $\Gamma$ — приводимая алгебраическая кривая, каждая компонента которой $\Gamma_i$, $i = 1, \dots, n$, изоморфна $\mathbb{C}P^1$. Каждую компоненту $\Gamma_i$, $i = 1, \dots, n$, представим в виде $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ с комплексной координатой $z_i$ на аффинной части $\mathbb{C}$. Будем считать, что точки пересечения компонент выбраны так, что функция $\lambda : z_i \mapsto z_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, корректно определена на всем $\Gamma$. Это означает, что склеенными могут считаться только точки с совпадающими координатами. Также будем предполагать, что на $\Gamma$ определена голоморфная инволюция $\sigma : z_i \mapsto -z_i$. Следовательно, каждой ненулевой точке пересечения компонент соответствует симметричная точка пересечения. Пересечения компонент выбираем трансверсальными. Обозначим точку $\infty \in \Gamma_i$ через $P_i$ и $0 \in \Gamma_i$ — через $Q_i$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Заметим, что в окрестности любой точки $a \in \Gamma \backslash \{P_1, \dots, P_n\}$ функция $\lambda - a$ является локальным параметром.

Под дифференциалом $\Omega$ на $\Gamma$ мы будем понимать набор мероморфных дифференциалов $\Omega_i$ на $\Gamma_i$, $i = 1, \dots, r$, с полюсами во всех точках склейки $a \in \Gamma_i$ и $a \in \Gamma_j$ такими, что выполнены, так называемые, условия регулярности

$$\operatorname{Res}_a \Omega_i + \operatorname{Res}_a \Omega_j = 0.$$

Далее мы следует схеме Ахметшина-Вольвовского-Кричевера. Обозначим через $P_1^{\pm}, \dots, P_n^{\pm}$ точки $(\pm 1) \in \Gamma_1$, $\dots$, $(\pm 1) \in \Gamma_n$. Пусть на $\Gamma$ заданы два дивизора

$$D = \gamma_1 + \ldots + \gamma_{p+l-1}, \quad R = R_1 + \ldots + R_l,$$

где $p$ — количество точек пересечения компонент $\Gamma$, уменьшенное на $n-1$.

Для $D$ в общем положении существует единственная функция $\psi(u, P)$, $u = (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{Z}^n$, $P \in \Gamma$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) в окрестности $P_i^+$, $i = 1, \dots, n$, функция $\psi$ имеет разложение по локальному параметру $\lambda - 1$

$$(\lambda - 1)^{-u^i} \left(\zeta_0^i + \zeta_1^i(\lambda - 1) + \zeta_2^i(\lambda - 1)^2 + \ldots\right)$$

и в окрестности $P_i^-$, $i = 1, \dots, n$, — разложение

$$(\lambda + 1)^{u^i} \left(\xi_0^i + \xi_1^i(\lambda + 1) + \xi_2^i(\lambda + 1)^2 + \ldots\right);$$

2) вне точек $P_i^{\pm}$ функция $\psi$ мероморфна с простыми полюсами в $\gamma_j$, $j = 1, \dots, p + l - 1$;

3) выполнены условия нормировки $\psi(u, R_i) = 1$, $i = 1, \dots, l$.

Верна следующая теорема

**Теорема 2.** *Пусть на $\Gamma$ существует дифференциал $\Omega$ такой, что*

$$\begin{aligned} (\Omega)_0 &= P_1 + \ldots + P_n + D + \sigma(D), \\ (\Omega)_\infty &= Q_1 + \ldots + Q_n + R + \sigma(R). \end{aligned}$$

*Тогда вектор-функция*

$$x(u) = \left(\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_1} \Omega}\, \psi(u, Q_1), \dots, \sqrt{\operatorname{Res}_{Q_n} \Omega}\, \psi(u, Q_n)\right) \in \mathbb{C}^n, u \in \mathbb{Z}^n, \tag{4}$$

*задает планарную решетку в $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяет условию ортогональности*

$$\langle \Delta_i x(u), \Delta_j^- x(u) \rangle_{\mathbb{C}} = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad i \neq j.$$

*Если* $\Gamma$ *допускает антиголоморфную инволюцию* $\tau$ *такую, что* $\sigma\circ\tau=\tau\circ\sigma$, $\tau(D)=D$, $\tau(R)=R$, $\tau(Q_i)=Q_i$, $\tau(P_j^+)=P_j^+$ *и* $\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_1}\Omega}$, $\ldots$, $\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_n}\Omega}$ *— вещественны, то решетка (4) является решеткой Дарбу-Егорова в* $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что в условиях нормировки функции Бейкера–Ахиезера, вместо 1 можно выбрать любой набор $(d_1,\ldots,d_l)\in\mathbb{R}^l$ такой, что $|d_1|+\ldots+|d_l|\neq 0$.

## 4. Доказательство теоремы 2

Доказательство планарности (4) в случае гладкой алгебраической кривой [8], проходит и в случае приводимой алгебраической кривой. Напомним это доказательство. Для произвольной пары $i$ и $j$, $1\leqslant i,j\leqslant n$, $i\neq j$, рассмотрим разложение функции

$$y=\Delta_i\Delta_j\psi+\alpha_{ij}\Delta_i\psi+\beta_{ij}\Delta_j\psi \tag{5}$$

в точке $P_k^+$, $1\leqslant k\leqslant n$. Для $i$ и $j$ не равных $k$ верно разложение по локальному параметру $\lambda-1$

$$\Delta_i\Delta_j y=\Big((\Delta_i\Delta_j+\alpha_{ij}\Delta_i+\beta_{ij}\Delta_i)\zeta_0^i\Big)(\lambda-1)^{u^i}+\ldots.$$

Имеет место разложение

$$\Delta_k\psi=T_k\zeta_0^k(\lambda-1)^{-u^k-1}+(-\zeta_0^k+T_k\zeta_1^k)(\lambda-1)^{-u^k}+\ldots.$$

Для $j\neq k$ верно разложение

$$\Delta_k\Delta_j\psi=(T_k\Delta_j\zeta_0^k)(\lambda-1)^{-u^k-1}+(-\Delta_j\zeta_0^k+T_k\Delta_j\zeta_1^k)(\lambda-1)^{-u^k}+\ldots.$$

Поэтому при

$$\alpha_{kj}=-\frac{T_k\Delta_j\zeta_0^k}{T_k\zeta_0^k}\ \text{и}\ \beta_{ik}=-\frac{T_k\Delta_i\zeta_0^k}{T_k\zeta_0^k}$$

функция $y$ удовлетворяет условию 1 функции Бейкера–Ахизера в точках $P_i^+$.

Прямыми выкладками можно показать, что условие 1 выполнено также для всех точек $P_k^-$. Таким образом, $y$ является функцией Бейкера–Ахиезера и равна нулю в точках нормировки. Тогда из единственности функции Бейкера–Ахиезера следует, что $y(u,P)=0$ для всех $u\in\mathbb{Z}^n$ и $P\in\Gamma$. Следовательно, векторы $\Delta_i\Delta_j\psi$, $\Delta_i\psi$ и $\Delta_j\psi$ линейно зависимыми над полем $\mathbb{C}$.

Далее дадим доказательство ортогональности (4) относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$. Покажем, что для $i\neq j$ дифференциал

$$\Omega_{ij}=(\lambda-1)\Delta_i\psi(u,P)\Delta_j^-\psi(u,\sigma(P))\,\Omega.$$

имеет полюсы только в точках $Q_k$, $k=1,\ldots,n$, и точках склейки.

Полюсы $\lambda-1$ в точках $P$ сокращаются с нулями $\Omega$. Полюсы дифференциала $\Delta_i\psi\Delta_j^-\psi\,\Omega$ в точках $D+\sigma(D)$ и $R+\sigma(R)$ сокращаются с нулями самого дифференциала. При $k\neq i,j$ в точках $P_k^\pm$

$$\Delta_i\psi\Delta_j^-\psi=(\pm\lambda-1)^{-u^k}(\mp\lambda+1)^{u^k}\Big(\zeta_0^k\xi_0^k+O(\lambda-1)+\ldots\Big).$$

полюсы сокращаются. При $k=i$ или $k=j$ в точках $P_k^+$ функция

$$\Delta_k\psi\Delta_j^-\psi=(\lambda-1)^{-u^k-1}(-\lambda+1)^{u^k}\Big(T_k\zeta_0^k\xi_0^k+O(\lambda-1)+\ldots\Big).$$

имеет простой полюс, который сокращается с нулем функции $\lambda-1$.

Сумма всех вычетов мероморфных дифференциалов $\Omega_{ij}$ на $\Gamma$ равна нулю. Из условия регулярности в точках склейки следует, что следующая сумма вычетов также равна нулю

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{Q_k} \Omega_{ij} = -\sum_{k=1}^{n} \Delta_i \psi(u, Q_k) \cdot \Delta_j^- \psi(u, Q_k) \operatorname{Res}_{Q_k} \Omega$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \Delta_i x^k(u) \cdot \Delta_j^- x^k(u) = -\langle \Delta_i x(u), \Delta_j^- x(u) \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Таким образом, выполнено условие ортогональности.

Из определения $\lambda$ и инвариантности дивизоров $D$ и $R$ относительно инволюции $\tau$ следует, что условия определяющие $\psi(u, P)$ и $\overline{\psi(u, \tau(P))}$ совпадают. В силу единственности функции Бейкера–Ахиезера $\psi(u, P) = \overline{\psi(u, \tau(P))}$. Поэтому из вещественности $\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_1} \Omega}, \ldots, \sqrt{\operatorname{Res}_{Q_n} \Omega}$ следует $x(u) = \overline{x(u)}$ для $u \in \mathbb{Z}^n$.

## 5. Примеры

Пример 1 [6]. Пусть $\Gamma$ является объединением непересекающихся $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, каждая из которых изоморфна кривой $\mathbb{C}P^1$. Пусть $l = n$. Тогда $p + l - 1 = 0$. Положим

$$\lambda : z_j \mapsto z_j, \quad R_j \in \Gamma_j, \quad \psi(R_j) = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Дифференциал $\Omega$, заданный дифференциалами

$$\Omega_j = \frac{dz_j}{z_j(z_j^2 - R_j^2)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

удовлетворяет условиям теоремы 2. Функция Бейкера–Ахиезера равна

$$\psi_j(z_j) = \left( \frac{z_j + 1}{z_j - 1} \cdot \frac{R_j - 1}{R_j + 1} \right)^{u^j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Мы получаем решетку Дарбу-Егорова в $\mathbb{R}^n$

$$x(u) = \left( \left( \frac{1 - R_1}{1 + R_1} \right)^{u^1}, \ldots, \left( \frac{1 - R_n}{1 + R_n} \right)^{u^n} \right).$$

Пример 2. Пусть $\Gamma$ состоит из $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ изоморфных $\mathbb{C}P^1$. Пусть $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ пересекаются по двум точкам:

$$a \sim b, \quad (-a) \sim (-b), \quad \{a, -a\} \subset \Gamma_1, \quad \{b, -b\} \subset \Gamma_2$$

(см. рис. 2). Согласно нашей конструкции $a = b$. Имеем $p = 1$.

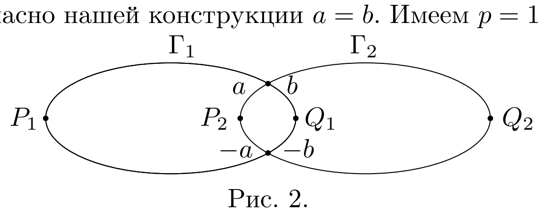


Рис. 2.

Положим

$$\lambda : z_j \mapsto z_j, \quad R_1 \in \Gamma_2, \quad \psi(R_1) = 1, \quad j = 1, 2.$$

Дифференциал $\Omega$ на $\Gamma$ задан следующими дифференциалами

$$\Omega_1 = -\frac{dz_1}{z_1(z_1^2 - a^2)}, \quad \Omega_2 = -\frac{(z_2^2 - \gamma_1^2)dz_2}{z_2(z_2^2 - a^2)(z_2^2 - R_1^2)}.$$

Условие регулярности $\Omega$ имеет вид

$$\mathrm{Res}_{\pm a}\,\Omega_1 = \frac{1}{2a^2} = -\,\mathrm{Res}_{\pm b}\,\Omega_2 = -\frac{(a^2 - \gamma_1^2)}{2a^2(a^2 - R_1^2)},$$

что влечет $R_1 = \pm\sqrt{2a^2 - \gamma_1^2}$. Условие вещественности следующих выражений

$$\sqrt{\mathrm{Res}_{Q_1}\,\Omega_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2}}, \quad \sqrt{\mathrm{Res}_{Q_2}\,\Omega_2} = \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a^2 R_1^2}}$$

выполнено для всех ненулевых вещественных $a$, $\gamma_1$ и $R_1$.

Функцию Бейкера–Ахиезера ищем в виде

$$\psi_1(z_1) = \left(\frac{z_1 + 1}{z_1 - 1}\right)^{u^1} f_0, \quad \psi_2(z_2) = \left(\frac{z_2 + 1}{z_2 - 1}\right)^{u^2} \left(g_0 + \frac{g_1}{z_2 - \gamma_1}\right).$$

Из условий $\psi_1(a) = \psi_2(a)$, $\psi_1(-a) = \psi_2(-a)$ и $\psi_2(R_1) = 1$ найдем $\psi$ и компоненты координат решетки

$$(x^1(u), x^2(u)) = \left(\frac{1 + t^2}{a} \cdot \frac{\mu^{u^1 - u^2}\nu^{u^2}}{1 + t^2\mu^{2u^1 - 2u^2}};\right.$$
$$\left.\frac{1}{R_1} \cdot \frac{\left(1 + t + (t - t^2)\mu^{2u^1 - 2u^2}\right)\nu^{u^2}}{1 + t^2\mu^{2u^1 - 2u^2}}\right),$$

где $\mu = \frac{1+a}{1-a}$, $\nu = \frac{1-R_1}{1+R_1}$, и $t = \frac{a+R_1}{a+\gamma_1}$.

Опишем геометрические свойства полученной решетки Дарбу-Егорова:

1) вершины $u^1 - u^2 = const$, $u^1, u^2 \in \mathbb{Z}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат.

2) ломаные $u^2 = const$, $u^1 \in \mathbb{Z}$ лежат на окружностях с диаметрами на отрезках с вершинами на оси $Oy$

$$\left(0; \frac{1}{R_1} \cdot (1 + t) \cdot \nu^{u^2}\right), \quad \left(0; \frac{1}{R_1} \cdot \frac{t - t^2}{1 + t^2} \cdot \nu^{u^2}\right)$$

3) дискретные координатные ломаные $u^1 = const$, $u^2 \in \mathbb{Z}$ лежат на кривых, параметризуемых с помощью $t \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{\alpha t}{1 + \beta t^2} t^{\log_\mu \nu}; \frac{\gamma + \delta t^2}{1 + \beta t^2} t^{\log_\mu \nu}\right)$$

для некоторых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

4) все прямые проходящие через точки $x(u^1, u^2)$ и $x(u^1, u^2 + 1)$, $u^2 = const$, $u^1 \in \mathbb{Z}$ пересекаются с осью ординат в точке $\left(0; \frac{1}{R_1} \cdot \frac{(1-\mu)(1+t)\nu}{\nu - \mu}\nu^{u^2}\right)$, не зависящей от $u^1 \in \mathbb{Z}$.

При $a = \frac{1}{10}$ и $\gamma_1 = \frac{1}{11}$ константы $\mu > 1$ и $0 < \nu < 1$ пример решетки приведен на рис. 3.

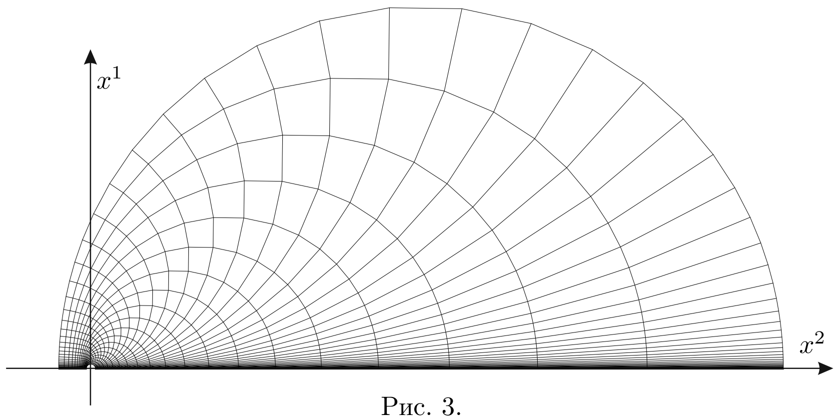


Рис. 3.

Пример 3. Пусть $\Gamma$ состоит из $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ и $\Gamma_3$ изоморфных $\mathbb{C}P^1$, пересекающихся как показано на рис. 4:

$$\pm a \sim \pm b, \quad \pm c \sim \pm d, \quad \pm a \in \Gamma_1, \quad \pm b, \pm c \in \Gamma_2, \quad \pm d \in \Gamma_3.$$

Имеем $p = 2$.

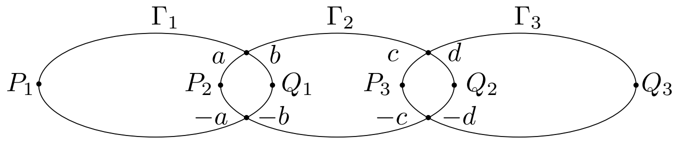


Рис. 4.

Положим

$$\lambda : z_j \mapsto z_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad R_1 \in \Gamma_3, \quad \psi(R_1) = 1, \quad \gamma_1 \in \Gamma_2, \gamma_2 \in \Gamma_3.$$

Из определения $\lambda$ следует, что $a = b$ и $c = d$.

Дифференциал $\Omega$ задан дифференциалами

$$\Omega_1 = -\frac{dz_1}{z_1(z_1^2 - a^2)}, \quad \Omega_2 = -\frac{(z_2^2 - \gamma_1^2)dz_2}{z_2(z_2^2 - b^2)(z_2^2 - c^2)}, \quad \Omega_3 = -\frac{(z_3^2 - \gamma_2^2)dz_3}{z_3(z_3^2 - d^2)(z_3^2 - R_1^2)}.$$

Условие регулярности $\Omega$ имеет вид

$$\operatorname{Res}_{\pm a} \Omega_1 = -\frac{1}{2a^2} = -\operatorname{Res}_{\pm b} \Omega_2 = \frac{(a^2 - \gamma_1^2)}{2a^2(a^2 - c^2)},$$
$$\operatorname{Res}_{\pm c} \Omega_2 = -\frac{(c^2 - \gamma_1^2)}{2c^2(c^2 - a^2)} = -\operatorname{Res}_{\pm d} \Omega_3 = \frac{(c^2 - \gamma_2^2)}{2c^2(c^2 - R_1^2)},$$

что влечет $a = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{3\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2R_1^2}$ и $c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\gamma_2^2 + 2R_1^2}$.

Условие вещественности следующих выражений

$$\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_1} \Omega_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2}}, \quad \sqrt{\operatorname{Res}_{Q_2} \Omega_2} = \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a^2c^2}}, \quad \sqrt{\operatorname{Res}_{Q_3} \Omega_3} = \sqrt{\frac{\gamma_2^2}{c^2R_1^2}}$$

выполнено для всех ненулевых вещественных $a$, $c$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ и $R_1$.

Тогда функция Бейкера–Ахиезера принимает вид

$$\psi_1(z_1) = \left(\frac{z_1 + 1}{z_1 - 1}\right)^{u^1} f_0, \quad \psi_2(z_2) = \left(\frac{z_2 + 1}{z_2 - 1}\right)^{u^2}\left(g_0 + \frac{g_1}{z_2 - \gamma_1}\right),$$

$$\psi_3(z_3) = \left(\frac{z_3+1}{z_3-1}\right)^{u^3}\left(h_0 + \frac{h_1}{z_3-\gamma_2}\right).$$

Из условий $\psi_1(\pm a) = \psi_2(\pm b)$, $\psi_2(\pm c) = \psi_3(\pm d)$, и $\psi_3(R_1) = 1$ найдем $\psi$ и компоненты координат решетки

$$(x^1(u), x^2(u), x^3(u)) =$$
$$\left(\frac{(-1)^{u^1}\kappa_1\rho^{u^2-u^1}\mu^{u^3-u^2}\nu^{u^3}}{ag(u^1,u^2,u^3)}; \frac{(-1)^{u^2}\kappa_2\left(\kappa_3+\kappa_4\rho^{2u^2-2u^1}\right)\mu^{u^3-u^2}\nu^{u^3}}{ac\gamma_1 g(u^1,u^2,u^3)};\right.$$
$$\left.\frac{(-1)^{u^3}\left(\kappa_5\left(\kappa_6+\kappa_7\rho^{2u^2-2u^1}\right)+\kappa_8\left(\kappa_9+\kappa_{10}\rho^{2u^2-2u^1}\right)\mu^{2u^3-2u^2}\right)\nu^{u^3}}{cR_1\gamma_2 g(u^1,u^2,u^3)}\right),$$

где $\rho = \frac{a+1}{a-1}$, $\mu = \frac{c+1}{c-1}$, $\nu = \frac{R_1-1}{R_1+1}$, $\kappa_1 = (\gamma_2 - R_1)(x_2 - x_4)(y_1 - y_2)$, $\kappa_2 = \gamma_1(\gamma_2 - R_1)(x_2-x_4)$, $\kappa_3 = -1-\gamma_1 y_2$, $\kappa_4 = 1+\gamma_1 y_1$, $\kappa_5 = \gamma_2(\gamma_2-R_1)(1+\gamma_2 x_4)$, $\kappa_6 = y_2-x_1$, $\kappa_7 = x_1 - y_1$, $\kappa_8 = \gamma_2(\gamma_2 - R_1)(1 + \gamma_2 x_2)$, $\kappa_9 = x_3 - y_2$, $\kappa_{10} = y_1 - x_3$, $x_1 = 1/(c-\gamma_1)$, $x_2 = 1/(c-\gamma_2)$, $x_3 = -1/(c+\gamma_1)$, $x_4 = -1/(c+\gamma_2)$, $y_1 = 1/(a-\gamma_1)$, $y_2 = -1/(a+\gamma_1)$ и

$$g(u^1,u^2,u^3) = (1+(\gamma_2-r)x_4)\left((y_2-x_1)+(x_1-y_1)\rho^{2u^2-2u^1}\right) -$$
$$(1+(\gamma_2-r)x_2)\left((y_2-x_3)+(x_3-y_1)\rho^{2u^2-2u^1}\right)\mu^{2u^3-2u^2}.$$

Часть решетки $-2 \leqslant u^1, u^2 \leqslant 10$, $u^3 = 6$ решетки $(x^1(u), x^2(u), x^3(u))$, построенной с $\gamma_1 = \frac{1}{5}$, $\gamma_2 = \frac{1}{7}$ и $R_1 = \frac{2}{5}$ приводим на рис. 5.

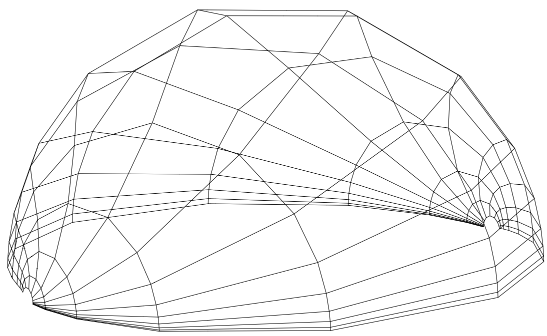

Рис. 5.

## Список литературы


[1] Darboux G., *Leçons sur le systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Paris: Gauthier-Villars, 1910. JFM 41.0674.04

[2] Царев С.П., *Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **54**, No. 5 (1990), 1048–1068. MR1086085

[3] Dubrovin B., *G*eometry of 2D topological field theories, Lecture Notes in Math., 1620, Berlin: Springer, 1995. P. 120-348.

[4] Zakharov V.E., *D*escription of the $n$-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type. I: Integration of the Lamé equations, Duke Math. J., **94** (1998), 103–139. MR1635908

[5] Krichever I.M., *A*lgebraic-geometric $n$-orthogonal curvilinear coor- dinate systems and the solution of associativity equations, Funct. Anal. Appl., **31**, No. 1 (1997), 25–39. MR1459831

[6] Mironov A.E., Taimanov I.A., *O*rthogonal curvilinear coordinate systems that correspond to singular spectral curves, Proc. Steklov Inst. Math. **255**, No. 4 (2006), 169–184. MR2301618

[7] Cieśliński J., Doliwa A., Santini P.M., *T*he integrable discrete analogues of orthogonal coordinate systems are multi-dimensional circular lattices, Phys. Lett. A., **235** (1997), 480–488. MR1480090

[8] Ахметшин А.А., Вольвовский Ю.С., Кричевер И.М., *Д*искретные аналоги метрик Дарбу-Егорова, Тр. МИАН, **225** (1999), 21–45. MR1725931

[9] Doliwa A., Santini P. M., *T*he symmetric, $D$-invariant and Egorov reductions of the quadrilateral lattice, Journal of Geometry and Physics, **36**, No. 1–2 (2000), 60–102. MR1783684

[10] Тайманов И.А., *С*ингулярные спектральные кривые в конечнозонном интегрировании, Успехи матем. наук, **66**, No. 1 (397) (2011), 111–150. MR2841687

[11] Кричевер И.М., *А*лгебро-геометрические $n$-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности, Функц. анал. и его прил., **31**, No. 1 (1997), 32–50. MR1459831

[12] Кричевер И.М., *М*етоды алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений, Успехи матем. наук, **32**, No. 6 (1977), 183–208. Zbl 0386.35002

[13] Mañas M., Alonso L.M., Medina E., *E*xplicit solutions of integrable lattices, Journal of Geometry and Physics, **42**, No. 3 (2002), 195–215. MR1904727

Эллэй Иванович Шамаев
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48
677000, Якутск, Россия
*E-mail address*: eshamaev@mail.ru