S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 123–140 (2013) УДК 514.132
MSC 52B15, 51M20, 51M25, 51M09

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ОКТАЭДР С mmm-СИММЕТРИЕЙ

Н.В. АБРОСИМОВ, Г.А. БАЙГОНАКОВА

Abstract. We consider hyperbolic ocahedra with mmm-symmetry. We provide an existence theorem for them and establish trigonometrical identities involving lengths of edges and dihedral angles (the sine-tangent rules). Then we apply the Schläfli formula to find the volume of prescribed octahedra in terms of dihedral angles explicitly.

Keywords: hyperbolic octahedron, mmm-symmetry, hyperbolic volume, existence theorem, sine-tangent rule.

1. Введение

Вычисление объема многогранника — это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в наши дни. В основном это связано с тем, что объем фундаментального многогранника является важнейшим геометрическим инвариантом трехмерного многообразия. В данной работе рассматриваются октаэдры в гиперболическом пространстве. Известно, например, что правильный гиперболический октаэдр с вершинами, лежащими на бесконечности, является фундаментальным многогранником для дополнения к зацеплению Уайтхеда, вложенного в трехмерную сферу. С другой стороны, гиперболическое многообразие минимального объема (многообразие Матвеева-Фоменко-Викса) и другие многообразия малого объема могут быть получены хирургиями Дена на зацеплении Уайтхеда, вложенного в трехмерную сферу.

Abrosimov, N.V., Baigonakova, G.A., Hyperbolic octahedron with mmm-symmetry.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 12-01-00210, 12-01-33058, 12-01-31006 и 13-01-00513), Советом по грантам при президенте (грнаты МК-4447.2012.1 и НШ-921.2012.1) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (соглашение № 8206).

Поступила 28 декабря 2012, опубликована 21 февраля 2013 г.

Таким образом, гиперболические октэдры могут служить фундаментальными многогранниками широкого класса многообразий, в том числе многообразий малого объема. Последние представляются особенно интересными, если рассматривать гиперболические многообразия, упорядоченные по возрастанию объема.

Один из первых результатов, касающихся вычисления объемов многогранников, принадлежит Тартальи (1499–1557 гг.). Он предложил алгоритм вычисления высоты евклидова тетраэдра по заданным длинам его ребер. Формула, выражающая объем тетраэдра через длины ребер, была получена Эйлером (см. [1], стр. 256). Обобщение этого результата для симплексов произвольной размерности известно как формула Кэли-Менгера (см. [2], стр. 124).

Теорема 1 (Эйлер)**.** *Пусть T — евклидов тетраэдр с длинами ребер d_{ij}, $1 \leq i < j \leq 4$. Тогда объем $V = V(T)$ задается формулой*

$$288\, V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

В приведенном соотношении объем выражается как корень квадратного уравнения, коэффициенты которого являются целочисленными полиномами от длин ребер. Удивительно, но этот результат может быть обобщен для произвольного евклидова многогранника. В 1996 И. Х. Сабитов [3] доказал соответствующую теорему. Год спустя Р. Коннелли, И. Х. Сабитов и Анке Вальц предложили несколько более простое доказательство указанной теоремы, использующее теорию перестановок алгебраических функций [4].

Теорема 2 (Сабитов, 1996; Коннелли, Сабитов, Вальц, 1997)**.** *Пусть P — евклидов многогранник с треугольными гранями и длинами ребер d_{ij}. Тогда объем $V(P)$ является корнем некоторого многочлена, коэффициенты которого зависят только от d_{ij}^2 и комбинаторного типа P.*

В гиперболическом и сферическом случаях ситуация более сложная, хотя отдельные частные результаты известны еще со времен Н. И. Лобачевского, Я. Больяи и Л. Шлефли. Так, объем бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) в гиперболическом пространстве был найден Н. И. Лобачевским [5] и Я. Больяи [6]. В сферическом случае объем ортосхемы впервые получен Л. Шлефли [7].

В последние 30 лет данное направление получило широкое развитие. Объем куба Ламберта и некоторых других многогранников получены Рут Келлерхальц [8], Д. А. Деревниным и А. Д. Медных [9], А. Ю. Весниным, А. Д. Медных и Дж. Паркером [10] и другими. Объемы гиперболических многогранников, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности, найдены Э. Б. Винбергом [11].

Общая формула объема компактного гиперболического тетраэдра впервые была получена в работе Гаетано Сфорца [12]. В недавней работе первого автора и А. Д. Медных [13] предложено новое простое доказательство формулы Сфорца. Подробнее про историю вычисления объемов неевклидовых тетраэдров, а также о проблеме Зейделя об объемах идеальных тетраэдров можно прочитать, например, в [13] или [14].

Интегральные формулы объемов сферических октаэдров с симметриями были получены в совместной работе первого автора, М. Годоя-Молины и А. Д. Медных [15]. Цель данной статьи — распростанить указанные результаты на гиперболический случай.

В настоящей работе рассматривается гиперболический октаэдр, обладающий mmm-симметрией, то есть зеркальной симметрией относительно трех взаимно ортогональных плоскостей, проходящих вдоль его реберных циклов. Предложен критерий существования октаэдра указанного типа в терминах двугранных углов. Получены интегральные формулы, выражающие объемы таких октаэдров через двугранные углы.

2. Условия существования

Рассмотрим произвольный компактный гиперболический тетраэдр T с тремя попарно ортогональными гранями (рис. 1). Оставшиеся (не прямые) двугранные углы T обозначим $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$. Отражениями в трех плоскостях, соответствующих взаимно ортогональным граням, получим восемь копий T, которые образуют компактный гиперболический октаэдр $\mathcal{O}$. Полученный октаэдр обладает зеркальной симметрией в трех взамно ортогональных плоскостях, проходящих через его реберные циклы, и имеет двугранные углы A, B и C. Следуя, например, [17] будем называть указанный тип симметрии mmm-симметрией.

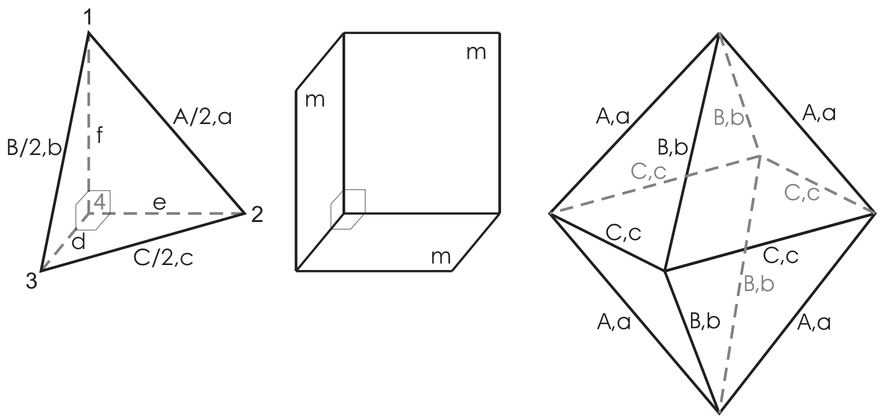

Рис. 1. Тетраэдр $T\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}\right)$, плоскости отражения и октаэдр $\mathcal{O}(A, B, C)$ с mmm-симметрией.

Проведем обратное построение. Путь $\mathcal{O}(A, B, C)$ — компактный гиперболический октаэдр с mmm-симметрией. По определению, $\mathcal{O}(A, B, C)$ допускает зеркальную симметрию относительно трех взаимно ортогональных плоскостей. Тогда плоскости симметрии делят $\mathcal{O}(A, B, C)$ на восемь компактных гиперболических тетраэдров, каждый из которых имеет три попарно ортогональные грани и оставшиеся (не прямые) двугранные углы, равные $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$. Таким образом, верно следующее замечание.

Замечание 1. Существование компактного гиперболического октаэдра $\mathcal{O}(A,B,C)$ с mmm-симметрией эквивалентно существованию компактного гиперболического тетраэдра $T\left(\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}\right)$ с тремя взаимно ортогональными гранями.

Следующая теорема представляет критерий существования компактного гиперболического октаэдра с mmm-симметрией в терминах двугранных углов.

Теорема 3. *Пусть имеется набор чисел $0 < A,B,C < \pi$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

(i) *Существует компактный гиперболический октаэдр $\mathcal{O}(A,B,C)$ с двугранными углами A,B,C, обладающий mmm-симметрией.*

(ii) *Выполнены неравенства*

$$1+\cos A+\cos B+\cos C>0$$
$$A+B>\pi,\ A+C>\pi,\ B+C>\pi$$

Доказательство

Пусть выполнено условие (i). Согласно замечанию 1 это означает, что существует компактный гиперболический тетраэдр $T\left(\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}\right)$ с двугранными углами $\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ (рис. 1). Матрица Грама такого тетраэдра имеет вид:

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\cos\frac{C}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\cos\frac{B}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\cos\frac{A}{2} \\ -\cos\frac{C}{2} & -\cos\frac{B}{2} & -\cos\frac{A}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим модель Лиувилля гиперболической геометрии в верхнем полупространстве $H^3=\{(x,y,z)|\,z>0\}$ с метрикой $ds^2=\dfrac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}$. Изометрией гиперболического пространства поместим вершину «4» тетраэдра T в точку с координатами $(0,0,1)$ так, чтобы одно ребро, выходящее из «4», было направлено вдоль оси Oz, а два оставшихся лежали в координатных плоскостях Oxz и Oyz (см. рис. 2).

По теореме косинусов для гиперболического тетраэдра (см., например, [16]) имеем

$$\cosh d=\frac{c_{34}}{\sqrt{c_{33}\,c_{44}}}\,,\quad \cosh e=\frac{c_{24}}{\sqrt{c_{22}\,c_{44}}}\,,\quad \cosh f=\frac{c_{14}}{\sqrt{c_{11}\,c_{44}}}\,, \tag{1}$$

где c_{ij} — алгебраическое дополнение ij-го элемента матрицы Грама G, то есть $c_{ij}=(-1)^{i+j}\det G_{ij}$, матрица G_{ij} получена из G вычеркиванием i-той строки и j-го столбца.

Прямыми вычислениями получим

$$c_{44}=1,\quad c_{33}=1-\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2},\quad c_{22}=1-\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{C}{2}$$
$$c_{11}=1-\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{B}{2},\quad c_{14}=\cos\frac{C}{2},\quad c_{24}=\cos\frac{B}{2},\quad c_{34}=\cos\frac{A}{2}\,.$$

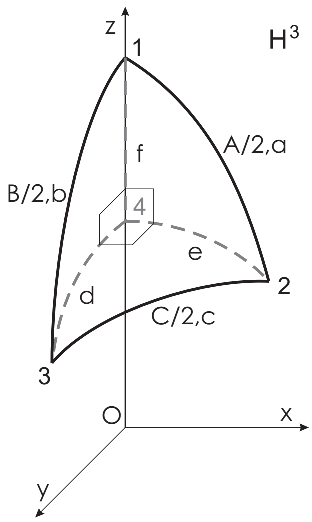

Рис. 2. Тетраэдр $T\left(\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}\right)$ в модели H^3.

Подставляя найденные выражения в равенства (1), с необходимостью имеем:

$$\begin{aligned} &1-\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{B}{2}>0,\\ &1-\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{C}{2}>0,\\ &1-\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}>0. \end{aligned} \tag{2}$$

Кроме того, возводя в квадрат любое из равеств (1), и учитывая, что по определению гиперболического косинуса

$$\cosh d>1,\quad \cosh e>1,\quad \cosh f>1,$$

получим

$$1-\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}<0.$$

Последнее неравенство эквивалентно

$$1+\cos A+\cos B+\cos C>0. \tag{3}$$

Преобразуем одно из найденных неравенств (2):

$$1-\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{B}{2}=1-\frac{1+\cos A}{2}-\frac{1+\cos B}{2}=\frac{-\cos A-\cos B}{2}>0$$

или

$$\cos A+\cos B<0.$$

Рассмотрим следующее неравенство

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}<0.$$

Поскольку $0 < A, B < \pi$, то $0 < \cos\dfrac{A-B}{2} \leq 1$. Поэтому значение $\cos\dfrac{A-B}{2}$ в неравенстве мы можем сократить:

$$\cos\frac{A+B}{2} < 0.$$

Последнее неравенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{\pi}{2} < \frac{A+B}{2} < \pi \quad \text{или} \quad A+B > \pi.$$

Преобразуя аналогичным образом оставшиеся неравенства из (2) и учитывая условие $0 < A, B, C < \pi$, получим, что система (2) эквивалентна неравенствам

$$A+B > \pi, \quad A+C > \pi, \quad B+C > \pi. \tag{4}$$

Таким образом, мы показали, что в условиях теоремы из (i) следует (ii). Покажем, что и обратное следствие верно.

Пусть имеется набор чисел $0 < A, B, C < \pi$ и выполнены неравенства (3) и (4). Тогда формулы (1) однозначно задают величины $d, e, f > 0$. Рассмотрим гиперболический тетраэдр $T\left(\dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2}, \dfrac{C}{2}\right)$ с тремя попарно ортогональными гранями в модели H^3 (см. рис. 2). По теореме Пифагора для гиперболических треугольников имеем

$$\cosh a = \cosh e \cosh f, \quad \cosh b = \cosh d \cosh f, \quad \cosh c = \cosh d \cosh e.$$

Таким образом, по длинам d, e, f однозначно находятся длины оставшихся ребер тетраэдра $T\left(\dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2}, \dfrac{C}{2}\right)$. Как известно (см., например, [11]), по найденным длинам ребер тетраэдр в H^3 восстанавливается однозначно, с точностью до изометрии. Согласно замечанию 1, последнее эквивалентно существованию компактного гиперболического октаэдра $\mathcal{O}(A, B, C)$ с mmm-симметрией. $\square$

3. Соотношения между длинами и углами

Рассмотрим октаэдр $\mathcal{O}$, обладающий mmm-симметрией, то есть зеркальной симметрией относительно трех взаимно ортогональных плоскостей, которые пересекают $\mathcal{O}$ вдоль его реберных циклов (рис. 1). Заметим, что в этом случае все восемь граней октаэдра попарно конгруэнтны. Обозначим длины ребер $\mathcal{O}$ через a, b, c, двугранные углы — через A, B, C, а плоские углы граней — через α, β, γ. В этих обозначениях в любой грани плоский угол α лежит против стороны длины a, а двугранный угол A заключен между гранями, пересекающимися по ребру длины a.

В евклидовом случае известна следующая теорема (см. [17]).

Теорема 4 (Галиулин, Михалев, Сабитов, 2004)**.** *Пусть $\mathcal{O} = \mathcal{O}(a, b, c, A, B, C)$ — евклидов октаэдр, обладающий mmm-симметрией. Тогда объем $V = V(\mathcal{O})$ может быть найден, как положительный корень уравнения*

$$9V^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2).$$

Чтобы найти объем октаэдра указанного типа в гиперболическом пространстве, нам потребуются соотношения между длинами его ребер и двугранными углами в форме правила синусов-тангенсов. Соответствующая теорема была получена в работе второго автора, М. Годоя-Молины и А. Д. Медных [18]. Для удобства читателя мы приводим ее с доказательством, чтобы в дальнейшем на него опираться.

Теорема 5 (Правило синусов-тангенсов)**.** *Пусть $\mathcal{O}(a,b,c,A,B,C)$ — гиперболический октаэдр, обладающий mmm-симметрией. Тогда выполняются следующие тригонометрические соотношения:*

$$\frac{\sin A}{\tanh a} = \frac{\sin B}{\tanh b} = \frac{\sin C}{\tanh c} = T = 2\,\frac{K}{L},$$

где K и L — положительные числа, которые определяются по формулам

$$K^2 = (xy-z)(yz-x)(xz-y), \quad L = 2\,xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1,$$

$$\text{и} \quad x = \cosh a, \quad y = \cosh b, \quad z = \cosh c.$$

Доказательство

Рассмотрим пересечение $\mathcal{O} = \mathcal{O}(a,b,c,A,B,C)$ со сферой достаточно малого радиуса с центром в одной из его вершин (рис. 3).

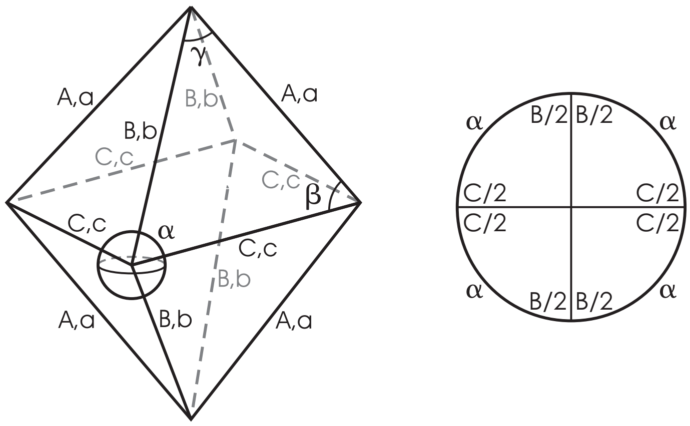

Рис. 3. Октаэдр $\mathcal{O}(a,b,c,A,B,C)$ и линк его вершины.

Полученное пересечение — это сферический четырехугольник с внутренними плоскими углами B, C, B, C. Так как исходный многогранник допускает mmm-симметрию, то соответствующий четырехугольник является сферическим ромбом со стороной α (рис. 3). Указанный ромб можно разбить на четыре сферических прямоугольных треугольника с углами $\frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ и гипотенузой длины α. Запишем вторую теорему косинусов для полученного сферического треугольника

$$\cos\frac{\pi}{2} = -\cos\frac{B}{2}\,\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\,\sin\frac{C}{2}\,\cos\alpha.$$

Выписывая аналогичные соотношения для линков оставшихся вершин и выражая в каждом из них косинус гипотенузы, получим

$$\cos\alpha = \cot\frac{B}{2}\,\cot\frac{C}{2}, \quad \cos\beta = \cot\frac{A}{2}\,\cot\frac{C}{2}, \quad \cos\gamma = \cot\frac{A}{2}\,\cot\frac{B}{2}. \tag{5}$$

Из приведенных соотношений непосредственно находим, что

$$\cot^2\frac{A}{2}=\frac{\cos\beta\,\cos\gamma}{\cos\alpha},\quad \cot^2\frac{B}{2}=\frac{\cos\alpha\,\cos\gamma}{\cos\beta},\quad \cot^2\frac{C}{2}=\frac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\cos\gamma}. \tag{6}$$

Полученные равенства связывают двугранные и плоские углы $\mathcal{O}$. С другой стороны, можно установить соотношения между длинами ребер и плоскими углами. Рассмотрим любую грань $\mathcal{O}$, она представляет собой гиперболический треугольник с углами α,β,γ и сторонами a,b,c. Запишем первую теорему косинусов для каждой из сторон

$$\begin{aligned}
\cosh a &= \cosh b\,\cosh c-\sinh b\,\sinh c\,\cos\alpha,\\
\cosh b &= \cosh a\,\cosh c-\sinh a\,\sinh c\,\cos\beta,\\
\cosh c &= \cosh a\,\cosh b-\sinh a\,\sinh b\,\cos\gamma.
\end{aligned}$$

Выражая косинусы плоских углов из последних соотношений, имеем

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\cosh b\,\cosh c-\cosh a}{\sinh b\,\sinh c},\\
\cos\beta &= \frac{\cosh a\,\cosh c-\cosh b}{\sinh a\,\sinh c},\\
\cos\gamma &= \frac{\cosh a\,\cosh b-\cosh c}{\sinh a\,\sinh b}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Вводя новые переменные

$$\begin{aligned}
x&=\cosh a, & y&=\cosh b, & z&=\cosh c,\\
X&=\cos A, & Y&=\cos B, & Z&=\cos C,
\end{aligned}$$

и подставляя выражения (7) в равенства (6), получим

$$\begin{aligned}
\cot^2\frac{A}{2}&=\frac{(xz-y)(xy-z)}{(x^2-1)(yz-x)},\\
\cot^2\frac{B}{2}&=\frac{(yz-x)(xy-z)}{(xz-y)(y^2-1)},\\
\cot^2\frac{C}{2}&=\frac{(yz-x)(xz-y)}{(z^2-1)(xy-z)}.
\end{aligned}$$

Из последних соотношений следует равенство

$$\sin A=\frac{4\,\cot\dfrac{A}{2}}{\cot^2\dfrac{A}{2}-1}=2\,\frac{K}{L}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=2\,\frac{K}{L}\tanh a,$$

где K и L — положительные числа, которые определяются по формулам

$$K^2=(xy-z)(yz-x)(xz-y),\quad L=2\,xyz-x^2-y^2-z^2+1.$$

Аналогично получим

$$\sin B=2\,\frac{K}{L}\tanh b\quad \text{и}\quad \sin C=2\,\frac{K}{L}\tanh c.\quad \square$$

Заметим, что в теореме синусов-тангенсов параметр T выражается через длины ребер октаэдра $\mathcal{O}$. Чтобы найти объем $\mathcal{O}$, необходимо выразить T через двугранные углы.

Лемма 1. *Величина T в теореме синусов-тангенсов удовлетворяет уравнению*
$$T^2 = \frac{(1+X)(1+Y)(1+Z)}{1+X+Y+Z},$$
где $X = \cos A,\ Y = \cos B,\ Z = \cos C$.

Доказательство

Следует отметить, что согласно критерию существования октаэдра с mmm-симметрией (теорема 3), величина $\dfrac{(1+X)(1+Z)(1+Z)}{(1+X+Y+Z)}$ всегда положительна.

Запишем вторую теорему косинусов для одной из граней октаэдра $\mathcal{O}$, имеем
$$\cosh a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\,\cos\gamma}{\sin\beta\,\sin\gamma}.$$

При помощи простейших тригонометрических тождеств получим
$$\coth^2 a = \frac{\cosh^2 a}{\cosh^2 a - 1} = \frac{(\cos\alpha + \cos\beta\,\cos\gamma)^2}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\,\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma - 1}.$$

Как и в (5) выразим косинусы плоских углов грани октаэдра $\mathcal{O}$ через его двугранные углы
$$\cos\alpha = \cot\frac{B}{2}\,\cot\frac{C}{2},\quad \cos\beta = \cot\frac{A}{2}\,\cot\frac{C}{2},\quad \cos\gamma = \cot\frac{A}{2}\,\cot\frac{B}{2}.$$

Подставляя последние выражения в предыдущее равенство, в результате простейших тригонометрических преобразований получим
$$\coth^2 a = \frac{(1+Y)(1+Z)}{(1-X)(1+X+Y+Z)},$$
где $X = \cos A,\ Y = \cos B,\ Z = \cos C$.

Тогда требуемое утверждение следует из равенства $T^2 = \coth^2 a\,\sin^2 A$, где $\sin^2 A = 1 - X^2 = (1+X)(1-X)$, имеем
$$T^2 = \frac{(1+X)(1+Z)(1+Z)}{1+X+Y+Z}. \quad \square$$

Из теоремы 5 и леммы 1 в частности следует, что гиперболический октаэдр с mmm-симметрией, полностью определяется своими двугранными углами, то есть $\mathcal{O} = \mathcal{O}(A,B,C)$.

4. Формулы объема

Одним из ключевых инструментов при получении формул объема в гиперболической геометрии служит формула Шлефли. Нам потребуется ее версия для выпуклых многогранников в размерности три.

Теорема 6 (Формула Шлефли)**.** *Рассмотрим семейство выпуклых многогрнников P в H^3, зависящих от одного или более параметров дифференцируемым образом и сохраняющих свою комбинаторную структуру. Тогда дифференциал объема $V = V(P)$ удовлетворяет уравнению*
$$-dV = \frac{1}{2}\sum_i \ell_i\,d\theta_i\,,$$
где суммирование проводится по всем ребрам P, ℓ_i обозначает длину i-го ребра, а θ_i — двугранный угол вдоль него.

В классической работе Шлефли [19] соответствующая формула была доказана для случая n-мерного сферического симплекса. В гиперболическом случае она была получена Х. Кнезером [20]. Подробнее см. также [11] и [21].

Теперь мы готовы доказать следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть* $\mathcal{O} = \mathcal{O}(a, b, c, A, B, C)$ *— гиперболический октаэдр с mmm-симметрией. Положим* $X = \cos A,\ Y = \cos B,\ Z = \cos C$ *и обозначим через* T *положительный корень уравнения* $T^2 = \dfrac{(1+X)(1+Y)(1+Z)}{1+X+Y+Z}$.

Тогда объем $V = V(\mathcal{O})$ *находится по следующим формулам:*

(i) *Если* $0 \le T < 1$, *то*

$$V = -\int\limits_0^{\tau} \log\left|\frac{(1-\cos t)(\cos A - \cos t)(\cos B - \cos t)(\cos C - \cos t)}{(1+\cos t)(\cos A + \cos t)(\cos B + \cos t)(\cos C + \cos t)}\right| dt,$$

где величина $\tau,\ 0 < \tau < \dfrac{\pi}{2}$, *находится из уравнения* $\sin\tau = T$.

(ii) *Если* $T = 1$, *то при* $C \le B \le A$

$$\frac{V}{2} = \int\limits_A^{\pi} \operatorname{arctanh}(\sin x)\, dx + \int\limits_B^{\pi} \operatorname{arctanh}(\sin x)\, dx - \int\limits_0^{C} \operatorname{arctanh}(\sin x)\, dx.$$

(iii) *Если* $T > 1$, *то*

$$\frac{V}{2} = \int\limits_{\theta}^{\pi/2} \left(\arctan\frac{1}{\tan\eta} + \arctan\frac{X}{\tan\eta} + \arctan\frac{Y}{\tan\eta} + \arctan\frac{Z}{\tan\eta}\right)\frac{d\eta}{\cos\eta},$$

где величина $\theta,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, *находится из уравнения* $\dfrac{1}{\cos\theta} = T$.

Согласно формуле Шлефли (теорема 6), функция объема должна удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -2\,a, \quad \frac{\partial V}{\partial B} = -2\,b, \quad \frac{\partial V}{\partial C} = -2\,c. \tag{8}$$

Для доказательства теоремы 7 достаточно в каждом из случаев $(i), (ii), (iii)$ проверить, что предложенная функция V является решением указанной системы уравнений, удовлетворяющим условию $V \to 0$ при $a = b = c \to 0$.

В простейшей геометрической ситуации, кода параметр $T = 1$, формула, выражающая объем в терминах длин ребер, была получена в работе второго автора, М. Годоя-Молины и А.Д. Медных [18]. В настоящей работе для указанного случая предлагается формула, выражающая объем через двугранные углы.

Для доказательства утверждения (i) нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть величина* T *в теореме синусов-тангенсов удовлетворяет неравенству* $T^2 < 1$. *Положим* $T = \sin t$, *где* $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$. *Тогда выполняется следующее равенство*

$$\frac{(1-\cos t)(\cos A - \cos t)(\cos B - \cos t)(\cos C - \cos t)}{(1+\cos t)(\cos A + \cos t)(\cos B + \cos t)(\cos C + \cos t)} = 1.$$

Доказательство леммы 2

Требуется доказать равенство

$$\frac{(1-\cos t)(X-\cos t)(Y-\cos t)(Z-\cos t)}{(1+\cos t)(X+\cos t)(Y+\cos t)(Z+\cos t)} = 1,$$

где $X = \cos A,\ Y = \cos B,\ Z = \cos C$.

Умножая на знаменатель, раскрывая скобки и приводя подобные, получим эквивалентное равенство

$$-2\cos t\,(XY + XZ + YZ + XYZ + (1 + X + Y + Z)\cos^2 t) = 0.$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$\cos^2 t = -\frac{XY + XZ + YZ + XYZ}{1 + X + Y + Z}$$

По лемме 1 имеем

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - T^2 =$$
$$= 1 - \frac{(1+X)(1+Y)(1+Z)}{1 + X + Y + Z} = -\frac{XY + XZ + YZ + XYZ}{1 + X + Y + Z}. \quad \square$$

Доказательство утверждения (i)

Рассмотрим функцию

$$H(t) = \frac{(1-\cos t)(\cos A-\cos t)(\cos B-\cos t)(\cos C-\cos t)}{(1+\cos t)(\cos A+\cos t)(\cos B+\cos t)(\cos C+\cos t)},$$

которая стоит под знаком модуля.

Согласно критерию существования октаэдра $\mathcal{O}(A,B,C)$ с mmm-симметрией (теорема 3),

$$A + B > \pi, \quad A + C > \pi, \quad B + C > \pi,$$

поэтому только один из углов A, B, C может быть острым, либо все три указанных угла — тупые. *Острым* здесь и далее будем называть любой угол α такой, что $0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$, *тупым* будем называть любой угол β, что $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

По условию,

$$T^2 = \frac{(1+X)(1+Y)(1+Z)}{1 + X + Y + Z} < 1, \text{ где } X = \cos A,\ Y = \cos B,\ Z = \cos C.$$

Поскольку $1 + X + Y + Z > 0$ (по теореме 3), то непосредственно получаем

$$XY + XZ + YZ + XYZ < 0.$$

Так как $XY + XZ + YZ + XYZ = XY + XZ + YZ\,(1 + X)$ и $1 + X > 0$, то из последнего неравенства видно, что все три косинуса $X = \cos A$, $Y = \cos B$ и $Z = \cos C$ — не могут быть отрицательными. Тем самым приходим к заключению, что один из углов A, B, C — острый, а оставшиеся два — тупые. Не уменьшая общности, будем считать, что $A \le B \le C$, то есть $Z \le Y < 0 \le X$.

Так как $Z, Y < 0 \le X$, и по условию $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, то

$$\frac{(1-\cos t)(Y-\cos t)(Z-\cos t)}{(1+\cos t)(X+\cos t)} > 0,$$

и функция $H(t)$ принимает значения того же знака, что и выражение

$$(X - \cos t)(Y + \cos t)(Z + \cos t). \tag{9}$$

Поскольку $\cos t$ монотонно убывает при $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то функция $H(t)$ меняет знак на противоположный при $t = A,\ \pi - B,\ \pi - C$. Исключение составляет случай, когда $B = C$.

Можно также заметить, что $\pi - C \leq \pi - B < A$. Действительно, мы уже выяснили, что угол A — острый, а углы B, C — тупые. Но согласно теореме 3, $A + B > \pi,\ A + C > \pi$, следовательно $\pi - C \leq \pi - B < A$.

Укажем области постоянного знака выражения (9), а значит и функции $H(t)$:

$$\begin{aligned} H(t) > 0 \quad &\text{при} \quad t \in (\pi - C, \pi - B) \cup \left(A, \frac{\pi}{2}\right), \\ H(t) < 0 \quad &\text{при} \quad t \in (0, \pi - C) \cup (\pi - B, A)\,. \end{aligned}$$

По свойству аддитивности пределов интегрирования, при $\tau \geq A$ имеем

$$(10) \quad I = \int\limits_0^\tau \log\left|\frac{(1-\cos t)(\cos A - \cos t)(\cos B - \cos t)(\cos C - \cos t)}{(1+\cos t)(\cos A + \cos t)(\cos B + \cos t)(\cos C + \cos t)}\right| dt =$$
$$= \int\limits_0^{\pi - C} \log|H(t)|\,dt + \int\limits_{\pi - C}^{\pi - B} \log|H(t)|\,dt + \int\limits_{\pi - B}^{A} \log|H(t)|\,dt + \int\limits_{A}^{\tau} \log|H(t)|\,dt.$$

Отметим, что при $B = C$, равенство (10) можно упростить. Аналогично:

$$I = \int\limits_0^{\pi - C} \log|H(t)|\,dt + \int\limits_{\pi - C}^{\pi - B} \log|H(t)|\,dt + \int\limits_{\pi - B}^{\tau} \log|H(t)|\,dt \quad \text{при } \tau \in [\pi - B, A),$$
$$I = \int\limits_0^{\pi - C} \log|H(t)|\,dt + \int\limits_{\pi - C}^{\tau} \log|H(t)|\,dt \quad \text{при } \tau \in [\pi - C, \pi - B),$$
$$I = \int\limits_0^{\tau} \log|H(t)|\,dt \quad \text{при } \tau < \pi - C.$$

Рассмотрим только первый случай ($\tau \geq A$), остальные случаи выводятся таким же образом. Раскроем модули в равенстве (10):

$$I = \int\limits_0^{\pi - C} \log(-H(t))dt + \int\limits_{\pi - C}^{\pi - B} \log H(t)dt + \int\limits_{\pi - B}^{A} \log(-H(t))dt + \int\limits_{A}^{\tau} \log H(t)dt.$$

Следовательно, в формулировке теоремы можно было обойтись без знака модуля, но это привело бы к несколько более громоздкой записи.

Рассмотрим две функции

$$F_1(A, B, C, t) = -\log\frac{(1-\cos t)(\cos A - \cos t)(\cos B - \cos t)(\cos C - \cos t)}{(1+\cos t)(\cos A + \cos t)(\cos B + \cos t)(\cos C + \cos t)},$$
$$F_2(A, B, C, t) = -\log\left(-\frac{(1-\cos t)(\cos A - \cos t)(\cos B - \cos t)(\cos C - \cos t)}{(1+\cos t)(\cos A + \cos t)(\cos B + \cos t)(\cos C + \cos t)}\right),$$

причем F_1 определена и дифференцируема при $t \in (\pi - C, \pi - B) \cup \left(A, \dfrac{\pi}{2}\right)$, а F_2 определена и дифференцируема при $t \in (0, \pi - C) \cup (\pi - B, A)$; значения A, B, C $(A \le B \le C)$ удовлетворяют критерию существования октаэдра (теорема 3) и условию $T^2 < 1$.

Положим

$$V = -I = \int_0^{\pi - C} F_2\,dt + \int_{\pi - C}^{\pi - B} F_1\,dt + \int_{\pi - B}^{A} F_2\,dt + \int_A^{\tau} F_1\,dt,$$

и проверим, что функция V удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (8) и указанным выше начальным условиям.

По формуле Лейбница (см., например, [22], глава II, § 3) имеем

$$\frac{\partial V}{\partial A} = \int_0^{\pi - C} \frac{\partial F_2}{\partial A}\,dt + \int_{\pi - C}^{\pi - B} \frac{\partial F_1}{\partial A}\,dt + \int_{\pi - B}^{A} \frac{\partial F_2}{\partial A}\,dt + \int_A^{\tau} \frac{\partial F_1}{\partial A}\,dt + F_1(X, Y, Z, \tau)\,\frac{\partial \tau}{\partial A}.$$

Из равенства $\sin\tau = T$ по лемме 2 заключаем, что $F_1(X, Y, Z, \tau) = 0$. Также заметим, что

$$\frac{\partial F_1}{\partial A} = \frac{4\,\sin A\,\cos t}{\cos 2A - \cos 2t} \quad \text{при} \quad t \in (\pi - C, \pi - B) \cup \left(A, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial A} = \frac{4\,\sin A\,\cos t}{\cos 2A - \cos 2t} \quad \text{при} \quad t \in (0, \pi - C) \cup (\pi - B, A)\,.$$

Следовательно, по свойству аддитивности пределов интегрирования

$$\frac{\partial V}{\partial A} = \int_0^{\tau} \frac{4\,\sin A\,\cos t}{\cos 2A - \cos 2t}\,dt = -2\,\mathrm{arctanh}\,\frac{\sin A}{\sin\tau} = -2\,\mathrm{arctanh}\,\frac{\sin A}{T}.$$

Откуда по теореме синусов-тангенсов (теорема 5)

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -2\,a.$$

Аналогично устанавливаются оставшиеся равенства

$$\frac{\partial V}{\partial B} = -2\,b, \quad \frac{\partial V}{\partial C} = -2\,c. \quad \square$$

Доказательство утверждения (ii)

По предположению $C \le B \le A$.

Воспользуемся равенством

$$T^2 = \frac{(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)}{1 + \cos A + \cos B + \cos C} = 1,$$

что эквивалентно

$$\cos A\,\cos B + \cos A\,\cos C + \cos B\,\cos C + \cos A\,\cos B\,\cos C = 0. \tag{11}$$

Согласно условиям существования (теорема 3), лишь один из косинусов двугранных углов может иметь положительный знак, либо все они отрицательны. Анализируя тождество (11), приходим к заключению, что один из косинусов больше нуля. Таким образом,

$$\frac{\pi}{2} < B \le A < \pi, \quad 0 < C < \frac{\pi}{2}.$$

Замена переменной интегрирования $y = \pi - x$ приводит к равенствам

$$\int\limits_{A}^{\pi} \operatorname{arctanh}(\sin x)\, dx = \int\limits_{0}^{\pi - A} \operatorname{arctanh}(\sin y)\, dy = \Phi(\pi - A),$$

$$\int\limits_{B}^{\pi} \operatorname{arctanh}(\sin x)\, dx = \int\limits_{0}^{\pi - B} \operatorname{arctanh}(\sin y)\, dy = \Phi(\pi - B),$$

где $\Phi(X) = \int\limits_{0}^{X} \operatorname{arctanh}(\sin y)\, dy$ — непрерывная функция на интервале $X \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Положим $V = 2\,\Phi(\pi - A) + 2\,\Phi(\pi - B) - 2\,\Phi(C)$ — в соответствии с доказываемым утверждением.

Убедимся, что предложенная функция V удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (8) и соответствующим начальным условиям. По правилу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом имеем

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -2\,\frac{d\Phi(\pi - A)}{d(\pi - A)} = -2 \operatorname{arctanh}(\sin(\pi - A)) = -2 \operatorname{arctanh}(\sin A).$$

По условию $T = 1$. Тогда по правилу синусов-тангенсов (теорема 5) $\sin A = \tanh a$. Таким образом,

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -2\,a.$$

Аналогично устанавливаются равенства

$$\frac{\partial V}{\partial B} = -2\,b, \quad \frac{\partial V}{\partial C} = -2\,c.$$

Убедимся теперь, что функция V удовлетворяет начальным условиям. При $A, B \to \pi$ и $C \to 0$ октаэдр $\mathcal{O}$ вырождается в плоскость, а определитель его матрицы Грама $\det G = 1 - \cos^2 \dfrac{A}{2} - \cos^2 \dfrac{B}{2} - \cos^2 \dfrac{C}{2} \to 0$. При этом функция $V \to 0$. $\square$

Чтобы доказать последнее утверждение теоремы 7 сформулируем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть величина T в теореме синусов-тангенсов удовлетворяет неравенству $T^2 > 1$. Положим $T = \dfrac{1}{\cos\eta}$, где $0 < \eta < \dfrac{\pi}{2}$. Тогда выполнено равенство*

$$\arctan\frac{1}{\tan\eta} + \arctan\frac{X}{\tan\eta} + \arctan\frac{Y}{\tan\eta} + \arctan\frac{Z}{\tan\eta} = 0,$$

где $X = \cos A,\ Y = \cos B,\ Z = \cos C$.

Доказательство леммы 3

Поскольку по лемме 1

$$\tan^2\eta = \frac{1}{\cos^2\eta} - 1 = \frac{(1+X)(1+Y)(1+Z)}{1+X+Y+Z} - 1 = \frac{XY + XZ + YZ + XYZ}{1+X+Y+Z},$$

то имеем $XY + XZ + YZX - \tan^2\eta - X\tan^2\eta - Y\tan^2\eta - Z\tan^2\eta = 0$.

Эквивалентно,

$$\frac{1+X}{\tan^2\eta - X} = \frac{Y+Z}{YZ-\tan^2\eta}.$$

Поделим числители слева и справа на $\tan\eta$, а знаменатели — на $\tan^2\eta$, получим

$$\frac{\dfrac{1}{\tan\eta}+\dfrac{X}{\tan\eta}}{1-\dfrac{X}{\tan^2\eta}} = -\frac{\dfrac{Y}{\tan\eta}+\dfrac{Z}{\tan\eta}}{1-\dfrac{YZ}{\tan^2\eta}}.$$

Воспользуемся соотношением

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\,\tan\beta},$$

в котором положим $\tan\alpha = \dfrac{1}{\tan^2\eta}$, $\tan\beta = \dfrac{X}{\tan^2\eta}$. Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{\dfrac{1}{\tan\eta}+\dfrac{X}{\tan\eta}}{1-\dfrac{X}{\tan^2\eta}} = \tan\left(\arctan\frac{1}{\tan\eta}+\arctan\frac{\mathrm{X}}{\tan\eta}\right).$$

Аналогично преобразуем правую чать равенства:

$$-\frac{\dfrac{Y}{\tan\eta}+\dfrac{Z}{\tan\eta}}{1-\dfrac{YZ}{\tan^2\eta}} = -\tan\left(\arctan\frac{Y}{\tan\eta}+\arctan\frac{Z}{\tan\eta}\right).$$

Приравнивая полученные выражения, получаем утверждение леммы. □

Доказательство утверждения (iii)

Обозначим величину

$$\frac{1}{\cos\eta}\left(\arctan\frac{1}{\tan\eta}+\arctan\frac{X}{\tan\eta}+\arctan\frac{Y}{\tan\eta}+\arctan\frac{Z}{\tan\eta}\right)$$

через $K(X,Y,Z,\eta)$ и положим $V = 2\int\limits_{\theta}^{\pi/2} K(X,Y,Z,\eta)\,d\eta$.

Покажем, что V является решением системы уравнений (8), удовлетворяющим условию $V\to 0$ при $a=b=c\to 0$.

Воспользуемся формулой Лейбница:

$$\frac{\partial V}{\partial A} = 2K(X,Y,Z,\theta)\,\frac{\partial\theta}{\partial A} + 2\int\limits_{\theta}^{\pi/2}\frac{\partial K}{\partial A}\,d\eta.$$

Согласно лемме 4, $K(X,Y,Z,\theta)=0$. По теореме синусов-тангенсов имеем

$$\frac{\partial V}{\partial A} = 2\int\limits_{\theta}^{\pi/2}\frac{\partial K}{\partial A}\,d\eta = 2\int\limits_{\theta}^{\pi/2}\frac{\sin A\,\cot\eta\,d\eta}{(1-\cos^2 A\,\cot^2\eta)\cos\eta} =$$

$$= 2\operatorname{arctanh}\Bigl(\cos\frac{\pi}{2}\,\sin A\Bigr) - 2\operatorname{arctanh}(\cos\theta\,\sin A) =$$

$$= -2\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{\tanh a}{\sin A}\sin A\right) = -2\,\mathrm{arctanh}(\tanh a) = -2\,a.$$

При $a = b = c$ по правилу синусов-тангенсов (теорема 5) имеем

$$T = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{2(x^2-x)^{\frac{3}{2}}}{2x^3-3x^2+1} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(1+2x)},$$

где $x = \cosh a$.

Следовательно,

$$\frac{1}{\cos\theta} \to +\infty \ \text{ и } \ \theta \to \frac{\pi}{2} - 0 \ \text{ при } \ x \to 1+0.$$

Необходимое нам условие, $V \to 0$ при $a = b = c \to 0$, следует из сходимости интеграла

$$V = 2\int\limits_{\theta}^{\pi/2} K(A,B,C,\eta)\,d\eta. \quad \square$$

5. Примеры

Пример 1. Положим

$$A = B = \frac{2\,\pi}{3}, \quad C = \arccos\frac{2}{5}.$$

Согласно теореме 3, существует компактный гиперболический октаэдр $\mathcal{O}(A,B,C)$ с указанными двугранными углами, обладающий mmm-симметрией.

По лемме 1 величина T в теореме синусов-тангенсов (теорема 5) может быть найдена как положительный корень уравнения

$$T^2 = \frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{1+\cos A+\cos B+\cos C},$$

то есть для указанного примера $T = \sqrt{\dfrac{7}{8}} < 1$.

При этом объем $V(\mathcal{O}) = 0.946576$.

Пример 2. Положим

$$A = B = \frac{2\,\pi}{3}, \quad C = \arccos\frac{1}{3}.$$

По теореме 3, существует компактный гиперболический октаэдр $\mathcal{O}(A,B,C)$ с указанными двугранными углами, обладающий mmm-симметрией. Для данного октаэдра величина $T = 1$. Объем равен $V(\mathcal{O}) = 0.330438$.

Пример 3. Положим

$$A = B = \frac{2\,\pi}{3}, \quad C = \arccos\frac{1}{4}.$$

По теореме 3, существует компактный гиперболический октаэдр $\mathcal{O}(A,B,C)$ с указанными двугранными углами, обладающий mmm-симметрией. Для данного октаэдра величина $T = \sqrt{\dfrac{5}{4}} > 1$. Объем равен $V(\mathcal{O}) = 0.394362$.

6. Благодарности

Авторы благодарят А.Д. Медных за постановку задачи и полезные обсуждения, В.А. Александрова — за стимулирующие вопросы, а также анонимного рецензента — за ряд ценных замечаний.

Список литературы

[1] J. V. Uspensky, *Theory of Equations.* New York: McGraw-Hill, 1948.

[2] D. M. Y. Sommerville, *An Introduction to the Geometry of n Dimensions.* New York: Dover, 1958. MR0100239

[3] Сабитов, И. Х. *Объем многогранника как функция длин его ребер* // Фундамент. и прикл. матем. **2**:1 (1996), 305–307. MR1789013

[4] R. Connelly, I. Sabitov, A. Walz, *The Bellows Conjecture* // Contrib. Algebra Geom., **38**:1 (1997), 1–10. MR1447981

[5] Н. И. Лобачевский, *Воображаемая геометрия* // Учен. зап. Казан. ун-та. I книжка (1835), 3–88.

[6] J. Bolyai, *Appendix. The Theory of Space*, F. Kárteszi (Ed.), Budapest, Akadémiai Kiadó, 1987. MR0928803

[7] L. Schläfli, *Theorie der vielfachen Kontinuität* // In: Gesammelte mathematishe Abhandlungen, Basel: Birkhäuser, 1950. MR0034587

[8] R. Kellerhals, *On the volume of hyperbolic polyhedra* // Math. Ann., **285** (1989), 541–569. MR1027759

[9] Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, *Объем куба Ламберта в сферическом пространстве* // Матем. заметки, **86**:2 (2009), 190–201. MR2584555

[10] A. D. Mednykh, J. Parker, A. Yu. Vesnin, *On hyperbolic polyhedra arising as convex cores of quasi–Fuchsian punctured torus groups* // Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), **10** (2004), 357–381. MR2199358

[11] Э. Б. Винберг, *Геометрия-2*, Современные проблемы математики, **29**, М.: ВИНИТИ (Итоги науки и техники), 1988.

[12] G. Sforza, *Spazi metrico-proiettivi* // Ricerche di Estensionimetria differenziale, Serie III, **VIII** (1906), 3–66.

[13] N. V. Abrosimov, A. D. Mednykh, *Volumes of polytopes in spaces of constant curvature* // Fields Inst. Commun. 2013 (in press) arXiv:1302.4919 [math.MG]

[14] Н. В. Абросимов, *К решению проблемы Зейделя об объемах гиперболических тетраэдров* // Сиб. электрон. матем. изв., **6** (2009), 211–218. MR2586687

[15] N. V. Abrosimov, M. Godoy-Molina, A. D. Mednykh, *On the volume of a spherical octahedron with symmetries* // J. Math. Sci. (N. Y.), **161**:1 (2009), 1–10. MR2676254

[16] A. Ushijima, *A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra* // in: Non-Euclidean Geometries (ed. by A. Prékopa, E. Molnár). Mathematics and Its Applications, **581** (2006), 249–265. MR2191251

[17] Р. В. Галиулин, С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов, *Некоторые приложения формулы для объема октаэдра* // Матем. заметки, **76**:1 (2004), 27–43. MR2099840

[18] Г. А. Байгонакова, М. Годой-Молина, А. Д. Медных, *О геометрических свойствах гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией* // Вестник КемГУ, **3/2** (2011), 9–14.

[19] L. Schläfli, *On the multiple integral* $\int\int\ldots\int dxdy\ldots dz$ *whose limits are* $p_1 = a_1x + b_1y + \ldots + h_1z > 0, p_2 > 0, \ldots p_n > 0$ *and* $x^2 + y^2 + \ldots + z^2 < 1$ // Quart. J. Math., **2** (1858), 269–300; **3** (1860), 54–68; 97–108.

[20] H. Kneser, *Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie* // Deutsche Math., **1** (1936), 337–340.

[21] J. W. Milnor, *How to Compute Volume in Hyperbolic Space* // In: Collected Papers, **1**. Geometry. — Houston: Publish or Perish, 1994. P. 189–212. MR1277810

[22] Н. Бурбаки, *Функции действительного переменного. Элементарная теория.* М.: Наука, 1965. MR0186758

Николай Владимирович Абросимов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: abrosimov@math.nsc.ru

Галия Аманболдыновна Байгонакова
Горно-Алтайский государственный университет,
ул. Социалистическая 34,
649000, Горно-Алтайск, Россия
E-mail address: galyaab@mail.ru