S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 150–169 (2013) УДК 517.956.6
MSC 35G15

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

О. С. ЗИКИРОВ

Abstract. In the present paper we study some boundary–value problems for a class of third–order composite type equations with Chapligin operator in the main part. We prove the theorems of the existence and uniqueness of classical solution for considered problems. The proof is based on an energy inequality and Fredgolm type integral equations.

Keywords: Boundary–value problem, composite type equation, Laplace operator, Green function, third–order PDE, energy integrals, Dirichlet problem, integral equations.

1. Постановка задачи и единственность решения.

В настоящей работе исследуются краевые задачи для уравнений в частных производных третьего порядка, имеющих в каждой точке своего задания действительные и комплексные характеристики. Это, прежде всего, уравнения составного типа. Впервые краевые задачи для таких уравнений были рассмотрены Ж. Адамаром. Краевые задачи для уравнений составного типа с применением различных методов были изучены А. В. Бицадзе, Т. Д. Джураевым, М. С. Салахитдиновым, В. Н. Враговым, В. И. Жегаловым, А. И. Кожановым, С. Г. Пятковым и др. Достаточно полная библиография может быть найдена, например, в [6], [9] и [20]. Различные краевые задачи для уравнений в частных производных третьего порядка исследовались в работах [11] – [15], [18], [19], [21], [22].

Zikirov, O. S., On some bondary–value problems for the third–order linear equations of the composite type.

Поступила 17 декабря 2012 г., опубликована 27 февраля 2013 г.

Работа посвящена изучению краевых задач с нормальной производной для уравнений составного типа третьего порядка

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(k(y)u_{xx}+u_{yy})+Lu=0, \tag{1.1}$$

где α и β — заданные вещественные числа, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, а L — линейный дифференциальный оператор второго порядка вида

$$Lu\equiv a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+$$
$$+a_1(x,y)u_x+b_1(x,y)u_y+c_1(x,y)u. \tag{1.2}$$

Коэффициенты уравнения (1.1) являются заданными действительными функциями.

Постановка корректных краевых задач для уравнения (1.1) зависит от знака и значений коэффициентов α и β. Уравнения (1.1) охватывает широкий класс ранее исследованных уравнений составного типа.

Например, если $\alpha=1$, $\beta=0$ и $\alpha=0$, $\beta=1$ а $Lu=0$, то получим уравнения, исследованные в работах [6] – [9], [20].

Пусть $k(y)\,(k(y)>0)$ — непрерывная функция в односвязной области D, ограниченной отрезком $A(0,0)B(1,0)$ оси x и гладкой кривой σ, лежащей в полуплоскости $y>0$ и опирающуюся на ось x в точках A и B.

Относительно кривой σ дополнительно предположим, что она с каждой прямой $x=const$ пересекается лишь в одной точке.

Разобьем кривую σ на две части σ_1 и σ_2 следующим образом:

$$\sigma_1=\{(x,y)\in\sigma:\ \alpha x_n+\beta y_n>0\},\quad \sigma_2=\sigma\backslash\sigma_1,$$

где $x_n=\cos(n,x)$, $y_n=\cos(n,y)$ и n — внешняя нормаль к границе.

Определение 1. *Решением уравнения (1.1) будем называть классическое решение — функцию $u(x,y)$, обладающую в области D непрерывными частными производными до третьего порядка включительно и обращающую его в тождество.*

Задача $A^k_{\alpha\beta}$. *Найти классическое в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1.1), непрерывное вместо со своими производными в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющее граничным условиям:*

а) если $0<\dfrac{\beta}{\alpha}<+\infty$, то задаются следующие условия

$$u(x,y)\big|_{\sigma}=\varphi_1(x,y),\quad (x,y)\in\overline{\sigma};\quad u(x,y)\big|_{AB}=\tau(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{\sigma_2}=\varphi_2(x,y),\quad (x,y)\in\sigma_2;\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Big|_{AB}=\nu(x),\quad 0<x<1, \tag{1.4}$$

б) если $\beta=0$, то выполняются условия (1.3) и первое условие (1.4);

в) если $\alpha=0$, то наряду с условиями (1.3) выполняется второе условие (1.4); или наряду с условиями (1.3) выполняется условие

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{\sigma}=\varphi_3(x,y),\quad (x,y)\in\sigma;$$

где $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, $\varphi_3(x,y)$, $\tau(x)$, $\nu(x)$ — заданные функции, причем $\varphi_1(A)=\tau(0)$, $\varphi_1(B)=\tau(1)$.

Можно показать, что в задаче $A^k_{\alpha\beta}$ случай $\alpha\beta<0$ при помощи замены независимого переменного $x=1-\xi$ или $y=1-\eta$ редуцируется к случаю $\alpha\beta>0$.

Поэтому без ограничения общности предположим, что $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, но $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Относительно коэффициентов уравнения (1.1) предполагается, что

$$k(y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D);\quad a(x,y),\quad b(x,y),\quad c(x,y)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D);$$

$$a_1(x,y),\quad b_1(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D);\quad c_1(x,y)\in C(D).$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют в области D следующим условиям*

$$1)\quad \left(a+\frac{1}{2}\beta k'(y)\right)\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2\geq c_0(\xi^2+\eta^2),\qquad \forall\ (\xi,\ \eta)\in D;$$

$$2)\quad a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy}-a_{1x}-b_{1y}+2c_1\leq 0,\qquad \forall\ (x,\ y)\in D;$$

тогда классическое решение задачи $A^k_{\alpha\beta}$ единственно.

Доказательство. Покажем, что однородная задача $A^k_{\alpha\beta}$

$$\varphi_1(x,y)=\varphi_2(x,y)=\tau(x)=\nu(x)\equiv 0. \tag{1.5}$$

имеет лишь тривиальное решение. Доказательство этого факта проведем на основании энергетических тождеств. Умножим уравнения (1.1) на $u(x,y)$ и проинтегрируем по частям в области D, имеем

$$\iint\limits_D u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(k(y)u_{xx}+u_{yy})dxdy+\iint\limits_D uLudxdy=0. \tag{1.6}$$

Преобразуем под интегральные выражения следующим образом

$$u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(k(y)u_{xx}+u_{yy})=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(uk(y)u_{xx}+uu_{yy})-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}-\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(k(y)u_x^2-u_y^2)+\left(\alpha\frac{\partial}{\partial y}-\beta k(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)(2u_xu_y)\right];$$

$$u\left(a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[auu_x+buu_y-\frac{1}{2}(a_x+b_y)u^2\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[buu_x+cuu_y-\frac{1}{2}(b_x+c_y)u^2\right]-\left[\left(a-\frac{1}{2}\beta k'(y)\right)u_x^2+2bu_xu_y+cu_y^2)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}(a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy})u^2;$$

$$u(a_1(x,y)u_x+b_1(x,y)u_y+c_1(x,y)u)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(a_1u)^2+\frac{\partial}{\partial y}(b_1u)^2\right]-$$

$$-\frac{1}{2}(a_{1x}+b_{1y}-2c_1)u^2.$$

Применяя формулу Грина к интегралу (1.6) и учитывая однородные граничные условия, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\sigma+AB}\left[k\cdot(\alpha x_n-\beta y_n)u_x^2+2(\alpha y_n+\beta kx_n)u_xu_y+(\beta y_n-\alpha x_n)u_y^2\right]ds+$$

$$+\iint\limits_D \left[\left(a(x,y)-\frac{1}{2}\beta k'(y)\right)u_x^2+2b(x,y)u_xu_y+c(x,y)u_y^2\right]dxdy-$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_D (a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy}-a_{1x}-b_{1y}+2c_1)u^2dxdy=0, \qquad (1.7)$$

Так как $u(x,y)=0$ на границе области D, то $\dfrac{\partial u}{\partial s}=0$ на $\sigma+AB$, поэтому на границе $\sigma+AB$ области D выполняется равенства

$$u_x=u_nx_n, \quad u_y=u_ny_n. \qquad (1.8)$$

В силу равенств $x_n=y_s$, $y_n=-x_s$, учитывая однородные граничные условия из выражение (1.7) имеем

$$\int\limits_{\sigma_1} u_n^2(k(y)x_n^2+y_n^2)(\alpha x_n+\beta y_n)ds+$$

$$+\iint\limits_D \left[\left(a(x,y)-\frac{1}{2}\beta k'(y)\right)u_x^2+2b(x,y)u_xu_y+c(x,y)u_y^2\right]dxdy-$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_D (a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy}-a_{1x}-b_{1y}+2c_1)u^2dxdy=0, \qquad (1.9)$$

Отсюда в силу условий теоремы 1 заключаем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Единственность решения задачи $A_{\alpha\beta}^k$ в случаях б) и в) доказывается аналогично.

2. Существование решения задачи $A_{\alpha\beta}^1$.

В настоящем параграфе мы докажем существование классического решения задачи $A_{\alpha\beta}^k$, поставленной в предыдущем параграфе.

Для решение задачи $A_{\alpha\beta}^k$ справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и*

$$2b(x,y)=\frac{\beta}{\alpha}a(x,y)+\frac{\alpha}{\beta}c(x,y), \qquad a_1(x,y)=\frac{\alpha}{\beta}b_1(x,y). \qquad (2.1)$$

Если функции $\varphi_1'(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, $\tau'(x)$ и $\nu(x)$ удовлетворяют условию Гельдера, то решение задачи $A_{\alpha\beta}^k$ существует.

Доказательство. Доказательство теоремы 2 проведем в случае а). Пусть сначала предположим, что функция $k(y)\equiv 1$.

Рассмотрим вопрос о разрешимости задачи $A_{\alpha\beta}^1$, для модельного уравнения составного типа

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx}+u_{yy})=0. \qquad (2.2)$$

Известно, что любое классическое решение уравнения (2.2) в области D может быть представлено в виде [6]

$$u(x,y)=v(x,y)+\omega(\beta x-\alpha y), \qquad (2.3)$$

где $v(x,y)$ — гармоническая функция, $\omega(\beta x-\alpha y)$ — произвольная непрерывно–дифференцируемая функция, причем

$$\omega(A)=\omega(N)=0,$$

где N — точка, принадлежащая кривой σ, в которой $\alpha x_n+\beta y_n=0$.

Таким образом, задача $A^1_{\alpha\beta}$ редуцируется к задаче отыскания в области D регулярного решения уравнения

$$v_{xx}+v_{yy}=0, \tag{2.4}$$

удовлетворяющего условиям

$$v\big|_{\sigma}=\varphi_1(x,y)-\omega(\beta x-\alpha y), \qquad u\big|_{AB}=\tau(x)-\omega(\beta x), \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial n}\Big|_{\sigma_2}=\varphi(x,y)-(\beta x_n-\alpha y_n)\omega'(\beta x-\alpha y), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\Big|_{AB}=\nu(x)+\alpha\omega'(\beta x). \tag{2.7}$$

Решение уравнения (2.4), удовлетворяющее условиям (2.5), выражаются формулой

$$v(x,y)=\int\limits_0^1[\tau(\xi)-\omega(\beta\xi)]\frac{\partial G}{\partial\eta}(x,y;\xi,0)d\xi+$$
$$+\int\limits_{\sigma}[f(s)-\omega(\beta\xi(s)-\alpha\eta(s))]\frac{\partial G}{\partial n}(x,y;\xi,\eta)ds, \tag{2.8}$$

где $G(x,y;\xi,\eta)=-\dfrac{1}{2\pi}\ln|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2|+g(x,y;\xi,\eta)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа (2.4)–(2.5), а $g(x,y;\xi,\eta)$ — регулярная часть функции Грина.

Реализуя условие (2.6), получим

$$v_x=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\omega(\beta\xi)\left[\frac{2(x-\xi)y}{r^4}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial\eta}(x,y;\xi,0)\right]d\xi+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}\omega(\beta\xi-\alpha\eta)\left[\frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{r^4}\eta'(s)+\frac{2(x-\xi)(y-\eta)}{r^4}\xi'(s)\right]ds+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}\omega(\beta\xi-\alpha\eta)\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial n}(x,y;\xi,\eta)ds-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\tau(\xi)\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial\eta}d\xi-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}f(s)\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial n}ds, \tag{2.9}$$

$$v_y=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\omega(\beta\xi)\left[\frac{(x-\xi)^2-y^2}{r^4}+\frac{\partial^2 g}{\partial\eta\partial y}(x,y;\xi,0)\right]d\xi-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}\omega(\beta\xi-\alpha\eta)\left[\frac{2(x-\xi)(y-\eta)}{r^4}\eta'(s)-\frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{r^4}\xi'(s)\right]ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}\omega(\beta\xi-\alpha\eta)\frac{\partial^2 g}{\partial n\partial y}(x,y;\xi,\eta)ds-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\tau(\xi)\frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial y}d\xi-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}f(s)\frac{\partial^2 G}{\partial n\partial y}ds, \tag{2.10}$$

где $\eta'(s)=\cos(n,\xi)$, $\xi'(s)=-\cos(n,\eta)$.

Интегрируя по частям, из равенств (2.9), (2.10) имеем

$$v_x=\frac{\beta}{2\pi}\int\limits_0^1\omega'(\beta\xi)\left[\frac{y}{r^2}+p_1(x,y;\xi,0)\right]d\xi-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}\left[\beta\xi'(s)-\alpha\eta'(s)\right]\omega'(\beta\xi-\alpha\eta)-$$

$$-\left[\frac{y-\eta}{r^2}+P_1(x,y;\xi,\eta)\right]ds+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\tau'(\xi)\left[\frac{y}{r^2}+p_1(x,y;\xi,0)\right]d\xi-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}f'(s)\left[\frac{y-\eta}{r^2}+P_1(x,y;\xi,\eta)\right]ds, \tag{2.11}$$

$$v_y=-\frac{\beta}{2\pi}\int\limits_0^1\omega'(\beta\xi)\left[\frac{x-\xi}{r^2}+p_2(x,y;\xi,0)\right]d\xi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}\left[\beta\xi'(s)-\alpha\eta'(s)\right]\omega'(\beta\xi-\alpha\eta)-$$

$$-\left[\frac{x-\xi}{r^2}+P_2(x,y;\xi,\eta)\right]ds-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\tau'(\xi)\left[\frac{x-\xi}{r^2}+p_2(x,y;\xi,0)\right]d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}f'(s)\left[\frac{x-\xi}{r^2}+P_2(x,y;\xi,\eta)\right]ds, \tag{2.12}$$

где

$$p_1(x,y;\xi,0)=\int\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial\eta}d\xi,\qquad p_2(x,y;\xi,0)=\int\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial\eta}d\xi,$$

$$P_1(x,y;\xi,\eta)=\int\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial n}ds,\qquad P_2(x,y;\xi,\eta)=\int\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial n}ds.$$

В формулах (2.11), (2.12) переходим к пределу $(x,y)\to[\xi(s_0),\,\eta(s_0)]\in\sigma_2$; при этом справедливы формулы предельного перехода

$$V_{1i}=-\frac{1}{2}\eta_n(\alpha\xi_n+\beta\eta_n)\omega'(\beta\xi-\alpha\eta)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_2}\omega'_*(s)\frac{y-\eta}{r^2}ds, \tag{2.13}$$

$$V_{2i}=\frac{1}{2}\xi_n(\alpha\xi_n+\beta\eta_n)\omega'(\beta\xi-\alpha\eta)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_2}\omega'_*(s)\frac{x-\xi}{r^2}ds, \tag{2.14}$$

здесь

$$V_1=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_2}\omega'_*(s)\frac{y-\eta}{r^2}ds,\qquad V_2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_2}\omega'_*(s)\frac{x-\xi}{r^2}ds,$$

$$\omega'_*(s)=\left[\alpha\xi'(s)-\beta\eta'(s)\right]\omega'(\beta\xi-\alpha\eta).$$

Вводя обозначения $x=\xi(s_0)$, $y=\eta(s_0)$ применяя к равенствам (2.11), (2.12) формулы (2.13), (2.14), приходим к следующему уравнению для определения функции $\omega'(\beta\xi(s)-\alpha\eta(s))$ при $\frac{1}{2}\,(\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2})<\beta\xi-\alpha\eta<0$:

$$[\beta\eta'(s_0)-\alpha\xi'(s_0)]\,\omega'(s_0)-\frac{\eta'(s_0)}{2\pi}\int\limits_{\sigma_2}\omega'(s)\,[\beta\xi'(s)-\alpha\eta'(s)]\,\frac{\eta(s_0)-\eta(s)}{r^2}ds-$$
$$-\frac{\xi'(s_0)}{2\pi}\int\limits_{\sigma_2}\omega'(s)\,[\beta\xi'(s)-\alpha\eta'(s)]\,\frac{\xi(s_0)-\xi(s)}{r^2}ds-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_2}\omega'(s)\,[\beta\xi'(s)-\alpha\eta'(s)]\,[P_1(s_0,s)\eta'(s_0)+P_2(s_0,s)\xi'(s_0)]\,ds-$$
$$-\frac{\beta}{2\pi}\int\limits_0^1\omega'(\beta\xi)\Bigg\{\left[\frac{\eta(s_0)}{r^2}+p_1(\xi(s_0),\eta(s_0);\xi,0)\right]\eta'(s_0)-$$
$$-\left[\frac{\xi(s_0)-\xi}{r^2}+p_2(\xi(s_0),\eta(s_0);\xi,0)\right]\xi'(s_0)\Bigg\}d\xi=g(s_0), \qquad (2.15)$$

где

$$\omega'(s)=\omega'(\beta\xi(s)-\alpha\eta(s)),$$
$$g(s_0)=\varphi(s_0)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\tau'(\xi)\Bigg\{\left[\frac{\eta(s_0)}{r^2}+p_1(\xi(s_0),\eta(s_0);\xi,0)\right]\eta'(s_0)-$$
$$-\left[\frac{\xi(s_0)-\xi}{r^2}+p_2(\xi(s_0),\eta(s_0);\xi,0)\right]\xi'(s_0)\Bigg\}d\xi-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}f(s)\Bigg\{\left[\frac{\eta(s_0)-\eta(s)}{r^2}+P_1(s_0,s)\right]\eta'(s_0)-$$
$$-\left[\frac{\xi(s_0)-\xi(s)}{r^2}+P_2(s_0,s)\right]\xi'(s_0)\Bigg\}ds.$$

Преобразуем первые два интеграла в левой части уравнения (2.15):

$$\int\limits_{\sigma_2}\omega'(s)\frac{[\beta\xi'(s)-\alpha\eta'(s)]\,[\eta(s_0)-\eta(s)]}{[\xi(s_0)-\xi(s)]^2+[\eta(s_0)-\eta(s)]^2}ds=\int\limits_{\sigma_2}\frac{K_1(s_0,s)}{s_0-s}\omega'(s)ds=$$
$$=\int\limits_{\sigma_2}\frac{K_1(s_0,s_0)}{s_0-s}\omega'(s)ds+\int\limits_{\sigma_2}\frac{K_1(s_0,s)-K_1(s_0,s_0)}{s_0-s}\omega'(s)ds$$

здесь

$$K_1(s_0,s)=\frac{(s_0-s)\,[\beta\xi'(s)-\alpha\eta'(s)]\,[\eta(s_0)-\eta(s)]}{[\xi(s_0)-\xi(s)]^2+[\eta(s_0)-\eta(s)]^2}$$
$$K_1(s_0,s_0)=\lim_{s\to s_0}K_1(s_0,s)=\eta'(s_0)\,[\beta\xi'(s_0)-\alpha\eta'(s_0)]$$

и второй интеграл

$$\int\limits_{\sigma_2}\omega'(s)\frac{[\beta\xi'(s)-\alpha\eta'(s)]\,[\xi(s_0)-\xi(s)]}{[\xi(s_0)-\xi(s)]^2+[\eta(s_0)-\eta(s)]^2}ds=\int\limits_{\sigma_2}\frac{K_2(s_0,s)}{s_0-s}\omega'(s)ds=$$

$$= \int\limits_{\sigma_2} \frac{K_2(s_0,s_0)}{s_0-s}\omega'(s)ds + \int\limits_{\sigma_2} \frac{K_2(s_0,s)-K_2(s_0,s_0)}{s_0-s}\omega'(s)ds$$

где

$$K_2(s_0,s) = \frac{(s_0-s)\left[\beta\xi'(s)-\alpha\eta'(s)\right]\left[\xi(s_0)-\xi(s)\right]}{\left[\xi(s_0)-\xi(s)\right]^2+\left[\eta(s_0)-\eta(s)\right]^2}$$

$$K_2(s_0,s_0) = \lim_{s\to s_0} K_2(s_0,s) = \xi'(s_0)\left[\beta\xi'(s_0)-\alpha\eta'(s_0)\right]$$

Подставляя эти значения в (2.15), получим сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\omega'(s_0)$ при $s_0 \in \sigma_2$:

$$(\beta\cos\theta_0-\alpha\sin\theta_0)\,\omega'(s_0) + \frac{\alpha\cos\theta_0+\beta\sin\theta_0}{2\pi}\int\limits_{\sigma_2}\frac{\omega'(s)}{s_0-s}ds-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_2} k(s_0,s)\omega'(s)ds - \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_0^1 k_0(s_0,\xi)\omega'(\beta\xi)d\xi = g(s_0); \tag{2.16}$$

здесь

$$\theta_0 = \arg\left(s_0-\frac{1}{2}\right),$$

$$k(s_0,s) = \frac{K_1(s_0,s)-K_1(s_0,s_0)}{s_0-s}\eta'(s) + \frac{K_2(s_0,s)-K_2(s_0,s_0)}{s_0-s}\xi'(s)+$$

$$+\left[P_1(s_0,s)\eta'(s_0)+P_2(s_0,s)\xi'(s_0)\right]\left[\beta\xi'(s)-\alpha\eta'(s)\right],$$

$$k_0(s_0,\xi) = \left[\frac{\eta(s_0)}{r^2}+p_1(s_0;\xi,0)\right]\eta'(s_0) + \left[\frac{\xi(s_0)-\xi}{r^2}+p_2(s_0;\xi,0)\right]\xi'(s_0).$$

Теперь реализуем условие (2.7), тогда имеем сингулярное интегральное уравнение относительно функции $\omega'(\beta x)$ при $0<x<1$:

$$\alpha\omega'(\beta x) + \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_0^1\frac{\omega'(\beta\xi)}{x-\xi}d\xi + \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_0^1 p_1(x,0;\xi,0)\omega'(\beta\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}\omega'(s)\left[\beta\xi'(s)-\alpha\eta'(s)\right]\left[\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+\eta^2}+P_2(x,0;\xi,\eta)\right]ds = q(x), \tag{2.17}$$

где

$$q(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\tau'(\xi)\left[\frac{1}{x-\xi}+p_2(x,0;\xi,0)\right]d\xi-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma} f'(s)\left[\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+\eta^2}+P_2(x,0;\xi,\eta)\right]ds - \nu(x).$$

Уравнения (2.16) и (2.17) являются сингулярными интегральными уравнениями нормального типа, если $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Теперь докажем, что уравнения (2.16) и (2.17) разрешимы. Воспользуемся обозначениями из [17]. Для уравнения (2.16) имеем

$$A(s_0) = \beta\cos\theta_0-\alpha\sin\theta_0, \qquad B(s_0) = \alpha\cos\theta_0+\beta\sin\theta_0.$$

Рассмотрим функцию

$$G(s_0) = \frac{A(s_0)-iB(s_0)}{A(s_0)+iB(s_0)} = \exp\{2i(\gamma-\theta_0)\}, \tag{2.18}$$

где $\gamma = \operatorname{arctg}(\alpha^{-1}\beta)$.

Из (2.18) следует, что концы

$$\theta_0 = \arccos\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad \theta_0 = \pi$$

контура σ_2 являются не особенными узлами.

Вычислим индекс [17] уравнения (2.16). Для этого найдем действительные числа по формуле

$$a_n + ib_n = \mp\frac{\ln G(c_n)}{2\pi i}, \quad (n = 0,\, 1);$$

здесь c_n — концы контура, причем нижний знак берется при $\theta_0 = \pi$, а верхний — при $\theta_0 = \arccos\beta(\alpha^2+\beta^2)^{-1/2}$,

Очевидно, $\ln|G(s_n)| = 0$. Следовательно,

$$a_0 = -\frac{1}{\pi}\left(\gamma - \arccos\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) - k, \qquad b_0 = 0;$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\left(\arccos\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}\right) - k,$$

где

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\pi}\arccos\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} < 1, \quad 0 < \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} < \frac{1}{2},$$

Аналогично

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\left(arctg\frac{\beta}{\alpha} - \pi\right) + k, \qquad b_1 = 0.$$

Так как решение уравнения (2.16) ограничено при $\theta_0 = \arccos\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, то выбираем целое число λ_0 так, чтобы $0 < a_0 + \lambda_0 < 1$, т. е. $\lambda_0 = k$, а при $\theta_0 = \pi$ решение уравнения (2.16) неограниченно, поэтому выбираем λ_1 так, чтобы $-1 < a_1 + \lambda_1 < 0$, т. е. $\lambda_1 = -k$.

Индекс χ сингулярного интегрального уравнения определяется по формуле

$$\chi = -(\lambda_0 + \lambda_1) = 0.$$

Индекс уравнения (2.16) равен нулю. Нетрудно убедиться, что индекс сингулярного интегрального уравнения (2.17) также равен нулю.

Уравнения (2.16) и (2.17) можно регуляризовать методом Карлемана – Векуа [17]. В результате получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода относительно $\omega^{'}(\beta\xi(s) - \alpha\eta(s))$ и $\omega'(\beta x)$, разрешимость которых следует из единственности решения задачи $A^1_{\alpha\beta}$.

Из уравнений (2.16) и (2.17) находим функции $\omega(\beta x - \alpha y)$ и $\omega(\beta x)$, подставляя их в (2.8), полностью определяем функцию $v(x,y)$ в области D. Тогда в силу (2.3) получаем решение $u(x,y)$ задачи $A^1_{\alpha\beta}$ в области D.

3. Существование решения задачи $A^1_{\alpha\beta}$ (продолжение).

В настоящем параграфе продолжим доказательство существования решения задачи $A^k_{\alpha\beta}$ для общего случая уравнения (1.1).

1^0. Обозначим через $\omega(s)$ неизвестные значения нормальной производной от искомой функции $u(x,y)$ на σ_1.

Положим
$$\alpha u_x + \beta u_y = v(x,y), \tag{3.1}$$
тогда в силу (2.1) уравнение (1.1) принимает вид
$$\Delta u + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = -c_1(x,y)u, \tag{3.2}$$
здесь $A(x,y)$, $B(x,y)$ и $C(x,y)$ — известные функции, причем
$$A(x,y),\ B(x,y),\ C(x,y)\ \in C^1(D)$$
и, кроме того, $C(x,y) \le 0,\ \forall (x,y) \in \overline{D}$.

Учитывая (1.3)–(1.4) для функции $v(x,y)$ получим следующие граничные условия
$$v(x,y)\big|_{\sigma} = \mu(s), \qquad v(x,y)\big|_{AB} = \lambda(x), \tag{3.3}$$
где
$$\mu(s) = \begin{cases} \omega(s)(\alpha x_n + \beta y_n) + \varphi_1'(s)(\alpha x'(s) + \beta y'(s)), & s \in \sigma_1, \\ \varphi_2(s)(\alpha x_n + \beta y_n) + \varphi_1'(s)(\alpha x'(s) + \beta y'(s)), & s \in \sigma_2, \end{cases}$$
$$\lambda(x) = \alpha\tau'(x) + \beta\nu(x), \qquad 0 \le x \le 1.$$

Регулярное решение уравнения (3.2), удовлетворяющее условиям (3.3) представляется в виде (см. например [6], [20])
$$v(x,y) = \int\limits_{\sigma}\left[\frac{\partial G}{\partial n}(x,y;s) + \overline{K_0}(x,y;s) + \overline{K_{00}}(x,y;s)\right]\mu(s)ds-$$
$$-\iint\limits_{D}\Big[G(x,y;\xi,\eta) + P(x,y;\xi,\eta)\Big]c_1(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta + \Phi(x,y), \tag{3.4}$$
здесь $G(x,y;\xi,\eta)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа,
$$\overline{K}_0(x,y;s) = \iint\limits_{D} G(x,y;\xi,\eta)\left[\overline{K}(\xi,\eta;s) + \iint\limits_{D} K(\xi,\eta;\xi',\eta')\overline{K}(\xi',\eta';s)d\xi'd\eta'\right]d\xi d\eta;$$
$$\overline{K}_{00}(x,y;s) = 2\pi\iint\limits_{D}\iint\limits_{D} G(x,y;\xi,\eta)\Gamma_2(\xi,\eta;\xi',\eta')\times$$
$$\times\left[\overline{K}(\xi',\eta';s) + \iint\limits_{D} K(\xi_1,\eta_1;\xi',\eta')\overline{K}(\xi_1,\eta_1;s)d\xi_1 d\eta_1\right]d\xi'd\eta'd\xi d\eta;$$
$$P(x,y;\xi,\eta) = \iint\limits_{D} G(x,y;\xi,\eta)\Big[K(\xi,\eta;\xi',\eta') + \Gamma_2(xi,\eta;\xi',\eta') +$$
$$+\iint\limits_{D}\Gamma_2(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)K(\xi',\eta';\xi_1,\eta_1)d\xi_1 d\eta_1\Big]d\xi d\eta;$$
$$\overline{K}(x,y;s) = A(x,y)\frac{\partial G^*(x,y;s)}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial G^*(x,y;s)}{\partial y} + C(x,y)G^*(x,y;s);$$
$$K(x,y;\xi,\eta) = A(x,y)\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial y} +$$
$$+C(x,y)G(x,y;\xi,\eta); \qquad\qquad G^*(x,y;s) = \frac{\partial G}{\partial n}(x,y;s);$$

$\Gamma_2(x,y;\xi,\eta)$ — резольвента итерированного ядра

$$K_2(x,y;\xi,\eta)=\iint\limits_D K(x,y;\xi,\eta)K(\xi,\eta;\xi',\eta')d\xi'd\eta');$$

$\Phi(x,y)$ — известная функция.

В силу условия $u(x,y)=\varphi_{11}(x,y)$, $(x,y)\in\sigma_1$, из (3.1) находим

$$u(x,y)=\frac{1}{\beta}\int\limits_{f(\beta x-\alpha y)}^{y} v\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t\right)dt+\varphi_{11}(x,y), \tag{3.5}$$

где

$$\varphi_1(x,y)=\begin{cases}\varphi_{11}(x,y), & (x,y)\in\sigma_1,\\ \varphi_{12}(x,y), & (x,y)\in\sigma_2,\end{cases}$$

$$f(\beta x-\alpha y)=\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\Big[\alpha\beta-2\alpha(\beta x-\alpha y)+ \\ +\beta\sqrt{\alpha^2-4(\beta x-\alpha y)^2+4(\beta x-\alpha y)}\Big].$$

Подставляя (3.4) в (3.5), после несложных преобразований получим, интегральное уравнение второго рода относительно функции $u(x,y)$:

$$u(x,y)+\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \mathcal{K}(x,y;\xi,\eta)c_1(\xi,\eta)u(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta=F(x,y), \tag{3.6}$$

здесь

$$\mathcal{K}(x,y;\xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)+(y-\eta)\right]\ln|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2|+r(x,y;\xi,\eta);$$

$$F(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_\sigma\bigg\{\frac{\alpha^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}[\alpha\eta'(s)-\beta\xi'(s)]\times \\ \times\ln|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2|+r(x,y;s)\bigg\}\mu(s)ds+\Psi_1(x,y);$$

В силу условий теоремы 2, наложенные условия на заданные функции, позволяют утверждать, что $F(x,y)\in C^1(\overline{D})$, а ядро интегрального уравнения (3.6) является непрерывным и первые производные имеют не выше логарифмической особенности.

В силу единственности решения задачи $A^1_{\alpha\beta}$ и альтернативы Фредгольма уравнение (3.6) имеет единственное решение в классе $C^1(\overline{D})$.

Пусть $\Gamma(x,y;\xi,\eta)$ — резольвента ядра $\mathcal{K}(x,y;\xi,\eta)$, $\forall(x,y;\xi,\eta)\in D$. Тогда решение уравнение (3.6) представим в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_\sigma\bigg\{\frac{\alpha^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}[\alpha\eta'(s)-\beta\xi'(s)]\times \\ \times\ln|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2|+R(x,y;s)\bigg\}\mu(s)ds+\Psi_2(x,y); \tag{3.7}$$

где

$$R(x,y;s) = r(x,y;s) + \iint\limits_D \Gamma(x,y;\xi_1,\eta_1)\left\{\frac{\alpha^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}[\alpha\eta'(s) - \beta\xi'(s)]\times\right.$$

$$\left.\times \ln|(\xi_1-\xi)^2 + (\eta_1-\eta)^2| + r(\xi_1,\eta_1;s)\right\}d\xi_1 d\eta_1;$$

$$\Psi_2(x,y) = \Psi_1(x,y) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \Gamma(x,y;\xi,\eta)\Psi_1(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

В формуле (3.7) в функцию $\mu(s)$ входит неизвестная пока функция $\omega(s)$; для его определения необходимо перейти к пределу, устремив точки (x,y) к точке, лежащей на дуге σ_1. Тогда для неизвестной функции $\omega(s)$ получим интегральное уравнение первого рода с логарифмической особенностью в ядре

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\int\limits_{\sigma_1}\Big[\ln|s-s_0| + R(s,s_0)\Big]\omega_*(s)ds = g(s_0), \tag{3.8}$$

где $\omega_*(s) = [\alpha\eta'(s) - \beta\xi'(s)]\omega(s)$;

$$g(s_0) = \varphi_1(s_0) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}[\ln|s-s_0| + R(s,s_0)]\varphi_1^{'}(s)[\alpha\xi^{'}(s) + \beta\eta^{'}(s)]ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_2}[\ln|s-s_0| + R(s,s_0)]\varphi_2(s)[\alpha\xi^{'}(s) + \beta\eta^{'}(s)]ds - \Psi_2(s_0).$$

В силу свойства функции Грина легко убедиться, что функция $R(s,s_0)$ и ее первые производные являются непрерывными. Правая часть $g(s_0)$ — непрерывно–дифференцируемая функция и $g^{'}(s_0)$ удовлетворяет условию Гельдера.

2^0. В этом пункте приведем доказательство известной теоремы [4, 17] о существовании решение интегрального уравнения первого рода с логарифмической особенности в ядре

$$\int\limits_0^l \ln|s-s_0|\,\omega_*(s)ds = g(s_0), \tag{3.9}$$

Для уравнения (3.9) справедлива следующая

Теорема 3. *Если $g(s_0) \in C^{(1,\lambda)}(\sigma)$, то решение интегрального уравнение (3.9) существует в классе $\omega_*(s) \in C^{(0,\lambda)}(\sigma)$, $0 < \lambda < 1$ и задается формулой*

$$\omega_*(s_0) = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{s_0(l-s_0)}}\int\limits_0^l \frac{\sqrt{s(l-s)}g'(s)ds}{s-s_0} -$$

$$-\frac{1}{\pi^2\sqrt{s_0(l-s_0)}(\ln l - 2)}\int\limits_0^l \frac{g(s)ds}{\sqrt{s(l_1-s)}}. \tag{3.10}$$

Здесь $C^{(1,\lambda)}(\sigma)$ и $C^{(1,\lambda)}(\sigma)$ — пространства функций удовлетворяющих условию Гельдера, заданных на σ.

Доказательство. Дифференцируя (3.9), получим сингулярное интегральное уравнение

$$\int_0^l \frac{\omega_*(s)ds}{s-s_0}\,ds = g_1^{'}(s_0), \tag{3.11}$$

общее решение которого имеет вид (см. например [5, 16])

$$\omega_*(s_0) = -\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{s_0(l-s_0)}}\int_0^l \frac{\sqrt{s(l-s)}}{s-s_0}\,g_1^{'}(s)ds \pm \frac{C}{\sqrt{s_0(l-s_0)}}. \tag{3.12}$$

Выбирая то частное решение уравнение (3.12), которое является решением и уравнения (3.9), (т. е. выбирая C).

Таким образом, уравнение (3.9) имеет решение с точностью до константы [16] и для выделения единственного решения надо знать значение интеграла от функции $\omega_*(s)$ на отрезке $[0, l]$.

Для этого умножим уравнение (3.9) на $[s_0(l-s_0)]^{-1/2}$, проинтегрируем на отрезке $[0, l]$ и меняя порядок интегрирования в левой части, придем к равенству

$$\int_0^l \omega_*(s)ds \int_0^l \frac{\ln|s-s_0|}{\sqrt{s_0(l-s_0)}}ds_0 = \int_0^l \frac{g(s)ds}{\sqrt{s(l-s)}}. \tag{3.13}$$

В силу известной соотношения [4, стр. 591]

$$\int_0^l \frac{\ln|s-s_0|}{\sqrt{s_0(l-s_0)}}ds_0 = \pi(2-\ln l)$$

равенство (3.13) примет вид

$$\int_0^l \omega_*(s)ds = \frac{1}{\pi(2-\ln l)}\int_0^l \frac{g(s)ds}{\sqrt{s(l-s)}}. \tag{3.14}$$

Следуя [10] легко видеть, что функция $\omega_*(s_0)$, определенная равенством (3.10) принадлежать классу $C^{(0,\lambda)}(\sigma_1),\ 0<\lambda<1$.

Теперь рассмотрим уравнение (3.8). Перепишем уравнение (3.8), разбив ядро уравнения на сингулярную и регулярную части, в виде

$$\int_0^{l_1} \ln|s-s_0|\,\omega_*(s)ds = g_1(s_0), \tag{3.15}$$

где

$$g_1(s_0) = \frac{2\pi(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2}g(s_0) - \int_0^{l_1} R(s,s_0)\omega_*(s)ds, \tag{3.16}$$

а l_1 — длина дуги σ_1.

Согласно условию теоремы 3 и условию (3.14) обращаем главную часть интегрального уравнения (3.8) и получаем интегральное уравнение второго рода в виде

$$\omega_{**}(s_0) + \int_0^{l_1} \frac{M(s,s_0)}{\sqrt{s(l_1-s)}}\,\omega_{**}(s)ds = g_2(s_0), \tag{3.17}$$

где

$$\omega_{**}(s) = \sqrt{s(l_1-s)}w_*(s);$$

$$M(s,s_0) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{l_1} \frac{\sqrt{\xi(l_1-\xi)}}{\xi-s_0}\,\frac{\partial R(\xi,s)}{\partial s}d\xi - \frac{1}{\ln l_1/4}\int_0^{l_1} \frac{R(\xi,s)}{\sqrt{\xi(l_1-\xi)}}d\xi;$$

$$g_2(s_0) = -\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\pi\alpha^2}\int_0^{l_1}\left[\frac{\sqrt{s(l_1-s)}}{s-s_0}g'(s_1) + \frac{1}{\ln l_1/4}\,\frac{g(s)}{\sqrt{s(l_1-s)}}\right]ds;$$

Как показано в [4, 17], к интегральному уравнению (3.17) с ядром $\dfrac{M(s,s_0)}{\sqrt{s(l_1-s)}}$ применима альтернатива Фредгольма о разрешимости.

Так как интегральное уравнение (3.17) эквивалентно задаче $A^1_{\alpha\beta}$, то в силу теоремы 1 решение интегрального уравнения (3.17) существует.

Таким образом, доказана существования решение задачи $A^1_{\alpha\beta}$ для уравнения (1.1) в случае когда $k(y) \equiv 1$.

Замечание 2. В случаях б) и в) теорема 2 доказывается без требования выполнения условия (3.10).

4. Доказательство существования решения задачи $A^k_{\alpha\beta}$.

В 1967 году Т.Д. Джураев [7] исследовал краевые задачи для модельного уравнения составного типа. Эта работа интересна тем, что она является первой работой, где предлагается новый способ доказательства существования и единственности решения краевых задач для уравнений составного типа.

Представляется интересным исследовать разрешимость задачи $A^k_{\alpha\beta}$, методом предложенным Т.Д. Джураевым, и тем самым обобщить его задачу на общие линейные уравнения составного типа.

Докажем существование решение задачи $A^k_{\alpha\beta}$. Пусть $k(y) = y^m$, здесь m — любое положительное целое число, а $x = x(s)$, $y = y(s)$ параметрические уравнения кривой σ, $0 \le s \le l$ — длина дуги σ, отсчитываемая от точки B, а l — длина всей кривой σ. Относительно кривой σ будем предполагать выполнение условий [1]:

1) функции $x = x(s)$, $y = y(s)$ на отрезке [0, l] имеют непрерывные производные $x'(s)$ и $y'(s)$, не обращающиеся одновременно в нуль; вторые производные $x''(s)$ и $y''(s)$ удовлетворяют условию Гельдера на [0, l];

2) в окрестности точек A и B выполняется условие ортогональности

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \le cy^{m+1}(s).$$

Обозначим через $\omega(s)$ неизвестные нам значения нормальной производной от искомой функции на σ_1.

В силу (2.1) и (3.1) уравнения (1.1) имеет вид

$$y^m v_{xx} + v_{yy} + A(x,y)v_x + B(x,y)v_y + C(x,y)v = c_1u - my^{m-1}u_{xx}. \tag{4.1}$$

Учитывая (1.3) – (1.4), для функции $v(x,y)$ получим граничные условия

$$v(x,y)\big|_{AB}=\lambda(x),\qquad v(x,y)\big|_{\sigma}=\mu(s), \tag{4.2}$$

здесь $\lambda(x)=\alpha\tau'(x)+\beta\nu(x)$,

$$\mu(s)=\begin{cases} w(s)(\alpha x_n+\beta y_n)+\varphi_1'(s)(\alpha x'(s)+\beta y'(s)), & s\in\sigma_1\\ \varphi(s)(\alpha x_n+\beta y_n)+\varphi_1'(s)(\alpha x'(s)+\beta y'(s)), & s\in\sigma_2.\end{cases}$$

Таким образом, задача (1.1)–(1.4) сведена к определению регулярного решения уравнения (4.1) с краевыми условиями (4.2).

Решение последней задачи в области D представим в виде [6]

$$v(x,y)=\iint\limits_D\left[G_2(x,y;\xi,\eta)+P(x,y;\xi,\eta)\right](c_1u+m\eta^{m-1}u_{\xi,\xi})d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_\sigma\left\{A_s\left[G_2(x,y;s)\right]+\overline{K_0}(x,y;s)+\overline{K_{00}}(x,y;s)\right\}\mu(s)ds+$$

$$+\int\limits_0^1\left\{\frac{\partial G_2(x,y;\xi,0)}{\partial\eta}+K_0(x,y;\xi,0)+K_{00}(x,y;\xi,0)\right\}[\alpha\tau'(\xi)+\beta\nu(\xi)]d\xi, \tag{4.3}$$

где $G_2(x,y;\xi,\eta)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения

$$y^m v_{xx}+v_{yy}=0, \tag{4.4}$$

которая представима в виде [7, 20]

$$G_2(x,y;\xi,\eta)=g(x,y;\xi,\eta)+H(x,y;\xi,\eta),$$

здесь

$$g(x,y;\xi,\eta)=k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\gamma-2}\cdot r_1^{-2\gamma}\cdot\left(1-\frac{r^2}{r_1^2}\right)^{1-2\gamma}F\left(1-\gamma,\,1-\gamma,\,2-2\gamma;\,1-\frac{r^2}{r_1^2}\right),$$

$$\left.\begin{matrix}r^2\\ r_1^2\end{matrix}\right\}=(x-\xi)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}}\mp\eta^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\gamma}\cdot\frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\Gamma(2-2\gamma)},\quad \gamma=\frac{m}{2(m+2)},$$

фундаментальное решение уравнения (4.4); функция $H(x,y;\xi,\eta)$ дается по формуле

$$H(x,y;\xi,\eta)=\int\limits_0^l\mu(t,x,y))A_t[g(\xi,\eta;x,y)]dt.$$

где

$$A_s[g(x,y;\xi,\eta)]=\eta^m\frac{d\eta}{ds}\frac{\partial g(x,y;\xi,\eta)}{\partial\xi}-\frac{d\xi}{ds}\frac{\partial g(x,y;\xi,\eta)}{\partial\eta};$$

а $\mu(t,x,y)$ является решением интегрального уравнения Фредгольма [20]

$$\mu(s,x,y)-2\int\limits_0^l A_s[g(t;\xi(s),\eta(s))]\mu(t,x,y)dt=2g(x,y;\xi(s),\eta(s));$$

$P(x,y;\xi,\eta)$, $\overline{K_0}(x,y;s)$, $\overline{K_{00}}(x,y;s)$, $K_0(x,y;\xi,0)$ и $K_{00}(x,y;\xi,0)$ — известные функции, которые выражаются через $G_2(x,y;\xi,\eta)$.

В формуле (4.3) в функцию $\mu(s)$ входит неизвестная пока функция $\omega(s)$; для ее определении силу условия

$$u(x,y) = \varphi_{11}(x,y), \qquad (x,y) \in \sigma_1$$

интегрируем (3.1), находим

$$u(x,y) = \frac{1}{\beta}\int\limits_{\phi(x)}^{y} v\left(x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}t, t\right)dt + \varphi_{11}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}\phi(x), \phi(x)\right), \qquad (4.5)$$

где $\varphi_1(x,y) = \varphi_{11}(x,y)$ если $(x,\, y) \in \sigma_1$;

$$\phi(x) = \left[\frac{(m+2)^2}{4}x(1-x)\right]^{1/(m+2)}, \qquad x_0 \le x \le 1.$$

Координаты $(x_0,\, y_0)$ точки касания прямой $\beta x - \alpha y = c$ с кривой σ будут

$$\frac{m+2}{4}(1-2x_0)\left[\frac{(m+2)^2}{4}x_0(1-x_0)\right]^{-(m+1)/(m+2)} = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$y_0 - \frac{m+2}{4}(1-2x_0)\left[\frac{(m+2)^2}{4}x_0(1-x_0)\right]^{-(m+1)/(m+2)} = -\frac{c}{d},$$

$$\beta x_0 - \alpha y_0 = c.$$

Подставляя (4.3) в (4.5) и интегрируя по частям, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции $u(x,y)$:

$$u(x,y) - \iint\limits_{D}\left[K(x,y;\xi,\eta)c_1(\xi,\eta) - m\eta^{m-1}K_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)\right]u(\xi,\eta)d\xi d\eta = \psi_2(x,y), \qquad (4.6)$$

здесь

$$K(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{\beta}\int\limits_{\phi(x)}^{y}\left[G_2\left(x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}t, t;\xi,\eta\right) + P\left(x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}t, t;\xi,\eta\right)\right]dt,$$

$$\psi_2(x,y) = \int\limits_{\sigma}\left\{\frac{1}{\beta}\int\limits_{\phi(x)}^{y}\left(A_s\left[G_2\left(x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}t, t; s\right)\right] + \overline{K_0}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}t, t; s\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \overline{K_{00}}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}t, t; s\right)\right)dt\right\}\mu(s)ds + \psi_1(x,y),$$

$\psi_1(x,y)$ выражается через известные функции.

Нетрудно показать, что функция $K(x,y;\xi,\eta)$ удовлетворяет неравенствам

$$|K_\xi(x,y;\xi,\eta)| < c_1 \ln r; \quad |K_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)| < \frac{c_2}{r},$$

где $c_1,\ c_2 = const > 0, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + \dfrac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}} - \eta^{\frac{m+2}{2}}\right)^2.$

Отсюда видно, что к уравнению (4.6) нельзя непосредственно применить теорию Фредгольма, так в точки $x = \xi$, $y = \eta$ ядро

$$K_1(x,y;\xi,\eta) = K(x,y;\xi,\eta)c_1(\xi,\eta) - m\eta^{m-1}K_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)$$

обращается в бесконечность, как $\frac{1}{r}$.

Поэтому вместо уравнения (4.6) рассмотрим интегральное уравнение с итерированным ядром

$$u(x,y)-\iint\limits_D K_2(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta=\psi_\xi(x,y), \tag{4.7}$$

здесь

$$K_2(x,y;\xi,\eta)=\iint\limits_D K_1(x,y;\xi',\eta')K_1(x,y;\xi',\eta')d\xi' d\eta',$$

$$\psi_3(x,y)=\psi_2(x,y)+\iint\limits_D K_1(x,y;\xi,\eta)\psi_2(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{4.8}$$

Решая уравнения (4.7), находим

$$u(x,y)=\psi_3(x,y)+\iint\limits_D \Gamma_3(x,y;\xi,\eta)\psi_3(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{4.9}$$

где $\Gamma_3(x,y;\xi,\eta)$ — резольвента ядра $K_2(x,y;\xi,\eta)$.

Учитывая (4.8), из (4.9) имеем

$$u(x,y)=\int\limits_\sigma\left\{\frac{1}{\beta}\int\limits_{\phi(x)}^{y}A_s\left[g\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;s\right)\right]dt\right\}\mu(s)ds+$$

$$+\int\limits_\sigma Q(x,y;s)\mu(s)ds+\psi_4(x,y), \tag{4.10}$$

здесь

$$w_*(s)=(\alpha\xi_n+\beta\eta_n)w(s),$$

$$Q(x,y;s)=k_1(x,y;s)+\iint\limits_D K_1(x,y;\xi,\eta)k_1(\xi,\eta;s)d\xi d\eta+$$

$$+\iint\limits_D \Gamma_3(x,y;\xi,\eta)[k_1(\xi,\eta;s)+\iint\limits_D K_1(\xi,\eta;\xi',\eta')k_1(\xi',\eta';s)d\xi' d\eta']d\xi d\eta,$$

$$k_1(x,y;s)=\frac{1}{\beta}\int\limits_{\phi(x)}^{y}\left\{A_s\left[\rho_2\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;s\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\overline{K_0}\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;s\right)+\overline{K_{00}}\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;s\right)\right\}dt+$$

$$+\frac{m}{\beta}\,\eta^{m-1}K(x,y;s)\frac{\xi_n^2}{(\alpha\xi_n+\beta\eta_n)},$$

$\psi_4(x,y)$ — известная функция.

Далее заметим, что функцию $A_s\left[g(x,y;s)\right]$ можно представить в виде

$$A_s[g(x,y;s)]=g_1(x,y;s)+g_2(x,y;s)p(x,y;s),$$

где

$$g_1(x,y;s)=\frac{m}{4}\frac{\xi'(s)}{\eta(s)}g(x,y;\xi(s),\eta(s)),$$

$$g_2(x,y;s) = k(\gamma-1)yr_1^{2\gamma-2}F\left(1-\gamma,1-\gamma,2-2\gamma,1-\frac{r^2}{r_1^2}\right);$$

$$p(x,y;s) = \frac{1}{r^2}\bigg[(2\eta^{m+1}\eta'(s)(x-\xi)+$$

$$+\frac{m+2}{2}\xi'(s)(x-\xi)^2 + \frac{2}{m+2}\xi'(s)(y^{m+2}-\eta^{m+2})\bigg].$$

Теперь вычислим производные функции $u(x,y)$ по x и y, после некоторых преобразований получим

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \int\limits_\sigma \mu(s)\left\{\frac{4}{m+2}\eta^{\frac{m+2}{2}}(s)\, g_2(x,y;s)\,\frac{y^{\frac{m+2}{2}}-\eta^{\frac{m+2}{2}}}{r^2}+\right.$$

$$\left. +h_1(x,y;s)\right\}ds + \frac{\partial\psi_4(x,y)}{\partial x}, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \int\limits_\sigma \mu(s)\left\{2y^{\frac{m}{2}}\,\eta^{\frac{m+2}{2}}(s)\, g_2(x,y;s)\,\frac{x-\xi}{r^2}+\right.$$

$$\left. +h_2(x,y;s)\right\}ds + \frac{\partial\psi_4(x,y)}{\partial y}, \tag{4.12}$$

здесь

$$h_1(x,y;s) = \frac{1}{\beta}\int\limits_{\phi(x)}^{y}\left\{\frac{\partial g_1}{\partial x}\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;s\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial g_2}{\partial x}\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;s\right)p\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;s\right)+\frac{\partial H}{\partial x}\right\}dt;$$

$$h_2(x,y;s) = \frac{1}{\beta}\int\limits_{\phi(x)}^{y}\left\{\frac{\partial g_1}{\partial y}\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;s\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial g_2}{\partial y}\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;s\right)p\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;s\right)+\frac{\partial H}{\partial y}\right\}dt;$$

В формулах (4.11) и (4.12) необходимо перейти к пределу, устремив точки x, y к точке $x(s_0)$, $y(s_0)$ лежащей на дуге σ_1.

Пусть

$$v_1(x,y) = \int\limits_\sigma \rho(s)\frac{\xi(s)-x}{r^2}\xi'(s)ds;$$

$$v_2(x,y) = \int\limits_\sigma \rho(s)\eta^{\frac{m}{2}}(s)\frac{\frac{2}{m+2}\left(\eta^{\frac{m+2}{2}}(s)-y^{\frac{m+2}{2}}\right)}{r^2}\eta'(s)ds,$$

то нетрудно показать [7], что справедливы следующие формулы предельного перехода

$$v_1 = \pi\,\rho(s_0)\,\frac{\xi'(s_0)\,\eta'(s_0)\,\eta^{\frac{m}{2}}(s_0)}{\xi'^2(s_0)+y^m(s_0)\,\eta'(s_0)} + v_{10}; \tag{4.13}$$

$$v_2 = -\pi\,\rho(s_0)\,\frac{\xi'(s_0)\,\eta'(s_0)\,\eta^{\frac{m}{2}}(s_0)}{\xi'^2(s_0) + y^m(s_0)\,\eta'(s_0)} + v_{20}; \tag{4.14}$$

где $\rho(s) = 2\mu(s) y^{\frac{m}{2}} \eta^{\frac{m+2}{2}}(s)\, g_2(x, y; s)$, а индекс нуль в v_1 и v_2 показывает, что точка $(x,\, y)$ находится на дуге σ_1.

Вводя обозначения $x = \xi(s_0)$, $y = \eta(s_0)$ и применяя к равенствам (4.11), (4.12) формулы предельного перехода (4.13), (4.14), после некоторых вычислений приходим к сингулярному интегральному уравнению относительно функции $\omega(s_0)$:

$$(\beta\cos\theta_0 - \alpha\sin\theta_0)\,\omega'(s_0) + \frac{\alpha\cos\theta_0 + \beta\sin\theta_0}{2\pi}\int\limits_{\sigma_1}\frac{\omega'(s)}{s_0 - s}ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_1} k(s_0, s)\omega'(s)ds = \gamma(s_0); \tag{4.15}$$

здесь

$$\theta_0 = \arg\left(s_0 - \frac{1}{2}\right),$$

$$k(s_0, s) = \frac{K_1(s_0, s) - K_1(s_0, s_0)}{s_0 - s}\eta'(s) + \frac{K_2(s_0, s) - K_2(s_0, s_0)}{s_0 - s}\xi'(s) +$$

$$+ \left[h_1(s_0, s)\eta'(s_0) + h_2(s_0, s)\xi'(s_0)\right]\left[\beta\xi'(s) - \alpha\eta'(s)\right],$$

$\gamma(s_0)$ — заданная функция.

Исследования показывают, что индекс χ уравнения (4.15) равен нулю (см. например параграф 2). С другой стороны, однородное уравнение, соответствующее уравнению (4.15), имеет только тривиальное решение. Отсюда следует, что уравнение (4.15) всегда разрешимо при тех условиях которые наложены на данные задачи $A^k_{\alpha\beta}$.

Таким образом, решение задачи $A^k_{\alpha\beta}$ в случае a) определяется по формуле (4.5) или (4.10), где теперь $\mu(s)$ известна на всей σ.

Замечание 3. Рассуждая как в случае a), легко доказать существование решения задачи $A^k_{\alpha\beta}$ и в остальных случаях. Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] А.В. Бицадзе, *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка,* М.: Наука, 1966. Zbl 0148.08904

[2] А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов, *Интегральные уравнения,* М.: Изд. МГУ, 1989. Zbl 0687.45001

[3] В.Н. Врагов, *Об одном уравнении смешанно–составного типа,* Дифференциальные уравнения. **9**:1 (1973), 169–171. MR0326184

[4] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи,* М.: Наука, 1977. MR0486547

[5] Э.А. Гусеинов, А.С. Ильинский, *Интегральные уравнения I рода с логарифмической особенности в ядре и их применение в задачах дифракции на тонких экранах,* Журнал вычислительной математики и математической физики, **27**:7 (1987), 1050–1057. MR0903232

[6] Т.Д. Джураев, *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно–составного типов,* Ташкент: Изд. «Фан», 1979. MR0552274

[7] Т.Д. Джураев, *Об единственности и существовании решений некоторых краевых задач для уравнений составного типа,* Известия АН УзССР. Серия физико–математических наук. **3** (1967), 10–16. MR0223763

[8] Т.Д. Джураев, *Об единственности решения некоторых краевых задач для одного класса уравнений составного типа,* Известия АН УзССР. Серия физико–математических наук. **4** (1967), 3–5. MR0218760

[9] Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов, *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа,* Ташкент: Изд. «Фан», 1986.

[10] В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров, *Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики,* М.: Изд. МГУ, 1987. MR0921236

[11] А.И. Кожанов, *О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, неразрешенных относительно старшей производной* Сиб. мат. журн. **35**:2 (1994), 359–376. MR1288268

[12] А.И. Кожанов, *Регулярные решения некоторых вырождающихся уравнений соболевского типа.* Докл. РАН. **363**:4 (1998), 447–449. MR1702737

[13] А.И. Кожанов, *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка,* Новосибирск. НГУ, 1990. MR1202242

[14] A.I. Kozhanov, *Composite Type Equation and Inverse Problem.* Utrecht, the Netherlands, VSP, 1999. MR1745761

[15] В.И. Корзюк, О.А. Конопелько, Е.С. Чеб, *Граничные задачи для уравнений четвертого порядка гиперболического и составного типов,* Современная математика. Фундаментальная направления. **36** (2010), 87–111. MR2752652

[16] И.К. Лифанов, *К исследованию характеристического интегрального уравнения первого рода с логарифмической особенностью,* Дифференциальные уравнения. **42**:4 (2006), 556–559. MR2296531

[17] Н.И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения,* М.: Наука, 1968. MR0355495

[18] А.М. Нахушев, *Задачи со смешением для уравнений в частных производных,* М.: Наука, 2006. Zbl 1135.35002

[19] С.Г. Пятков, *О разрешимости некоторых классов уравнений смешанно-составного типа третьего порядка,* Препринт **8**, Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1980, 22 с.

[20] М.С. Салахитдинов, *Уравнения смешанно–составного типа,* Ташкент: Изд. «Фан», 1974. MR0608983

[21] Т.Д. Джураев, О.С. Зикиров, *Нелокальные краевые задачи для одного класса уравнений третьего порядка составного типа,* Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд. ИМ СО РАН, 2007, 137–149.

[22] O.S. Zikirov, *A non-local boundary value problem for third-order linear partial differential equation of composite type,* Mathematical Modelling and Analysis, **14**:3 (2009), 407–421. MR2548434

Обиджан Салижанович Зикиров
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская 2,
100174, Ташкент, Узбекистан
E-mail address: zikirov@yandex.ru