

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

*Том 10, стр. 170–179 (2013)*УДК 512.7
MSC 14H30, 14H57

ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕГАКАРТ

Б.С. Бычков

ABSTRACT. Here we compute some dessins d'enfants, corresponding to the strata of dimension 1 in the spaces of the rational functions of degree less than 6 on the curves of genus 0, 1, 2.

Keywords: megamap, dessin d'enfant, Belyi function, ramified covering, braid group.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пространства рациональных функций данной степени на кривых данного рода естественным образом стратифицированы в зависимости от порядков ветвлений функций над их критическими значениями [7]. Страты минимальной (нулевой) размерности отвечают парам Белого [2] — функциям с тремя критическими значениями. Как показал Г.В.Белый [1], кривые определения таких функций и сами эти функции определены над полем алгебраических чисел. Исследованию пар Белого посвящена обширная литература.

Страты размерности 1 в пространствах рациональных функций состоят из функций с четырьмя критическими значениями. Разными авторами [5], [8] было замечено, что на всякой неприводимой компоненте такого страта естественным образом строится пара Белого. Как показано в [3], любая пара Белого реализуется таким образом.

Вычисление пар Белого, в том числе, отвечающих стратам размерности 1, представляет собой вычислительно трудоёмкое занятие. В большинстве случаев их удаётся вычислить лишь в комбинаторных терминах — описать соответствующий паре детский рисунок (в терминологии Гротендика [4]). Определить же точку в пространстве модулей, отвечающую кривой определения данной

БУЧКОВ, B.S., THE COMPUTATION OF MEGAMAPS.

© 2013 Бычков Б.С.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-31233).

Поступила 1 октября 2012 г., опубликована 28 февраля 2013 г.

пары Белого, а также найти явное выражение для функции Белого, удаётся редко.

В настоящей статье мы приводим результаты вычислений детских рисунков, отвечающим стратам размерности 1 в пространствах рациональных функций степеней меньших 6 на кривых родов 0, 1, 2. В вычислениях мы следуем алгоритму, предложенному А.Звонкиным [8]. Алгоритм реализован в системе Maple.

Во втором разделе работы приведены все необходимые определения и утверждения. Третий раздел посвящен описанию реализации алгоритма. В четвёртом разделе собраны результаты вычислений.

Автор благодарен А.К. Звонкину, М.Э. Казаряну, С.К. Ландо и Г.Б. Шабату за полезные обсуждения и помощь в написании статьи.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ УТВЕРЖДЕНИЙ

2.1. Созвездия и разветвлённые накрытия сферы. Используемая ниже терминология следует [2]. Там же можно найти недостающие определения. Перестановки мы умножаем слева направо.

Определение 2.1. Пусть C и X — два линейно связанных топологических пространства, а $f : C \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Тройка (C, X, f) называется *неразветвлённым накрытием пространства X пространством C* , если у каждой точки X найдётся такая окрестность V , что прообраз $f^{-1}(V) \subset C$ гомеоморфен $V \times S$, где S — дискретное множество. Мощность множества S называется *степенью накрытия*. Накрытие степени n называется *n -листным*.

Пусть $f : C \rightarrow X$ — накрытие, $x_0 \in X$. Каждый непрерывный путь $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, концы которого совпадают с точкой x_0 , а внутренние точки отличны от x_0 , определяет перестановку множества $f^{-1}(x_0)$. Эта перестановка определяется следующим образом. Выкинув из полного прообраза $f^{-1}(\gamma) \subset C$ пути γ прообразы $f^{-1}(x_0)$ точки x_0 , мы разбиваем его на несвязное объединение ориентированных интервалов. Отображение множества $f^{-1}(x_0)$ в себя, переводящее начало каждого интервала в его конец, является перестановкой этого множества и называется *перестановкой монодромии*.

Пусть $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1 \setminus Y$ — конечнолистное накрытие проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ с k выколотыми точками y_1, \dots, y_k , $Y = \{y_1, \dots, y_k\} \subset \mathbb{C}P^1$. Проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ снабжена ориентацией, согласованной с комплексной структурой, то есть мы знаем, в каком направлении, положительном (против часовой стрелки) или отрицательном (по часовой стрелке) совершается обход вокруг какой-то из точек сферы. Пусть $y_0 \in \mathbb{C}P^1 \setminus Y$. Рассмотрим k ориентированных путей c_i из y_0 в y_i , $i = 1, \dots, k$ на $\mathbb{C}P^1$, таких, что они не пересекаются вне y_0 и входят в точку y_0 именно в таком порядке при обходе против часовой стрелки. Превратим каждый путь c_i в петлю $\gamma_i \in \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus Y, y_0)$ следующим образом: петля γ_i идёт вдоль c_i до тех пор, пока не попадёт в малую окрестность точки y_i , затем она делает полный оборот вокруг y_i в положительном направлении и, наконец, возвращается обратно в y_0 вдоль c_i . Перестановку монодромии вдоль пути γ_i будем обозначать через g_i .

Определение 2.2. Цикловой структурой перестановки $g \in S_n$ называется разбиение λ числа n , состоящее из длин независимых циклов перестановки g .

Определение 2.3. Группа $G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$, порождённая перестановками g_i , называется группой монодромии накрытия.

Определение 2.4. Последовательность перестановок $[g_1, \dots, g_k]$, $g_i \in S_n$, такая, что группа $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ транзитивно действует на множестве из n элементов и такая, что $g_1 \cdot \dots \cdot g_k = id$ называется созвездием. Набор $[\lambda_1, \dots, \lambda_k]$ разбиений числа n , состоящий из цикловых структур λ_i перестановок g_i называется паспортом созвездия.

Два созвездия $[g_1, \dots, g_k]$ и $[g'_1, \dots, g'_k]$ изоморфны, если существует перестановка $h \in S_n$ такая, что $g'_i = h^{-1}g_i h$ при $i = 1, \dots, k$.

Утверждение 2.5. Набор перестановок $[g_1, \dots, g_k]$, порождающий группу монодромии неразветвлённого накрытия проколотой сферы, образует созвездие.

Конструкция работает и в обратном направлении.

Утверждение 2.6. Для любого созвездия существует соответствующее неразветвлённое накрытие проколотой сферы.

Нас интересуют классы изоморфизмов накрытий, поэтому сформулируем ещё одно важное утверждение.

Утверждение 2.7. При фиксированной последовательности образующих $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus Y, y_0)$ два неразветвлённых накрытия сферы $\mathbb{C}P^1 \setminus Y$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие созвездия.

Всякому конечнократному накрытию проколотой сферы однозначным образом сопоставляется разветвлённое накрытие сферы без проколов. Для этого компактифицируем проколотую сферу $\mathbb{C}P^1 \setminus Y$, добавив все недостающие точки y_1, \dots, y_k и для каждой точки y_i добавим в C столько точек, сколько независимых циклов в перестановке g_i . Новые точки в C и будут прообразами новых точек y_i с кратностями, равными длинам соответствующих циклов перестановок g_i .

Определение 2.8. Пусть C — компактная риманова поверхность. Непрерывное отображение $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ называется разветвлённым накрытием, если существует такое конечное множество точек $Y = \{y_1, \dots, y_k\} \subset \mathbb{C}P^1$, что f получается из неразветвлённого накрытия проколотой сферы $\mathbb{C}P^1 \setminus Y$ применением описанной выше конструкции.

Определение 2.9. Два разветвлённых накрытия $f_1 : C_1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ и $f_2 : C_2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ называются (гибко)эквивалентными, если найдутся такие два гомеоморфизма $u : C_1 \rightarrow C_2$ и $v : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{u} & C_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{v} & \mathbb{C}P^1 \end{array}$$

Теорема 2.10. (теорема существования Римана) Для любой последовательности точек $[y_1, \dots, y_k] \in \mathbb{C}P^1$ и любого созвездия $[g_1, \dots, g_k]$, $g_i \in S_n$ существует риманова поверхность C и мероморфная функция $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$

такая, что y_1, \dots, y_k — критические значения функции f , а g_1, \dots, g_k — соответствующие им перестановки монодромии. Разветвленное накрытие $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ единственно с точностью до изоморфизма.

Доказательство можно найти, например, в [2, с. 88].

2.2. Действие группы кос Гурвица.

Определение 2.11. *Фундаментальная группа конфигураций из k попарно различных точек на $\mathbb{C}P^1$ называется группой кос Гурвица и обозначается \mathcal{H}_k .*

Она была введена Гурвицем в [6]. Эта группа допускает следующее задание образующими и соотношениями.

Утверждение 2.12. *Группа \mathcal{H}_k задаётся $k - 1$ образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ и соотношениями*

- $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ при $|i - j| \geq 2$;
- $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ при $i = 1, \dots, k - 2$;
- $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-2} \sigma_{k-1}^2 \sigma_{k-2} \dots \sigma_2 \sigma_1 = id$.

Группа кос Гурвица \mathcal{H}_k действует на k -созвездиях следующим образом:

$$\sigma_i : [g_1, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_k] \mapsto [g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_k].$$

Теорема 2.13. *Два разветвлённых накрытия сферы гомеоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им созвездия принадлежат одной орбите действия группы кос Гурвица.*

Доказательство можно найти, например, в [2, с. 319].

2.3. Мегакарты. Рассмотрим 4-созвездие $S = [g_1, g_2, g_3, g_4]$ и соответствующее ему разветвлённое накрытие сферы с четырьмя точками ветвления $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{C}P^1$. Любые три из этих точек можно дробно-линейным преобразованием перевести в точки $0, 1$ и ∞ , тогда четвёртое критическое значение может принимать любое значение из \mathbb{C} , отличное от $0, 1, \infty$. Пусть четырьмя точками ветвления будут точки $0, y, 1, \infty$.

Определение 2.14. *Мероморфная функция $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ на компактной римановой поверхности C , множество критических значений которой состоит только из точек $0, 1$ и ∞ , называется функцией Белого. Пара (C, f) называется парой Белого.*

Отметим, что случай 1-созвездия невозможен, а случай 2-созвездия тривиален ($C = \mathbb{C}P^1, f = z^n$).

Следуя Гротендику [4], рассмотрим для функции Белого f множество $f^{-1}([0, 1]) \in C$. Это граф Γ , вложенный в поверхность C . У этого графа два вида вершин: чёрные — прообразы нуля и белые — прообразы единицы. Степень каждой вершины равна кратности соответствующего прообраза. Внутри каждой грани этого графа содержится ровно один полюс функции f , причём кратность этого полюса равна валентности грани.

Каждому детскому рисунку, таким образом, соответствует 3-созвездие, перестановки которого отвечают монодромиям вокруг точек $\{0, 1, \infty\}$.

Вернёмся к 4-созвездиям. Зафиксируем паспорт π и рассмотрим множество всех пар $H_\pi = \{(S, y)\}$, где S — созвездие с паспортом π и $y \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Нетрудно проверить [8], что верно следующее утверждение:

Утверждение 2.15. *Множество H_π обладает структурой некомпактной и, возможно, несвязной римановой поверхности.*

Утверждение 2.16. *Функция $\beta : (S, y) \mapsto y$ является функцией Белого на компактификации каждой компоненты связности H_π .*

Это утверждение очевидно следует из данных определений, потому что функция β неразветвлена вне множества $\{0, 1, \infty\}$.

Найдём тройку перестановок, описывающую детский рисунок, который задаётся функцией Белого β . Для этого нужно определить монодромию соответствующего накрытия. Зафиксируем точку $y_0 \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ и рассмотрим петли вокруг точек $0, 1$ и ∞ с началом и концом в точке y_0 , которые описывает параметр y . Выразим их через образующие группы кос Гурвица \mathcal{H}_4 :

- петля, обходящая вокруг нуля, равна $\Sigma = \sigma_1^2$;
- петля, обходящая вокруг единицы, равна $A = \sigma_2^2$;
- петля, обходящая вокруг бесконечности, равна $\Phi = \sigma_2^{-1}\sigma_3^2\sigma_2$.

Утверждение 2.17. *Перестановки Σ, A и Φ задают детский рисунок.*

Доказательство. Проверим, что $\Sigma A \Phi = id$ в \mathcal{H}_4 :

$$\sigma_1^{-1}\Sigma A \Phi \sigma_1 = \sigma_1^{-1}\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_2^{-1}\sigma_3^2\sigma_2\sigma_1 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3^2\sigma_2\sigma_1 = id.$$

□

Теорема 2.13 означает, что классы гибкой эквивалентности разветвлённых накрытий с 4 точками ветвления совпадают с орбитами действия группы $\langle \Sigma, A, \Phi \rangle$ на множестве 4-созвездий с заданным паспортом. Мощность каждой из таких орбит равна количеству листов накрытия, задающего компактификацию каждой компоненты связности H_π , то есть в точности степени функции Белого. С другой стороны, суммарная мощность всех орбит равна количеству классов изоморфизма 4-созвездий.

Следствие 2.18. *Результатом действия группы $\langle \Sigma, A, \Phi \rangle$ на множестве 4-созвездий с заданным паспортом является детский рисунок (или несвязное объединение нескольких детских рисунков) с функцией Белого $\beta : (S, y) \mapsto y$. Его рёбра взаимно-однозначно соответствуют классам изоморфизма 4-созвездий, а циклический порядок рёбер вокруг чёрных, белых вершин и граней — орбитам действия на этих классах перестановок Σ, A и Φ соответственно.*

Определение 2.19. *Мегакарта — это множество E , элементами которого являются неизоморфные классы 4-созвездий, а само оно является орбитой действия подгруппы \mathcal{P} группы \mathcal{H}_4 . $\mathcal{P} = \langle \Sigma, A, \Phi \rangle$, где $\Sigma = \sigma_1^2, A = \sigma_2^2, \Phi = \sigma_2^{-1}\sigma_3^2\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — образующие группы кос Гурвица \mathcal{H}_4 .*

Заметим, что вершины (чёрные и белые) и центры граней мегакарты отвечают совпадениям четвёртого критического значения y с точками $0, 1$ или ∞ соответственно. Таким образом, вершинам и граням мегакарты можно поставить в соответствие детские рисунки, либо несвязное объединение детских рисунков (потому что это накрытия с тремя критическими значениями). Если y совпадает с нулём, то детский рисунок задаётся тройкой перестановок $[g_1g_2, g_3, g_4]$. Действие элемента $\Sigma = \sigma_1^2$ не меняет тройку $[g_1g_2, g_3, g_4]$, следовательно, у всех рёбер, выходящих из одной чёрной вершины, тройки $[g_1g_2, g_3, g_4]$

одинаковые, то есть указанное соответствие корректно и каждой чёрной вершине соответствует один детский рисунок. Аналогично, если y совпадает с единицей, то детский рисунок задаётся тройкой перестановок $[g_1, g_2g_3, g_4]$, не меняющейся под действием элемента $A = \sigma_2^2$. И, наконец, граням соответствуют 3-созвездия $[g_1, g_2g_3g_2^{-1}, g_2g_4]$, не меняющиеся под действием элемента Φ .

3. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

В этом разделе мы описываем алгоритм перечисления мегакарт. В качестве входных данных программа получает n — степень накрытия и паспорт 4-созвездия $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]$, где λ_i — цикловая структура перестановки $g_i \in S_n$.

На первом шаге алгоритма выясняется, реализуется ли накрытие с такими данными ветвления. Для этого фиксируется перестановка g_1 циклического типа λ_1 и проверяется, существуют ли перестановки $g_2, g_3 \in S_n$ циклических типов λ_2, λ_3 соответственно, такие, что перестановка $g_1g_2g_3$ имеет циклический тип λ_4 . Если такие g_2, g_3 находятся, то накрытие реализуется. Все пары g_2, g_3 , реализующие накрытие заданного типа, записываются в отдельный список L .

На втором шаге определяется, какие из полученных созвездий изоморфны. Как уже отмечалось, количество классов изоморфизма 4-созвездий есть общее число рёбер в будущем детском рисунке (это множество может разбиваться на несколько детских рисунков — орбит действия группы \mathcal{P}). Заметим, что мы работаем с тройками перестановок, а не с четвёрками и воспользуемся следующим очевидным утверждением.

Утверждение 3.1. Пусть $s, g_1, g_2, g_3 \in S_n$. Если $sg_1s^{-1} = g_1$, и $sg_2g_3s^{-1} = g_2g_3$, то $sg_1g_2g_3s^{-1} = g_1g_2g_3$.

Таким образом, на каждую пару перестановок из списка L необходимо подействовать сопряжениями, то есть элементами из стабилизатора перестановки g_1 . Каждой паре перестановок из L присваивается порядковый номер и изоморфным парам присваиваются одинаковые номера. В дальнейшем будем работать именно с этими номерами. Список номеров будем также называть L .

На третьем шаге определяются орбиты действия группы \mathcal{P} на классах изоморфизма накрытий. Для каждого номера из L определяется номер, в который он переходит под действием каждой из трёх образующих группы \mathcal{P} , для каждого из трёх полученных номеров проводится аналогичная операция и так до тех пор, пока в процессе не появляется уже встречавшийся номер. Так получаются орбиты каждого номера при действии \mathcal{P} (это также списки номеров из L). После эти множества объединяются, если в них есть общие номера. Напомним, что множество номеров, являющееся орбитой действия элемента Σ — это в точности одна из перестановок 3-созвездия (или несколько перестановок нескольких 3-созвездий, в случае несвязной мегакарты), которое соответствует всей мегакарте. Она задаёт циклический порядок рёбер вокруг чёрных вершин мегакарты. Аналогично, орбита действия элемента A образует перестановку рёбер, задающую циклический порядок вокруг белых вершин, а орбита действия элемента Φ — циклический порядок рёбер вокруг граней.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Пусть дано разветвлённое накрытие $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$, $g = g(C)$ — род накрываемой поверхности.

Теорема 4.1. *Детский рисунок, соответствующий мегакартам при $g(C) \leq 2$ и $\deg(f) \leq 4$ имеет род 0.*

Доказательство. В таблице приведены количества рёбер, вершин (чёрных и белых) и граней детских рисунков, отвечающих мегакартам при роде покрывающей поверхности 0, 1, 2 и степени функции не более 4. Индекс у паспорта означает наличие нескольких неприводимых компонент у мегакарты при данном паспорте. \square

паспорт созвездия, $g(C)$	# рёбер	# вершин	# граней	род мегакарты
$\langle 4 2, 1, 1 2, 1, 1 2, 1, 1 \rangle, 0$	4	4	2	0
$\langle 3, 1 3, 1 2, 1, 1 2, 1, 1 \rangle, 0$	6	6	2	0
$\langle 3, 1 2, 2 2, 1, 1 2, 1, 1 \rangle, 0$	3	3	2	0
$\langle 2, 2 2, 2 2, 1, 1 2, 1, 1 \rangle_1, 0$	1	2	1	0
$\langle 2, 2 2, 2 2, 1, 1 2, 1, 1 \rangle_2, 0$	2	3	1	0
$\langle 3 2, 1 3 2, 1 \rangle, 1$	2	2	2	0
$\langle 2, 1, 1 4 2, 1, 1 4 \rangle_1, 1$	4	4	2	0
$\langle 2, 1, 1 4 2, 1, 1 4 \rangle_2, 1$	2	3	1	0
$\langle 3, 1 2, 1, 1 3, 1 4 \rangle, 1$	8	7	3	0
$\langle 2, 2 2, 1, 1 2, 2 4 \rangle_1, 1$	1	2	1	0
$\langle 2, 2 2, 1, 1 2, 2 4 \rangle_2, 1$	1	2	1	0
$\langle 2, 1, 1 2, 2 3, 1 4 \rangle, 1$	3	3	2	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 3, 1 \rangle_1, 1$	2	3	1	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 3, 1 \rangle_2, 1$	2	2	2	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 3, 1 \rangle_3, 1$	2	3	1	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 3, 1 \rangle_4, 1$	2	4	1	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 3, 1 \rangle_5, 1$	2	3	2	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 3, 1 \rangle_6, 1$	2	3	2	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 2, 2 \rangle, 1$	4	4	2	0
$\langle 3, 1 2, 2 3, 1 2, 2 \rangle, 1$	3	4	1	0
$\langle 2, 2 2, 2 2, 2 2, 2 \rangle_{1, \dots, 4}, 1$	1	2	1	0
$\langle 4 4 3, 1 3, 1 \rangle_1, 2$	6	6	2	0
$\langle 4 4 3, 1 3, 1 \rangle_2, 2$	2	3	1	0
$\langle 4 4 3, 1 2, 2 \rangle, 2$	3	3	2	0
$\langle 4 4 2, 2 2, 2 \rangle_1, 2$	2	3	1	0
$\langle 4 4 2, 2 2, 2 \rangle_2, 2$	1	2	1	0
$\langle 4 4 4 2, 1, 1, 1 \rangle, 2$	4	4	2	0

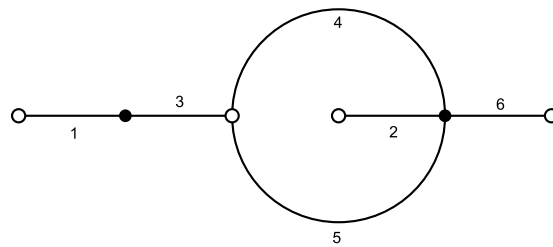


Рис. 1. Мегакарта накрытий с паспортом $\langle 3, 1|3, 1|2, 1, 1|2, 1, 1 \rangle$. Представляет собой детский рисунок на поверхности рода 0.

Пример 4.2. Мегакарте рода 0, соответствующей накрытию степени 4 с паспортом $\langle 3, 1|3, 1|2, 1, 1|2, 1, 1 \rangle$ (рис. 1), отвечает тройка перестановок

$$\Sigma = (13)(2, 5, 6, 4), A = (1)(2)(3, 5, 4), \Phi = (2, 4)(1, 3, 6, 5).$$

В следующей таблице приведены результаты работы программы для некоторых мегакарт рода 2 со степенью функции 5.

паспорт созвездия, $g(C)$	# рёбер	# вершин	# граней	род мегакарты
$\langle 5 5 4, 1 2, 1, 1, 1 \rangle, 2$	24	15	5	3
$\langle 5 5 3, 2 2, 1, 1, 1 \rangle, 2$	14	11	3	1
$\langle 5 5 3, 1, 1 3, 1, 1 \rangle_1, 2$	2	3	1	0
$\langle 5 5 3, 1, 1 3, 1, 1 \rangle_2, 2$	5	5	2	0
$\langle 5 5 3, 1, 1 3, 1, 1 \rangle_3, 2$	12	9	3	1
$\langle 5 5 3, 1, 1 3, 1, 1 \rangle_4, 2$	15	11	4	1
$\langle 5 5 3, 1, 1 2, 2, 1 \rangle_1, 2$	12	10	4	0
$\langle 5 5 3, 1, 1 2, 2, 1 \rangle_2, 2$	12	8	4	1

Пример 4.3. Неприводимой компоненте рода 0 мегакарты, соответствующей накрытию степени 5 с паспортом $\langle 5|5|3, 1, 1|2, 2, 1 \rangle$ (рис. 2), отвечает тройка перестановок

$$\Sigma = (1, 3)(2, 8, 9, 10, 4)(5, 11)(6, 12, 7),$$

$$A = (1, 2)(3, 7, 8)(4, 11)(5, 10, 12)(6)(9),$$

$$\Phi = (1, 4, 5, 6, 7)(2, 3)(8, 12, 9)(10, 11).$$

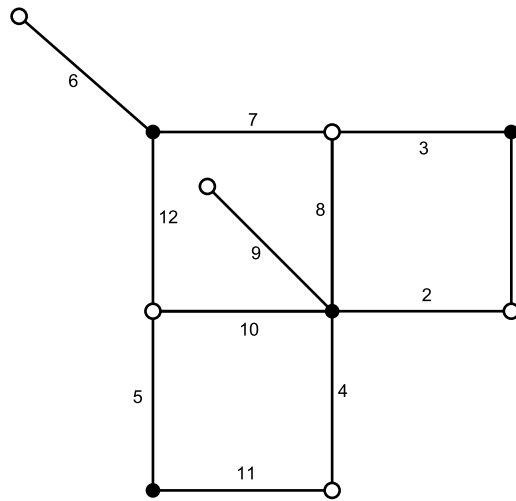


Рис. 2. Одна из мегакарт накрытий с паспортом $\langle 5|5|3, 1, 1|2, 2, 1 \rangle$. Отвечает связной компоненте H_π рода 0.

Пример 4.4. Неприводимой компоненте рода 1 с 12 рёбрами мегакарты, соответствующей накрытию степени 5 с паспортом $\langle 5|5|3, 1, 1|3, 1, 1 \rangle$ (рис. 3), отвечает тройка перестановок

$$\Sigma = (1, 3, 4, 5, 6)(2, 10, 9, 12, 7)(8, 11),$$

$$A = (1, 2)(3)(4, 9)(5, 11, 7)(6, 12, 8)(10),$$

$$\Phi = (1, 7, 8, 9, 3)(2, 6, 11, 4, 10)(5, 12).$$

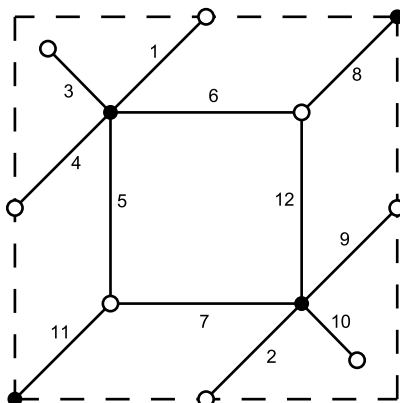


Рис. 3. Одна из четырёх мегакарт накрытий с паспортом $\langle 5|5|3, 1, 1|3, 1, 1 \rangle$.
Отвечает связной компоненте H_π рода 1.

Теорема 4.5. *Всего существует 57 связных мегакарт с $g(C) = 2$ и $\deg(f) = 5$ при 16 различных паспортах и 21 связная мегакарта с $g(C) = 3$ и $\deg(f) = 5$ при 5 различных паспортах. Максимальное количество рёбер среди соответствующих детских рисунков равно 40.*

Пример 4.6. *Как отмечалось в конце второго раздела, каждой вершине и грани мегакарты соответствует накрытие с тремя точками ветвления, то есть детский рисунок или несвязное объединение нескольких детских рисунков. В частности, вершинам мегакарты, изображённой на рисунке 1 отвечают следующие тройки перестановок, задающие детские рисунки.*

Чёрным вершинам слева направо:

$\sigma = (1, 2, 3)$, $\alpha = (2, 3)$, $\varphi = (1, 3)$ — один из несвязного объединения двух детских рисунков;

$\sigma = (1, 2, 3)$, $\alpha = (1, 4, 3, 2)$, $\varphi = (3, 4)$.

Белым вершинам слева направо:

$\sigma = (2, 4)$, $\alpha = (1, 3)(2, 4)$, $\varphi = (1, 3)$;

Следующей вершине отвечает несвязное объединение двух детских рисунков: тривиального и заданного перестановками $\sigma = (1, 4, 3)$, $\alpha = (3, 4)$, $\varphi = (1, 3)$;

$\sigma = (1, 3)$, $\alpha = (1, 3)(2, 4)$, $\varphi = (2, 4)$;

$\sigma = (3, 4)$, $\alpha = ()$, $\varphi = (3, 4)$ — один из несвязного объединения двух детских рисунков.

Внутренней грани: $\sigma = (1, 2, 3)$, $\alpha = (1, 2)$, $\varphi = (2, 3)$ и тривиальный детский рисунок.

Внешней грани: $\sigma = (1, 2, 3)$, $\alpha = (3, 4)$, $\varphi = (1, 3, 4, 2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. В. Бельй, *О расширениях Галуа максимального кругового поля*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **43**:2 (1979), 267–276. MR0534593
- [2] А. К. Звонкин, С. К. Ландо *Графы на поверхностях и их приложения*, МЦНМО. 2010.

- [3] S. Diaz, R. Donagi, D. Harbater, *Every curve is a Hurwitz space*, Duke Math. J., **59**:3 (1989), 737–746. MR1046746
- [4] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, 1984.
- [5] M. Fried, *Fields of definition of function fields and Hurwitz families — groups as Galois groups*, Comm. Algebra, **5**:1 (1977), 17–82. MR0453746
- [6] A. Hurwitz, *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Math. Ann., **39** (1891), 1–61. MR1510692
- [7] S. Lando, D. Zvonkine, *Counting ramified coverings and intersection theory on spaces of rational functions. I. Cohomology of Hurwitz spaces*, Mosc. Math. J., **7**:1 (2007), 85–107. MR2324558
- [8] A. Zvonkin, *Megamaps: Construction and Examples*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Conference edition: Discrete Models: Combinatorics, Computation and Geometry (July 2001), 329–339. MR1888783

БОРИС СЕРГЕЕВИЧ БЫЧКОВ
НИУ ВШЭ,
ул. Мясницкая 20,
101000, Москва, Россия
E-mail address: boris.bychkov@gmail.com