S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 180–199 (2013) УДК 519.17+512.54

MSC 05C25

О ГРАФЕ КОММУТИРОВАНИЯ TI-ПОДГРУПП В ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУППАХ

Н. Д. Зюляркина

Abstract. We study the commutation graph $\Gamma_G(A)$ of cyclic TI-subgroup A of order 4 in a finite group G with quasisimple generalized Fitting subgroup $F^*(G)$. It is proved that, if $F^*(G)$ is a ortogonal group, then the graph $\Gamma_G(A)$ is edge-regular but not coedge-regular graph.
Keywords: finite group, cyclic TI-subgroup, commutation graph.

1. Предварительные результаты

Пусть G — группа, $A \leq G$. Будем говорить что A является TI-подгруппой группы G если для любого элемента $g \in G \setminus N_G(A)$ имеем $A \cap A^g = 1$.

Конечные группы, содержащие 2-группу A, являющуюся TI-подгруппой, широко изучались и в настоящий момент наименее исследоваными остались случаи когда A либо циклическая, либо элементарная абелева группа. Заметим, что если A — циклическая группа, то достаточно изучить ситуацию, когда $|A| = 4$.

В дальнейшем будем считать, что G — конечная группа, $A \leq G$, $A \simeq Z_4$, $A = \langle a \rangle$ и $a_0 = a^2$.

Лемма 1. *A является TI-подгруппой в G тогда и только тогда, когда $A \lhd C_G(a_0)$.*

Доказательство. Утверждение следует из определения TI-подгруппы.

Zyulyarkina, N.D., On the commutation graph of cyclic TI-subgroup in an ortogonal group G.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Поступила 13 января 2013 г., опубликована 1 марта 2013 г.

Далее будем предполагать, что A является TI-подгруппой конечной группы G.

Одним из основных методов исследования групп, содержащих TI-подгруппу, является индукция. Кроме того существенно различаются случаи, когда G содержит компоненты, а когда нет.

Лемма 2. *Пусть L — компонента G. Тогда $A \leq N_G(L)$.*

Доказательство. Смотри доказательство леммы 1.1 из [2].

Ввиду леммы 2 при исследовании групп, содержащих компоненты, вопрос сводится к изучению групп вида $G = F^*(G)A$, где $F^*(G)$ — квазипростая группа. Поэтому для построения индукционных предположений полезно иметь информацию о том для каких известных квазипростых групп возможна такая конструкция, и какими свойствами в таких группах обладает подгруппа A.

В дальнейшем будем считать, что группа G будет представляться в виде $G = XA$, где $X = F^*(G)$ — частное $\Omega_n(q)$ по центральной подгруппе, q нечетно, а A — циклическая TI-подгруппа порядка 4 в G, не лежащая в $Z(F^*(G))$.

Возможности для $G = F^*(G)A$ описаны в [4], [3] и [2].

Ввиду того, что классические группы Шевалле можно представить как группы автоморфизмов векторных пространств, нам понадобятся сведения об инволюциях и полуинволюциях в таких группах.

Пусть V — векторное пространство размерности n над полем $F = GF(q)$, q нечетно. Как показано в разделе 3A из [5] с каждой инволюцией $w \in GL_n(q)$ можно связать два подпространства из V, определяемые следующим образом:

$$V_w^+ = C_V(w) = \{v \in V \mid \ w(v) = v\}$$

$$V_w^- = [V, w] = \{v \in V \mid \ w(v) = -v\}$$

Тогда имеет место разложение $V = V_w^+ \oplus V_w^-$, и тип инволюции w определяется как $dim\ V_w^-$. Подпространство V_w^- будем называть носителем инволюции w.

Для изучения групп с заданными свойствами можно исследовать связанные с ними комбинаторные объекты (графы, схемы, геометрии и др.) Одним из таких объектов является граф коммутирования.

Если G — группа, A — TI-подгруппа группы G, то граф коммутирования $\Gamma_G(A)$ определяется следующим образом:

вершинами графа $\Gamma_G(A)$ являются подгруппы, сопряженные с A, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда они различны и коммутируют.

Неориентированный граф Γ будем называть простым, если он не содержит петель и кратных ребер. В дальнейшем будут рассматриваться только простые графы.

Пусть a является вершиной графа Γ. Будем называть окрестностью вершины a множество [a] вершин, смежных с a.

Для смежных (различных не смежных) вершин u и v графа Γ обозначим через $\lambda(u, v)$ $(\mu(u, v))$ число элементов в $[u] \cap [v]$.

Особое внимание в теории графов уделяется графам с различными условиями симметричности.

Граф Γ называется регулярным с параметром k если для любой его вершины v выполняется равенство $|[v]| = k$. Граф Γ называется реберно регулярным с параметрами (k, λ) если он регулярен с параметром k и для любых смежных вершин u и v выполняется равенство $\lambda(u, v) = \lambda$. Граф Γ называется кореберно регулярным с параметрами (k, μ) если он регулярен с параметром k и для любых различных не смежных вершин u и v выполняется равенство $\mu(u, v) = \mu$. Граф Γ называется вершинно (реберно, кореберно) транзитивным, если группа его автоморфизмов действует транзитивно на множестве вершин (упорядоченных ребер, упорядоченных коребер).

Очевидно, что вершинно транзитивный граф Γ будет регулярным, а реберная (кореберная) транзитивность влечет равенство значений $\lambda(u, v)$ $(\mu(u, v))$ для любых смежных (различных не смежных) вершин u и v из Γ.

В данной статье изучаются графы коммутирования TI-подгрупп в группах, близких к простым на предмет их симметричности.

2. Свойства ортогональных пространств.

В этом параграфе V — векторное пространство над полем $F = GF(q)$, q нечетно, а $(*, *)$ — определенное на $V \times V$ скалярное произведение, задаваемое симметричной билинейной формой. Пространство V будем называть ортогональным.

Если M — непустое подмножество из V, то ортогональным дополнением к M назовем множество $M^{\perp} = \{y \in V \mid (x, y) = 0$ для всех $x \in M\}$. Радикалом ортогонального пространства V называется подпространство $V^* = V^{\perp}$. Пространство V называется невырожденным, если $V^* = \{0\}$.

Если V — невырожденное пространство, то группа $GO(V)$ состоит из всех невырожденных линейных преобразований u пространства V, таких, что для любых векторов $v_1, v_2 \in V$ выполнено равенство $(u(v_1, v_2)) = r_u(v_1, v_2)$, где элемент r_u, называемый мультипликатором преобразования u, лежит в $F^{\#}$ и зависит только от u. Обозначим через Z группу $Z(GL(V))$.

Группа $O(V)$ состоит из тех элементов $u \in GO(V)$, для которых $r_u = 1$. Пусть $SO(V) = O(V) \cap SL(V)$. Через $\Omega(V)$ обозначим группу $[O(V), O(V)]$, а через $P\Omega(V)$ — группу $\Omega(V)/Z(\Omega(V))$. Если $dim\ V \geq 3$, то по разделу 3D из [5] $C_{GO(V)}(\Omega(V)) = Z$.

Как и в разделе 3D из [5] будем обозначать через $D(V)$ дискриминант пространства V, а через $ind(V)$ — размерность максимальных вполне изотропных подпространств пространства V. Пусть $dim\ V = m$.

Если m нечетно, то $ind(V) = (m-1)/2$, и группы $GO(V)$, $O(V)$, $SO(V)$, $\Omega(V)$ и $P\Omega(V)$ обозначаются как $GO_m(q)$, $O_m(q)$, $SO_m(q)$, $\Omega_m(q)$ и $P\Omega_m(q)$. В этом случае $GO_m(q) = SO_m(q) \times Z$ (см. раздел 3D из [5])

Если же m четно, то возможны два случая:

a) $ind(V) = m/2, D(V) = (-1)^{m/2}(q-1)^2$ и мы имеем дело с группами $GO^+_m(q)$, $O^+_m(q)$, $SO^+_m(q)$, $\Omega^+_m(q)$ и $P\Omega^+_m(q)$, либо

b) $ind(V) = m/2 - 1, D(V) = (-1)^{m/2}c(q-1)^2$, где $c \notin (F^{\#})^2$, и соответствующие группы обозначаются как $GO^-_m(q)$, $O^-_m(q)$, $SO^-_m(q)$, $\Omega^-_m(q)$ и $P\Omega^-_m(q)$.

В случае a) будем называть V пространством положительного типа (такое пространство называется гиперболическим), а в случае b) пространством отрицательного типа (такое пространство иногда называется эллиптическим).

Вектор $v \in V$ называется изотропным, если $(v, v) = 0$. Невырожденное пространство V будем называть квадратичным, если дискриминант V является квадратом, и неквадратичным в противном случае. Заметим, что по разделу 3D из [7] в любом невырожденном пространстве V размерности n для любого

$0 < m < n$ и любого $d \in F^{\#}/(F^{\#})^2$ будет существовать подпространство W размерности m с $D(W) = d$.

Лемма 3. *Пусть V — невырожденное ортогональное пространство размерности $2m$, W его изотропное подпространство размерности l, а $L = W^{\perp}$. Тогда L/L^* имеет тот же тип, что и V.*

Доказательство.

Случай 1. Пусть V является пространством положительного типа. Тогда $V = V_1 \oplus V_2$, где $V_1 =< e_1, \dots, e_m >$ и $V_2 =< e'_1, \dots, e'_m >$ максимальные изотропные подпространства, $(e_i, e'_j) = 0$ при $i \neq j$, а $(e_i, e'_i) = 1$. Так как любое изотропное подпространство содержится в максимальном изотропном подпространстве, а все максимальные изотропные подпространства изометричны, то можно считать, что $W =< e'_1, \dots, e'_l >$. Тогда $L =< e_{l+1}, \dots, e_m > \oplus V_2$, $L^* = W$. Пусть $\bar{L} = L/L^*$. Тогда $dim\bar{L} = 2(m-l)$ и $< \bar{e}_{l+1}, \dots, \bar{e}_m >$ будет максимальным изотропным подпространством размерности $m - l$ в $\bar{L}$. Следовательно, $\bar{L}$ является пространством положительного типа.

Случай 2. Пусть V является пространством отрицательного типа. Тогда $V = (V_1 \oplus V_2) \perp V_3$, где V_3 двумерное отрицательное пространство, $V_1 =< e_1, \dots, e_{m-1} >$ и $V_1 =< e'_1, \dots, e'_{m-1} >$ максимальные изотропные подпространства, $(e_i, e'_j) = 0$ при $i \neq j$, а $(e_i, e'_i) = 1$. Так как любое изотропное подпространство содержится в максимальном изотропном подпространстве, а все максимальные изотропные подпространства изометричны, то можно считать, что $W =< e'_1, \dots e'_l >$. Тогда $L = (< e_{l+1}, \dots, e_{m-1} > \oplus V_2) \perp V_3$, $L^* = W$. Пусть $\bar{L} = L/L^*$. Тогда $dim\bar{L} = 2(m-l)$ и $< \bar{e}_{l+1}, \dots \bar{e}_{m-1} >$ будет максимальным изотропным подпространством размерности $m-k-1$ в $\bar{L}$. Следовательно, $\bar{L}$ является пространством отрицательного типа.

Лемма 4. *Пусть L — ортогональное пространство над полем порядка q и $dimL^* = s$. Если число различных двумерных квадратичных подпространств в L/L^* равно n, то число различных двумерных квадратичных подпространств в L равно nq^{2s}*

Доказательство. Рассмотрим произвольное двумерное квадратичное пространство $\bar{W} =< \bar{e}_1, \bar{e}_2 >$ в $\bar{L} = L/L^*$. Допустим, что e_1 и e_2 это некоторые прообразы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ в L. Тогда пространство $< e_1 + l_1, \bar{e}_2 + l_2 >$, где l_1 и l_2 векторы из L^*, будет квадратичным. Заметим, что если l_1, l'_1, l_2 и l'_2 векторы из L^*, такие,что $(l_1, l_2) \neq (l'_1, l'_2)$, то пространства $< e_1 + l_1, e_2 + l_2 >$ и $< e_1 + l'_1, e_2 + l'_2 >$ будут различны ввиду своей невырожденности. Рассматривая все наборы вида (l_1, l_2), где l_1 и l_2 векторы из L^*, мы получим все квадратичные подпространства W' из L, такие, что $\bar{W}' = \bar{W}$. В самом деле, если $W =< e_1, e_2 >$, $W' =< e'_1, e'_2 >$ и $\bar{W}' = \bar{W}$, то $e'_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + l_1$ $e'_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + l_2$, где α_i и β_i коэффициенты из F, а l_1 и l_2 векторы из L^*. Ввиду невырожденности пространства W' наборы (α_1, α_2) и (β_1, β_2) линейно независимы. Поэтому в W' можно найти линейные комбинации векторов e'_1 и e'_2 имеющие вид $e_1 + l'_1$, $e_2 + l'_2$, где l'_1 и l'_2 векторы из L^*. Следовательно, количество квадратичных пространств W' из L, такие, что $\bar{W}' = \bar{W}$ равно q^{2s}, что доказывает требуемое.

Лемма 5. *Пусть V — невырожденное ортогональное пространство размерности $2m$ положительного типа над полем порядка q, $q \equiv 1(4)$. Тогда число различных двумерных квадратичных подпространств в V равно*

$q^{2(m-1)}(q^m - 1)(q^{m-1} + 1)/(2q - 2)$.

Доказательство. Заметим, что количество данных подпространств совпадает с количеством инволюций w типа 2 из $O(V)$, для которых V_w^- является квадратичным подпространством. Эти инволюции сопряжены в $O(V)$, поэтому их число равно $|O(V):C_{O(V)}(w)|$. В рассматриваемом случае V является квадратичным пространством и $|O(V)| = 8|P\Omega(V)| = 2q^{m(m-1)}(q^m-1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)$. Вычислим $|C_{O(V)}(w)|$. По разделу 3D из [5] $C_{O(V)}(w) = O(V_w^+)\times O(V_w^-)$. Так как V_w^- является квадратичным пространством, то V_w^+ также будет квадратичным пространством. Из условия $q\equiv 1(4)$ получаем, что V_w^- и V_w^+ будут пространствами положительного типа размерности 2 и $2m-2$ соответственно. Следовательно, $|O(V_w^+)| = 8|P\Omega(V_w^+)| = 2q^{(m-1)(m-2)}(q^{m-1}-1)\Pi_{i=1}^{m-2}(q^{2i}-1)$, $|O(V_w^-)| = 2(q-1)$ и число указанных подпространств будет равно

$$\frac{2q^{m(m-1)}(q^m-1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)}{4(q-1)q^{(m-1)(m-2)}(q^{m-1}-1)\Pi_{i=1}^{m-2}(q^{2i}-1)} = \frac{q^{2(m-1)}(q^m-1)(q^{m-1}+1)}{2(q-1)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть V — невырожденное ортогональное пространство размерности $2m$ отрицательного типа над полем порядка q, $q\equiv 1(4)$. Тогда число различных двумерных квадратичных подпространств в V равно*
$q^{2(m-1)}(q^m+1)(q^{m-1}-1)/(2q-2)$.

Доказательство. Как и в предыдущей лемме количество подпространств указанного вида совпадает с количеством инволюций w типа 2 из $O(V)$, для которых V_w^- является квадратичным подпространством. Эти инволюции сопряжены в $O(V)$, поэтому их число равно $|O(V):C_{O(V)}(w)|$. В рассматриваемом случае V является неквадратичным пространством и $|O(V)| = 4|P\Omega(V)| = 2q^{m(m-1)}(q^m+1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)$. Вычислим $|C_{O(V)}(w)|$. По разделу 3D из [5] $C_{O(V)}(w) = O(V_w^+)\times O(V_w^-)$. Так как V_w^- является квадратичным пространством, то V_w^+ будет неквадратичным пространством. Из условия $q\equiv 1(4)$ получаем, что V_w^- будет пространством положительного типа размерности 2, а V_w^+ будет пространством отрицательного типа размерности $2m-2$. Следовательно, $|O(V_w^+)| = 4|P\Omega(V_w^+)| = 2q^{(m-1)(m-2)}(q^{m-1}+1)\Pi_{i=1}^{m-2}(q^{2i}-1)$, $|O(V_w^-)| = 2(q-1)$ и число указанных подпространств будет равно

$$\frac{2q^{m(m-1)}(q^m+1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)}{4(q-1)q^{(m-1)(m-2)}(q^{m-1}+1)\Pi_{i=1}^{m-2}(q^{2i}-1)} = \frac{q^{2(m-1)}(q^m+1)(q^{m-1}-1)}{2(q-1)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть V — невырожденное ортогональное пространство размерности $2m$ положительного типа над полем порядка q, $q\equiv 3(4)$. Тогда число различных двумерных квадратичных подпространств в V равно*
$q^{2(m-1)}(q^m-1)(q^{m-1}-1)/(2q+2)$.

Доказательство. Как и в предыдущих леммах нужно вычислить $|O(V):C_{O(V)}(w)|$.

Случай 1. Пусть m четно. Тогда V является квадратичным пространством и $|O(V)| = 8|P\Omega(V)| = 2q^{m(m-1)}(q^m-1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)$. Вычислим $|C_{O(V)}(w)|$. По разделу 3D из [5] $C_{O(V)}(w) = O(V_w^+)\times O(V_w^-)$. Так как V_w^- является квадратичным пространством, то V_w^+ также будет квадратичным пространством. Из условия $q\equiv 3(4)$ получаем, что V_w^- будет пространством отрицательного типа размерности 2, а V_w^+ будет пространством отрицательного типа размерности $2m-2$. Следовательно, $|O(V_w^+)| = 8|P\Omega(V_w^+)| = 2q^{(m-1)(m-2)}(q^{m-1}+1)\Pi_{i=1}^{m-2}(q^{2i}-1)$, $|O(V_w^-)| = 2(q+1)$ и число указанных подпространств будет равно

$$\frac{2q^{m(m-1)}(q^m-1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)}{4(q+1)q^{(m-1)(m-2)}(q^{m-1}+1)\Pi_{i=1}^{m-2}(q^{2i}-1)} = \frac{q^{2(m-1)}(q^m-1)(q^{m-1}-1)}{2(q+1)}.$$

Случай 2. Пусть m нечетно. В рассматриваемом случае V является неквадратичным пространством и $|O(V)| = 4|P\Omega(V)| = 2q^{m(m-1)}(q^m-1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)$. Вычислим $|C_{O(V)}(w)|$. Как и раньше, $C_{O(V)}(w) = O(V_w^+)\times O(V_w^-)$. Так как V_w^- является квадратичным пространством, то V_w^+ будет неквадратичным пространством. Из условия $q\equiv 3(4)$ получаем, что V_w^- будет пространством отрицательного типа размерности 2, а V_w^+ будет пространством отрицательного типа размерности $2m-2$. Следовательно, $|O(V_w^+)| = 4|P\Omega(V_w^+)| = 2q^{(m-1)(m-2)}(q^{m-1}+1)\Pi_{i=1}^{m-2}(q^{2i}-1)$, $|O(V_w^-)| = 2(q+1)$ и число указанных подпространств будет равно

$$\frac{2q^{m(m-1)}(q^m-1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)}{4(q+1)q^{(m-1)(m-2)}(q^{m-1}+1)\Pi_{i=1}^{m-2}(q^{2i}-1)} = \frac{q^{2(m-1)}(q^m-1)(q^{m-1}-1)}{2(q+1)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть V — невырожденное ортогональное пространство размерности $2m$ отрицательного типа над полем порядка q, $q\equiv 3(4)$. Тогда число различных двумерных квадратичных подпространств в V равно* $q^{2(m-1)}(q^m+1)(q^{m-1}+1)/(2q+2)$.

Доказательство. Как и в предыдущей лемме нужно рассмотреть два случая.

Случай 1. Пусть m четно. Тогда V является неквадратичным пространством и $|O(V)| = 4|P\Omega(V)| = 2q^{m(m-1)}(q^m+1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)$. Вычислим $|C_{O(V)}(w)|$. Как и раньше $C_{O(V)}(w) = O(V_w^+)\times O(V_w^-)$. Так как V_w^- является квадратичным пространством, то V_w^+ будет неквадратичным пространством. Из условия $q\equiv 3(4)$ получаем, что V_w^- будет пространством отрицательного типа размерности 2, а V_w^+ будет пространством положительного типа размерности $2m-2$. Следовательно, $|O(V_w^+)| = 4|P\Omega(V_w^+)| = 2q^{(m-1)(m-2)}(q^{m-1}-1)\Pi_{i=1}^{m-2}(q^{2i}-1)$, $|O(V_w^-)| = 2(q+1)$ и число указанных подпространств будет равно

$$\frac{2q^{m(m-1)}(q^m+1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)}{4(q+1)q^{(m-1)(m-2)}(q^{m-1}-1)\Pi_{i=1}^{m-2}(q^{2i}-1)} = \frac{q^{2(m-1)}(q^m+1)(q^{m-1}+1)}{2(q+1)}.$$

Случай 2. Пусть m нечетно. В рассматриваемом случае V является квадратичным пространством и $|O(V)| = 8|P\Omega(V)| = 2q^{m(m-1)}(q^m+1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)$. Вычислим $|C_{O(V)}(w)|$. Так как V_w^- является квадратичным пространством, то V_w^+ тоже будет квадратичным пространством. Из условия $q\equiv 3(4)$ получаем, что V_w^- будет пространством отрицательного типа размерности 2, а V_w^+ будет пространством положительного типа размерности $2m-2$. Следовательно,

$|O(V_w^+)| = 8|P\Omega(V_w^+)| = 2q^{(m-1)(m-2)}(q^{m-1}-1)\Pi_{i=1}^{m-2}(q^{2i}-1)$, $|O(V_w^-)| = 2(q+1)$ и число указанных подпространств будет равно

$$\frac{2q^{m(m-1)}(q^m+1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)}{4(q+1)q^{(m-1)(m-2)}(q^{m-1}-1)\Pi_{i=1}^{m-2}(q^{2i}-1)} = \frac{q^{2(m-1)}(q^m+1)(q^{m-1}+1)}{2(q+1)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть V — невырожденное ортогональное пространство размерности $2m+1$ над полем порядка q, $q \equiv 1(4)$. Тогда число различных двумерных квадратичных подпространств в V равно $q^{2m-1}(q^{2m}-1)/(2q-2)$.*

Доказательство. Вычислим $|O(V):C_{O(V)}(w)|$. В рассматриваемом случае $|O(V)| = 4|P\Omega(V)| = 2q^{m^2}\Pi_{i=1}^{m}(q^{2i}-1)$ Вычислим $|C_{O(V)}(w)|$. Как и раньше $C_{O(V)}(w) = O(V_w^+) \times O(V_w^-)$ и V_w^- является квадратичным пространством. Из условия $q \equiv 1(4)$ получаем, что V_w^- будет пространством положительного типа размерности 2. Следовательно, $|O(V_w^+)| = 4|P\Omega(V_w^+)| = 2q^{(m-1)^2}\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)$, $|O(V_w^-)| = 2(q-1)$ и число указанных подпространств будет равно

$$\frac{2q^{m^2}\Pi_{i=1}^{m}(q^{2i}-1)}{4(q-1)q^{(m-1)^2}\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)} = \frac{q^{2m-1}(q^{2m}-1)}{2(q-1)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть V — невырожденное ортогональное пространство размерности $2m+1$ над полем порядка q, $q \equiv 3(4)$. Тогда число различных двумерных квадратичных подпространств в V равно $q^{2m-1}(q^{2m}-1)/(2q+2)$.*

Доказательство. Вычислим $|O(V):C_{O(V)}(w)|$. В рассматриваемом случае $|O(V)| = 4|P\Omega(V)| = 2q^{m^2)}\Pi_{i=1}^{m}(q^{2i}-1)$. Вычислим $|C_{O(V)}(w)|$. Как и раньше $C_{O(V)}(w) = O(V_w^+) \times O(V_w^-)$ и V_w^- является квадратичным пространством. Из условия $q \equiv 3(4)$ получаем, что V_w^- будет пространством отрицательного типа размерности 2. Следовательно, $|O(V_w^+)| = 4|P\Omega(V_w^+)| = 2q^{(m-1)^2}\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)$, $|O(V_w^-)| = 2(q+1)$ и число указанных подпространств будет равно

$$\frac{2q^{m^2}\Pi_{i=1}^{m}(q^{2i}-1)}{4(q+1)q^{(m-1)^2}\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)} = \frac{q^{2(m-1)}(q^{2m}-1)}{2(q+1)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть V — невырожденное ортогональное пространство размерности 3 или 4 над полем порядка q, q нечетно. Тогда в V существуют такие квадратичные двумерные подпространства L и W, что $V = L + W$ и L не содержится в $W^\perp$.*

Доказательство. Пусть $dimV = 3$ и L — квадратичное подпространство в нем. Так как $O(V)$ действует на V неприводимо (Теорема 3.24 из [1]), то в V найдется подпространство W, изометричное L и не равное L. Так как $dimL^\perp = 1$, то W не содержится в $L^\perp$. Очевидно, что $dim(L+W) = 3$ и, следовательно, $L + W = V$.

Пусть теперь $dimV = 4$.

Случай 1. Допустим, что $q \equiv 1(4)$. Если V квадратичное пространство, то $V = V_1 \perp V_2$, $V_1 =< e_1, e_2 >$, $V_2 =< e_3, e_4 >$, $(e_1, e_2) = (e_3, e_4) = 1$ и $(e_i, e_j) = 0$ в остальных случаях. Тогда требуемыми подпространствами будут $L =< e_1, e_2 >$ и $W =< e_1', e_2' >$, где $e_1' = (1/2)e_1 + e_3$, $e_2' = e_2 + (1/2)e_4$.

Если V неквадратичное пространство, то $V = V_1 \perp V_2$, $V_1 =< e_1, e_2 >$, $V_2 =< e_3, e_4 >$, $(e_1, e_2) = (e_3, e_3) = 1$, $(e_4, e_4) = -c$, где c не квадрат в F и $(e_i, e_j) = 0$ в остальных случаях. Тогда требуемыми подпространствами будут $L =< e_1, e_2 >$ и $W =< e_1', e_2' >$, где $e_1' = (1/2)e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = ((1/2)ce_1 - e_2 + e_4)/(-(1/2) - (1/2)c)$.

Случай 2. Допустим, что $q \equiv 3(4)$. Если V квадратичное пространство, то $V = V_1 \perp V_2$, $V_1 =< e_1, e_2 >$, $V_2 =< e_3, e_4 >$, $(e_i, e_i) = 1$ и $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. тогда требуемыми подпространствами будут $L =< e_1, e_2 >$ и $W =< e_1', e_2' >$, где $e_1' = (1/2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, $e_2' = (1/2)(e_1 - e_2 + e_3 - e_4)$.

Если V неквадратичное пространство, то $V = V_1 \perp V_2$, $V_1 =< e_1, e_2 >$, $V_2 =< e_3, e_4 >$, $(e_1, e_2) = (e_3, e_3) = (e_4, e_4) = 1$ и $(e_i, e_j) = 0$ в остальных случаях. тогда требуемыми подпространствами будут $L =< e_3, e_4 >$ и $W =< e_1', e_2' >$, где $e_1' = e_3 + e_4 + e_1 - (1/2)e_2$, $e_2' = (1/2)e_2 + e_1$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть V — невырожденное ортогональное пространство размерности не меньшей 7 над полем порядка q, q нечетно. Тогда для любого $s \in \{3, 4\}$ и для любого целого параметра t, такого, что $0 \leq t \leq s - 2$ в V существует подпространство L, удовлетворяющее условиям:*

(1) $dimL = s$;

(2) $dimL^* = t$;

(3) $L = L_1 + L_2$, где L_1 и L_2 двумерные квадратичные подпространства V и L_1 не содержится в $L_2^\perp$.

Доказательство. Если $t = 0$, то в качестве L можно выбрать любое невырожденное подпространство размерности s. Условие (3) будет выполняться ввиду предыдущей леммы.

Пусть $s = 3$ и $t = 1$. Выберем в качестве L_1 произвольное двумерное невырожденное квадратичное подпространство из V. Будем считать, что

$L_1 =< e_1, e_2 >$. Так как $dimL_1^\perp \geq 5$, то в $L_1^\perp$ существует изотропный вектор e. Тогда подпространство $L_2 =< e_1 + e, e_2 >$, изометричное L_1, не будет содержаться в $L_1^\perp$, и пространство $L = L_1 + L_2 =< e_1, e_2, e >$, для которого $L^* =< e >$, будет удовлетворять условиям (1) – (3).

Пусть $s = 4$ и $t = 1$. Выберем в V произвольное трехмерное невырожденное подпространство W. По лемме 11 можно считать, что

$W =< e_1, e_2 > + < e_1', e_2' >=< e_1, e_2, e_1' >$, где $< e_1, e_2 >$ и $< e_1', e_2' >$ невырожденные двумерные и не взаимно ортогональные квадратичные подпространства. Так как $dimW^\perp \geq 4$, то в $L_1^\perp$ существует изотропный вектор e. Пусть $L_1 =< e_1, e_2 >$, $L_2 =< e_1', e_2' + e >$ и $L = L_1 + L_2$. Очевидно, что L_1 и L_2 невырожденные двумерные и не взаимно ортогональные квадратичные подпространства. Так как e_2' линейно выражается через e_1, e_2 и e_1', то $L =< e_1, e_2, e_1', e >$ и $L^* =< e >$. Следовательно, L будет требуемым подпространством.

Пусть $s = 4$ и $t = 2$. Выберем в качестве L_1 произвольное двумерное невырожденное квадратичное подпространство из V. Будем считать, что

$L_1 =< e_1, e_2 >$. Так как $dimL_1^\perp \geq 5$, то в $L_1^\perp$ существует двумерное изотропное подпространство $< e, e' >$. Тогда подпространство $L_2 =< e_1 + e, e_2 + e' >$, изометричное L_1, не будет содержаться в $L_1^\perp$, и пространство

$L = L_1 + L_2 =< e_1, e_2, e, e' >$, для которого $L^* =< e, e' >$, будет удовлетворять условиям (1) – (3).

Лемма 13. *Пусть V — невырожденное ортогональное пространство нечетной размерности не меньшей 7 над полем порядка q, q нечетно. Тогда в V существует подпространство L, удовлетворяющее условиям:*

(1) $dimL = 4$

(2) $dimL^* = 1$

(3) $L^\perp/(L^\perp)^*$ – положительное пространство.

(4) $L = L_1 + L_2$, где L_1 и L_2 двумерные квадратичные подпространства V и L_1 не содержится в $L_2^\perp$.

Доказательство. Пусть W' — невырожденное положительное подпространство из V размерности $dimV - 3$ и $W = W'^\perp$. По лемме 11 можно считать, что $W =< e_1, e_2 > + < e'_1, e'_2 >=< e_1, e_2, e'_1 >$, где $< e_1, e_2 >$ и $< e'_1, e'_2 >$ невырожденные двумерные и не взаимно ортогональные квадратичные подпространства. Так как $dimW^\perp \geq 4$, то в $W^\perp$ существует изотропный вектор e. Пусть $L_1 =< e_1, e_2 >$, $L_2 =< e'_1, e'_2 + e >$ и $L = L_1 + L_2$. Очевидно, что L_1 и L_2 — невырожденные двумерные и не взаимно ортогональные квадратичные подпространства. Так как e'_2 линейно выражается через e_1, e_2 и e'_1, то $L =< e_1, e_2, e'_1, e >$ и $L^* = (L^\perp)^* =< e >$. Заметим, что $L^\perp = e^\perp \cap W'$. По лемме 3 получим, что $L^\perp/(L^\perp)^*$ будет положительным пространством.

Лемма 14. *Пусть V — невырожденное ортогональное пространство нечетной размерности не меньшей 7 над полем порядка q, q нечетно. Тогда в V существует подпространство L, удовлетворяющее условиям:*

(1) $dimL = 4$

(2) $dimL^* = 1$

(3) $L^\perp/(L^\perp)^*$ — отрицательное пространство.

(4) $L = L_1 + L_2$, где L_1 и L_2 — двумерные квадратичные подпространства V и L_1 не содержится в $L_2^\perp$.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей леммы с тем отличием, что W' выбирается невырожденным отрицательным подпространством из V.

3. Граф коммутирования TI-подгрупп в ортогональных группах.

В этом параграфе будем считать, чо X — частное $\Omega_n(q)$, q нечетно, $n \geq 7$ и a_0 соответствует инволюции типа 2 из $O_n(q)$. Из описания TI-подгрупп, приведенного в [2], следует, что $V_{a_0}^-$ является двумерным квадратичным постранством, группа $O(V_{a_0}^-)$ является диэдральной группой порядка $2(q-1)$ если $q \equiv 1(4)$, и диэдральной группой порядка $2(q+1)$ если $q \equiv 3(4)$. Элемет a индуцирует изометрию порядка 4 на $V_{a_0}^-$ и действует тождественно на $V_{a_0}^+$.

Лемма 15. *Различные подгруппы $\langle u \rangle$ и $\langle v \rangle$, сопряженные с A, коммутируют тогда и только тогда, когда подпространства $V_{u^2}^-$ и $V_{v^2}^-$ ортогональны.*

Доказательство. Это следует из вида элементов u и v, описанного в [2] и строения $V_{u^2}^-$ и $V_{v^2}^-$, описанного в разделе 3D [5].

Лемма 16. *Пусть (u_0, v_0) и (u'_0, v'_0) две пары различных инволюций типа 2 из $O_n(q)$ с взаимно ортогональными квадратичными носителями. Тогда они сопряжены с помощью элемента из $\Omega_n(q)$.*

Доказательство. По разделу 3D из [5] инволюции одинакового типа из $O_n(q)$ сопряжены посредством элемента из $\Omega_n(q)$. Поэтому существует такой элемент x из $\Omega_n(q)$, что $u_0^x = u_0'$. Заметим, что носители v_0^x и u_0' ортогональны. По разделу 3D из [5] заключаем, что v_0^x и v_0' содержатся в $O(V_{u_0'}^+)$ и поэтому сопряжены посредством элемента y из $\Omega(V_{u_0'}^+)$, который централизует u_0'. Окончательно получаем, что $(u_0, v_0)^{xy} = (u_0', v_0')$.

Лемма 17. *Граф $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным графом.*

Доказательство. Заметим, что любой элемент группы G индуцирует на $\Gamma_G(A)$ автоморфизм посредством сопряжения, поэтому вершинная транзитивность следует из определения $\Gamma_G(A)$, а реберная транзитивность следует из лемм 15 и 16.

Теорема 1. *Пусть X это $\Omega_{2m+1}(q)$, $q \equiv 1(4)$, $m>2$ и a_0 соответствует инволюции типа 2 из $O_{2m+1}(q)$. Тогда граф $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным, но не является кореберно регулярным. Число вершин данного графа равно $q^{2m-1}(q^{2m}-1)/(2q-2)$, параметры реберной регулярности k и λ равны соответственно $q^{2m-3}(q^{2(m-1)}-1)/(2q-2)$ и $q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q-2)$. Для различных несмежных вершин c и g параметр $\mu(c,g)$ принимает одно из следующих значений:*

(1) $q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q-2)$;
(2) $q^{2(m-2)}(q^{m-1}-1)(q^{m-2}+1)/(2q-2)$;
(3) $q^{2(m-2)}(q^{m-1}+1)(q^{m-2}-1)/(2q-2)$;
(4) $q^{2(m-2)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}+1)/(2q-2)$;
(5) $q^{2(m-2)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}-1)/(2q-2)$;
(6) $q^{2m-3}(q^{2(m-3)}-1)/(2q-2)$;
(7) $q^{2m-3}(q^{2(m-2)}-1)/(2q-2)$.

Все значения $\mu(c,g)$ из (1) – (7) встречаются в данном графе.

Доказательство. Заметим, что число вершин графа $\Gamma_G(A)$ будет равно числу инволюций типа 2 из $O(V)$ с квадратичным носителем, а число таких инволюций совпадает с числом двумерных квадратичных подпространств из V. По лемме 9 получим, что $\Gamma_G(A)$ имеет $q^{2m-1}(q^{2m}-1)/(2q-2)$ вершин.

По лемме 17 $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным. Следовательно, он реберно регулярен. Найдем параметры реберной регулярности. Рассмотрим произвольную вершину c графа $\Gamma_G(A)$, которой соответствует подгруппа $\langle u\rangle$, сопряженная с A. Пусть $u_0 = u^2$. Определим количество подгрупп, сопряженных с A, коммутирующих с $\langle u\rangle$. По лемме 15 это число будет совпадать с числом двумерных квадратичных подпространств из $(V_{u_0}^-)^\perp = V_{u_0}^+$. В рассматриваемом случае $V_{u_0}^+$ имеет размерность $2(m-1)+1$ и по лемме 9 получим, что указанное число равно $q^{2m-3}(q^{2(m-1)}-1)/(2q-2)$. Таким образом $k = q^{2m-3}(q^{2(m-1)}-1)/(2q-2)$. Для нахождения параметра λ рассмотрим пару смежных вершин c и g, которым соответствуют коммутирующие подгруппы $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$. Обозначим через u_0 и v_0 инволюции из данных подгрупп. Пусть $L_1 = V_{u_0}^-$, $L_2 = V_{v_0}^-$ и $L = L_1 + L_2$. По лемме 15 $L = L_1 \perp L_2$ и число подгрупп из A^G, коммутирующих с $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$, равно числу двумерных квадратичных подпространств из $L^\perp$. Так как $dimL^\perp = 2(m-2)+1$, то по лемме 9 получим, что $\lambda = q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q-2)$.

Пусть теперь c и g не смежные вершины графа $\Gamma_G(a)$, которым соответствуют не коммутирующие подгруппы $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$. Обозначим через u_0 и v_0 инволюции из данных подгрупп. Пусть $L_1 = V^-_{u_0}$, $L_2 = V^-_{v_0}$ и $L = L_1 + L_2$. По лемме 15 число подгрупп из A^G, коммутирующих с $< u >$ и $< v >$, будет равно числу двумерных квадратичных подпространств из $L^\perp$.

Случай 1. Пространство L не вырожденно, $dimL = 4$.

Тогда $dimL^\perp = 2(m-2)+1$, $L^\perp$ не вырожденно и по лемме 9 мы получим, что $\mu(c,g) = q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q-2)$ и имеет место (1). Случай 1 обязательно будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные пространства размерности 4.

Случай 2. Пространство L не вырожденно, $dimL = 3$, и $L^\perp$ положительное пространство.

Заметим, что $dimL^\perp = 2(m-1)$. По лемме 5 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)} \cdot \cdot (q^{m-1}-1)(q^{m-2}+1)/(2q-2)$ и имеет место (2). Случай обязательно будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные положительные пространства размерности 2m-2.

Случай 3. Пространство L не вырожденно, $dimL = 3$, и $L^\perp$ отрицательное пространство.

Заметим, что $dimL^\perp = 2(m-1)$. По лемме 6 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)} \cdot \cdot (q^{m-1}+1)(q^{m-2}-1)/(2q-2)$ и имеет место (3). Случай обязательно будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные отрицательные пространства размерности 2m-2.

Случай 4. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$, $dimL^* = 1$ и $L^\perp/(L^\perp)^*$ положительное пространство.

Заметим, что $dim(L^\perp)^* = 1$ и $dimL^\perp/(L^\perp)^* = 2(m-2)$. По леммам 4 и 5 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}+1)/(2q-2)$ и имеет место (4). Случай 4 обязательно будет иметь место ввиду леммы 13.

Случай 5. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$, $dimL^* = 1$ и $L^\perp/(L^\perp)^*$ отрицательное пространство.

Заметим, что $dim(L^\perp)^* = 1$ и $dimL^\perp/(L^\perp)^* = 2(m-2)$. По леммам 4 и 6 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}-1)/(2q-2)$ и имеет место (5). Случай 5 обязательно будет иметь место ввиду леммы 14.

Случай 6. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$, $dimL^* = 2$. В этом случае $L = L_1 + W$, где W двумерное изотропное подпространство из $L_1^\perp$. Заметим, что $(L^\perp)^* = W$, $dim(L^\perp)^* = 1$ и $L^\perp/(L^\perp)^* = 2(m-3)+1$ По леммам 4 и 9 получим, что $\mu(c,g) = q^{2m-3}(q^{2(m-3)}-1)/(2q-2)$ и имеет место (6). Случай 6 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Случай 7. Пространство L вырожденно, $dimL = 3$, $dimL^* = 1$. В этом случае $L = L_1 + W$, где W одномерное изотропное подпространство из $L_1^\perp$. Заметим, что $(L^\perp)^* = W$, $dim(L^\perp)^* = 1$ и $dimL^\perp/(L^\perp)^* = 2(m-2)+1$ По леммам 4 и 9 получим, что $\mu(c,g) = q^{2m-3}(q^{2(m-2)}-1)/(2q-2)$ и имеет место (7). Случай 7 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть X это $\Omega_{2m+1}(q)$, $q \equiv 3(4)$, $m > 2$ и a_0 соответствует инволюции типа 2 из $O_{2m+1}(q)$. Тогда граф $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным, но не является кореберно регулярным. Число вершин данного графа равно $q^{2m-1}(q^{2m}-1)/(2q+2)$, параметры реберной регулярности k и λ равны соответственно $q^{2m-3}(q^{2(m-1)}-1)/(2q+2)$ и $q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q+2)$.*

Для различных несмежных вершин c и g параметр $\mu(c,g)$ принимает одно из следующих значений:

(1) $q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q+2)$;
(2) $q^{2(m-2)}(q^{m-1}-1)(q^{m-2}-1)/(2q+2)$;
(3) $q^{2(m-2)}(q^{m-1}+1)(q^{m-2}+1)/(2q+2)$;
(4) $q^{2(m-2)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}-1)/(2q+2)$;
(5) $q^{2(m-2)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}+1)/2(q+1)$;
(6) $q^{2m-3}(q^{2(m-3)}-1)/2(q+1)$;
(7) $q^{2m-3}(q^{2(m-2)}-1)/2(q+1)$.

Все значения $\mu(c,g)$ из $(1)-(7)$ встречаются в данном графе.

Доказательство. Заметим, что число вершин графа $\Gamma_G(A)$ будет равно числу инволюций типа 2 из $O(V)$ с квадратичным носителем, а число таких инволюций совпадает с числом двумерных квадратичных подпространств из V. По лемме 10 получим, что $\Gamma_G(A)$ имеет $q^{2m-1}(q^{2m}-1)/(2q+2)$ вершин.

По лемме 17 $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным. Следовательно, он реберно регулярен. Найдем параметры реберной регулярности. Рассмотрим произвольную вершину c графа $\Gamma_G(A)$, которой соответствует подгруппа $\langle u\rangle$, сопряженная с A. Пусть $u_0=u^2$. Найдем количество подгрупп, сопряженных с A, коммутирующих с $\langle u\rangle$. По лемме 15 это число будет совпадать с числом двумерных квадратичных подпространств из $(V^-_{u_0})^\perp = V^+_{u_0}$. В рассматриваемом случае $V^+_{u_0}$ имеет размерность $2(m-1)+1$ и по лемме 10 получим, что указанное число равно $q^{2m-3}(q^{2(m-1)}-1)/(2q+2)$. Таким образом $k=q^{2m-3}(q^{2(m-1)}-1)/(2q+2)$. Для нахождения параметра λ рассмотрим пару смежных вершин c и g, которым соответствуют коммутирующие подгруппы $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$. Обозначим через u_0 и v_0 инволюции из данных подгрупп. Пусть $L_1=V^-_{u_0}$, $L_2=V^-_{v_0}$ и $L=L_1+L_2$. По лемме 15 $L=L_1\perp L_2$. По лемме 15 число подгрупп из A^G, коммутирующих с $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$, равно числу двумерных квадратичных подпространств из $L^\perp$. Так как $dimL^\perp=2(m-2)+1$, то по лемме 10 получим, что $\lambda=q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q+2)$.

Пусть теперь c и g не смежные вершины графа $\Gamma_G(a)$, которым соответствуют не коммутирующие подгруппы $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$. Обозначим через u_0 и v_0 инволюции из данных подгрупп. Пусть $L_1=V^-_{u_0}$, $L_2=V^-_{v_0}$ и $L=L_1+L_2$. По лемме 15 число подгрупп из A^G, коммутирующих с $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$, равно числу двумерных квадратичных подпространств из $L^\perp$.

Случай 1. Пространство L не вырожденно, $dimL=4$.

Тогда $dimL^\perp=2(m-2)+1$, $L^\perp$ не вырожденно и по лемме 10 мы получим, что $\mu(c,g)=q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q+2)$ и имеет место (1). Случай 1 обязательно будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные пространства размерности 4.

Случай 2. Пространство L не вырожденно, $dimL=3$, и $L^\perp$ положительное пространство.

Заметим, что $dimL^\perp=2(m-1)$. По лемме 7 получим, что $\mu(c,g)=q^{2(m-2)}$ $(q^{m-1}-1)(q^{m-2}-1)/(2q+2)$ и имеет место (2). Случай обязательно будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные положительные пространства размерности 2m-2.

Случай 3. Пространство L не вырожденно, $dimL=3$, и $L^\perp$ отрицательное пространство.

Заметим, что $dimL^{\perp} = 2(m-1)$. По лемме 8 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}$ $(q^{m-1}+1)(q^{m-2}+1)/(2q+2)$ и имеет место (3). Случай обязательно будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные отрицательные пространства размерности 2m-2.

Случай 4. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$, $dimL^* = 1$ и $L^{\perp}/(L^{\perp})^*$ положительное пространство.

Заметим, что $dim(L^{\perp})^* = 1$ и $dimL^{\perp}/(L^{\perp})^* = 2(m-2)$. По леммам 4 и 7 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}-1)/(2q+2)$ и имеет место (4). Случай 4 обязательно будет иметь место ввиду леммы 13.

Случай 5. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$, $dimL^* = 1$ и $L^{\perp}/(L^{\perp})^*$ отрицательное пространство.

Заметим, что $dim(L^{\perp})^* = 1$ и $dimL^{\perp}/(L^{\perp})^* = 2(m-2)$. По леммам 4 и 8 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}+1)/(2q+2)$ и имеет место (5). Случай 5 обязательно будет иметь место ввиду леммы 14.

Случай 6. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$, $dimL^* = 2$.

В этом случае $L = L_1 + W$, где W двумерное изотропное подпространство из $L_1^{\perp}$. Заметим, что $(L^{\perp})^* = W$, $dim(L^{\perp})^* = 1$ и $L^{\perp}/(L^{\perp})^* = 2(m-3)+1$ По леммам 4 и 10 получим, что $\mu(c,g) = q^{2m-3}(q^{2(m-3)}-1)/(2q+2)$ и имеет место (6). Случай 6 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Случай 7. Пространство L вырожденно, $dimL = 3$, $dimL^* = 1$.

В этом случае $L = L_1 + W$, где W одномерное изотропное подпространство из $L_1^{\perp}$. Заметим, что $(L^{\perp})^* = W$, $dim(L^{\perp})^* = 1$ и $dimL^{\perp}/(L^{\perp})^* = 2(m-2)+1$ По леммам 4 и 10 получим, что $\mu(c,g) = q^{2m-3}(q^{2(m-2)}-1)/(2q+2)$ и имеет место (7). Случай 7 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть X это $\Omega_{2m}^{+}(q)$, $q \equiv 1(4)$, $m > 3$ и a_0 соответствует инволюции типа 2 из $O_{2m}^{+}(q)$. Тогда граф $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным, но не является кореберно регулярным. Число вершин данного графа равно $q^{2(m-1)}(q^m-1)(q^{m-1}+1)/(2q-2)$, параметры реберной регулярности k и λ равны соответственно $q^{2(m-2)}(q^{m-1}-1)(q^{m-2}+1)/(2q-2)$ и $q^{2(m-3)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}+1)/(2q-2)$. Для различных несмежных вершин c и g параметр $\mu(c,g)$ принимает одно из следующих значений:*

(1) $q^{2(m-3)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}+1)/(2q-2)$;
(2) $q^{2(m-3)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}-1)/(2q-2)$;
(3) $q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q-2)$;
(4) $q^{2m-5}(q^{2(m-3)}-1)/(2q-2)$;
(5) $q^{2(m-2)}(q^{m-3}-1)(q^{m-4}+1)/(2q-2)$;
(6) $q^{2(m-2)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}+1)/(2q-2)$.

Все значения $\mu(c,g)$ из $(1)-(6)$ встречаются в данном графе.

Доказательство. Число вершин графа $\Gamma_G(A)$ равно числу инволюций типа 2 из $O(V)$ с квадратичным носителем, а число таких инволюций совпадает с числом двумерных квадратичных подпространств из V. По лемме 5 получим, что $\Gamma_G(A)$ имеет $q^{2(m-1)}(q^m-1)(q^{m-1}+1)/(2q-2)$ вершин.

По лемме 17 граф $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным. Следовательно, он реберно регулярен. Найдем параметры реберной регулярности. Рассмотрим произвольную вершину c графа $\Gamma_G(A)$, которой соответствует подгруппа $\langle u \rangle$, сопряженная с A. Пусть $u_0 = u^2$. Определим количество подгрупп, сопряженных с A, коммутирующих с $\langle u\rangle$. По лемме 15 это число будет совпадать с числом двумерных квадратичных подпространств из $(V_{u_0}^-)^\perp = V_{u_0}^+$. В рассматриваемом случае $V_{u_0}^+$ имеет размерность $2(m-1)$ и является положительным пространством. По лемме 5 получим, что $k = q^{2(m-2)}(q^{m-1}-1)(q^{m-2}+1)/(2q-2)$. Для нахождения параметра λ рассмотрим пару смежных вершин c и g, которым соответствуют коммутирующие подгруппы $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$. Обозначим через u_0 и v_0 инволюции из данных подгрупп. Пусть $L_1 = V_{u_0}^-$, $L_2 = V_{v_0}^-$ и $L = L_1 + L_2$. По лемме 15 $L = L_1 \perp L_2$, а так как L_1 и L_2 являются квадратичными, то L это квадратичное пространство. Следовательно, пространство $L^\perp$ тоже будет квадратичным и будет иметь положительный тип. По лемме 15 число подгрупп из A^G, коммутирующих с $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$, равно числу двумерных квадратичных подпространств из $L^\perp$. Так как $dimL^\perp = 2(m-2)$, то по лемме 5 получим, что $\lambda = q^{2(m-3)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}+1)/(2q-2)$.

Пусть теперь c и g — не смежные вершины графа $\Gamma_G(a)$, которым соответствуют не коммутирующие подгруппы $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$. Обозначим через u_0 и v_0 инволюции из данных подгрупп. Пусть $L_1 = V_{u_0}^-$, $L_2 = V_{v_0}^-$ и $L = L_1 + L_2$. По лемме 15 число подгрупп из A^G, коммутирующих с $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$, равно числу двумерных квадратичных подпространств из $L^\perp$.

Случай 1. Пространство L не вырожденно, $dimL = 4$ и L положительное пространство.

Тогда $dimL^\perp = 2(m-2)$, $L^\perp$ не вырожденно и имеет положительный тип. По лемме 5 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-3)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}+1)/(2q-2)$ и имеет место (1). Случай 1 будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные положительные пространства размерности 4.

Случай 2. Пространство L не вырожденно, $dimL = 4$, и L отрицательное пространство.

Тогда $dimL^\perp = 2(m-2)$, $L^\perp$ не вырожденно и имеет отрицательный тип. Заметим, что $dimL^\perp = 2(m-1)$. По лемме 6 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-3)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}-1)/(2q-2)$ и имеет место (2). Случай обязательно будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные отрицательные пространства размерности 4.

Случай 3. Пространство L не вырожденно, $dimL = 3$.

В этом случае $dimL^\perp = 2(m-2)+1$. По лемме 9 получим, что $\mu(c,g) = q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q-2)$ и имеет место (3). Случай будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные пространства размерности 3.

Случай 4. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$ и $dimL^* = 1$.

Тогда $dim(L^\perp)^* = 1$ и $dimL^\perp/(L^\perp)^* = 2(m-3)+1$. По леммам 4 и 9 получим, что $\mu(c,g) = q^{2m-5}(q^{2(m-3)}-1)/(2q-2)$ и имеет место (4). Случай 4 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Случай 5. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$ и $dimL^* = 2$.

В этом случае $L = L_1 + W$, где W двумерное изотропное подпространство из $L_1^\perp$. Заметим, что $(L^\perp)^* = W$ и $L^\perp = L_1 \cap W^\perp$. По лемме 3 $L^\perp/(L^\perp)^*$ будет иметь тот же тип, что и L_1. Следовательно, $L^\perp/(L^\perp)^*$ будет положительным пространством размерности $2(m-3)$ По леммам 4 и 5 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}(q^{m-3}-1)(q^{m-4}+1)/(2q-2)$ и имеет место (5). Случай 5 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Случай 6. Пространство L вырожденно, $dimL = 3$ и $dimL^* = 1$.

В этом случае $L = L_1 + W$, где W одномерное изотропное подпространство из $L_1^{\perp}$. Заметим, что $(L^{\perp})^* = W$ и $L^{\perp} = L_1 \cap W^{\perp}$. По лемме 3 $L^{\perp}/(L^{\perp})^*$ будет иметь тот же тип, что и L_1. Следовательно, $L^{\perp}/(L^{\perp})^*$ будет положительным пространством размерности $2(m-2)$ По леммам 4 и 5 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}+1)/(2q-2)$ и имеет место (6). Случай 6 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть X это $\Omega_{2m}^-(q)$, $q \equiv 1(4)$, $m > 3$ и a_0 соответствует инволюции типа 2 из $O_{2m}^-(q)$. Тогда граф $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным, но не является кореберно регулярным. Число вершин данного графа равно $q^{2(m-1)}(q^m+1)(q^{m-1}-1)/(2q-2)$, параметры реберной регулярности k и λ равны соответственно $q^{2(m-2)}(q^{m-1}+1)(q^{m-2}-1)/(2q-2)$ и $q^{2(m-3)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}-1)/(2q-2)$. Для различных несмежных вершин c и g параметр $\mu(c,g)$ принимает одно из следующих значений:*

(1) $q^{2(m-3)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}-1)/(2q-2)$;
(2) $q^{2(m-3)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}+1)/(2q-2)$;
(3) $q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q-2)$;
(4) $q^{2m-5}(q^{2(m-3)}-1)/(2q-2)$;
(5) $q^{2(m-2)}(q^{m-3}+1)(q^{m-4}-1)/(2q-2)$;
(6) $q^{2(m-2)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}-1)/(2q-2)$.

Все значения $\mu(c,g)$ из $(1)-(6)$ встречаются в данном графе.

Доказательство. Число вершин графа $\Gamma_G(A)$ будет равно числу инволюций типа 2 из $O(V)$ с квадратичным носителем, а число таких инволюций совпадает с числом двумерных квадратичных подпространств из V. По лемме 6 получим, что $\Gamma_G(A)$ имеет $q^{2(m-1)}(q^m+1)(q^{m-1}-1)/(2q-2)$ вершин.

По лемме 17 граф $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным. Следовательно, он реберно регулярен. Найдем параметры реберной регулярности. Рассмотрим произвольную вершину c графа $\Gamma_G(A)$, которой соответствует подгруппа $\langle u \rangle$, сопряженная с A. Пусть $u_0 = u^2$. Определим количество подгрупп, сопряженных с A, коммутирующих с $< u >$. По лемме 15 это число будет совпадать с числом двумерных квадратичных подпространств из $(V_{u_0}^-)^{\perp} = V_{u_0}^+$. В рассматриваемом случае $V_{u_0}^+$ имеет размерность $2(m-1)$ и является отрицательным пространством. По лемме 6 получим, что $k = q^{2(m-2)}(q^{m-1}+1)(q^{m-2}-1)/(2q-2)$. Для нахождения параметра λ рассмотрим пару смежных вершин c и g, которым соответствуют коммутирующие подгруппы $\langle u \rangle$ и $\langle v \rangle$. Обозначим через u_0 и v_0 инволюции из данных подгрупп. Пусть $L_1 = V_{u_0}^-$, $L_2 = V_{v_0}^-$ и $L = L_1 + L_2$. По лемме 15 $L = L_1 \perp L_2$, а так как L_1 и L_2 являются квадратичными, то L это квадратичное пространство. Следовательно, пространство $L^{\perp}$ тоже будет не квадратичным и будет иметь отрицательный тип. По лемме 15 число подгрупп из A^G, коммутирующих с $\langle u \rangle$ и $\langle v \rangle$, равно числу двумерных квадратичных подпространств из $L^{\perp}$. Так как $dimL^{\perp} = 2(m-2)$, то по лемме 6 получим, что $\lambda = q^{2(m-3)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}-1)/(2q-2)$.

Пусть теперь c и g не смежные вершины графа $\Gamma_G(a)$, которым соответствуют не коммутирующие подгруппы $\langle u \rangle$ и $\langle v \rangle$. Обозначим через u_0 и v_0 инволюции из данных подгрупп. Пусть $L_1 = V_{u_0}^-$, $L_2 = V_{v_0}^-$ и $L = L_1 + L_2$. По лемме 15 число подгрупп из A^G, коммутирующих с $\langle u \rangle$ и $\langle v \rangle$, равно числу двумерных квадратичных подпространств из $L^{\perp}$.

Случай 1. Пространство L не вырожденно, $dimL = 4$ и L положительное пространство.

Тогда $dimL^{\perp} = 2(m-2)$, $L^{\perp}$ не вырожденно и имеет отрицательный тип. По лемме 6 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-3)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}-1)/(2q-2)$ и имеет место (1). Случай 1 будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные положительные пространства размерности 4.

Случай 2. Пространство L не вырожденно, $dimL = 4$ и L отрицательное пространство.

Тогда $dimL^{\perp} = 2(m-2)$, $L^{\perp}$ не вырожденно и имеет положительный тип. По лемме 5 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-3)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}+1)/(2q-2)$ и имеет место (2). Случай обязательно будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные отрицательные пространства размерности 4.

Случай 3. Пространство L не вырожденно, $dimL = 3$.

В этом случае $dimL^{\perp} = 2(m-2)+1$. По лемме 9 получим, что $\mu(c,g) = q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q-2)$ и имеет место (3). Случай будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные пространства размерности 3.

Случай 4. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$ и $dimL^* = 1$.

Тогда $dim(L^{\perp})^* = 1$ и $dimL^{\perp}/(L^{\perp})^* = 2(m-3)+1$. По леммам 4 и 9 получим, что $\mu(c,g) = q^{2m-5}(q^{2(m-3)}-1)/(2q-2)$ и имеет место (4). Случай 4 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Случай 5. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$ и $dimL^* = 2$.

В этом случае $L = L_1 + W$, где W двумерное изотропное подпространство из $L_1^{\perp}$. Заметим, что $(L^{\perp})^* = W$ и $L^{\perp} = L_1 \cap W^{\perp}$. По лемме 3 $L^{\perp}/(L^{\perp})^*$ будет иметь тот же тип, что и L_1. Следовательно, $L^{\perp}/(L^{\perp})^*$ будет отрицательным пространством размерности $2(m-3)$ По леммам 4 и 6 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}(q^{m-3}+1)(q^{m-4}-1)/(2q-2)$ и имеет место (5). Случай 5 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Случай 6. Пространство L вырожденно, $dimL = 3$ и $dimL^* = 1$.

В этом случае $L = L_1 + W$, где W одномерное изотропное подпространство из $L_1^{\perp}$. Заметим, что $(L^{\perp})^* = W$ и $L^{\perp} = L_1 \cap W^{\perp}$. По лемме 3 $L^{\perp}/(L^{\perp})^*$ будет иметь тот же тип, что и L_1. Следовательно, $L^{\perp}/(L^{\perp})^*$ будет отрицательным пространством размерности $2(m-2)$ По леммам 4 и 5 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}-1)/(2q-2)$ и имеет место (6). Случай 6 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть X это $\Omega^{+}_{2m}(q)$, $q \equiv 3(4)$, $m > 3$ и a_0 соответствует инволюции типа 2 из $O^{+}_{2m}(q)$. Тогда граф $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным, но не является кореберно регулярным. Число вершин данного графа равно $q^{2(m-1)}(q^m-1)(q^{m-1}-1)/(2q+2)$, параметры реберной регулярности k и λ равны соответственно $q^{2(m-2)}(q^{m-1}+1)(q^{m-2}+1)/(2q+2)$ и $q^{2(m-3)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}-1)/(2q+2)$. Для различных несмежных вершин c и g параметр $\mu(c,g)$ может принимает одно из следующих значений:*

(1) $q^{2(m-3)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}-1)/(2q+2)$;
(2) $q^{2(m-3)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}+1)/(2q+2)$;
(3) $q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q+2)$;
(4) $q^{2m-5}(q^{2(m-3)}-1)/(2q+2)$;
(5) $q^{2(m-2)}(q^{m-3}+1)(q^{m-4}+1)/(2q+2)$;

(6) $q^{2(m-2)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}+1)/(2q+2)$.

Все значения $\mu(c,g)$ из (1) – (6) встречаются в данном графе.

Доказательство. Число вершин графа $\Gamma_G(A)$ будет равно числу инволюций типа 2 из $O(V)$ с квадратичным носителем, а число таких инволюций совпадает с числом двумерных квадратичных подпространств из V. По лемме 7 получим, что $\Gamma_G(A)$ имеет $q^{2(m-1)}(q^m-1)(q^{m-1}-1)/(2q+2)$ вершин.

По лемме 17 $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным. Следовательно, он реберно регулярен. Найдем параметры реберной регулярности. Рассмотрим произвольную вершину c графа $\Gamma_G(A)$, которой соответствует подгруппа $\langle u\rangle$, сопряженная с A. Пусть $u_0=u^2$. Определим количество подгрупп, сопряженных с A, коммутирующих с $\langle u\rangle$. По лемме 15 это число будет совпадать с числом двумерных квадратичных подпространств из $(V^-_{u_0})^\perp=V^+_{u_0}$. В рассматриваемом случае $V^+_{u_0}$ имеет размерность $2(m-1)$ и является отрицательным пространством. По лемме 8 получим, что $k=q^{2(m-2)}(q^{m-1}+1)(q^{m-2}+1)/(2q+2)$. Для нахождения параметра λ рассмотрим пару смежных вершин c и g, которым соответствуют коммутирующие подгруппы $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$. Обозначим через u_0 и v_0 инволюции из данных подгрупп. Пусть $L_1=V^-_{u_0}$, $L_2=V^-_{v_0}$ и $L=L_1+L_2$. По лемме 15 $L=L_1\perp L_2$, а так как L_1 и L_2 являются квадратичными, то L это квадратичное пространство. Следовательно, пространство $L^\perp$ тоже будет квадратичным в случае четного m и не квадратичным в случае нечетного m. И в том и другом случае $L^\perp$ будет иметь положительный тип. По лемме 15 число подгрупп из A^G, коммутирующих с $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$, будет равно числу двумерных квадратичных подпространств из $L^\perp$. Так как $dimL^\perp=2(m-2)$, то по лемме 7 получим, что $\lambda=q^{2(m-3)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}-1)/(2q+2)$.

Пусть теперь c и g не смежные вершины графа $\Gamma_G(a)$, которым соответствуют не коммутирующие подгруппы $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$. Обозначим через u_0 и v_0 инволюции из данных подгрупп. Пусть $L_1=V^-_{u_0}$, $L_2=V^-_{v_0}$ и $L=L_1+L_2$. По лемме 15 число подгрупп из A^G, коммутирующих с (2q+2), равно числу двумерных квадратичных подпространств из $L^\perp$.

Случай 1. Пространство L не вырожденно, $dimL=4$ и L положительное пространство.

Тогда $dimL^\perp=2(m-2)$, $L^\perp$ не вырожденно и имеет положительный тип. По лемме 7 получим, что $\mu(c,g)=q^{2(m-3)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}-1)/(2q+2)$ и имеет место (1). Случай 1 будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные положительные пространства размерности 4.

Случай 2. Пространство L не вырожденно, $dimL=4$, и L отрицательное пространство.

Тогда $dimL^\perp=2(m-2)$, $L^\perp$ не вырожденно и имеет отрицательный тип. По лемме 8 получим, что $\mu(c,g)=q^{2(m-3)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}+1)/(2q+2)$ и имеет место (2). Случай обязательно будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные отрицательные пространства размерности 4.

Случай 3. Пространство L не вырожденно, $dimL=3$.

В этом случае $dimL^\perp=2(m-2)+1$. По лемме 10 получим, что $\mu(c,g)=q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q+2)$ и имеет место (3). Случай будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные пространства размерности 3.

Случай 4. Пространство L вырожденно, $dimL=4$ и $dimL^*=1$.

Тогда $dim(L^{\perp})^* = 1$ и $dimL^{\perp}/(L^{\perp})^* = 2(m-3)+1$. По леммам 4 и 10 получим, что $\mu(c,g) = q^{2m-5}(q^{2(m-3)}-1)/(2q+2)$ и имеет место (4). Случай 4 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Случай 5. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$ и $dimL^* = 2$.

В этом случае $L = L_1 + W$, где W двумерное изотропное подпространство из $L_1^{\perp}$. Заметим, что $(L^{\perp})^* = W$ и $L^{\perp} = L_1 \cap W^{\perp}$. По лемме 3 $L^{\perp}/(L^{\perp})^*$ будет иметь тот же тип, что и L_1. Следовательно, $L^{\perp}/(L^{\perp})^*$ будет отрицательным пространством размерности $2(m-3)$ По леммам 4 и 8 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}(q^{m-3}+1)(q^{m-4}+1)/(2q+2)$ и имеет место (5). Случай 5 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Случай 6. Пространство L вырожденно, $dimL = 3$ и $dimL^* = 1$.

В этом случае $L = L_1 + W$, где W одномерное изотропное подпространство из $L_1^{\perp}$. Заметим, что $(L^{\perp})^* = W$ и $L^{\perp} = L_1 \cap W^{\perp}$. По лемме 3 $L^{\perp}/(L^{\perp})^*$ будет иметь тот же тип, что и L_1. Следовательно, $L^{\perp}/(L^{\perp})^*$ будет отрицательным пространством размерности $2(m-2)$ По леммам 4 и 8 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}+1)/(2q+2)$ и имеет место (6). Случай 6 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть X это $\Omega_{2m}^-(q)$, $q \equiv 3(4)$, $m > 3$ и a_0 соответствует инволюции типа 2 из $O_{2m}^-(q)$. Тогда граф $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным, но не является кореберно регулярным. Число вершин данного графа равно $q^{2(m-1)}(q^m+1)(q^{m-1}+1)/(2q+2)$, параметры реберной регулярности k и λ равны соответственно $q^{2(m-2)}(q^{m-1}-1)(q^{m-2}-1)/(2q+2)$ и $q^{2(m-3)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}+1)/(2q+2)$. Для различных несмежных вершин c и g параметр $\mu(c,g)$ принимает одно из следующих значений:*

(1) $q^{2(m-3)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}+1)/(2q+2)$;
(2) $q^{2(m-3)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}-1)/(2q+2)$;
(3) $q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q+2)$;
(4) $q^{2m-5}(q^{2(m-3)}-1)/(2q+2)$;
(5) $q^{2(m-2)}(q^{m-3}-1)(q^{m-4}-1)/(2q+2)$;
(6) $q^{2(m-2)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}-1)/(2q+2)$.

Все значения $\mu(c,g)$ из $(1)-(6)$ встречаются в данном графе.

Доказательство. Число вершин графа $\Gamma_G(A)$ равно числу инволюций типа 2 из $O(V)$ с квадратичным носителем, а число таких инволюций совпадает с числом двумерных квадратичных подпространств из V. По лемме 8 получим, что $\Gamma_G(A)$ имеет $q^{2(m-1)}(q^m+1)(q^{m-1}+1)/(2q+2)$ вершин.

По лемме 17 граф $\Gamma_G(A)$ является вершинно и реберно транзитивным. Следовательно, он реберно регулярен. Найдем параметры реберной регулярности. Рассмотрим произвольную вершину c графа $\Gamma_G(A)$, которой соответствует подгруппа $\langle u\rangle$, сопряженная с A. Пусть $u_0 = u^2$. Определим количество подгрупп, сопряженных с A, коммутирующих с $\langle u\rangle$. По лемме 15 это число будет совпадать с числом двумерных квадратичных подпространств из $(V_{u_0}^-)^{\perp} = V_{u_0}^+$. В рассматриваемом случае $V_{u_0}^+$ имеет размерность $2(m-1)$ и является положительным пространством. По лемме 7 получим, что $k = q^{2(m-2)}(q^{m-1}-1)(q^{m-2}-1)/(2q+2)$. Для нахождения параметра λ рассмотрим пару смежных вершин c и g, которым соответствуют коммутирующие подгруппы $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$. Обозначим через u_0 и v_0 инволюции из данных подгрупп. Пусть $L_1 = V_{u_0}^-$, $L_2 = V_{v_0}^-$ и

$L = L_1 + L_2$. По лемме 15 $L = L_1 \perp L_2$, а так как L_1 и L_2 являются квадратичными, то L это квадратичное пространство. Следовательно, пространство $L^\perp$ тоже будет не квадратичным в случае четного m и квадратичным в случае нечетного m. И в том и другом случае $L^\perp$ будет иметь отрицательный тип. По лемме 15 число подгрупп из A^G, коммутирующих с $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$, будет равно числу двумерных квадратичных подпространств из $L^\perp$. Так как $dimL^\perp = 2(m-2)$, то по лемме 8 получим, что $\lambda = q^{2(m-3)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}+1)/(2q+2)$.

Пусть теперь c и g не смежные вершины графа $\Gamma_G(a)$, которым соответствуют не коммутирующие подгруппы $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$. Обозначим через u_0 и v_0 инволюции из данных подгрупп. Пусть $L_1 = V^-_{u_0}$, $L_2 = V^-_{v_0}$ и $L = L_1 + L_2$. По лемме 15 число подгрупп из A^G, коммутирующих с $\langle u\rangle$ и $\langle v\rangle$, будет равно числу двумерных квадратичных подпространств из $L^\perp$.

Случай 1. Пространство L не вырожденно, $dimL = 4$ и L положительное пространство.

Тогда $dimL^\perp = 2(m-2)$, $L^\perp$ не вырожденно и имеет отрицательный тип. По лемме 8 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-3)}(q^{m-2}+1)(q^{m-3}+1)/(2q+2)$ и имеет место (1). Случай 1 будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные положительные пространства размерности 4.

Случай 2. Пространство L не вырожденно, $dimL = 4$ и L отрицательное пространство.

Тогда $dimL^\perp = 2(m-2)$, $L^\perp$ не вырожденно и имеет положительный тип. По лемме 7 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-3)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}-1)/(2q+2)$ и имеет место (2). Случай обязательно будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные отрицательные пространства размерности 4.

Случай 3. Пространство L не вырожденно, $dimL = 3$.

В этом случае $dimL^\perp = 2(m-2)+1$. По лемме 10 получим, что $\mu(c,g) = q^{2m-5}(q^{2(m-2)}-1)/(2q+2)$ и имеет место (3). Случай будет иметь место ввиду леммы 11 и того, что в V существуют невырожденные пространства размерности 3.

Случай 4. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$ и $dimL^* = 1$.

Тогда $dim(L^\perp)^* = 1$ и $dimL^\perp/(L^\perp)^* = 2(m-3)+1$. По леммам 4 и 10 получим, что $\mu(c,g) = q^{2m-5}(q^{2(m-3)}-1)/(2q+2)$ и имеет место (4). Случай 4 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Случай 5. Пространство L вырожденно, $dimL = 4$ и $dimL^* = 2$.

В этом случае $L = L_1 + W$, где W двумерное изотропное подпространство из $L_1^\perp$. Заметим, что $(L^\perp)^* = W$ и $L^\perp = L_1 \cap W^\perp$. По лемме 3 $L^\perp/(L^\perp)^*$ будет иметь тот же тип, что и L_1. Следовательно, $L^\perp/(L^\perp)^*$ будет положительным пространством размерности $2(m-3)$ По леммам 4 и 7 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}(q^{m-3}-1)(q^{m-4}-1)/(2q+2)$ и имеет место (5). Случай 5 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Случай 6. Пространство L вырожденно, $dimL = 3$ и $dimL^* = 1$.

В этом случае $L = L_1 + W$, где W одномерное изотропное подпространство из $L_1^\perp$. Заметим, что $(L^\perp)^* = W$ и $L^\perp = L_1 \cap W^\perp$. По лемме 3 $L^\perp/(L^\perp)^*$ будет иметь тот же тип, что и L_1. Следовательно, $L^\perp/(L^\perp)^*$ будет положительным пространством размерности $2(m-2)$ По леммам 4 и 8 получим, что $\mu(c,g) = q^{2(m-2)}(q^{m-2}-1)(q^{m-3}-1)/(2q+2)$ и имеет место (6). Случай 6 обязательно будет иметь место ввиду леммы 12.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Э. Артин, *Геометрическая алгебра*, М.:Наука, 1969. MR0242847

[2] Н.Д. Зюляркина, *Циклические TI-подгруппы порядка 4 в классических группах Шевалле нечетной характеристики*, Вопросы алгебры и логики. Труды ИМ СО РАН, (1996), 89–110. Zbl 0912.20012

[3] Н.Д. Зюляркина, А.А. Махнев, *Циклические TI-подгруппы порядка 4 в исключительных группах Шевалле*, Труды ИММ УрО РАН, **3** (1994), 41–49.

[4] А.А. Махнев, *TI-подгруппы в группах типа характеристики 2*, Мат. сборник, **127** (1985), 239–244. MR0792440

[5] M.E. Harris, *Finite groups containing an intrinsic* 2*-component of Chevalley type over field of odd order*, Transactions of the American math.soc., **272**:1 (1982), 1–65. MR0656480

Наталья Дмитриевна Зюляркина
Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина,76 ,
454080, Челябинск, Россия
E-mail address: toddeath@yandex.ru