S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 205–226 (2013) УДК 517.586
MSC 33C47

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ И ФУНКЦИЯХ

В.В. КАРАЧИК

Abstract. A full system of homogeneous harmonic polynomials on n variables is constructed. It is orthogonal in two spaces. On the base of these polynomials a notion of G-functions is introduced. Connections of G-functions with Legendre polynomials and Chebyshev polynomials are obtained and a Rodrigues formula is proved.

Keywords: harmonic polynomials, Legendre and Chebyshev polynomials, Gegenbauer's polynomials, Rodrigues formula.

1. Введение

Для приближенного решения различных краевых задач для гармонического и бигармонического уравнений среди прочих методов используют метод Треффца, наименьших квадратов, коллокации и др. Обоснование этих вычислительных методов можно найти в [1]. Для устойчивости вычислительного процесса в этих методах к координатным функциям предъявляются некоторые дополнительные требования. В качестве координатных функций в этих методах очень удобно использовать гармонические и бигармонические полиномы. Построение бигармонических полиномов в декартовых координатах на базе шаровых функций при помощи формулы Альманси приводит к громоздким вычислениям. Удобный алгоритм разработан М.П. Барнеттом и А.Б. Отисом [2, 3]. Систему линейно независимых однородных гармонических полиномов от трех переменных построил П.П. Теодореску [4]. Систему линейно независимых однородных полигармонических полиномов построил также Б.А. Бондаренко [5]. В многомерном случае, т.е. при $n > 3$ ситуация еще более сложная. Гармонические полиномы от n переменных использовал А.В. Бицадзе [6].

Karachik, V.V., On some special polynomials and functions.

Поступила 1 февраля 2013 г., опубликована 14 марта 2013 г.

Настоящая работа является продолжением исследований автора, изложенных в [7–10]. В разделе 2, строится полная система однородных гармонических полиномов от n переменных $\{G_{(\nu)}(x)\}$ (теорема 2), которая ортогональна в $L_2(\partial S)$, где ∂S – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$(теорема 3) и в $\mathcal{P}$ (теорема 4). В качестве приложения этих теорем в теореме 6 получена формула для значения выражения вида $G_{(\nu)}(D)u(x)_{|x=0}$, где $u(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в $\bar{S}$ функция. В теореме 7 получена формула вычисления интеграла вида $\int_{|x|=1} Q_m(x)\, ds_x$, где $Q_m(x)$ – однородный полином. В разделе 3 вводится понятие G-функции и устанавливается связь G-функций с полиномами Лежандра и Чебышева (теоремы 8 и 9), а также формула Родрига (теорема 10). В разделе 3 доказана ортогональность G-функций $G_k^{s,n}(t)$ на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(t) = (1-t^2)^{(n-3)/2}$.

Опишем метод построения системы гармонических полиномов $\{G_{(\nu)}(x)\}$ от n переменных. Пусть L_1 и L_2 линейные дифференциальные операторы действующие из функционального пространства $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$: $L_k\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$ $(k=1,2)$ и пусть функции из $\mathcal{X}$ определенны в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определение 1. [7] Последовательность функций $\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}_0, f_k \in \mathcal{X}\}$, называется f-нормированной относительно (L_1, L_2) в области Ω, имеющей основание $f_0(x)$, если везде в этой области

$$L_1 f_0(x) = f(x), \quad L_1 f_k(x) = L_2 f_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Систему функций f-нормированную относительно (L_1, I) будем называть f-нормированной относительно оператора L_1, т.е.

$$L_1 f_0(x) = f(x), \quad L_1 f_k(x) = f_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Основное свойство системы функций f-нормированной относительно (L_1, L_2) в области Ω заключается в следующем: ряд

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

является формальным решением уравнения $L_1 u(x) - L_2 u(x) = f(x)$ в Ω.

Если операторы L_1 и L_2 коммутируют и система функций $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ является f-нормированной относительно оператора L_1 в Ω, то формальное решение уравнения $L_1 u(x) - L_2 u(x) = f(x)$ в Ω можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} L_2^k f_k(x). \tag{1}$$

Это так, поскольку система $\left\{\varphi_k(x) = L_2^k f_k(x) : k \in \mathbb{N}_0\right\}$ будет f-нормированной относительно (L_1, L_2) в области Ω:

$$L_1\varphi_0 = L_1 f_0 = f, \quad L_1\varphi_k = L_1 L_2^k f_k = L_2^k f_{k-1} = L_2\varphi_{k-1}.$$

Пример 1. Пусть $n = 2$,

$$L_1 = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

и $\Omega = \mathbb{R}^2/\{y=0\}$. Тогда система функций 0-нормированная относительно этих операторов (L_1, L_2) в Ω может быть записана в виде

$$f_k(x,y) = \frac{m}{1}\frac{m-2}{2}\cdots\frac{m-2k+2}{k}\, y^{m-2k} x^k$$

для $k \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{N}$. Действительно, $L_1 f_0(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x} y^m = 0$ и

$$L_1 f_k(x,y) = \frac{m}{1}\frac{m-2}{2}\cdots\frac{m-2k+2}{k} y\frac{\partial}{\partial x} y^{m-2k} x^k =$$
$$= \frac{m}{1}\frac{m-2}{2}\cdots\frac{m-2k+4}{k-1}(m-2k+2) y^{m-2k+1} x^{k-1} =$$
$$= \frac{m}{1}\frac{m-2}{2}\cdots\frac{m-2k+4}{k-1}\frac{\partial}{\partial y} y^{m-2k+2} x^{k-1} = L_2 f_{k-1}(x,y).$$

Используя основное свойство f-нормированных систем функций мы можем легко построить формальные решения дифференциального уравнения

$$y u_x(x,y) - u_y(x,y) = 0$$

в области Ω. В нашем случае формальные решения вида

$$u_m(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m/2-k+1)_k}{(1)_k}(2x)^k y^{m-2k}, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $(a)_k = a\cdots(a+k-1)$ – символ Похгаммера, причем $(a)_0 = 1$, для некоторых x, y являются и классическими решениями. Например, при $2|x| < y^2$ соответствующие ряды абсолютно сходятся по признаку Даламбера

$$\lim_{k\to\infty}\Big|\frac{a_{k+1}(x,y)}{a_k(x,y)}\Big| = 2\frac{|x|}{y^2}\lim_{k\to\infty}\frac{|m/2-k|}{k+1} = 2\frac{|x|}{y^2} < 1.$$

При четном m, $\exists\, k_0$, $\forall\, k > k_0$ $(m/2-k+1)_k = 0$ и значит функция $u_m(x,y)$ является полиномиальным решением рассматриваемого уравнения.

2. G-полиномы

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая ограниченной область, обладающая свойством звездности: $\forall t \in [0,1]$, $x \in \Omega \Rightarrow tx \in \Omega$ и $u(x)$ – некоторая гармоническая в Ω функция.

Определим следующую систему функций: $G_0(x;u) = u(x)$ и для $k > 0$

$$G_k(x;u) = \frac{1}{4^k}\frac{|x|^{2k}}{k!}\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}\alpha^{n/2-1}}{(k-1)!} u(\alpha x)\, d\alpha, \quad x \in \Omega.$$

В [8] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Система функций $\{G_k(x;u) : k \in \mathbb{N}_0\}$ является 0-нормированной относительно оператора Лапласа Δ в области Ω.*

Если $u(x) = H_m(x)$ – некоторый однородный гармонический полином степени m, то будем иметь

$$(2) \quad G_k(x;H_m) = \frac{|x|^{2k}H_m(x)}{4^k k!(k-1)!} B(k, m+n/2) =$$
$$= \frac{|x|^{2k}H_m(x)}{4^k k!(k-1)!}\frac{\Gamma(k)\Gamma(m+n/2)}{\Gamma(k+m+n/2)} = \frac{|x|^{2k}H_m(x)}{(2,2)_k(n+2m,2)_k},$$

где $B(\alpha,\beta)$ и $\Gamma(\alpha)$ – известные B и Γ функции Эйлера, а $(a,b)_k = a(a+b)\ldots(a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a,b)_0 = 1$. Если теперь представить уравнение Лапласа в виде

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = L_1 u - L_2 u = 0,$$

то в силу теоремы 1, по основному свойству нормированных систем функций (см. (1)) следующие полиномы

$$(3)\qquad u_{k,s}(x)=\sum_{i=0}^{[k/2]}\frac{|x_{(n-1)}|^{2i}H_s(x_{(n-1)})}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)^i x_n^{k,!}=G_k^s(x_{(n)})H_s(x_{(n-1)}),$$

где обозначено $x^{k,!}=x^k/k!$, $x_{(n-1)}=(x_1,\dots,x_{(n-1)})$ и

$$(4)\qquad G_k^s(x_{(n)})=\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^i\frac{|x_{(n-1)}|^{2i}x_n^{k-2i,!}}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i}$$

являются гармоническими полиномами от n переменных.

Определение 2. Полином $G_k^s(x_{(n)})$ вида (4) назовем G-полиномом степени k, порядка s, и рода n.

Пример 2. Выпишем некоторые из G-полиномов

$$(5)\qquad \begin{gathered} G_0^s(x)=1,\quad G_1^s(x)=x_n,\quad G_2^s(x)=\frac{x_n^2}{2}-\frac{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2}{2(n-1+2s)},\\ G_3^s(x)=\frac{x_n^3}{6}-\frac{(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)x_n}{2(n-1+2s)},\\ G_4^s(x)=\frac{x_n^4}{24}-\frac{(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)x_n^2}{4(n-1+2s)}+\frac{(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)^2}{8(n-1+2s)(n+1+2s)}. \end{gathered}$$

В соответствии с данным определением выше установлено, что произведение однородного гармонического полинома $H_s(x_{(n-1)})$ от $(n-1)$-й переменной на G-полином $G_k^s(x_{(n)})$ дает гармонический полином от n переменных $u_{k,s}(x)=G_k^s(x_{(n)})H_s(x_{(n-1)})$. Например, полином $G_2^0(x_{(n-1)})$ – гармонический, а значит полином $u_{4,2}(x)=G_4^2(x_{(n)})G_2^0(x_{(n-1)})$ тоже гармонический, но от n переменных. Его степень 6. Верно более сильное утверждение.

Лемма 1. *Любой однородный гармонический полином от n переменных может быть представлен в виде суммы полиномов вида* (3).

Доказательство. Действительно, пусть $u(x)$ – некоторый однородный гармонический полином от n переменных степени l, а $H_s(x_{(n-1)})x_n^{k,!}$ – часть его мономов, содержащая наивысшую степень $k\le l$ по переменной x_n. Тогда полином $H_s(x_{(n-1)})$ должен быть гармоническим полиномом от $(n-1)$-й переменной. Рассмотрим гармонический полином от n переменных вида

$$u(x)-u_{k,s}(x),$$

где полином $u_{k,s}(x)$ находится из (3) и пусть $H_{s_1}(x_{(n-1)})x_n^{k_1,!}$ – часть его мономов, содержащая наивысшую степень k_1 по переменной x_n. По построению $k_1<k$. Теперь рассмотрим гармонический полином от n переменных вида

$$u(x)-u_{k,s}(x)-u_{k_1,s_1}(x),$$

который имеет наивысшую степень $k_2<k_1$ по переменной x_n и т.д. Процесс остановится когда степень гармонического полинома от n переменных

$$u(x)-u_{k,s}(x)-\ldots-u_{k_{m-1},s_{m-1}}(x),$$

по переменной x_n равна нулю, или он сам равен нулю $H_{s_m}(x_{(n-1)})=0$, а значит

$$u(x)-u_{k,s}(x)-\ldots-u_{k_{m-1},s_{m-1}}(x)=u_{0,l}(x)$$

и следовательно

$$u(x) = u_{k,s}(x) + \ldots + u_{k_{m-1},s_{m-1}}(x) + u_{0,l}(x).$$

Лемма доказана. $\square$

Полиномы $G_k^s(x_{(n)})$ при $s = 0$ – гармонические, а при $s > 0$ и $k > 1$ – негамонические. Если $n = 2$, то однородных степени k, линейно независимых гармонических полиномов, как известно, всего два и их можно записать в виде

$$H_k^s(x_{(2)}) = \sum_{i=0}^{[(k-s)/2]} (-1)^i x_1^{2i+s,!} x_2^{k-2i-s,!}, \quad s = 0, 1. \tag{6}$$

Например, $H_2^0(x_{(2)}) = (x_2^2 - x_1^2)/2$, $H_2^1(x_{(2)}) = x_2 x_1$. Индекс s полинома указывает на четность полинома $H_k^s(x_{(2)})$ по переменной x_1, а индекс k – его степень. Легко видеть, что $H_k^s(x_{(2)}) = G_{k-s}^s(x_{(2)}) x_1^s$ при $s = 0, 1$.

Теорема 2. *При $n \geq 2$ и $\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_n$, $\nu_n = 0, 1$ полиномы*

$$G_{(\nu)}(x_{(n)}) = \prod_{i=1}^{n-2} G_{\nu_i - \nu_{i+1}}^{\nu_{i+1}}(x_{(n-i+1)}) H_{\nu_{n-1}}^{\nu_n}(x_{(2)}), \tag{7}$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ образуют базис в однородных степени ν_1 гармонических полиномах.

Доказательство. Пусть $n = 2$, тогда утверждение теоремы сразу следует из полноты полиномов (6). Если $n > 2$, тогда применяя результат леммы 1 заключаем, что любой однородный степени k гармонический полином может быть записан в виде суммы полиномов вида

$$u_k(x_{(n)}) = u_m(x_{(n-1)}) G_{k-m}^m(x_{(n)}), \tag{8}$$

где $u_m(x_{(n-1)})$ – гармонический полином от $(n-1)$-й переменной. Выбирая в качестве $u_m(x_{(n-1)})$ базисные гармонические полиномы степени m, при $m = 0, \ldots, k$, получим базисные гармонические полиномы степени k от $x_{(n)}$. Используя индукцию по n завершим доказательство. $\square$

Замечание 1. *Полиномы $G_{(\nu)}$ могут быть также определены следующим рекуррентным соотношением: $G_{(\nu)}(x) = H_{\nu_{n-1}}^{\nu_n}(x)$ для $n = 2$ и $G_{(\nu)}(x_{(n)}) = G_{\nu_1-\nu_2}^{\nu_2}(x_{(n)}) G_{(\bar{\nu})}(x_{(n-1)})$ для $n > 2$, где $\bar{\nu} = (\nu_2, \ldots, \nu_n)$.*

Пример 3. Для того, чтобы, например, сконструировать гармонический полином 5-й степени $P_5(x)$ надо составить вектор $\nu = (5, 3, 2, \ldots, 2, 0)$, удовлетворяющий условию теоремы 2 и в соответствии с формулой (7) перемножить соответствующие G-полиномы

$$\begin{aligned} P_5(x) &= G_{\nu_1-\nu_2}^{\nu_2}(x_{(n)}) G_{\nu_2-\nu_3}^{\nu_3}(x_{(n-1)}) \cdots G_{\nu_{n-2}-\nu_{n-1}}^{\nu_{n-1}}(x_{(3)}) H_{\nu_{n-1}}^{\nu_n}(x_{(2)}) = \\ &= G_2^3(x_{(n)}) G_1^2(x_{(n-1)}) G_0^2(x_{(n-2)}) \cdots G_0^2(x_{(3)}) H_2^0(x_{(2)}) = \\ &= \Big(\frac{x_n^2}{2} - \frac{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{2(n+5)} \Big) x_{n-1} \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулами (5) и (6).

Докажем ортогональность системы гармонических полиномов (7) на единичной сфере. В дальнейшем, где это не вызовет неясности, вместо $x_{(n)}$ и $x_{(n-1)}$ будем писать x и $\tilde{x}$ соответственно.

Лемма 2. *Для* $f \in C(|x|=1)$ *имеет место формула*

$$\int_{|x|=1} f(x)\,ds_x = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{(n-3)/2}\,dt \int_{|\tilde{x}|=1} f(\sqrt{1-t^2}\tilde{x}, t)\,ds_{\tilde{x}}. \tag{9}$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что для $f \in C(|x|=1)$ верно равенство

$$\int_{|x|=1} f(x)\,ds_x = \int_{|\tilde{x}|\le 1} \left[f(\tilde{x}, \sqrt{1-|\tilde{x}|^2}) + f(\tilde{x}, -\sqrt{1-|\tilde{x}|^2})\right](1-|\tilde{x}|^2)^{-1/2}\,d\tilde{x},$$

откуда следует, что

$$\int_{|x|=1} f(x)\,ds_x = \int_0^1 \frac{\tau^{n-2}}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau \int_{|\tilde{x}|=1} \left[f(\tau\tilde{x}, \sqrt{1-\tau^2}) + f(\tau\tilde{x}, -\sqrt{1-\tau^2})\right] ds_{\tilde{x}}.$$

Делая замену переменных по формуле $t = \sqrt{1-\tau^2}$, получим

$$\int_{|x|=1} f(x)\,ds_x = \int_0^1 (1-t^2)^{(n-3)/2}\,dt \int_{|\tilde{x}|=1} \left[f(\sqrt{1-t^2}\tilde{x}, t) + f(\sqrt{1-t^2}\tilde{x}, -t)\right] ds_{\tilde{x}}.$$

Разделяя полученный справа интеграл на два и делая во втором замену переменных t на $-t$, получим (9). □

Лемма 3. *Если для функции* $f \in C(|x|=1)$ *имеет место равенство* $f(x) = \varphi(|\tilde{x}|, x_n)P_k(\tilde{x})$, *где* $P_k(\tilde{x})$ *– однородный полином степени* k, *а* $\varphi \in C(|x|=1)$, *то тогда*

$$\int_{|x|=1} f(x)\,ds_x = \int_{|x|=1} \varphi(|\tilde{x}|, x_n)\left(1-x_n^2\right)^{k/2}\,ds_x \,\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{|\tilde{x}|=1} P_k(\tilde{x})\,ds_{\tilde{x}}. \tag{10}$$

Доказательство. Воспользуемся утверждением леммы 2 для функции $f(x)$. Имеем

$$\int_{|x|=1} f(x)\,ds_x = \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-t^2})^{n+k-3}\varphi(\sqrt{1-t^2}, t)\,dt \int_{|\tilde{x}|=1} P_k(\tilde{x})\,ds_{\tilde{x}}.$$

Умножим полученное равенство на $\omega_{n-1} = \int_{|\tilde{x}|=1} ds_{\tilde{x}}$ и воспользуемся опять леммой 2 с функцией $f(x) = \varphi(|\tilde{x}|, x_n)(1-x_n^2)^{k/2}$. Получим

$$\omega_{n-1} \int_{|x|=1} f(x)\,ds_x = \int_{|x|=1} \varphi(|\tilde{x}|, x_n)(1-x_n^2)^{k/2}\,ds_x \int_{|\tilde{x}|=1} P_k(\tilde{x})\,ds_{\tilde{x}},$$

откуда и следует (10). □

Лемма 4. *G-полиномы одного порядка s ортогональны на единичной сфере с весом* $\rho(x) = (1-x_n^2)^s$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 3 для функции $f(x) = u_{k_1}(x)u_{k_2}(x)$, где $u_{k_i}(x)$ $(i=1,2)$ – однородные гармонические полиномы, которые в соответствии с формулой (8) могут иметь вид $u_{k_i}(x) = u_s(\tilde{x})G^s_{k_i-s}(x)$, $(s \le k_i)$. Это возможно, поскольку полиномы $G^s_k(x)$ можно представить в форме $G^s_k(x) = G^s_k(|\tilde{x}|, x_n)$. Имеем

$$\int_{|x|=1} u_{k_1}(x)u_{k_2}(x)\,ds_x =$$
$$= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{|x|=1} G^s_{k_1-s}(x)G^s_{k_2-s}(x)(1-x_n^2)^s\,ds_x \int_{|\tilde{x}|=1} u_s^2(\tilde{x})\,ds_{\tilde{x}}.$$

Так как левая часть полученного равенства при $k_1 \neq k_2$ равна нулю и $u_s(\tilde{x}) \not\equiv \not\equiv 0$, то лемму можно считать доказанной. $\square$

Используя приведенные выше леммы нетрудно установить ортогональность системы полиномов $\left\{G_{(\nu)}\right\}$ на единичной сфере.

Теорема 3. *Полиномы $\left\{G_{(\nu)}\right\}$ при различных векторах $\nu \in \mathbb{N}_0^n$, удовлетворяющих условию $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots \geq \nu_n$, $\nu_n = 0, 1$, ортогональны на единичной сфере.*

Доказательство. Пусть $n = 2$. При $x \in \left\{y \in \mathbb{R}^2 : |y| = 1\right\}$ полиномы $H_m^s(x)$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
H_m^0(x) &= \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k x_1^{2k,!} x_2^{m-2k,!} = \frac{1}{m!}\operatorname{Re}(x_2 + ix_1)^m = \frac{1}{m!}\cos mt, \\
H_m^1(x) &= \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} (-1)^k x_1^{2k+1,!} x_2^{m-2k-1,!} = \frac{1}{m!}\operatorname{Im}(x_2 + ix_1)^m = \frac{1}{m!}\sin mt,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $x_2 = \cos t$, $x_1 = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ и значит они ортогональны на единичной окружности

$$
\int_{|x_{(2)}|=1} H_m^0(x) H_m^1(x)\, ds_x = \frac{1}{m!^2}\int_0^{2\pi} \cos mt \sin mt\, dt = 0,
$$

поскольку $ds_x = dt$. Если теперь $n > 2$, то воспользовавшись $n-2$ раз леммой 3, нетрудно найти

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|=1} G_{(\nu)}(x) G_{(\mu)}(x) ds_x &= \prod_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\omega_{n-i}} \int_{|y_{(n-i+1)}|=1} G_{\nu_i-\nu_{i+1}}^{\nu_{i+1}}(y) G_{\mu_i-\mu_{i+1}}^{\mu_{i+1}}(y) \times \\
&\times \left(1 - y_{n-i+1}^2\right)^{(\nu_{i+1}+\mu_{i+1})/2} ds_y \int_{|y_{(2)}|=1} H_{\nu_{n-1}}^{\nu_n}(y) H_{\mu_{n-1}}^{\mu_n}(y) ds_y.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Предположим, что $\nu \neq \mu$, а значит $\exists i$, $\nu_i \neq \mu_i$. Пусть j – максимальное число, удовлетворяющее этому условию. Если $j = n$ или $j = n-1$, то равенство правой части (12) нулю следует из справедливости теоремы при $n = 2$, а если же $j < n-1$, то из леммы 4, поскольку $\nu_{j+1} = \mu_{j+1}$, $\nu_j \neq \mu_j$ и значит,

$$
\int_{|y_{(n-j+1)}|=1} G_{\nu_j-\nu_{j+1}}^{\nu_{j+1}}(y) G_{\mu_j-\mu_{j+1}}^{\mu_{j+1}}(y) \left(1 - y_{n-j+1}^2\right)^{\nu_{j+1}} ds_y = 0.
$$

Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим полиномы $G_{(\nu)}(x)$ в пространстве $\mathcal{P} = \{P(x) = \sum_\alpha p_\alpha x^\alpha\}$ со скалярным произведением $\langle P(x), Q(x)\rangle = P(D)Q(x)_{|x=0}$ [7]. Норму полинома $P(x) \in \mathcal{P}$ будем обозначать $|P|_D$. Например,

$$
|x_1^2 + \cdots + x_n^2|_D = \Delta|x|^2{}_{|x=0} = 2n.
$$

Система полиномов $G_{(\nu)}(x)$ обладает еще одним интересным свойством.

Теорема 4. *Полиномы $G_{(\nu)}(x)$ для различных векторов $\nu \in \mathbb{N}_0^n$, удовлетворяющих условию $\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_n$ $(\nu_n = 0, 1)$ ортогональны в $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Нам необходимо проверить справедливость следующего утверждения: $\nu \neq \mu \Rightarrow \langle G_{(\nu)}, G_{(\mu)} \rangle = 0$. Применим индукцию по размерности n. Рассмотрим случай $\nu_1 = \mu_1$ поскольку если $\nu_1 \neq \mu_1$ то гармонические полиномы $G_{(\nu)}(x)$ и $G_{(\mu)}(x)$ ортогональны, как имеющие различную степень. Это следует из формулы Гаусса-Остроградского [6]

$$0 = \int_{|x|=1} \Big(H_p(x) \frac{\partial}{\partial \nu} H_m(x) - H_m(x) \frac{\partial}{\partial \nu} H_p(x) \Big)\, ds_x = \\ = (m-p) \int_{|x|=1} H_p(x) H_m(x)\, ds_x,$$

где $H_p(x)$ и $H_m(x)$ однородные гармонические полиномы степеней $p \neq m$ соответственно.

Пусть $n = 2$. Полиномы $G_{(\nu)}(x)$ и $G_{(\mu)}(x)$ ортогональны поскольку они имеют различную четность по x_1: если $\nu_2 = 0$ тогда $G_{(\nu)}(x)$ – четный, а если $\nu_2 = 1$ то нечетный.

Пусть $n > 2$. Рассмотрим случай $\nu_2 < \mu_2$. Определим G-полиномы для $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ как $G_k^s \equiv 0$ и обозначим $\tilde\Delta = \Delta - \partial^2/\partial x_n^2$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\, G_{(\mu)}(x) = G_{(\mu_-)}(x), \quad \tilde\Delta G_{(\mu)}(x) = -G_{(\mu_=)}(x), \tag{13}$$

где $\mu_- = (\mu_1 - 1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ и $\mu_= = (\mu_-)_-$. Поэтому, используя замечание к теореме 2, получим

$$G_{(\nu)}(D) G_{(\mu)}(x) = G_{(\bar\nu)}(\tilde D) \big(G^{\nu_2}_{\nu_1-\nu_2}(D) G^{\mu_2}_{\mu_1-\mu_2}(x) G_{(\bar\mu)}(\tilde x) \big). \tag{14}$$

Поскольку по формуле (2) при $k \geq m$ и однородном гармоническом полиноме $H_s(x)$

$$\Delta^m \frac{|x|^{2k} H_s(x)}{(2,2)_k (n+2s,2)_k} = \frac{|x|^{2k-2m} H_s(x)}{(2,2)_{k-m}(n+2s,2)_{k-m}},$$

то будем иметь

$$G^{\nu_2}_{k_1}(D) G^{\mu_2}_{k_2}(x) H_{\mu_2}(\tilde x) = \\ = \sum_{i=0}^{[k_1/2]} \frac{(-1)^i \tilde\Delta^i D_n^{k_1-2i}}{(2,2)_i (n-1+2\nu_2,2)_i (k_1-2i)!} \sum_{j=0}^{[k_2/2]} \frac{(-1)^j |\tilde x|^{2j} x_n^{k_2-2j,!}}{(2,2)_j (n-1+2\mu_2,2)_j} H_{\mu_2}(\tilde x) = \\ = \sum_{i=0}^{[k_1/2]} \frac{1}{(2,2)_i (n-1+2\nu_2,2)_i (k_1-2i)!} \sum_{j=i}^{[(k_2-k_1)/2]+i} \frac{(-1)^{j-i} |\tilde x|^{2j-2i} x_n^{k_2-k_1+2i-2j,!}}{(2,2)_{j-i} (n-1+2\mu_2,2)_{j-i}} \times \\ \times H_{\mu_2}(\tilde x) = C(k_1,\nu_2) \sum_{j=0}^{[(k_2-k_1)/2]} \frac{(-1)^j |\tilde x|^{2j} x_n^{k_2-k_1-2j,!}}{(2,2)_j (n-1+2\mu_2,2)_j} H_{\mu_2}(\tilde x) = \\ = C(k_1,\nu_2) G^{\mu_2}_{k_2-k_1}(x) H_{\mu_2}(\tilde x),$$

где $C(k_1,\nu_2) = \sum_{i=0}^{[k_1/2]} 1/((2,2)_i (n-1+2\nu_2,2)_i (k_1-2i)!)$. Значит из (14) при $k_1 = \nu_1 - \nu_2$ и $k_1 = \mu_1 - \mu_2$ выводим

$$G_{(\nu)}(D) G_{(\mu)}(x) = C(\nu_1-\nu_2,\nu_2) G_{(\bar\nu)}(\tilde D) \big[G^{\mu_2}_{(\mu_1-\mu_2)-(\nu_1-\nu_2)}(x) G_{(\bar\mu)}(\tilde x) \big]. \tag{15}$$

Так как $\mu_1 - \mu_2 - \nu_1 + \nu_2 = \nu_2 - \mu_2 < 0$, то мы можем заключить, что $G_{(\nu)}(x)$ и $G_{(\mu)}(x)$ ортогональны. В силу симметричности скалярного произведения это утверждение верно и при $\nu_2 > \mu_2$. Рассмотрим последний случай $\nu_2 = \mu_2$.

Используя равенство (15) и учитывая, что $G_0^s = 1$ получим $\langle G_{(\nu)}, G_{(\mu)}\rangle = C(\nu_1-\nu_2,\nu_2)\langle G_{(\bar\nu)}, G_{(\bar\mu)}\rangle$. Так как $\nu_1=\mu_1$ и $\nu\neq\mu$ имеем $\bar\nu\neq\bar\mu$. Следовательно, по индукции, полиномы $G_{(\nu)}(x)$ и $G_{(\mu)}(x)$ ортогональны в $\mathcal{P}$. □

Известно [11], что максимальное число линейно независимых однородных степени k гармонических полиномов равно $h_k = \frac{2k+n-2}{n-2}\binom{k+n-3}{n-3}$. Перенумеруем полиномы $G_{(\nu)}(x)$ с $\nu_1 = k$ так, что получится полная система ортогональных сферических гармоник степени k. Обозначим эту систему $\{H_k^{(i)}(x) : i = 1,\dots,h_k\}$ и нормируем полиномы так, что $\int_{\partial S}(H_k^{(i)}(x))^2\,ds_x = \omega_n$.

Теорема 5. *Пусть $u(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в $\bar S$ функция тогда справедливо представление*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} h_k^{(i)} H_k^{(i)}(x), \tag{16}$$

где $h_k^{(i)} = 1/\omega_n \int_{\partial S} H_k^{(i)}(\xi)u(\xi)\,d\xi$.

Доказательство. Пусть $E(x,\xi) = (n-2)^{-1}|\xi-x|^{2-n}$ $(n>2)$ – элементарное решение уравнения Лапласа [6]. Нетрудно заметить, что для оператора $\Lambda = x_1\partial/\partial x_1 + \cdots + x_n\partial/\partial x_n$ и при $x\neq\xi\in\partial S$ верно равенство

$$\Lambda_x E(x,\xi) - \Lambda_\xi E(x,\xi) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i(x_i-\xi_i)-\xi_i(\xi_i-x_i)}{|x-\xi|^n} = \frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}.$$

Воспользуемся леммой 11 из [13]. При $|x|<|\xi|$ имеем

$$E(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\xi|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2}\sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi).$$

Поэтому при $|x|<|\xi|=1$ ядро Пуассона имеет вид

$$\frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n} = \Lambda_x E(x,\xi) - \Lambda_\xi E(x,\xi) = \tag{17}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k-k+(2k+n-2)}{2k+n-2}\sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi).$$

Дифференцирование и предельный переход под знаком суммирования законны, поскольку ряд в (17) сходится равномерно по $\xi\in\partial S$ и по x при $|x|\le\alpha<1$. Подставляя полученное значение ядра Пуассона в известную формулу решения задачи Дирихле в единичном шаре и используя равномерную сходимость ряда по $\xi\in\partial S$ приходим к (16)

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}u(\xi)\,ds_\xi = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(\xi)u(\xi)\,ds_\xi H_k^{(i)}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S} H_k^{(i)}(\xi)u(\xi)\,ds_\xi H_k^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} h_k^{(i)}H_k^{(i)}(x).$$

Теорема доказана. □

Теорема 6. *Пусть $u(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в $\bar{S}$ функция, тогда имеет место равенство*

$$\int_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi)u(\xi)\,ds_\xi = g_\nu G_{(\nu)}(D)u(x)_{|x=0}, \tag{18}$$

где $g_\nu = |G_{(\nu)}|^2_{L_2}/|G_{(\nu)}|^2_D$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (16) из теоремы 5. Так как для каждых i и k найдется вектор ν такой, что $\nu_1 = k \geq \cdots \geq \nu_n$ ($\nu_n = 0, 1$) и

$$H_k^{(i)}(x) = \sqrt{\omega_n}\frac{G_{(\nu)}(x)}{|G_{(\nu)}|_{L_2(\partial S)}},$$

то имеем

$$u(x) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{G_{(\nu)}(x)}{|G_{(\nu)}|^2_{L_2(\partial S)}} \int_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi)u(\xi)\,ds_\xi.$$

Применяя к этому равенству оператор $G_{(\mu)}(D)$ (дифференцирование можно внести под интеграл так как ряд сходится равномерно по $|x| \leq \alpha < 1$) и полагая затем $x = 0$ получим

$$G_{(\mu)}(D)u(x)_{|x=0} = \\ = \sum_{\nu_1=\mu_1} \frac{\langle G_{(\mu)}, G_{(\nu)}\rangle}{|G_{(\nu)}|^2_{L_2(\partial S)}} \int_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi)u(\xi)\,ds_\xi = \frac{1}{g_\nu}\int_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi)u(\xi)\,ds_\xi.$$

Здесь мы воспользовались ортогональностью полиномов $G_{(\mu)}(x)$ в $\mathcal{P}$ (теорема 4). Отсюда сразу получаем равенство (18). □

Для использования теоремы 6 необходима формула для вычисления интегралов вида $\int_{|x|=1} Q_m(x)\,ds_x$, где $Q_m(x)$ – однородный полином степени m.

Теорема 7. *Справедлива формула*

$$\int_{|x|=1} Q_m(x)\,ds_x = \begin{cases} 0, & m \in 2\mathbb{N}-1 \\ \dfrac{\Delta^{m/2}Q_m(x)}{m!!\,n\cdots(n+m-2)}\,\omega_n, & m \in 2\mathbb{N} \end{cases}. \tag{19}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 4 из [13].

Лемма 5. *Гармонические полиномы $R_{m-2k}(x)$ в разложении однородного полинома $Q_m(x)$ по формуле Альманси*

$$Q_m(x) = R_m(x) + |x|^2 R_{m-2}(x) + \cdots + |x|^{2l}R_{m-2l}(x)$$

имеют вид

$$R_{m-2k}(x) = \frac{2m-4k+n-2}{(2,2)_k}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s|x|^{2s}\Delta^{s+k}Q_m(x)}{(2,2)_s(2m-4k-2s+n-2,2)_{s+k+1}}.$$

Из теоремы о среднем для гармонических функций и формулы Альманси следует, что

$$\int_{|x|=1} Q_m(x)\,ds_x = \\ = \int_{|x|=1}\big(R_m(x) + R_{m-2}(x) + \cdots + R_{m-2l}(x)\big)\,ds_x = \begin{cases} 0, & 2l < m \\ \omega_n R_0, & 2l = m \end{cases}.$$

При нечетном m интеграл равен нулю так как $m-2l>0$ и значит $R_{m-2l}(0)=0$. При четном m, используя лемму 5 запишем ($s=0$, $k=m/2$)

$$\int_{|x|=1} Q_m(x)\,ds_x = \frac{n-2}{(2,2)_{m/2}}\frac{\Delta^{m/2}Q_m(x)}{(n-2,2)_{m/2+1}}\,\omega_n = \frac{\Delta^{m/2}Q_m(x)}{m!!\,n\cdots(n+m-2)}\,\omega_n.$$

Теорема доказана. □

В [14] формула Альманси продолжена на аналитические функции.

Следствие 1. *Если $u(x)$ гармоническая в S и непрерывная в $\bar S$ функция, то имеет место равенство*

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\bar G_{(\nu)}(\xi)u(\xi)\,ds_\xi = \frac{\Delta^{\nu_1}\bar G^2_{(\nu)}(x)}{(2\nu_1)!!(n,2)_{\nu_1}}\,\bar G_{(\nu)}(D)u(x)_{|x=0}, \tag{20}$$

где $\bar G_{(\nu)}(x)=G_{(\nu)}(x)/|G_{(\nu)}|_D$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что в обозначениях теоремы 6 и с помощью теоремы 7 ($m=2\nu_1$) можно записать

$$g_\nu = |G_{(\nu)}|^2_{L_2}/|G_{(\nu)}|^2_D = |\bar G_{(\nu)}|^2_{L_2} = \frac{\Delta^{\nu_1}\bar G^2_{(\nu)}(x)}{(2\nu_1)!!(n,2)_{\nu_1}}\,\omega_n. \tag{21}$$

Подставляя найденное значение константы g_ν в (18) и деля обе части полученного равенства на $|G_{(\nu)}|_D$ и ω_n получим (20). □

Пример 4. Пусть $u(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в $\bar S$ функция, тогда имеют место равенства

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\xi_i u(\xi)\,ds_\xi = \frac{1}{n}u_{x_i}(0),\quad \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\xi_i\xi_j u(\xi)\,ds_\xi = \frac{1}{n(n+2)}u_{x_ix_j}(0),$$
$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\xi_i^2 u(\xi)\,ds_\xi = \frac{1}{n(n+2)}u_{x_ix_i}(0)+\frac{1}{n}u(0).$$

I. Первую формулу нетрудно получить из (18). Если взять $\nu=e_1+\cdots+e_{n-i+1}$, где $e_i=(\delta_{1,i},\dots,\delta_{n,i})$, то аналогично примеру 3 и учитывая пример 2 получим

$$\begin{aligned} G_{(\nu)}(x) &= G^{\nu_2}_{\nu_1-\nu_2}(x_{(n)})G^{\nu_3}_{\nu_2-\nu_3}(x_{(n-1)})\cdots G^{\nu_{n-1}}_{\nu_{n-2}-\nu_{n-1}}(x_{(3)})H^{\nu_n}_{\nu_{n-1}}(x_{(2)}) =\\ &= G^1_0(x_{(n)})G^1_0(x_{(n-1)})\cdots G^0_1(x_{(i)})\cdots G^0_0(x_{(3)})H^0_0(x_{(2)}) = x_i.\end{aligned}$$

Так как

$$|x_i|^2_{L_2} = \int_{|x|=1}x_i^2\,ds_x = \frac{1}{n}\int_{|x|=1}\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)ds_x = \frac{\omega_n}{n}$$

и $|x_i|^2_D = D_{x_i}x_i = 1$, то $g_\nu = |x_i|^2_{L_2}/|x_i|^2_D = \omega_n/n$ и значит первая формула верна

$$\int_{|\xi|=1}\xi_i u(\xi)\,ds_\xi = \frac{\omega_n}{n}D_{x_i}u(x)_{|x=0}.$$

II. Далее положим $\nu=2e_1+\cdots+2e_{n-j+1}+e_{n-j+2}+\cdots+e_{n-i+1}$ если $i>j$. Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} G_{(\nu)}(x) &= G^{\nu_2}_{\nu_1-\nu_2}(x_{(n)})G^{\nu_3}_{\nu_2-\nu_3}(x_{(n-1)})\cdots G^{\nu_{n-1}}_{\nu_{n-2}-\nu_{n-1}}(x_{(3)})H^{\nu_n}_{\nu_{n-1}}(x_{(2)}) =\\ &= G^2_0(x_{(n)})G^2_0(x_{(n-1)})\cdots G^1_1(x_{(i)})G^1_0(x_{(i-1)})\cdots\end{aligned}$$

$$\cdots G_0^1(x_{(j+1)})G_1^0(x_{(j)})\cdots G_0^0(x_{(3)})H_0^0(x_{(2)}) = x_i x_j.$$

Для вычисления интеграла

$$|x_i x_j|_{L_2}^2 = \int_{|x|=1} x_i^2 x_j^2\, ds_x$$

воспользуемся формулой (19). Имеем $Q_m(x) = x_i^2 x_j^2$, $m = 4$ и значит

$$\frac{\Delta^{m/2} Q_m(x)}{m!!\, n\cdots(n+m-2)} = \frac{1}{4!!(n,2)_2}\Delta^2\big(x_i^2 x_j^2\big) =$$

$$= \frac{1}{8n(n+2)}\Delta\big(2x_i^2 + 2x_j^2\big) = \frac{1}{n(n+2)}.$$

Поэтому

$$\int_{|x|=1} x_i^2 x_j^2\, ds_x = \frac{\omega_n}{n(n+2)}.$$

Так как $|x_i x_j|_D^2 = D_{x_i} D_{x_j} x_i x_j = 1$, то $g_\nu = |x_i|_{L_2}^2/|x_i|_D^2 = \omega_n/n(n+2)$ и значит вторая формула тоже верна

$$\int_{|\xi|=1} \xi_i \xi_j u(\xi)\, ds_\xi = \frac{\omega_n}{n(n+2)} D_{x_i} D_{x_j} u(x)_{|x=0}.$$

III. Для доказательства третьей формулы выберем $\nu = 2e_1$ и значит

$$G_{(\nu)}(x) = G_2^0(x_{(n)})G_0^0(x_{(n-1)})\cdots H_0^0(x_{(2)}) = \frac{x_n^2}{2} - \frac{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{2(n-1)}.$$

Отсюда следует, что

$$G_{(\nu)}(x) = \frac{x_n^2}{2} - \frac{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{2(n-1)} = \frac{n x_n^2}{2(n-1)} - \frac{|x|^2}{2(n-1)},$$

или

$$x_n^2 = 2\frac{n-1}{n} G_{(\nu)}(x) + \frac{1}{n}|x|^2,$$

а значит используя формулу (18) и теорему о среднем запишем

$$\int_{|\xi|=1} \xi_n^2 u(\xi)\, ds_\xi = 2\frac{n-1}{n}\int_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi) u(\xi)\, ds_\xi + \frac{1}{n}\int_{|\xi|=1} u(\xi)\, ds_\xi =$$

$$= 2\frac{n-1}{n} g_\nu G_{(\nu)}(D) u(x)_{|x=0} + \frac{\omega_n}{n} u(0) = g_\nu\Big(2\frac{n-1}{n} G_{(\nu)}(D) +$$

$$+ \frac{1}{n}\Delta\Big) u(x)_{|x=0} + \frac{\omega_n}{n} u(0) = g_\nu D_{x_n}^2 u(x)_{|x=0} + \frac{\omega_n}{n} u(0).$$

Вычислим g_ν. Нетрудно подсчитать, что

$$|G_{(\nu)}|_D^2 = G_{(\nu)}(D) G_{(\nu)}(x) = \frac{n}{2n-2},$$

а значит по формуле (21) ($\nu_1 = 2$) запишем

$$\frac{g_\nu}{\omega_n} = \frac{2n-2}{8n(n,2)_2}\Delta^2 G_{(\nu)}^2(x) = \frac{\Delta^2\big(n x_n^2 - |x|^2\big)^2}{16n^2(n-1)(n+2)} =$$

$$= \frac{\Delta^2\big(n^2 x_n^4 - 2n x_n^2 |x|^2 + |x|^4\big)}{16n^2(n-1)(n+2)} = \frac{24n^2 - 16n(n+2) + 8n(n+2)}{16n^2(n-1)(n+2)} =$$

$$= \frac{16n(n-1)}{16n^2(n-1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+2)}.$$

Подставляя вычисленное значение g_ν в предыдущую формулу и деля на ω_n получим третью формулу при $i = n$. В силу симметрии эта формула будет верна и для любого $i = 1, \dots, n$.

3. Связь G-функций с полиномами Лежандра и Чебышева

Рассмотрим след G-полинома на единичной сфере. В этом случае возникает понятие G-функции. Пусть $[m]$ обозначает целую часть числа m.

Определение 3. Функцию

$$G_k^{s,n}(t) = \sum_{i=0}^{[(k-s)/2]} (-1)^i \frac{t^{k-s-2i,!}(1-t^2)^{i+s/2}}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i}$$

назовем G-функцией степени k, порядка s, и рода n. Здесь $s, k \in \mathbb{N}_0$, $s \le k$, $n \in \mathbb{N}$.

Нетрудно видеть, что если обозначить $t_j = x_j/|x_{(j)}|$, то $|x_{(j-1)}|^2/|x_{(j)}|^2 = 1 - t_j^2$ и будем иметь

$$|x_{(j-1)}|^s G_{k-s}^s(x_{(j)}) = \sum_{i=0}^{[(k-s)/2]} (-1)^i \frac{x_j^{k-s-2i,!}|x_{(j-1)}|^{2i+s}}{(2,2)_i(j-1+2s,2)_i} = |x_{(j)}|^k G_k^{s,n}(t_j).$$

Значит можем записать

$$\begin{aligned} G_{(\nu)}(x_{(n)}) &= x_1^{\nu_n} G_{\nu_{n-1}-\nu_n}^{\nu_n}(x_{(2)}) G_{\nu_{n-2}-\nu_{n-1}}^{\nu_{n-1}}(x_{(3)}) G_{\nu_{n-3}-\nu_{n-2}}^{\nu_{n-2}}(x_{(4)}) \cdots \\ \cdots G_{\nu_1-\nu_2}^{\nu_2}(x_{(n)}) &= G_{\nu_{n-1}-\nu_n}^{\nu_n,2}(t_2)|x_{(2)}|^{\nu_{n-1}} G_{\nu_{n-2}-\nu_{n-1}}^{\nu_{n-1}}(x_{(3)}) G_{\nu_{n-3}-\nu_{n-2}}^{\nu_{n-2}}(x_{(4)}) \cdots \\ \cdots G_{\nu_1-\nu_2}^{\nu_2}(x_{(n)}) &= G_{\nu_{n-1}-\nu_n}^{\nu_n,2}(t_2) G_{\nu_{n-2}-\nu_{n-1}}^{\nu_{n-1}}(t_3)|x_{(3)}|^{\nu_{n-2}} G_{\nu_{n-3}-\nu_{n-2}}^{\nu_{n-2}}(x_{(4)}) \cdots \\ \cdots G_{\nu_1-\nu_2}^{\nu_2}(x_{(n)}) &= G_{\nu_{n-1}-\nu_n}^{\nu_n,2}(t_2) G_{\nu_{n-2}-\nu_{n-1}}^{\nu_{n-1},3}(t_3) G_{\nu_{n-3}-\nu_{n-2}}^{\nu_{n-2},4}(t_4) \cdots \\ \cdots |x_{(n-1)}|^{\nu_2} G_{\nu_1-\nu_2}^{\nu_2,n}(x_{(n)}) &= |x|^{\nu_1} \prod_{i=1}^{n-1} G_{\nu_i}^{\nu_{i+1},n-i+1}(t_{n-i+1}), \end{aligned}$$

или при $\varphi_i = \arccos(x_i/|x_{(i)}|)$, $\nu_1 \ge \dots \ge \nu_n$ и $\nu_n = 0, 1$ имеем

$$G_{(\nu)}(x) = |x|^{\nu_1} \prod_{i=1}^{n-1} G_{\nu_i}^{\nu_{i+1},n-i+1}(\cos\varphi_{n-i+1}),$$

где $\varphi_i \in [0, \pi]$.

Исследуем связь G-функций $G_k^{s,n}(t)$ с известными специальными функциями.

Теорема 8. *Для G-функции нечетного рода n верно равенство*

$$G_k^{s,2m+3}(t) = \frac{2(s+m)!!}{(k+s+2m)!}(1-t^2)^{-m/2} P_{k+m}^{s+m}(t),$$

где $m, s, k \in \mathbb{N}_0$, $k \ge s$, и $P_k^s(t)$ – присоедененная функция Лежандра.

Доказательство. Докажем, что

$$D_t^m = m! \sum_{k=0}^{[m/2]} (\sqrt{y})^{m-2k,!} \frac{(2D_y)^{m-k}}{(2,2)_k}\Big|_{y=t^2}. \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что для $m \in \mathbb{N}_0$ и некоторых a_k^m верно равенство

$$(\sqrt{y}D_y)^m = \sqrt{y}D_y(\sqrt{y}D_y)\cdots(\sqrt{y}D_y) = \sum_{k=0}^{[m/2]} a_k^m (\sqrt{y})^{m-2k,!} D_y^{m-k}. \tag{23}$$

Из него при $m = 0$ следует, что $a_0^0 = 1$. При $m = 1$ имеем $k = 0$ и значит получаем $\sqrt{y}D_y = a_0^1\sqrt{y}D_y$, а поэтому $a_0^1 = 1$. Кроме того, степень оператора D_y справа не может быть больше m, а значит $a_{-1}^m = 0$. Найдем a_k^m. Нетрудно подсчитать, что справедливы равенства

$$(\sqrt{y}D_y)^{m+1} = \sqrt{y}D_y \sum_{0\le 2k\le m} a_k^m (\sqrt{y})^{m-2k,!} D_y^{m-k} =$$

$$= \sum_{0\le 2k\le m-1} \left(\frac{1}{2} a_k^m (\sqrt{y})^{m-2k-1,!} D_y^{m-k} + a_k^m (m-2k+1)(\sqrt{y})^{m-2k+1,!} D_y^{m-k+1}\right) =$$

$$= \sum_{2\le 2k\le m+1} \frac{1}{2} a_{k-1}^m (\sqrt{y})^{m-2k+1,!} D_y^{m-k+1} +$$

$$+ \sum_{0\le 2k\le m-1} a_k^m (m-2k+1)(\sqrt{y})^{m-2k+1,!} D_y^{m-k+1} =$$

$$= \sum_{0\le 2k\le m+1} \left(\frac{1}{2} a_{k-1}^m + (m-2k+1) a_k^m\right)(\sqrt{y})^{m-2k+1,!} D_y^{m-k+1}$$

и значит выполняется рекуррентное уравнение

$$a_k^{m+1} = \frac{1}{2} a_{k-1}^m + (m-2k+1) a_k^m \tag{24}$$

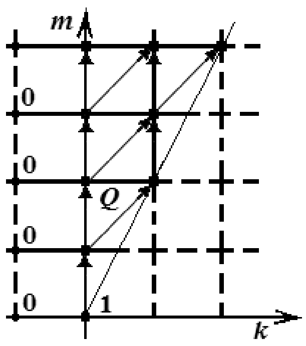

Рис. 1: Зависимости в (24)

в области $(k, m) \in Q = \{k, m \in \mathbb{N}_0 : 2k \le m\}$.

В качестве граничных условий берем $a_{-1}^m = 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ и $a_0^0 = 1$. Интересно отметить, что граничных условий на правой границе области Q нет и тем не менее это уравнение имеет единственное решение! Действительно, если $(k, m+1) \in Q$ и $m+1 > 2k$, то значение a_k^{m+1} однозначно определяется из уравнения через a_k^m и a_{k-1}^m и $(k, m), (k-1, m) \in Q$. Если же $(k, m+1) \in Q$ и $m+1 = 2k$, то значение a_k^{m+1} тоже однозначно выражается, но только через a_{k-1}^m, поскольку коэффициент при a_k^m (ясно, что $(k, m) \notin Q$) равен нулю и $(k-1, m) \in Q$ (см. Рис.1). Решение рекуррентного уравнения (24) имеет вид $a_k^m = m!/(4^k k!)$. Проверим это решение

$$\frac{1}{2} a_{k-1}^m + (m-2k+1) a_k^m = \frac{m!}{4^k k!}(2k + m - 2k + 1) = \frac{(m+1)!}{4^k k!} = a_k^{m+1}.$$

Подставляя найденное значение a_k^m в (23) и замечая, что $\sqrt{y}D_y = 2^{-1}D_t$ при $y = t^2$ получим

$$2^{-m} D_t^m = (\sqrt{y}D_y)^m{}_{|y=t^2} = 2^{-m} m! \sum_{k=0}^{[m/2]} (\sqrt{y})^{m-2k,!} \frac{(2D_y)^{m-k}}{(2,2)_k}{}_{|y=t^2}.$$

Сокращая полученное равенство на 2^{-m} убеждаемся в справедливости (22).

Подействуем операторным равенством (22) при $m = m + s$ на функцию $(1-t^2)^m$. Тогда будем иметь

$$(25) \quad D_t^{m+s}(1-t^2)^m =$$

$$= (-1)^m(m+s)! \sum_{k=0}^{[(m+s)/2]} (\sqrt{y})^{m+s-2k,!} \frac{(2D_y)^{m+s-k}}{(2,2)_k}(y-1)^m{}_{|y=t^2} =$$

$$= (-1)^m(m+s)! \sum_{k=s}^{[(m+s)/2]} t^{m+s-2k,!} \frac{2m\cdots(2k-2s+2)}{(2,2)_k}(t^2-1)^{k-s} =$$

$$= (-1)^m(m+s)! \sum_{k=0}^{[(m-s)/2]} t^{m-s-2k,!} \frac{2m\cdots(2k+2)}{(2,2)_{k+s}}(t^2-1)^k =$$

$$= \frac{(-1)^m(m+s)!(2,2)_m}{(2,2)_s} \sum_{k=0}^{[(m-s)/2]} (-1)^k \frac{t^{m-s-2k,!}(1-t^2)^k}{(2,2)_k(2+2s,2)_k}.$$

Отсюда, используя известные [12] равенства

$$P_k^s(t) = (1-t^2)^{s/2} D_t^s P_k(t), \quad P_k(t) = 2^{-k} D_t^k (t^2-1)^{k,!}$$

найдем

$$G_k^{s,3}(t) \equiv \sum_{i=0}^{[(k-s)/2]} (-1)^i t^{k-s-2i,!} \frac{(1-t^2)^{i+s/2}}{(2,2)_i(2+2s,2)_i} =$$

$$= \frac{(2,2)_s(1-t^2)^{s/2}}{(k+s)!(2,2)_k} D_t^{k+s}(t^2-1)^k =$$

$$= \frac{2s!!}{(k+s)!}(1-t^2)^{s/2} D_t^s\Big(2^{-k}D_t^k(t^2-1)^{k,!}\Big) = \frac{2s!!}{(k+s)!}P_k^s(t).$$

Наконец, нетрудно видеть, что верны равенства

$$G_k^{s,2m+3}(t) = (1-t^2)^{-m/2} G_{k+m}^{s+m,3}(t) = \frac{2(s+m)!!}{(2m+k+s)!}(1-t^2)^{-m/2} P_{k+m}^{s+m}(t),$$

которые и завершают доказательство теоремы. □

По аналогии с присоединенными функциями Лежандра введем присоединенные функции Чебышева.

Определение 4. Следующие функции

$$T_k^s(t) = (1-t^2)^{s/2} D_t^s T_k(t), \quad t \in [-1,1],$$

где $s, k \in \mathbb{N}$, $s \le k$, а $T_k^0(t) = T_k(t)$ – полиномы Чебышева назовем присоединенными функциями Чебышева.

Теорема 9. *Для G-функций четного рода верно равенство*

$$G_k^{s,2m+2}(t) = \frac{(2s+2m-1)!!}{(k+s+2m-1)!(k+m)}(1-t^2)^{-m/2} T_{k+m}^{s+m}(t),$$

где $m \in \mathbb{N}_0$, $s, k \in \mathbb{N}$, но $k \ge s$ и $G_k^{0,2}(t) = \frac{1}{k!}T_k^0(t)$.

Доказательство. Докажем вспомогательное равенство

$$(26)\quad (\sqrt{y}D_y)^s \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^i (\sqrt{y})^{k-2i,!} \frac{(1-y)^i}{(2,2)_i(1,2)_i} =$$
$$= \frac{2^{-s}(k+s-1)!}{(k-1)!(2s-1)!!} \sum_{i=0}^{[(k-s)/2]} (-1)^i (\sqrt{y})^{k-s-2i,!} \frac{(1-y)^i}{(2,2)_i(1+2s,2)_i}$$

при $s \in \mathbb{N}$ и $y > 0$. Пусть $s = 1$. Тогда имеем

$$\sqrt{y}D_y \sum_{0\le 2i\le k} (\sqrt{y})^{k-2i,!} \frac{(y-1)^i}{(2,2)_i(1,2)_i} = \sum_{0\le 2i\le k-1} (\sqrt{y})^{k-2i-1,!} \frac{(y-1)^i}{2(2,2)_i(1,2)_i} +$$
$$+ \sum_{2\le 2i\le k} (\sqrt{y})^{k-1-2i+2,!} \frac{(k-2i+1)(y-1)^{i-1}}{2(2,2)_{i-1}(1,2)_i} = \sum_{0\le 2i\le k-1} (\sqrt{y})^{k-2i-1,!} \times$$
$$\times \frac{(y-1)^i}{2(2,2)_i(1,2)_i} + \sum_{0\le 2i\le k-2} (\sqrt{y})^{k-2i-1,!} \frac{(k-2i-1)(y-1)^i}{2(2,2)_i(1,2)_{i+1}} =$$
$$= \sum_{0\le 2i\le k-1} \frac{(\sqrt{y})^{k-2i-1,!}(y-1)^i}{2(2,2)_i(1,2)_i} \Big(1 + \frac{k-2i-1}{2i+1}\Big) =$$
$$= \frac{k}{2} \sum_{i=0}^{(k-1)/2]} \frac{(\sqrt{y})^{k-2i-1,!}(y-1)^i}{(2,2)_i(3,2)_i} = \frac{2^{-1}(k+1-1)!}{(k-1)!(2-1)!!} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} (\sqrt{y})^{k-1-2i,!} \frac{(y-1)^i}{(2,2)_i(1+2,2)_i}.$$

Пусть равенство (26) верно при некотором $s \in \mathbb{N}$. Докажем его верность и при $s+1$. Обозначим

$$A_{s,k} = \frac{2^{-s}(k+s-1)!}{(k-1)!(2s-1)!!}.$$

Тогда имеем

$$\frac{(\sqrt{y}D_y)^{s+1}}{A_{s,k}} \sum_{i=0}^{[k/2]} (\sqrt{y})^{k-2i,!} \frac{(y-1)^i}{(2,2)_i(1,2)_i} =$$
$$= \sqrt{y}D_y \sum_{0\le 2i\le k-s} (\sqrt{y})^{k-s-2i,!} \frac{(y-1)^i}{(2,2)_i(1+2s,2)_i} =$$
$$= \sum_{0\le 2i\le k-s-1} (\sqrt{y})^{k-s-2i-1,!} \frac{(y-1)^i}{2(2,2)_i(1+2s,2)_i} +$$
$$+ \sum_{2\le 2i\le k-s} (\sqrt{y})^{k-s-2i+1,!} \frac{(k-s-2i+1)(y-1)^{i-1}}{2(2,2)_{i-1}(1+2s,2)_i} =$$
$$= \sum_{0\le 2i\le k-s-1} (\sqrt{y})^{k-s-2i-1,!} \frac{(y-1)^i}{2(2,2)_i(1+2s,2)_i} +$$
$$+ \sum_{0\le 2i\le k-s-2} (\sqrt{y})^{k-s-2i-1,!} \frac{(k-s-2i-1)(y-1)^i}{2(2,2)_i(1+2s,2)_{i+1}} =$$

$$= \sum_{0\le 2i\le k-s-1} \frac{(\sqrt{y})^{k-s-2i-1,!}(y-1)^i}{2(2,2)_i(1+2s,2)_i}\Big(1+\frac{k-s-2i-1}{2i+2s+1}\Big) =$$

$$= \frac{s+k}{2(1+2s)} \sum_{i=0}^{[(k-s-1)/2]} \frac{(\sqrt{y})^{k-s-1-2i,!}(y-1)^i}{(2,2)_i(1+2s+2,2)_i}.$$

Поскольку

$$A_{s,k}\frac{s+k}{2(1+2s)} = \frac{2^{-s}(k+s-1)!}{(k-1)!(2s-1)!!}\frac{s+k}{2(1+2s)} = A_{s+1,k},$$

то равенство (26) верно и при $s+1$.

Пусть $s=0$. Используя формулу (13) запишем

(27)

$$G_k^{0,2}(t) = \sum_{j=0}^{[k/2]}(-1)^j\frac{t^{k-2j,!}(1-t^2)^j}{(2,2)_j(1,2)_j} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{[k/2]}(-1)^j\binom{k}{2j}t^{k-2j}\big(\pm\sqrt{1-t^2}\big)^{2j} =$$

$$= \frac{1}{k!}H_k^0(t,\pm\sqrt{1-t^2}) = \frac{1}{k!}\cos(k\arccos t) = \frac{1}{k!}T_k(t).$$

Если положим $y=t^2$ в равенстве (26), то получим

$$2^{-s}D_t^s\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^i t^{k-2i,!}\frac{(1-t^2)^i}{(2,2)_i(1,2)_i} =$$

$$= \frac{2^{-s}(k+s-1)!}{(k-1)!(2s-1)!!}\sum_{i=0}^{[(k-s)/2]}\frac{(-1)^i t^{k-s-2i,!}(1-t^2)^i}{(2,2)_i(1+2s,2)_i},$$

После сокращения на 2^{-s} и умножения обеих частей на $(1-t^2)^{s/2}$ получим

$$(1-t^2)^{s/2}D_t^sG_k^{0,2}(t) = \frac{(k+s-1)!}{(k-1)!(2s-1)!!}\sum_{i=0}^{[(k-s)/2]}\frac{(-1)^i t^{k-s-2i,!}(1-t^2)^{i+s/2}}{(2,2)_i(1+2s,2)_i} =$$

$$= \frac{(k+s-1)!}{(k-1)!(2s-1)!!}G_k^{s,2}(t),$$

откуда, с учетом (27), будем иметь

$$G_k^{s,2}(t) = \frac{(k-1)!(2s-1)!!}{(k+s-1)!}(1-t^2)^{s/2}D_t^sG_k^{0,2}(t) = \frac{(2s-1)!!}{k(k+s-1)!}(1-t^2)^{s/2}D_t^sT_k(t).$$

Если теперь учесть, что $T_k^s(t)\equiv(1-t^2)^{s/2}D_t^sT_k(t)$ то запишем

$$G_k^{s,2}(t) = \frac{(2s-1)!!}{k(k+s-1)!}T_k^s(t).$$

С помощью этого равенства для окончательного доказательства теоремы достаточно заметить, что

$$G_k^{s,2m+2}(t) = \sum_{i=0}^{[(k-s)/2]}(-1)^i\frac{t^{k-s-2i,!}(1-t^2)^{i+s/2}}{(2,2)_i(2m+2s+1,2)_i} =$$

$$= (1-t^2)^{-m/2}\sum_{i=0}^{[(k+m-s-m)/2]}(-1)^i\frac{t^{k+m-s-m-2i,!}(1-t^2)^{i+(s+m)/2}}{(2,2)_i(2m+2s+1,2)_i} =$$

$$= (1-t^2)^{-m/2}G^{s+m,2}_{k+m}(t) = \frac{(2s+2m-1)!!}{(k+m)(k+s+2m-1)!}(1-t^2)^{-m/2}T^{s+m}_{k+m}(t).$$

Теорема доказана. □

Из этих теорем следует, что полиномы $G_{(\nu)}(x)$ при $n=2,3$ вырождаются в известные сферические функции $r^nP_n(\cos\theta)$ и

$$r^nP^m_n(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad r^nP^m_n(\cos\theta)\sin m\varphi.$$

Теорема 10. *Для G-функций верна формула Родрига*

$$(-1)^kD^k_t\left(1-t^2\right)^{k+s+(n-3)/2} = k!(n-1+2s,2)_k\left(1-t^2\right)^{(s+n-3)/2}G^{s,n}_{k+s}(t) \tag{28}$$

и при $n\geq 3$, $k,s\in\mathbb{N}_0$ и $k\geq s$ следующая связь G-функций с полиномами Гегенбауэра $C^{n/2-1}_k[t]$

$$G^{s,n}_k(t) = \frac{(2s+n-3)!}{(k+s+n-3)!}(1-t^2)^{s/2}C^{s+n/2-1}_{k-s}[t]. \tag{29}$$

Доказательство. Пусть n – четное. Аналогично выводу формулы (25) подействуем операторным равенством (22) на функцию $(1-t^2)^{m+s-1/2}$. Тогда получим

$$D^m_t(1-t^2)^{m+s-1/2} = m!\sum_{k=0}^{[m/2]}(\sqrt{y})^{m-2k,!}\frac{(2D_y)^{m-k}}{(2,2)_k}(1-y)^{m+s-1/2}{}_{|y=t^2} =$$

$$= (-1)^m m!\sum_{k=0}^{[m/2]}(-1)^kt^{m-2k,!}\frac{(2m+2s-1)\cdots(2s+2k+1)}{(2,2)_k}(1-t^2)^{s+k-1/2} =$$

$$= (-1)^m m!\sum_{k=0}^{[m/2]}(-1)^kt^{m-2k,!}\frac{(2m+2s-1)\cdots(2s+1)}{(2s+2k-1)\cdots(2s+1)(2,2)_k}(1-t^2)^{s+k-1/2} =$$

$$= (-1)^m m!(2s+1,2)_m\sum_{k=0}^{[m/2]}(-1)^kt^{m-2k,!}\frac{(1-t^2)^{k+s-1/2}}{(2,2)_k(1+2s,2)_k}.$$

Обозначим через s' такое целое, что $s'-1/2 = s+(n-3)/2$ и значит $s' = s+(n-2)/2$. Тогда в силу предыдущего равенства имеем

$$D^m_t(1-t^2)^{m+s+(n-3)/2} = D^m_t(1-t^2)^{m+s'-1/2} =$$

$$= (-1)^m m!(2s'+1,2)_m\sum_{k=0}^{[m/2]}(-1)^kt^{m-2k,!}\frac{(1-t^2)^{k+s'-1/2}}{(2,2)_k(1+2s',2)_k} =$$

$$= (-1)^m m!(n-1+2s,2)_m(1-t^2)^{(s+n-3)/2}\sum_{k=0}^{[m/2]}(-1)^k\frac{t^{m-2k,!}(1-t^2)^{k+s/2}}{(2,2)_k(n-1+2s,2)_k} =$$

$$= (-1)^m m!(n-1+2s,2)_m(1-t^2)^{(s+n-3)/2}G^{s,n}_{m+s}(t)$$

и поэтому формула (28) верна при четном n.

Пусть n – нечетное. Подействуем операторным равенством (22) на функцию $(1-t^2)^{m+s}$. Тогда получим

$$D^m_t(1-t^2)^{m+s} = m!\sum_{k=0}^{[m/2]}(\sqrt{y})^{m-2k,!}\frac{(2D_y)^{m-k}}{(2,2)_k}(1-y)^{m+s}{}_{|y=t^2} =$$

$$= (-1)^m m! \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k t^{m-2k,!} \frac{(2m+2s)\cdots(2s+2k+2)}{(2,2)_k}(1-t^2)^{s+k} =$$

$$= (-1)^m m! \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k t^{m-2k,!} \frac{(2m+2s)\cdots(2s+2)}{(2k+2s)\cdots(2s+2)(2,2)_k}(1-t^2)^{s+k} =$$

$$= (-1)^m m!(2s+2,2)_m \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k t^{m-2k,!} \frac{(1-t^2)^{k+s}}{(2,2)_k(2+2s,2)_k}.$$

Обозначим через s' такое целое, что $s' = s + (n-3)/2$, тогда

$$D_t^m(1-t^2)^{m+s+(n-3)/2} = D_t^m(1-t^2)^{m+s'} =$$

$$= (-1)^m m!(2s'+2,2)_m \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k t^{m-2k,!} \frac{(1-t^2)^{k+s'}}{(2,2)_k(2+2s',2)_k} =$$

$$= (-1)^m m!(n-1+2s,2)_m(1-t^2)^{(s+n-3)/2} \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \frac{t^{m-2k,!}(1-t^2)^{k+s/2}}{(2,2)_k(n-1+2s,2)_k} =$$

$$= (-1)^m m!(n-1+2s,2)_m(1-t^2)^{(s+n-3)/2} G_{m+s}^{s,n}(t)$$

и значит формула (28) верна и при нечетном n.

Для доказательства формулы (29) воспользуемся формулой Родрига [12] для многочленов Гегенбауэра

$$2^k k!(\lambda+1/2)_k(1-t^2)^{\lambda-1/2}C_k^\lambda[t] = (-1)^k(2\lambda)_k D_t^k(1-t^2)^{k+\lambda-1/2},$$

из которой при $\lambda - 1/2 = s + (n-3)/2$, а значит при $\lambda = s + (n-2)/2$ следует

$$(-1)^k(2s+n-2)_k D_t^k(1-t^2)^{k+s+(n-3)/2} =$$

$$= 2^k k!(s+(n-1)/2)_k(1-t^2)^{s+(n-3)/2} C_k^{s+(n-2)/2}[t].$$

Формула (28) дает

$$(-1)^k D_t^k \left(1-t^2\right)^{k+s+(n-3)/2} = k!(n-1+2s,2)_k(1-t^2)^{(s+n-3)/2} G_{k+s}^{s,n}(t),$$

а значит

$$k!(n-1+2s,2)_k(1-t^2)^{(s+n-3)/2} G_{k+s}^{s,n}(t) =$$

$$= \frac{k!(n-1+2s,2)_k}{(2s+n-2)_k}(1-t^2)^{s+(n-3)/2} C_k^{s+(n-2)/2}[t].$$

Сокращая обе части равенства на одинаковые множители найдем

$$G_{k+s}^{s,n}(t) = \frac{(1-t^2)^{s/2}}{(2s+n-2)_k} C_k^{s+n/2-1}[t] = \frac{(2s+n-3)!}{(k+2s+n-3)!}(1-t^2)^{s/2} C_k^{s+n/2-1}[t].$$

Заменяя $k+s$ на k получим (29), которая верна при $n \geq 3$ и $k, s \in \mathbb{N}_0$, но $k \geq s$. $\square$

4. Ортогональность G-функций

Исследуем свойства G-функции в пространстве $L_2(-1,1)$.

Теорема 11. *G-функции рода n ($n \geq 2$), одного и того же порядка s, но разных степеней ортогональны на $[-1,1]$ с весом $\rho_n(t) = (1-t^2)^{(n-3)/2}$ и*

$$\int_{-1}^{1} \left(G_k^{s,n}(t)\right)^2 (1-t^2)^{(n-3)/2}\, dt = \frac{2^{2s+n-2}\Gamma^2(s+(n-1)/2)}{(2k+n-2)(k+s+n-3)!(k-s)!}. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть $k \neq m \in \mathbb{N}_0$. Нетрудно видеть, что согласно лемме 2

$$\int_{|x|=1} \varphi(|\tilde{x}|, x_n)\, ds_x = \omega_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{(n-3)/2} \varphi(\sqrt{1-t^2}, t)\, dt.$$

Утитывая, что $G_k^s(x) = G_k^s(|\tilde{x}|, x_n)$ и на единичной сфере имеет место равенство

$$G_k^s(x) G_m^s(x) (1-x_n^2)^s = \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^i (1-x_n^2)^{i+s/2} x_n^{k-2i,!}}{(2,2)_i (n-1+2s,2)_i} \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^j (1-x_n^2)^{j+s/2} x_n^{m-2j,!}}{(2,2)_j (n-1+2s,2)_j} = G_{k+s}^{s,n}(x_n) G_{m+s}^{s,n}(x_n),$$

то в силу леммы 4 получим

$$0 = \int_{|x|=1} G_k^s(x) G_m^s(x) (1-x_n^2)^s\, ds_x = \omega_{n-1} \int_{-1}^{1} G_{k+s}^{s,n}(t) G_{m+s}^{s,n}(t) \rho_n(t)\, dt,$$

где $k, s \in \mathbb{N}_0$. Обозначая $k' = k+s$ и $m' = m+s$ будем иметь $k' \geq s$, $m' \geq s$, $k' \neq m'$ и

$$\int_{-1}^{1} G_{k'}^{s,n}(t) G_{m'}^{s,n}(t) \rho_n(t)\, dt = 0.$$

Это и доказывает ортогональность G-функций одного рода и порядка, но разных степеней. Из теоремы 8 для нечетных $n \geq 3$ легко найти

$$G_k^{s,n}(t) = \frac{(2s+n-3)!!}{(k+s+n-3)!} (1-t^2)^{-(n-3)/4} P_{k+(n-3)/2}^{s+(n-3)/2}(t),$$

а из теоремы 9 для четных $n \geq 2$ следует

$$G_k^{s,n}(t) = \frac{(2s+n-3)!!}{(k+(n-2)/2)(k+s+n-3)!} (1-t^2)^{-(n-2)/4} T_{k+(n-2)/2}^{s+(n-2)/2}(t).$$

Известно [12], что

$$\int_{-1}^{1} (P_k^s(t))^2\, dt = \frac{2}{2k+1} \frac{(k+s)!}{(k-s)!},$$

а поэтому, поскольку для нечетных $n \geq 3$ число $2s+n-3$ четное, то

$$\int_{-1}^{1} (G_k^{s,n}(t))^2 \rho_n(t)\, dt = \frac{((2s+n-3)!!)^2}{((k+s+n-3)!)^2} \int_{-1}^{1} \left(P_{k+(n-3)/2}^{s+(n-3)/2}(t)\right)^2 dt = \tag{31}$$
$$= \frac{2((2s+n-3)!!)^2}{(2k+n-2)(k+s+n-3)!(k-s)!} = \frac{2^{2s+n-2}\Gamma^2(s+(n-1)/2)}{(2k+n-2)(k+s+n-3)!(k-s)!}.$$

Если теперь $n \geq 2$ четное, то исходя из связи многочленов Гегенбауэра и многочленов Чебышева [12], при $k \geq s$ запишем $T_k^s(t) = k(2s-2)!!(1-t^2)^{s/2}C_{k-s}^s[t]$. Поскольку согласно [15]

$$\int_{-1}^{1}(C_k^s[t])^2(1-t^2)^{s-1/2}\,dt = \frac{(2s)_k}{(k+s)k!}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(s)},$$

то легко выводим, что

$$\int_{-1}^{1}(T_k^s(t))^2(1-t^2)^{-1/2}\,dt = k\frac{(k+s-1)!}{(k-s)!}\frac{\pi}{2}. \tag{32}$$

Значит, учитывая что $\Gamma^2(1/2) = \pi$ и

$$(2s+n-3)!!\sqrt{\pi} = 2^{s+(n-2)/2}\big(s+\frac{n-3}{2}\big)\cdots\frac{1}{2}\Gamma(1/2) = 2^{s+(n-2)/2}\Gamma\big(s+\frac{n-1}{2}\big)$$

найдем

$$\int_{-1}^{1}(G_k^{s,n}(t))^2\rho_n(t)\,dt = \tag{33}$$

$$= \frac{((2s+n-3)!!)^2}{(k+(n-2)/2)^2((k+s+n-3)!)^2}\int_{-1}^{1}\Big(T_{k+(n-2)/2}^{s+(n-2)/2}(t)\Big)^2(1-t^2)^{-1/2}\,dt =$$

$$= \frac{((2s+n-3)!!)^2}{(k+(n-2)/2)(k+s+n-3)!(k-s)!}\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{2^{2s+n-2}\Gamma^2(s+(n-1)/2)}{(2k+n-2)(k+s+n-3)!(k-s)!}.$$

Объединяя формулы (31) и (33) придем к (30). □

Следствие 2. *Присоединенные функции Чебышева одного порядка ортогональны на отрезке* $[-1;1]$ *с весом* $\rho(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ *и верна формула*

$$\int_{-1}^{1}\left(T_k^s(t)\right)^2(1-t^2)^{-1/2}\,dt = k\frac{(k+s-1)!}{(k-s)!}\frac{\pi}{2}.$$

Список литературы

[1] С.Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*, М.: Физматгиз, 1957.

[2] A.B. Otis and M.P. Barnett, *Surface Harmonic Expantions of Products of Cartesian Coordinates*, Tehnical Notes, **26**, Cooperative Computing Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., USA, 1963.

[3] A.B. Otis and M.P. Barnett, *Surface Harmonic of Products of Cartesian Coordinates*, Mathematics of Computation, **18**:88, USA, 1964. MR0181080

[4] P.P. Teodorescu, *Asupra polinoamelor armonice si biarmonice*, Studia Univer. Babes-Bolyai, ser. mathem.-physica, Fas. 1, RPR, Gluj, 1963. MR0229847

[5] Б.А. Бондаренко, *Полигармонические полиномы*, Ташкент: Фан, 1968. MR0241715

[6] А.В. Бицадзе, *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 1976. MR0473441

[7] В.В. Карачик, *Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I*, Вестник ЮУрГУ, Серия "Математика. Механика. Физика", 2011, вып.5, **32(249)**, 27–38.

[8] V.V. Karachik, *Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, **287**:2, 577–592. MR2024341

[9] V.V. Karachik, *On one set of orthogonal harmonic polynomials*, P roceedings of American Mathematical Society, 1998, **126**:12, 3513–3519. MR1621957

[10] V.V. Karachik, *On some special polynomials*, Proceedings of American Mathematical Society, 2004 **132**:4, 1049–1058. MR2045420
[11] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
[12] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, М.: Наука, Т.2, 1966. MR0201683
[13] В.В. Карачик, *Построение полиномиальных решений некоторых задач для уравнения Пуассона*, ЖВМиМФ, 2011, **51**:9, 1674–1694. MR2907145
[14] В.В. Карачик, *Об одном представлении аналитических функций гармоническими*, Математические труды, 2007, **10**:2, 142–162. MR2382420
[15] E.D. Rainville, *Special Functions*, The Macmillan Company, New York, 1960. MR0107725

Валерий Валентинович Карачик
Южно-Уральский государственный университет (к.720),
пр. Ленина 76,
454080, Челябинск, Россия
E-mail address: karachik@susu.ru