S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 22–30 (2013) УДК 519.17+512.54
MSC 05C25

РЕБЕРНО СИММЕТРИЧНЫЕ ГРАФЫ С ЧИСЛОМ ВЕРШИН, НЕ БОЛЬШИМ 100

М.С. НИРОВА

Abstract. Makhnev A.A. and Nirova M.S. remark that from 30 collections of parameters of unknown strongly regular graphs with at most 100 vertices only 11 can respond to edge-symmetric graphs. In this paper it is investigated the possible orders and the structures of subgraphs of the fixed points of automorphisms of strongly regular graph with parameters (100,33,8,12). It is proved that strongly regular graphs with parameters (100,33,8,12) and (100,66,44,42) are not edge-symmetric. As a corollary we have that a new edge-symmetric strongly regular graph with at most 100 vertices does not exist.

Keywords: strongly regular graph, edge-symmetric graph.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным*

Nirova, M.S., Edge-symmetric strongly regular graphs with at most 100 vertices.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Поступила 15 декабря 2012 г., опубликована 3 января 2013 г.

графом с параметрами (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

Если Δ — подграф графа Γ и $a, b \in \Delta$, то через $d_\Delta(a, b)$ обозначим расстояние между a и b в графе Δ, а через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, каждая из которых смежна с i вершинами из Δ.

Если X — подмножество группы автоморфизмов графа Γ, то через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначим подграф на множестве вершин, остающихся неподвижными под действием любого автоморфизма из X.

Граф Γ назовем реберно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве дуг (упорядоченных ребер) графа Γ.

Хорошо известно, что имеются 30 наборов параметров неизвестных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100. В работе Махнева А.А., Нировой М.С. [1] доказано

Предложение 1. *Пусть* Γ — *реберно симметричный сильно регулярный граф с числом вершин, не большим* 100, *и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*
(1) Γ *имеет параметры* $(85, 30, 11, 10)$, $(85, 54, 33, 36)$, $(88, 27, 6, 9)$, $(88, 60, 41, 40)$, $(96, 45, 24, 18)$, $(96, 50, 22, 30)$, $(96, 60, 38, 36)$, $(99, 42, 21, 15)$, $(99, 56, 28, 36)$;
(2) Γ *имеет параметры* $(100, 33, 8, 12)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5, 11\}$;
(3) Γ *имеет параметры* $(100, 66, 44, 42)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5, 11\}$.

Продолжается программа исследования возможных порядков и подграфов неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярных графов из заключения предложения. В работах [1]-[5] доказано, что графы из пункта (1) заключения предложения не являются реберно симметричными.

Для автоморфизма g графа Γ через $\alpha_j(g)$ обозначим число вершин u таких, что $d(u, u^g) = j$.

В данной работе изучаются автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(100, 33, 8, 12)$. Кроме обычных теоретико-графовых методов, в статье используется метод Хигмена, позволяющий уточнить возможные порядки автоморфизмов и строение подграфов их неподвижных точек с помощью теории характеров конечных групп (см. §2). Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(100, 33, 8, 12)$, g — *элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 11\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Δ — *пустой граф,* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 20t$ *или* $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 0, 50, 100$;

(2) Δ *является* 4*-кликой,* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) - 12$ *делится на* 20, *или* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) - 12$ *делится на* 30;

(3) Δ *является* γ*-кокликой, либо*

(*i*) $\gamma = 1$, $p = 3$ *и и* $\alpha_1(g) = 3, 33, 63, 93$ *или* $p = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 33$, *либо*

(*ii*) $p = 3$, $\gamma = 4, 7, ..., 16$ *и* $\alpha_1(g) - 3\gamma$ *делится на* 30;

(4) Δ *является объединением* $n \geq 2$ *изолированных* m_i*-клик,* $p = 2$, $m_i \in \{2, 4\}$ *и* $|\Delta| \leq 20$;

(5) Δ *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

(*i*) $p = 3$, $|\Delta| = 3t + 1$, $3 \le t \le 8$, *либо*

(*ii*) $p = 2$, $|\Delta| = 2s$, $3 \le s \le 25$.

Следствие 1. *Сильно регулярные графы с параметрами* $(100, 33, 8, 12)$ *и* $(100, 66, 44, 42)$ *не являются реберно симметричными.*

Из следствия 1 и результатов [1]-[5] получаем

Следствие 2. *Сильно регулярные графы с параметрами из заключения предложения не являются реберно симметричными.*

2. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \le d - \frac{w(k-d)}{v-w} \le r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Лемма 2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), Δ *— индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и степенями вершин* $d_1, ..., d_N$. *Тогда* $(v-N)-(kN-2M)+\lambda M+\mu(\binom{N}{2}-M)-\sum\binom{d_i}{2} = x_0+\sum\binom{i-1}{2}x_i$ *и* $(\sum ix_i)^2 \le \sum x_i \sum i^2 x_i$, *где* x_i *— число вершин из* $\Gamma - \Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ.

Доказательство. Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma - \Delta$, получим равенства $v - N = \sum x_i$, $kN - 2M = \sum ix_i$ и $\lambda M + \mu(\binom{N}{2} - M) - \sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2} = \sum\binom{i}{2}x_i$.

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим равенство из заключения леммы.

Квадратный трехчлен $\sum(i-x)^2 x_i = \sum i^2 x_i - 2x\sum ix_i + x^2\sum x_i$ неотрицателен. Поэтому дискриминант квадратного трехчлена $(\sum ix_i)^2 - \sum x_i \sum i^2 x_i$ неположителен.

Лемма 3. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(100, 33, 8, 12)$ *и неглавными собственными значениями* $3, -7$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

(1) $d-3 \le w(33-d)/(100-w) \le d+7$, *причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из* $\Gamma-\Delta$ *смежна точно с* $w(33-d)/(100-w)$ *вершинами из* Δ;

(2) *максимальный порядок клики в* Γ *не больше* 5;

(3) *максимальный порядок коклики в* Γ *не больше* 17;

(4) *если* L *является* 5*-кликой из* Γ, x_i *— число вершин из* $\Gamma - L$, *смежных точно с* i *вершинами из* L, *то* $x_1 = 45$ *и* $x_2 = 50$.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из леммы 1. Второе и третье утверждение леммы следуют из первого.

Пусть L является 5-кликой из Γ, x_i — число вершин из $\Gamma - L$, смежных точно с i вершинами из L. Тогда $\sum x_i = 95$, $\sum ix_i = 145$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 50$, поэтому $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 0$. Отсюда $x_1 = 45$ и $x_2 = 50$.

Лемма 4. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(100, 33, 8, 12)$, U *— трехвершинный подграф из* Γ, Y_i *— множество вершин из* $\Gamma - U$, *смежных точно с* i *вершинами из* U, $y_i = |Y_i|$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *для двух вершин* u, w *подграф* $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$ *содержит* 42 *вершины, если* u, w *смежны,* 44 *вершины, если* u, w *не смежны;*

(2) *число* $y_0 + y_3$ *равно* 25, *если* U *является кликой, равно* 34, *если* U *является кокликой;*

(3) *число* $y_0 + y_3$ *равно* 29, *если* U *является* 2*-путем, равно* 32, *если* U *— объединение изолированной вершины и ребра.*

Доказательство. Если U является 3-кокликой, то Γ содержит $3(12 - y_3)$ вершин из Y_2, $3(y_3+9)$ вершин из Y_1 и $34-y_3$ вершин из Y_0, поэтому $y_0+y_3 = 34$. Аналогично доказывается, что $y_0 + y_3 = 25$, если U является кликой; $y_0 + y_3 = 29$, если U является геодезическим 2-путем; $y_0 + y_3 = 32$, если U объединение изолированной вершины и ребра. Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что для автоморфизма g простого порядка p графа Γ либо $p = 2$ и $|\mathrm{Fix}(g)| \leq 50$ или $\alpha_1(g) = 0$ и $|\mathrm{Fix}(g)| \leq 56$, либо $p > 2$ и $|\mathrm{Fix}(g)| \leq 29$ или $\alpha_1(g) = 0$ и $|\mathrm{Fix}(g)| \leq 34$.

3. Характеры групп и автоморфизмы графов

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в [6]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \{R_0, R_1, R_2\})$, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\overline{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, v - f - 1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = Aut(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств W_0, W_1, W_2 матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{2} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число вершин x таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть равенства для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ должно быть целым.

До конца работы будем предполагать, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(100, 33, 8, 12)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g \in G$ и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 5. *Пусть $g \in G$. Тогда выполняются следующие утверждения:*
(1) $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/10 + 3$*;*
(2) $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого l, взаимно простого с $|g|$;*
(3) *если $|g| = p$ – простое число, то $33 - \chi_2(g)$ делится на p.*

Доказательство. Так как Γ имеет собственные значения 42, 9, -3 кратностей 1, 21, 77 то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 33 & 3 & -7 \\ 66 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 66 & 6 & -4 \\ 33 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 33 равно

$$\chi_2(g) = (33\alpha_0(g) - 7\alpha_1(g) + 3\alpha_2(g))/100.$$

Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = 100 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/10 + 3$.

Два последних утверждения леммы следуют из леммы 3 [6].

В леммах 6–8 предполагается, что $|g| = p$ — простое число. Ввиду предложения $p \in \{2, 3, 5, 11\}$.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) *если Δ — пустой граф, то $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 20t$ или $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 0, 50, 100$;*
(2) *если Δ является β-кликой, $\beta \geq 2$, то либо $p = 2$, $\beta = 4$ и $\alpha_1(g) - 12$ делится на 20, либо $p = 3$, $\beta = 4$ и $\alpha_1(g) - 12$ делится на 30;*
(3) *если Δ является γ-кокликой, то либо*
  (i) *$\gamma = 1$, $p = 3$ и и $\alpha_1(g) = 3, 33, 63, 93$ или $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 33$, либо*
  (ii) *$p = 3$, $\gamma = 4, 7, ..., 16$ и $\alpha_1(g) - 3\gamma$ делится на 30;*
(4) *если Δ является объединением $n \geq 2$ изолированных m_i-клик, $m_1 \geq ... \geq m_n$ и $m_1 \geq 2$, то $p = 2$, $m_i \in \{2, 4\}$ и $|\Delta| \leq 20$.*

Доказательство. Напомним, что $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/10 + 3$. Если Δ — пустой граф, то p делит 100, поэтому $p = 2$ или 5. В случае $p = 2$ число $\chi_2(g) - 33$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 20t$. В случае $p = 5$ ввиду леммы 5 имеем $\alpha_1(g) \in \{0, 50, 100\}$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Δ является β-кликой, $\beta \geq 2$. Тогда p делит $8 - (\beta - 2)$, 24 и 42, поэтому либо $p = 2$, $\beta = 4$ и $\alpha_1(g) - 12$ делится на 20, либо $p = 3$, $\beta = 4$ и $\alpha_1(g) - 12$ делится на 30. Если $\beta \in \{3, 11\}$, то $\alpha_1(g) = 24r$, если $\beta \in \{5, 13\}$, то $\alpha_1(g) = 24s + 18$, если $\beta \in \{7, 15\}$, то $\alpha_1(g) = 24t + 12$, и если $\beta = 9$, то $\alpha_1(g) = 24u + 6$. Утверждение (2) доказано.

Пусть Δ является γ-кокликой. Если $\gamma = 1$, то либо $p = 3$, $3 - \alpha_1(g)$ делится на 30 и $\alpha_1(g) = 3, 33, 63, 93$, либо $p = 11$, $3 - 11w$ делится на 10 и $\alpha_1(g) = 33$.

Если же $\gamma \geq 2$, то p делит 12, 21 и $46 - \gamma$, поэтому $p = 3$ и γ сравнимо с 1 по модулю 3. Поэтому $\gamma = 4, 7, ..., 16$ и $\alpha_1(g) - 3\gamma$ делится на 30.

Пусть Δ является объединением n изолированных клик $L_1, ..., L_n$ порядков $m_1 \geq ... \geq m_n$ и $m_1 \geq 2$. Тогда p делит 12, 20 и $10 - m_i$, поэтому $p = 2$ и $m_i \in \{2, 4\}$. Пусть $m_1 = 4$, Y_i — множество вершин из $\Gamma - L_1$, смежных точно с i вершинами из L_1 и $y_i = |Y_i|$. Если $u \in Y_4$, то $\{u\} \cup L_1$ является 5-кликой, причем u^g смежна по крайней мере с 4 вершинами из $\{u\} \cup L_1$, противоречие. Далее, $\sum y_i = 96$, $\sum iy_i = 120$ и $\sum \binom{i}{2} y_i = 36$, поэтому $y_0 + y_3 = 12$, $y_1 + y_2 = 84$ и $y_2 + 3y_3 = 36$. Отсюда $|\Delta| \leq 16$.

Если же $m_1 = 2$, то Δ — регулярный граф степени 1 на w вершинах и по лемме 3 имеем $-2 \leq 32w/(100 - w) \leq 8$. Поэтому $w \leq 20$. Лемма доказана.

Ввиду леммы 6 можно считать, что Δ содержит геодезический 2-путь b, a, c.

Лемма 7. *Верно неравенство* $p \leq 3$.

Доказательство. Если некоторая $\langle g \rangle$-орбита содержит 3-клику, то ввиду леммы 4 имеем $|\Delta| \leq 25$.

Пусть $p = 11$. Тогда $|\Delta| \in \{12, 23, 34\}$, степени вершин в Δ делятся на 11, $\lambda_\Delta = 8$ и для двух несмежных вершин $b, c \in \Delta$ имеем $|\Delta(a) \cap [b]| \in \{1, 12\}$. В случае $|\Delta| = 34$ ввиду леммы 4 имеем $\alpha_2(g) = 0$, противоречие с тем, что число $102 - \alpha_1(g)$ делится на 10. Итак, Δ — регулярный граф степени 11 на 23 вершинах, противоречие.

Пусть $p = 5$. Тогда $|\Delta| = 5t$, $t \leq 6$ и степень любой вершины в Δ сравнима с 3 по модулю 5. Если $a \in \Delta$, то $|\Delta(a) \cap [b]|$ сравним с 3 по модулю 5 для $b \in \Delta(a)$, $|\Delta(a) \cap [b]|$ сравним с 2 по модулю 5 для $b \in \Delta - a^\perp$. Поэтому Δ не содержит вершин степени 3 и степени $|\Delta| - 2$.

В случае $|\Delta| = 15$ степень любой вершины в Δ равна 8 и Δ — сильно регулярный граф с параметрами (15,8,3,1), противоречие.

В случае $|\Delta| = 20$ степень любой вершины в Δ равна 8 или 13. Если Δ содержит вершину e степени 8, то число ребер между $\Delta(a)$ и $\Delta - a^\perp$ равно 11, но не меньше $8 \cdot 4$, противоречие. Значит, Δ — регулярный граф степени 13 и $\mu_\Delta = 12$, поэтому число ребер между $\Delta(a)$ и $\Delta - a^\perp$ равно $72 = 9x + 4(13 - x)$. Отсюда $x = 4$, противоречие с тем, что $|\Delta - a^\perp| = 6$.

В случае $|\Delta| \geq 30$ ввиду леммы 4 каждая $\langle g \rangle$-орбита длины 5 является кокликой. Поэтому $\alpha_1(g) = 0$, $\chi_2(g) = 3|\Delta|/10 + 3$ и $|\Delta|$ делится на 50, противоречие.

Итак, $|\Delta| = 25$, и степень любой вершины в Δ равна 8, 13 или 18. Далее, $\chi_2(g) = (75 - \alpha_1(g))/10 + 3$, поэтому $\alpha_1(g) = 25$. Значит, на $\Gamma - \Delta$ имеются 5 кокликовых $\langle g \rangle$-орбит, 5 пятиугольных $\langle g \rangle$-орбит, в которых вершина смежна с ее образом под действием g, и 5 пятиугольных $\langle g \rangle$-орбиты, в которых вершина смежна с ее образом под действием g^2.

Если Δ содержит вершину e степени 8, то число ребер между $\Delta(e)$ и $\Delta - e^\perp$ равно 16, но не меньше $8 \cdot 4$, противоречие. Значит, Δ содержит четное число вершин степени 13 и нечетное число вершин степени 18.

Если e — вершина степени 18 в Δ, то каждая вершина из $\Delta(e)$ смежна с 4 вершинами из $\Delta - e^\perp$. С другой стороны, число ребер между $\Delta - e^\perp$ и $\Delta(e)$ равно $6 \cdot 12$, поэтому $\Delta - e^\perp$ состоит из вершин степени 13 в Δ. Отсюда Δ содержит единственную вершину степени 18 в Δ. Если $a \in \Delta - e^\perp$, то число ребер между $\Delta(a)$ и $\Delta - a^\perp$ равно $11 \cdot 12$, но не больше $13 \cdot 9$, противоречие.

Лемма 8. *Если* $p = 3$, *то* $|\Delta| = 3t + 1$, $3 \leq t \leq 8$.

Доказательство. Пусть $p = 3$. Тогда $|\Delta| \leq 34$ и степени вершин в Δ делятся на 3. Далее, для любых двух вершин $a, e \in \Delta$ число $|\Delta(a) \cap [e]|$ делится на 3, если a, e не смежны, сравнимо с 2 по модулю 3, если a, e смежны.

Если $|\Delta| > 25$, то ввиду леммы 4 имеем $\alpha_1(g) = 0$, $\chi_2(g) = 3\alpha_0(g)/10 + 3$ и $|\Delta| = 30$, противоречие.

Если $|\Delta| = 7$, то Δ содержит вершину a степени 6. В случае, когда $\Delta(a)$ является регулярным графом степени 2, получим противоречие с тем, что $|\Delta(b) \cap [c]|$ не делится на 3 для любых двух несмежных вершин $b, c \in \Delta(a)$. Значит, Δ содержит точно 3 вершины a, d, e степени 6 и $\Delta - \{a, d, e\}$ является 4-кокликой, противоречие с тем, что $|\Delta(a) \cap [e]| = 5$.

Лемма 9. *Если $p = 2$, то $|\Delta| = 2s$, $3 \leq s \leq 25$ и $e^\perp$ не содержится в Δ для любой вершины $e \in \Delta$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$. Тогда $|\Delta| = 2s \leq 56$ и степени вершин в Δ нечетны. Далее, для любых двух вершин $a, e \in \Delta$ число $|\Delta(a) \cap [e]|$ четно.

Пусть $|\Delta| = 6$. Тогда Δ содержит вершины степени 3 и 5. Если Δ — регулярный граф степени 2, то Δ является 3-призмой или полным двудольным графом $K_{3,3}$. В любом случае имеем противоречие. Если Δ содержит 3 вершины a, d, e степени 5, то $\Delta - \{a, d, e\}$ является 3-кокликой, противоречие. Значит, — Δ содержит точно 2 вершины a, d степени 5 и $\Delta - \{a, d\}$ является объединением трех изолированных ребер.

Если $|\Delta| > 50$, то ввиду леммы 4 имеем $\alpha_1(g) = 0$, $\chi_2(g) = 3\alpha_0(g)/10 + 3$ и $\alpha_0(g)$ делится на 20, противоречие.

Допустим, что $e^\perp$ содержится в Δ для некоторой вершины $e \in \Delta$. Тогда для любой вершины $u \in \Gamma - \Delta$ имеем $[u] \cap \Delta = [u] \cap [e]$, поэтому $\alpha_1(g) = 0$ и $e^\perp = \Delta$. Противоречие с тем, что $\chi_2(g) = 102/10 + 3$. Лемма доказана.

Из лемм 6–9 следует теорема.

4. Группы автоморфизмов графов с параметрами (100,33,8,12) и (100,66,44,42)

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (100,33,8,12), $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ.

Лемма 10. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если g — элемент порядка 11 из G, h элемент простого порядка $p \leq 7$ из $C_G(g)$, то $p = 2$, $|\mathrm{Fix}(h)| = 34$ и $\alpha_1(h) = 22$;*

(2) *G не содержит подгрупп порядка 44;*

(3) *$N_G(\langle g \rangle)$ — расширение $\langle g \rangle$ с помощью подгруппы $\langle s \rangle$ порядка 2, s инвертирует g.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 11 из G, $\mathrm{Fix}(g) = \{a\}$. Если h элемент простого порядка $p \leq 5$ из $C_G(g)$, то g действует без неподвижных точек на $\mathrm{Fix}(h) - \{a\}$ и ввиду теоремы либо $p = 3$ и $|\mathrm{Fix}(h)| = 34$, либо $p = 2$ и $|\mathrm{Fix}(h)| \in \{12, 34\}$. В первом случае имеем противоречие с тем, что $\alpha_1(h)$ не делится на 11. Во втором случае если $|\mathrm{Fix}(h)| = 12$, то $\chi_2(h) = (36 - \alpha_1(h))/10 + 3$ и $\alpha_1(h) = 66$. Противоречие с тем, что число $\chi_2(g) - 33$ нечетно. Если $|\mathrm{Fix}(h)| = 34$, то $\chi_2(h) = (102 - \alpha_1(h))/10 + 3$ и $\alpha_1(h) = 22$. Утверждение (1) доказано.

Пусть G содержит подгруппу U порядка 44, g — элемент порядка 11 из U и $\mathrm{Fix}(g) = \{a\}$. Если h — инволюция из U, W — силовская 2-подгруппа из

U, то по утверждению (1) имеем $\alpha_1(h) = 22$. Противоречие с действием W на множестве вершин из Γ, смежных с их образами под действием h. Утверждение (2) доказано.

Заметим, что $|N_G(\langle g\rangle)|$ не делится на 5, иначе элемент порядка 5 из $N_G(\langle g\rangle)$ фиксирует единственную вершину из $\mathrm{Fix}(g)$, противоречие с теоремой. Если $N_G(\langle g\rangle) = C_G(\langle g\rangle)$, то по теореме Бернсайда G — расширение нормальной $11'$-подгруппы N с помощью $\langle s\rangle$. Противоречие с действием $\langle g\rangle$ на силовской 5-подгруппе из N. Теперь $N_G(\langle g\rangle) \neq C_G(\langle g\rangle)$ и ввиду утверждения (2) $N_G(\langle g\rangle)$ — расширение $\langle g\rangle$ с помощью подгруппы $\langle s\rangle$ порядка 2, s инвертирует g. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, то $|G|$ не делится на* 11.

Доказательство. Пусть G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и $|G|$ делится на 11. Так как $|\Gamma| = 100$, то $O_3(G) = 1$. Ввиду леммы 10 имеем $O_5(G) = 1$.

Пусть $Q = O_2(G) \neq 1$. Тогда подгруппа Q_a нормальна в H и длины Q_a-орбит на $[a]$ равны 1. Поэтому $[a] \subset \mathrm{Fix}(Q_a)$ и ввиду теоремы $Q_a = 1$. В этом случае $|Q| = 2, 4$. Тогда элемент порядка 11 из G централизует Q, противоречие с леммой 10.

Пусть T — цоколь группы G. Если T не является простой группой, то T — прямое произведение двух простых неабелевых групп, причем порядок одной из них делится на 11, противоречие. Значит, T — простая неабелева группа. Из таблицы 1 [7] следует, что либо $|T|$ не делится на 25, либо $|T|$ делится на 7, противоречие. Лемма доказана.

Из леммы 11 следует, что G действует интранзитивно на множестве дуг (упорядоченных ребер) графа Γ.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (100,66,44,42) и группа автоморфизмов G графа Γ действует транзитивно на множестве дуг (упорядоченных ребер) графа Γ. Зафиксируем ребро $\{a, b\}$ графа Γ и положим $H = G_a$, $M = H_b$. Тогда $|G : H| = 100$, $|H : M| = 66$ и ввиду теоремы имеем $|G| = 2^\beta \cdot 3^\gamma \cdot 5^2 \cdot 11$.

Теперь G действует транзитивно на множестве вершин дополнительного графа $\bar{\Gamma}$ с параметрами (100,33,8,12) и 11 делит $|G|$. Противоречие с леммой 11. Следствие 1 доказано.

Список литературы

[1] А.А. Махнев, М.С. Нирова, *О небольших симметричных сильно регулярных графах*, Доклады академии наук, **442**:5 (2010), 512–515.

[2] К.С. Ефимов, А.А. Махнев, *Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами* $(88, 27, 6, 9)$, Доклады академии наук **445**:3 (2012), 247–250.

[3] А.Х. Журтов, А.М. Кагазежева, А.А. Махнев, *Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами* $(96, 45, 24, 18)$, Доклады академии наук **446**:1 (2012), 10–14.

[4] И.Н. Белоусов, *Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами* $(96, 60, 38, 36)$, Доклады академии наук **449**:4 (2013), 390-394.

[5] К.С. Ефимов, А.А. Махнев, *Об автоморфизмах сильно регулярных графов с параметрами* $(99, 42, 21, 15)$ *или* $(99, 56, 28, 36)$, Доклады академии наук **450**:2 (2013), 247–250.

[6] А.К. Гутнова, *Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами* $(245, 64, 18, 16)$, Сибирские электрон. матем. известия **8** (2011), 4–18. MR2771620

[7] И.Б. Горшков *Распознавание по спектру конечных простых групп, простые делители порядков которых не превосходят* 17, Сибирские электрон. матем. известия **7** (2010), 14–20. MR2586671

Марина Сефовна Нирова
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16,
620990, Екатеринбург, Россия
E-mail address: nirova_m@mail.ru