S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 227–240 (2013) УДК 517.968.48
MSC 45G15

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ШАРПА–ЛОТКИ В НАИБОЛЕЕ ОБЩИХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯХ

А.Н. ПИЧУГИНА, Б.Ю. ПИЧУГИН

Abstract. In the papers [6, 7, 8] based on Sharpe-Lotka model [1, 2] was constructed and studied nonlinear integral model of dynamics of isolated populations with the self-limitation and the finite lifetime of individuals. In 2002 has been proved that the solution of this model has the limit in the case when the equation $\lambda(x) = \beta$ has no more than one root. In this paper we prove that the limit of the solution of the model exists independently of the number of roots of the equation $\lambda(x) = \beta$. In addition, using the results of [9], greatly weakened conditions on model parameters. Furthermore, the theorem on the continuous dependence on the initial data and the stability theorem was proved.

Keywords: Sharpe-Lotka model, nonlinear integral equations, renewal equation.

1. Уравнения модели и условия на её параметры

В работах [6, 7, 8] на базе модели Шарпа-Лотки [1, 2] построена нелинейная интегральная модель динамики изолированной популяции с учётом самолимитирования и конечности времени жизни индивидуумов. После несложных

Pichugina, A.N., Pichugin, B.Yu., Asymptotic properties of solutions of nonlinear Sharpe-Lotka model in the most general assumptions.

Работа поддержана Междисциплинарным Интеграционным Проектом СО РАН «Дифференциально-разностные и интегро-дифференциальные уравнения. Приложения к задачам естествознания» (проект №80, 2012-2014 года).

Поступила 29 октября 2012 г., опубликована 14 марта 2013 г.

преобразований уравнения модели можно записать в виде

$$x(t) = y(t)\, e^{-\int\limits_0^t \lambda(x(s))\,ds}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$b(t) = z(t)\, e^{-\int\limits_0^t \lambda(x(s))\,ds}, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$y(t) = x^\circ(t) + \int_0^t R(a)\, z(t-a)\, da, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

$$z(t) = b^\circ(t) + \int_0^t \mu(a)\, R(a)\, z(t-a)\, da, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

$$x^\circ(t) = \int_t^\infty R(a)\, \varphi(a-t)\, da, \quad t \geqslant 0, \tag{5}$$

$$b^\circ(t) = \int_t^\infty \mu(a)\, R(a)\, \varphi(a-t)\, da, \quad t \geqslant 0. \tag{6}$$

Здесь $x(t)$, $b(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — это неизвестные функции, а остальные функции являются параметрами модели. Смысл входящих в уравнение функций с учётом результатов работы [9] следующий.

$x(t)$ — численность индивидуумов популяции в момент $t \geqslant 0$.

$b(t)$ — скорость появления новых индивидуумов в момент $t \geqslant 0$.

$y(t)$ — интерпретируется как численность индивидуумов популяции в момент $t \geqslant 0$ при условии отсутствия самолимитирования.

$z(t)$ — интерпретируется как скорость появления новых индивидуумов в момент $t \geqslant 0$ при условии отсутствия самолимитирования.

$\lambda(x)$ — интенсивность гибели индивидуумов вследствие самолимитирования. Функция λ удовлетворяет условию Липшица на любом конечном отрезке. Величина $e^{-\int\limits_0^t \lambda(x(s))\,ds}$ равна доле индивидуумов, погибших вследствие самолимитирования к моменту t.

$R(a)$ — функция выживаемости: доля индивидуумов, доживающих до возраста a при условии отсутствия самолимитирования. Функция R неотрицательна, не возрастает, $R(0) = 1$ и

$$\tau = \sup\{a \geqslant 0 : R(a) > 0\} < \infty.$$

Наличие конечного τ означает, что время жизни любого индивидуума не может превосходить τ. Другими словами, в данной модели явно предполагается, что возраст всех индивидуумов равномерно ограничен сверху константой τ. Величина $\bar\tau = \int\limits_0^\tau R(a)da$ равна средней продолжительности жизни индивидуумов.

$\mu(a)$ — весовая функция, определяющая вклад индивидуумов возраста a в производство потомства. Функция μ неотрицательна, ограничена и почти всюду непрерывна на $[0;\tau]$. Величина $\int\limits_{a_1}^{a_2} \mu(a)\,da$ равна числу потомков, произведённых одним индивидуумом в возрасте от a_1 до a_2. Если через $x(a,t)$ обозначить распределение индивидуумов популяции по возрасту a в момент t, то

$$x(t) = \int\limits_0^\tau x(a,t)\,da, \quad b(t) = \int\limits_0^\tau \mu(a)\,x(a,t)\,da, \quad t \geqslant 0.$$

$\varphi(s)$ — скорость рождения новых индивидуумов в момент $t = -s < 0$. Функция φ неотрицательна и суммируема на $[0;\tau]$[1]. При построении данной модели предполагается, что до момента $t = 0$ в популяции нет самолимитирования. Поэтому распределение первоначальных (существовавших в момент $t = 0$) индивидуумов по возрасту равно

$$x(a,0) = R(a)\,\varphi(a).$$

$x^\circ(t)$ — интерпретируется как численность первоначальных индивидуумов, которые дожили бы до момента $t \geqslant 0$ при условии отсутствия самолимитирования.

$b^\circ(t)$ — интерпретируется как скорость производства новых индивидуумов первоначальными индивидуумами в момент $t \geqslant 0$ при условии отсутствия самолимитирования.

Ключевыми в системе (1)–(4) являются уравнения (1) и (4). Уравнение (4) представляет собой одномерное интегральное уравнение восстановления [3, с.238], через решение $z(t)$ которого явно выражена (3) функция $y(t)$. Зная $y(t)$, функцию $x(t)$ можно найти из уравнения (1). Подставляя $x(t)$ в (2), получаем $b(t)$.

В отличие от классической модели Шарпа–Лотки, модель (1)–(4) учитывает самолимитирование индивидуумов ($\lambda(x) \not\equiv 0$), конечность их времени жизни ($\tau < \infty$) и использует другую форму распределения по возрасту первоначально существующих индивидуумов.

2. Существование, единственность и непрерывность решения

В работе [9] показано, что при указанных выше ограничениях на параметры решение $(x(t), b(t), y(t), z(t))$ модели (1)–(4) существует, единственно, неотрицательно и непрерывно на $[0;\infty)$. Кроме того, функции x° и y° также неотрицательны и непрерывны на $[0;\infty)$. Отметим только, что в [9] рассматривалась модель нескольких популяций с функцией λ вида

$$\lambda(\mathbf{x}) = C\,\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T,$$

где C — некоторая матрица специального вида. Но при доказательстве теоремы существования и единственности в [9] использовалось лишь свойство липшицевости функции λ на любом ограниченном множестве. Поэтому этот результат справедлив и для модели (1)–(4).

3. Элементарные свойства модели

Прежде всего отметим, что

1) функции $x^\circ(t)$ и $b^\circ(t)$ обращаются в ноль при $t \geqslant \tau$;

2) если $x^\circ(0) = 0$, то функция $\varphi(a)$ равна нулю почти всюду на $[0;\tau]$ и, следовательно, $x^\circ(t) \equiv 0$, $b^\circ(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$, $z(t) \equiv 0$, $x(t) \equiv 0$, $b(t) \equiv 0$ на $[0;\infty)$;

3) функция $x^\circ(t)$ не возрастает [9].

Поведение функций $z(t)$, $y(t)$, $x(t)$ и $b(t)$ существенно различаются для двух основных случаев. Первый случай тривиален и описан в следующей лемме.

[1] Под суммируемостью здесь понимается интегрируемость по Лебегу, то есть $\varphi \in \mathcal{L}^1[0;\tau]$.

Лемма 1. *Если $b^\circ(t) \equiv 0$, то $z(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv x^\circ(t)$, $b(t) \equiv 0$ на $[0;\infty)$ и $x(t) = 0$ при $t \in [\tau;\infty)$.*

Доказательство. Если $b^\circ(t) \equiv 0$, то решением уравнения (4) будет функция $z(t) \equiv 0$. Следовательно, $y(t) \equiv x^\circ(t)$ и $b(t) \equiv 0$. Из очевидного неравенства $0 \leqslant x(t) \leqslant y(t)$ вытекает, что $x(t) = y(t) = x^\circ(t) = 0$ при $t \in [\tau;\infty)$. □

Равенство $b^\circ(t) \equiv 0$ возможно, например, когда в популяции есть только пожилые индивидуумы, не способные к производству потомства: $\mu(a) = 0$ почти всюду на $[\alpha;\tau]$, а $\varphi(a) = 0$ почти всюду на $[0;\alpha]$ для некоторого $\alpha \in [0;\tau]$.

Второй случай описан в следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть $b^\circ(t) \not\equiv 0$. Тогда*

1) *существует единственный действительный корень β уравнения*

$$\int_0^\infty \mu(a)\, R(a)\, e^{-\beta\, a}\, da = 1; \tag{7}$$

2) *при $t \to +\infty$ справедливы эквивалентности $z(t) \sim z^* e^{\beta t}$ и $y(t) \sim y^*\, e^{\beta\, t}$, где $z^* \in (0;\infty)$ и $y^* \in (0;\infty)$ — некоторые константы;*
3) *$y(t) > 0$ и $x(t) > 0$ для всех $t \in [0;\infty)$;*
4) *если $\beta < 0$, то существует $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.*

Доказательство. Сначала покажем от противного, что

$$\int_0^\infty \mu(a)\, R(a)\, da > 0. \tag{8}$$

Действительно, пусть этот интеграл равен нулю (отрицательным он быть не может, так как функции μ и R неотрицательны). Тогда произведение $\mu(a)\, R(a)$ равно нулю почти всюду на $[0;\infty)$. Следовательно, $b^\circ(t) \equiv 0$, что противоречит предположению леммы.

Рассмотрим функцию

$$f(\beta) = \int_0^\infty \mu(a)\, R(a)\, e^{-\beta\, a}\, da.$$

Из положительности интеграла (8) вытекает, что функция $f(\beta)$ непрерывна, убывает, $f(-\infty) = +\infty$ и $f(+\infty) = 0$. Следовательно, существует единственный корень уравнения $f(\beta) = 1$. Первое свойство доказано.

Из того, что функция $b^\circ(t)$ непрерывна и тождественно не равна нулю, следует [3, с.238, 246], что

$$z(t) \sim z^*\, e^{\beta\, t}, \quad t \to +\infty, \tag{9}$$

где $z^* \in (0;\infty)$ — некоторая константа. Подставляя (9) в (3), получаем

$$y(t) \sim y^*\, e^{\beta\, t}, \quad t \to +\infty, \quad y^* = z^* \int_0^\tau R(a)\, e^{-\beta\, a}\, da \in (0;\infty).$$

Тем самым доказано свойство 2.

Докажем свойство 3 для функции $y(t)$. Предположим, найдется момент $s \in [0;\infty)$ такой, что $y(s) = 0$. Если $s \in [\tau;\infty)$, то из (3) получаем, что $z(t) = 0$ для всех $t \in [s-\tau;s]$. Рассмотрим функцию $\tilde{z}(t)$, которая совпадает с функцией $z(t)$ во всех точках отрезка $[0;s]$ и равна нулю на интервале $(s;\infty)$. Легко убедиться в том, что функция $\tilde{z}(t)$ является решением уравнения (4). Следовательно, в силу единственности этого решения, $z \equiv \tilde{z}$. Значит, $z(t) = 0$ во всех точках промежутка $[s;\infty)$, что противоречит (9).

Если же $s \in [0;\tau)$, то из (3) получаем, что $x^\circ(s) = 0$ и $z(t) = 0$ на $[0;s]$. Из $x^\circ(s) = 0$ вытекает, что $\varphi(a)$ равна нулю почти всюду на $[0;\tau - s]$. Поэтому $b^\circ(t) = 0$ при $t \in [s;\tau]$. Так как $z(t) = 0$ на $[0;s]$, то из (4) получаем, что $b^\circ(t) = 0$ на $[0;s]$. Следовательно, $b^\circ(t) \equiv 0$, что противоречит предположению леммы.

Положительность функции $x(t)$ следует из положительности функции $y(t)$ и конечности интеграла $\int\limits_0^t \lambda(x(s))\,ds$ для всех $t \in [0;\infty)$ (как интеграла от непрерывной функции на конечном отрезке).

Свойство 4 вытекает из свойства 2 и оценки $0 < x(t) \leqslant y(t)$. □

Таким образом, параметр β определяет асимптотическую скорость роста численности популяции в условиях отсутствия самолимитирования и конкуренции. Параметр β называют мальтусовским.

4. Непрерывная зависимость решений модели от начальных данных на конечных интервалах времени

Под малым изменением в начальных данных мы будем понимать малое изменение функции $\varphi(a)$ при фиксированных функциях $R(a)$, $\mu(a)$ и $\lambda(x)$. Изменение функции $\varphi(a)$ будем измерять при помощи взвешенной полунормы

$$\|\varphi\|_R = \int_0^\infty R(a)\,|\varphi(a)|\,da, \quad \varphi \in \mathcal{L}^1[0;\tau].$$

В [9] доказана следующая

Лемма 3. *Пусть функции $Q(a)$, $q(a)$ неотрицательны и суммируемы на отрезке $[0;\tau]$, причем $Q(a)$ ограничена. Если $Q(a)$ не возрастает или $q(a)$ не убывает, то функция $g(t) = \int\limits_t^\tau Q(a)q(a-t)\,da$ не возрастает на $[0;\tau]$.*

Докажем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Пусть функции $x^{\circ(1)}(t)$, $b^{\circ(1)}(t)$ и $x^{\circ(2)}(t)$, $b^{\circ(2)}(t)$ построены по формулам (5)–(6) с использованием функций $\varphi^{(1)}(a)$ и $\varphi^{(2)}(a)$ соответственно. Тогда для всех $t \in [0;\infty)$*

$$|x^{\circ(1)}(t) - x^{\circ(2)}(t)| \leqslant \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R, \quad |b^{\circ(1)}(t) - b^{\circ(2)}(t)| \leqslant \bar{\mu}\,\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R,$$

где $\bar{\mu} = \sup\limits_{a\in[0;\tau]} \mu(a)$.

Доказательство. Из (5) следует, что

$$|x^{\circ(1)}(t) - x^{\circ(2)}(t)| \leqslant \int\limits_t^\infty R(a)\,|\varphi^{(1)}(a-t) - \varphi^{(2)}(a-t)|\,da, \quad t \geqslant 0.$$

Применим лемму 3 для функций $Q(a) = R(a)$ и $q(a) = |\varphi^{(1)}(a) - \varphi^{(2)}(a)|$. Получим

$$|x^{\circ(1)}(t) - x^{\circ(2)}(t)| \leqslant \int\limits_0^\infty R(a)\,|\varphi^{(1)}(a) - \varphi^{(2)}(a)|\,da = \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R.$$

Аналогично получаем вторую оценку

$$|b^{\circ(1)}(t) - b^{\circ(2)}(t)| \leqslant \int\limits_t^\infty \mu(a)\, R(a)\, |\varphi^{(1)}(a-t) - \varphi^{(2)}(a-t)|\, da \leqslant \bar\mu\, \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R.$$

Лемма доказана. □

Теорема 1 (О непрерывной зависимости от начальных данных на конечном отрезке времени)**.** *Пусть* $x^{(1)}(t)$, $b^{(1)}(t)$, $y^{(1)}(t)$, $z^{(1)}(t)$ *и* $x^{(2)}(t)$, $b^{(2)}(t)$, $y^{(2)}(t)$, $z^{(2)}(t)$ *— это решения системы* (1)–(4)*, соответствующие функциям* $\varphi^{(1)}(a)$ *и* $\varphi^{(2)}(a)$*. Тогда для любого* $T>0$ *существуют константы* $c_z>0$, $c_y>0$, $c_x>0$, $c_b>0$ *такие, что*

$$\|z^{(1)} - z^{(2)}\|_T \leqslant c_z \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R, \quad \|y^{(1)} - y^{(2)}\|_T \leqslant c_y \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R,$$

$$\|x^{(1)} - x^{(2)}\|_T \leqslant c_x \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R, \quad \|b^{(1)} - b^{(2)}\|_T \leqslant c_b \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R,$$

где $\|\cdot\|_T$ *— это равномерная норма в пространстве* $C[0;T]$ *непрерывных на* $[0;T]$ *функций:* $\|f\|_T = \sup\limits_{t\in[0;T]} |f(t)|$.

Доказательство. Рассмотрим норму $\|\cdot\|_{TL}$ на $C([0;T])$, определённую равенством

$$\|f\|_{TL} = \sup_{t\in[0;T]} e^{-L\,t} \|f(t)\|,$$

где $L>0$ — это параметр нормы. Норма $\|\cdot\|_{TL}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_T$,так как

$$e^{-L\,T}\|f\|_T \leqslant \|f\|_{TL} \leqslant \|f\|_T. \tag{10}$$

Поэтому требуемые оценки достаточно получить в норме $\|\cdot\|_{TL}$.

Применяя лемму 4, оценим

$$e^{-L\,t}\, |z^{(1)}(t) - z^{(2)}(t)| \leqslant e^{-L\,t}\, |b^{\circ(1)}(t) - b^{\circ(2)}(t)| +$$

$$e^{-L\,t} \int\limits_0^t \mu(a)\, R((a)\, |z^{(1)}(t-a) - z^{(2)}(t-a)|\, da \leqslant$$

$$e^{-L\,t}\, \bar\mu\, \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R + e^{-L\,t}\, \bar\mu \int\limits_0^t e^{Ls}\, e^{-Ls}\, |z^{(1)}(s) - z^{(2)}(s)|\, ds \leqslant$$

$$e^{-L\,t}\, \bar\mu\, \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R + \tfrac{\bar\mu}{L}(1 - e^{-L\,t})\, \|z^{(1)} - z^{(2)}\|_{TL} \leqslant$$

$$\bar\mu\, \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R + \tfrac{\bar\mu}{L} \|z^{(1)} - z^{(2)}\|_{TL}.$$

Следовательно,

$$\|z^{(1)} - z^{(2)}\|_{TL} \leqslant \bar\mu\, \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R + \tfrac{\bar\mu}{L}\, \|z^{(1)} - z^{(2)}\|_{TL}.$$

Выберем $L > \bar\mu$. Выразим $\|z^{(1)} - z^{(2)}\|_{TL}$ из последнего неравенства

$$\|z^{(1)} - z^{(2)}\|_{TL} \leqslant \tfrac{\bar\mu\, L}{L-\bar\mu}\, \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R.$$

Полагая $c_z = \frac{\bar\mu\, L}{L-\bar\mu} e^{L\,T}$ и используя (10), получаем требуемую оценку разности $z^{(1)} - z^{(2)}$.

Оценим разность $y^{(1)}-y^{(2)}$. При $L>\bar\mu$ имеем

$$e^{-L\,t}\,|y^{(1)}(t)-y^{(2)}(t)| \leqslant$$

$$e^{-L\,t}\,|x^{\circ(1)}(t)-x^{\circ(2)}(t)| + e^{-L\,t}\int\limits_0^t R(a)\,|z^{(1)}(t-a)-z^{(2)}(t-a)|\,da \leqslant$$

$$e^{-L\,t}\,\|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\|_R + e^{-L\,t}\int\limits_0^t e^{Ls}\,e^{-Ls}\,|z^{(1)}(s)-z^{(2)}(s)|\,da \leqslant$$

$$\|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\|_R + \tfrac{1}{L}\,\|z^{(1)}-z^{(2)}\|_{TL} \leqslant (1+\tfrac{\bar\mu}{L-\bar\mu})\,\|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\|_R.$$

Следовательно, $\|y^{(1)}-y^{(2)}\|_{TL} \leqslant \frac{L}{L-\bar\mu}\,\|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\|_R$. Полагая $c_y=\frac{L}{L-\bar\mu}\,e^{L\,T}$, получаем требуемую оценку разности $y^{(1)}-y^{(2)}$.

Оценим разность $x^{(1)}-x^{(2)}$. Пусть M — это константа Липшица функции λ на отрезке $[0;\bar y]$, где $\bar y=\|y^{(1)}\|_T\vee\|y^{(2)}\|_T$.[2] Тогда в силу неравенства $x(t)\leqslant y(t)$ имеем

$$|\lambda(x^{(1)}(t))-\lambda(x^{(2)}(t))| \leqslant M\,|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)|$$

для всех $t\in[0;T]$. Используя неравенство $|e^{-a}-e^{-b}|\leqslant|a-b|$, $a,b\geqslant 0$, запишем

$$e^{-L\,t}|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)| \leqslant e^{-L\,t}|y^{(1)}(t)\,e^{-\int\limits_0^t\lambda(x^{(1)}(s))\,ds} - y^{(2)}(t)\,e^{-\int\limits_0^t\lambda(x^{(2)}(s))\,ds}| \leqslant$$

$$y^{(1)}(t)\,e^{-L\,t}\,|e^{-\int\limits_0^t\lambda(x^{(1)}(s))\,ds} - e^{-\int\limits_0^t\lambda(x^{(2)}(s))\,ds}|+$$

$$e^{-L\,t}\,|y^{(1)}(t)-y^{(2)}(t)|\,e^{-\int\limits_0^t\lambda(x^{(2)}(s))\,ds} \leqslant$$

$$y^{(1)}(t)\,e^{-L\,t}\int\limits_0^t|\lambda(x^{(1)}(s))-\lambda(x^{(2)}(s))|\,ds + \|y^{(1)}-y^{(2)}\|_{TL} \leqslant$$

$$\|y^{(1)}\|_T\,\tfrac{M}{L}\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_{TL} + \|y^{(1)}-y^{(2)}\|_{TL},$$

Следовательно,

$$\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_{TL} \leqslant \|y^{(1)}\|_T\,\tfrac{M}{L}\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_{TL} + \|y^{(1)}-y^{(2)}\|_{TL}.$$

Выбирая $L>\bar\mu\vee M\,\|y^{(1)}\|_T$, приходим к оценке

$$\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_{TL} \leqslant \tfrac{L}{L-M\|y^{(1)}\|_T}\|y^{(1)}-y^{(2)}\|_{TL} \leqslant \tfrac{L^2}{(L-M\|y^{(1)}\|_T)(L-\bar\mu)}\|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\|_R.$$

Требуемая оценка разности $x^{(1)}-x^{(2)}$ получается при $c_x=\frac{L^2e^{L\,T}}{(L-M\|y^{(1)}\|_T)(L-\bar\mu)}$.

Осталось оценить разность $b^{(1)}-b^{(2)}$. При $L>\bar\mu\vee M\,\|y^{(1)}\|_T$ имеем

$$e^{-L\,t}\,|b^{(1)}(t)-b^{(2)}(t)| \leqslant e^{-L\,t}\,|z^{(1)}(t)\,e^{-\int\limits_0^t\lambda(x^{(1)}(s))\,ds} - z^{(2)}(t)\,e^{-\int\limits_0^t\lambda(x^{(2)}(s))\,ds}| \leqslant$$

$$\|z^{(1)}\|_T\,\tfrac{M}{L}\,\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_{TL} + \|z^{(1)}-z^{(2)}\|_{TL} \leqslant c_b'\,\|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\|_R,$$

где $c_b'=(\|z^{(1)}\|_T\,\frac{M}{L}\,c_x+c_z)e^{-L\,T}$. Следовательно,

$$\|b^{(1)}-b^{(2)}\|_T \leqslant c_b\,\|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\|_R,$$

[2]Здесь и далее $a\vee b=\max\{a,b\}$.

где $c_b = c_b' e^{LT}$. Полученная оценка завершает доказательство. □

5. Существование предела решения

Исследуем асимптотические свойства решений системы (1)–(4), полагая, что
$$b^\circ(t) \not\equiv 0,$$
так как в противном случае поведение системы полностью описывается леммой 1.

Заметим, что функция $b(t)$ не входит в уравнение (1). Поэтому для анализа асимптотических свойств решений системы (1)–(4) достаточно исследовать поведение только решения $x(t)$ уравнения (1) (поведение функций $z(t)$ и $y(t)$ при $t \to +\infty$ описано леммой 2). В силу леммы 2, функция $y(t)$ представима в виде
$$y(t) = (y^* + \epsilon(t))\, e^{\beta\, t}, \quad \epsilon(t) \to 0, \quad t \to +\infty.$$
где β — корень уравнения (7). Тогда уравнение (1) примет вид
$$x(t) = (y^* + \epsilon(t))\, e^{I(t)}, \quad I(t) = \int_0^t (\beta - \lambda(x(s)))\, ds. \tag{11}$$

Теорема 2 (О существовании предела решения)**.** *Если $b^\circ(t) \not\equiv 0$, то существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^* \geqslant 0$, где x^* — либо 0, либо $+\infty$, либо корень уравнения $\lambda(x) = \beta$. В частности,*
1) *если $\beta = 0$, то $x^* \ne +\infty$;*
2) *если $\lambda(x) < \beta$ для всех $x \geqslant 0$, то $x^* = +\infty$;*
3) *если $\lambda(x) > \beta$ для всех $x \geqslant 0$, то $x^* = 0$;*
4) *если $\beta > 0$ и уравнение $\lambda(x) = \beta$ имеет единственный корень x_1 такой, что функция $\lambda(x)$ не убывает в некоторой окрестности этого корня, то $x^* = x_1$.*

Доказательство. Докажем существование предела $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$. Из леммы 2 имеем, что $x(t) > 0$ для всех $t \geqslant 0$. Следовательно, в силу (11), для всех $t \geqslant 0$ и $s > t$ должно выполняться равенство
$$\frac{x(s)}{x(t)} = \frac{y^* + \epsilon(s)}{y^* + \epsilon(t)}\, e^{I(s)-I(t)} = \frac{y^* + \epsilon(s)}{y^* + \epsilon(t)}\, e^{\int_t^s (\beta - \lambda(x(s)))\, ds}. \tag{12}$$

Допустим, предел $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ не существует. Тогда
$$\underline{x} = \liminf_{t\to+\infty} x(t) < \limsup_{t\to+\infty} x(t) = \overline{x}.$$

Функция $\lambda(x)$ непрерывна. Поэтому множество X^* корней уравнения $\lambda(x) = \beta$ замкнуто в $\mathbb{R}$. Возможны два случая: либо $(\underline{x}; \overline{x}) \not\subset X^*$, либо $(\underline{x}; \overline{x}) \subset X^*$.

Пусть $(\underline{x}; \overline{x}) \not\subset X^*$. Тогда существует отрезок $[x_1; x_2] \subset (\underline{x}; \overline{x})$, не содержащий корней уравнения $\lambda(x) = \beta$. В противном случае множество X^* будет всюду плотно в $(\underline{x}; \overline{x})$, что противоречит предположению $(\underline{x}; \overline{x}) \not\subset X^*$, так как X^* замкнуто.

Предположим, что $\beta - \lambda(x_1) < 0$. Так как функция $x(t)$ непрерывна и точки x_1, x_2 лежат между ее верхним и нижним пределами, то график $x(t)$ бесконечное число раз снизу вверх пересекает полосу $[0; \infty) \times [x_1; x_2]$. Следовательно, существует неограниченно возрастающая последовательность непересекающихся отрезков $\{[t_n; s_n]\}$ такая, что $x(t_n) = x_1$, $x(s_n) = x_2$ и $x(t) \in (x_1; x_2)$ для всех

$t \in (t_n; s_n)$. Отношение $\frac{y^*+\epsilon(s_n)}{y^*+\epsilon(t_n)}$ стремится к 1 при $n \to +\infty$. Следовательно, существует номер n такой, что

$$0 < \frac{y^* + \epsilon(s_n)}{y^* + \epsilon(t_n)} < \frac{x_2}{x_1} = \frac{x(s_n)}{x(t_n)}.$$

Так как отрезок $[x_1; x_2]$ не содержит корней уравнения $\lambda(x) = \beta$, то разность $\beta - \lambda(x(s))$ не обращается в ноль на отрезке $[t_n; s_n]$. Так как $\beta - \lambda(x(t_n)) = \beta - \lambda(x_1) < 0$, то разность $\beta - \lambda(x(s))$ отрицательна на всем отрезке $[t_n; s_n]$. Значит,

$$0 < e^{\int\limits_{t_n}^{s_n} (\beta - \lambda(x(s)))\, ds} < 1.$$

Перемножая два полученных неравенства, приходим к противоречию с равенством (12).

Если $\beta - \lambda(x_1) > 0$, то, воспользовавшись тем, что график $x(t)$ бесконечное число раз пересекает полосу $[0; \infty) \times [x_1; x_2]$ сверху вниз, аналогично приходим к противоречию.

Пусть теперь $(\underline{x}; \overline{x}) \subset X^*$. Тогда отрезок $[x_1; x_2] \subset (\underline{x}; \overline{x})$ выберем произвольно. Аналогично построим неограниченно возрастающую последовательность непересекающихся отрезков $\{[t_n; s_n]\}$ такую, что $x(t_n) = x_1$, $x(s_n) = x_2$ и $x(t) \in (x_1; x_2)$ для всех $t \in (t_n; s_n)$. Так как все точки отрезка $[x_1; x_2]$ являются корнями корнями уравнения $\lambda(x) = \beta$, то разность $\beta - \lambda(x(s))$ будет тождественно равна нулю на всех отрезках $[t_n; s_n]$. Значит, для всех n выполнено

$$e^{\int\limits_{t_n}^{s_n} (\beta - \lambda(x(s)))\, ds} = 1$$

и равенство (12) опять будет нарушаться при больших n.

Итак, существование предела $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^*$ установлено. Докажем теперь, что либо $x^* = 0$, либо $x^* = +\infty$, либо $\lambda(x^*) = \beta$. Предположим, что $\lambda(x^*) \neq \beta$. Тогда либо $\lambda(x^*) < \beta$, либо $\lambda(x^*) > \beta$. Если $\lambda(x^*) < \beta$, то $\lim\limits_{t\to+\infty}(\beta - \lambda(x(s))) = \beta - \lambda(x^*) > 0$ и $I(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Следовательно, $x(t) \to +\infty$, $t \to +\infty$. Если $\lambda(x^*) > \beta$, то $I(t) \to -\infty$ и $x(t) \to 0$, $t \to +\infty$.

Прежде чем перейти к доказательству пунктов 1)–4), заметим, что из существования предела $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^*$, вытекает существование предела

$$(13) \qquad \lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} \ln \frac{x(t)}{y^*+\epsilon(t)} = \ln \frac{x^*}{y^*} = I^* = \int\limits_0^{+\infty} (\beta - \lambda(x(s)))\, ds.$$

Перейдем к доказательству.

1) Если $\beta = 0$, то $\beta - \lambda(x(s)) \leqslant 0$ для всех $s \geqslant 0$. Следовательно, $I(t) \leqslant 0$ для всех t. Поэтому $I^* \leqslant 0$ и $x^* = y^* e^{I^*} \leqslant y^* < \infty$.

2) Пусть $\lambda(x) < \beta$ для всех $x \geqslant 0$. Предположим, что $I^* < \infty$. Тогда $x^* < \infty$ и существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty}(\beta - \lambda(x(t))) = \beta - \lambda(x^*)$. Для конечности интеграла (13) необходимо, чтобы этот предел был равен нулю, что противоречит неравенству $\lambda(x^*) < \beta$. Значит, $I^* = +\infty$ и $x^* = +\infty$.

3) Пусть $\lambda(x) > \beta$ для всех $x \geqslant 0$. Тогда $I^* \leqslant 0$ и $x^* = y^* e^{I^*} \leqslant y^*$. Следовательно, решение $x(t)$ ограничено на $[0;+\infty)$. Положим $\bar{x} = \sup\limits_{t\in[0;\infty)} x(t)$ и $\lambda_{\min} = \min\limits_{x\in[0;\bar{x}]} \lambda(x) > \beta$, тогда

$$x(t) = (y^* + \epsilon(t))e^{\int\limits_0^t (\beta-\lambda(x(s)))\,ds} \leqslant (y^* + \epsilon(t))e^{(\beta-\lambda_{\min})t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

4) Пусть выполнено условие этого пункта. Для доказательства равенства $x^* = x_1$ нужно показать, что $x^* \neq +\infty$ и если $x_1 \neq 0$, то $x^* \neq 0$. Тогда x^* будет совпадать с x_1 в силу единственности корня уравнения $\lambda(x) = \beta$.

Функция $\lambda(x)$ не убывает в окрестности корня x_1. Поэтому $\lambda(x) > \beta$ для всех $x \in (x_1;\infty)$. Предположим, что $x^* = \infty$. Тогда существует $t_\circ \geqslant 0$ такое, что $x(t) > x_1$ для всех $t \geqslant t_\circ$. Следовательно, функция $I(t)$ не возрастает при $t \geqslant t_\circ$. Значит, $x^* = y^*\, e^{I^*} \leqslant y^*\, e^{I(t_\circ)} < \infty$, что противоречит равенству $x^* = +\infty$.

Если $x_1 > 0$, то $\lambda(x) < \beta$ для всех $x \in [0;x_1)$. Предположим, что $x^* = 0$. Тогда существует $t_\circ \geqslant 0$ такое, что $x(t) < x_1$ для всех $t \geqslant t_\circ$. Следовательно, функция $I(t)$ не убывает при $t \geqslant t_\circ$. Значит, $x^* = y^*\, e^{I^*} \geqslant y^*\, e^{I(t_\circ)} > 0$, что противоречит равенству $x^* = 0$.

На этом теорема полностью доказана. □

6. Устойчивость решений

Исследуем устойчивость решения $x(t)$ системы (1)–(4) к возмущениям функции $\varphi(a)$ при фиксированных $R(a)$, $\mu(a)$ и $\lambda(x)$.

Определение 1. *Решение $x^{(1)}(t)$ системы (1)–(4), соответствующее функции $\varphi^{(1)}(a)$, назовем устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R < \delta$ следует неравенство $|x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$, где $x^{(2)}(t)$ — решение, соответствующее функции $\varphi^{(2)}(a)$. Решение $x^{(1)}(t)$ назовем асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и $x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.*

Прежде, чем приступить к доказательству основной теоремы этого параграфа, введем дополнительные обозначения и докажем несколько вспомогательных лемм. Обозначим

$$h(t) = z(t)e^{-\beta\, t}, \quad g(t) = y(t)e^{-\beta\, t},$$

$$\tilde{g}(t) = \ln(g(t)), \quad \tilde{x}(t) = \ln(x(t)), \quad \tilde{\lambda}(x) = \lambda(e^x).$$

Из леммы 2 имеем, что $g(t) > 0$ и $x(t) > 0$ для всех $t \geqslant 0$. Следовательно, функции $\tilde{g}(t)$ и $\tilde{x}(t)$ определены для всех $t \geqslant 0$.

Домножим (4) на $e^{-\beta\, t}$. Получим линейное интегральное уравнение восстановления на функцию $h(t)$:

$$h(t) = e^{-\beta\, t} b^\circ(t) + \int_0^t \mu(a)\, R(a)\, e^{-\beta\, a} h(t-a)da, \quad t \geqslant 0. \tag{14}$$

Следовательно, [4, с. 268]

$$h(t) = e^{-\beta\, t} b^\circ(t) + \int_0^t e^{-\beta(t-s)} b^\circ(t-s)dH(s),$$

где функция восстановления $H(s)$ является решением уравнения

$$H(t) = F(t) + \int\limits_0^t \mu(a)\, R(a)\, e^{-\beta\, a} H(t-a) da,$$

$F(t) = \int\limits_0^t \mu(a)\, R(a)\, e^{-\beta\, a}\, da$, $F(+\infty) = 1$. Функция $F(t)$ непрерывна и не убывает. Значит, функция $H(t)$ также непрерывна и не убывает [3, с.246]. Кроме того, согласно теореме Блекуэлла [4, с. 270], существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} (H(t) - H(t-\tau)) = \tfrac{\tau}{m_1}, \tag{15}$$

где $m_1 = \int\limits_0^\tau s\, dF(s) > 0$.

Лемма 5. *Пусть $\beta \geqslant 0$ и $h^{(1)}(t)$, $h^{(2)}(t)$ — решения уравнения* (14)*, соответствующие функциям $\varphi^{(1)}(a)$ и $\varphi^{(1)}(a)$. Тогда существует константа $c_h > 0$ такая, что $|h^{(1)}(t) - h^{(2)}(t)| \leqslant c_h \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R$ для всех $t \geqslant 0$.*

Доказательство. Так как функция $H(t)$ непрерывна и предел (15) конечен, то существует константа $\bar{H} > 0$ такая, что $0 \leqslant H(t) - H((t-\tau)\vee 0) \leqslant \bar{H}$. Используя лемму 4, свойства функций $b^\circ(t)$ и неубывание функции $H(t)$, оценим

$$\begin{aligned}
&|h^{(1)}(t) - h^{(2)}(t)| \leqslant \\
&\quad e^{-\beta\, t} |b^{\circ(1)}(t) - b^{\circ(2)}(t)| + \int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)} |b^{\circ(1)}(t-s) - b^{\circ(2)}(t-s)| dH(s) \leqslant \\
&\quad e^{-\beta\, t} \bar{\mu} \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R + \bar{\mu} \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R \int\limits_{(t-\tau)\vee 0}^t e^{-\beta(t-s)} dH(s) \leqslant \\
&\quad \bar{\mu} \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R + \bar{\mu} \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R (H(t) - H((t-\tau)\vee 0)) \leqslant \\
&\qquad \bar{\mu}(1+\bar{H}) \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R.
\end{aligned}$$

Полагая $c_h = \bar{\mu}(1+\bar{H})$, завершаем доказательство. □

Домножая равенство (3) на $e^{-\beta\, t}$, получаем формулу для вычисления функции $g(t)$

$$g(t) = e^{-\beta\, t} x^\circ(t) + \int_0^t R(a)\, e^{-\beta\, a}\, h(t-a) da.$$

Из лемм 4 и 5 вытекает

Лемма 6. *Пусть $\beta \geqslant 0$ и $g^{(1)}(t)$, $g^{(2)}(t)$ вычислены по функциям $\varphi^{(1)}(a)$ и $\varphi^{(1)}(a)$ соответственно. Тогда существует константа $c_g > 0$ такая, что $|g^{(1)}(t) - g^{(2)}(t)| \leqslant c_g \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R$ для всех $t \geqslant 0$.*

Доказательство. Для произвольного $t \geqslant 0$ оценим

$$|g^{(1)}(t) - g^{(2)}(t)| \leqslant$$
$$e^{-\beta t}|x^{\circ(1)}(t) - x^{\circ(2)}(t)| + \int\limits_0^t R(a)\, e^{-\beta a}|h^{(1)}(t-s) - h^{(2)}(t-s)|ds \leqslant$$
$$e^{-\beta t}\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R + c_h\hat{\tau}\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R \leqslant (1 + c_h\hat{\tau})\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R,$$

где $\hat{\tau} = \int\limits_0^\tau R(s)e^{-\beta s}ds$. Лемма доказана. □

Лемма 7. *Пусть функция $\varphi^{(1)}(a)$ фиксирована. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R < \delta$ следует неравенство $|\tilde{g}^{(1)}(t) - \tilde{g}^{(2)}(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$.*

Доказательство. Из леммы 2 имеем, что $y^{(1)}(t) \sim y^{*(1)}e^{\beta t}$, $y^{*(1)} > 0$, при $t \to +\infty$ и $y^{(1)}(t) > 0$ для всех $t \geqslant 0$. Следовательно, $g^{(1)}(t) \to y^{*(1)}$ при $t \to +\infty$ и $g^{(1)}(t) > 0$ для всех $t \geqslant 0$. Из непрерывности $g^{(1)}(t)$ вытекает, что существуют константы $0 < a < b < \infty$ такие, что $g^{(1)}(t) \in [a; b]$ для всех $t \geqslant 0$.

Функция $y = \ln(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[\frac{a}{2}, b + \frac{a}{2}]$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что для всех точек $x', x'' \in [\frac{a}{2}, b + \frac{a}{2}]$ из неравенства $|x' - x''| < \delta_1$ следует неравенство $|\ln(x') - \ln(x'')| < \varepsilon$. Не ограничивая общности, считаем, что $\delta_1 \leqslant \frac{a}{2}$. Положим $\delta = \frac{\delta_1}{c_g}$, где c_g — константа из леммы 6. Тогда для всех $t \geqslant 0$ выполнено равенство

$$|g^{(1)}(t) - g^{(2)}(t)| < c_g\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R < c_g\delta < \delta_1 \leqslant \tfrac{a}{2}.$$

Так как $g^{(1)}(t) \in [a; b]$ для всех $t \geqslant 0$, то $g^{(2)}(t) \in [\frac{a}{2}, b + \frac{a}{2}]$ для всех $t \geqslant 0$. Значит, из $\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R < \delta$ следует $|\tilde{g}^{(1)}(t) - \tilde{g}^{(2)}(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$. Тем самым лемма доказана. □

Логарифмируя (1), приходим к уравнению на функцию $\tilde{x}(t)$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{g}(t) + \int_0^t (\beta - \tilde{\lambda}(\tilde{x}(s)))\, ds. \tag{16}$$

Лемма 8. *Пусть x^* — положительный корень уравнения $\lambda(x) = \beta$ и функция $\varphi^{(1)}(a)$ такова, что соответствующее ей решение $x^{(1)}(t)$ системы (1)–(4) сходится к x^* при $t \to +\infty$. Тогда для любой другой функции $\varphi^{(2)}(a)$ и решения $x^{(2)}(t)$ системы (1)–(4) справедливы утверждения:*

1) *для любых $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|x^{(1)} - x^{(2)}\|_T < \delta$ следует неравенство $\|\tilde{x}^{(1)} - \tilde{x}^{(2)}\|_T < \varepsilon$;*

2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $|\tilde{x}^{(1)}(t) - \tilde{x}^{(2)}(t)| < \delta$ для всех $t \geqslant 0$, то $|x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$.*

Доказательство. Так как функция $x(t)$ непрерывна, $x(t) \to x^*$ при $t \to +\infty$ и в силу леммы 2 $x(t) > 0$ для всех $t \geqslant 0$, то существуют константы $0 < a < b < \infty$ такие, что $x(t) \in [a; b]$ для всех $t \geqslant 0$. Первое утверждение леммы следует из равномерной непрерывности логарифма на отрезке $[\frac{a}{2}, b + \frac{a}{2}]$. Второе утверждение леммы следует из равномерной непрерывности экспоненты на отрезке $[\ln(a) - 1; \ln(b) + 1]$, так как $x(t) = \exp(\tilde{x}(t))$. Лемма доказана. □

Теорема 3 (Об устойчивости). *Пусть x^* — положительный корень уравнения $\lambda(x) = \beta$ такой, что функция $\lambda(x)$ не убывает в некоторой окрестности этого корня. Тогда всякое сходящееся к x^* решение системы* (1)–(4) *устойчиво. Если функция $\lambda(x)$ возрастает в некоторой окрестности корня x^*, то всякое сходящееся к x^* решение системы* (1)–(4) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Функция $\lambda(x)$ не убывает в окрестности точки x^*. Поэтому функция $\tilde{\lambda}(x)$ не убывает в окрестности точки $\tilde{x}^* = \ln(x^*)$. Для определенности будем считать, что $\tilde{\lambda}(x)$ не убывает на интервале $(\tilde{x}^* - c, \tilde{x}^* + c)$.

Пусть $x^{(1)}(t)$ — решение системы (1)–(4), сходящееся к x^*. Рассмотрим соответствующее ему решение $\tilde{x}^{(1)}(t) = \ln(x^{(1)}(t))$ системы (16), (2)–(4). Очевидно, что $\tilde{x}^{(1)}(t) \to \tilde{x}^*$ при $t \to +\infty$. Докажем устойчивость решения $\tilde{x}^{(1)}(t)$. Тогда устойчивость решения $x^{(1)}(t)$ будет следовать из второго утверждения леммы 8.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ такое, что из $\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R < \delta$ будет следовать $\|\tilde{x}^{(1)} - \tilde{x}^{(2)}\| < \varepsilon$. Не ограничивая общности, считаем, что $\varepsilon < \frac{c}{2}$.

Выберем $T \geqslant 0$ такое, что $|\tilde{x}^{(1)}(t) - \tilde{x}^*| < \frac{c}{2}$ для всех $t \geqslant T$. Применяя леммы 7, 4 и 8, выберем $\delta > 0$ так, что из $\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R < \delta$ будут следовать неравенства $|\tilde{g}^{(1)}(t) - \tilde{g}^{(2)}(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $t \geqslant 0$ и $\|\tilde{x}^{(1)} - \tilde{x}^{(2)}\|_T < \frac{\varepsilon}{3}$.

Покажем от противного, что $|\tilde{x}^{(1)}(t) - \tilde{x}^{(2)}(t)| < \varepsilon$ при $t > T$. Предположим для некоторого $t > T$ выполнено неравенство $\tilde{x}^{(2)}(t) \geqslant \tilde{x}^{(1)}(t) + \varepsilon$. Тогда существуют

$$t_1 = \inf\{t > T : \tilde{x}^{(2)}(t) \geqslant \tilde{x}^{(1)}(t) + \varepsilon\} \quad \text{и}$$
$$t_2 = \sup\{T \leqslant t < t_1 : \tilde{x}^{(2)}(t) \leqslant \tilde{x}^{(1)}(t) + \tfrac{\varepsilon}{3}\}.$$

Точки t_1 и t_2 выбраны так, что $\tilde{x}^{(2)}(t_1) = \tilde{x}^{(1)}(t_1) + \varepsilon$, $\tilde{x}^{(2)}(t_2) = \tilde{x}^{(1)}(t_2) + \frac{\varepsilon}{3}$ и

$$\tilde{x}^{(1)}(t) + \tfrac{\varepsilon}{3} < \tilde{x}^{(2)}(t) < \tilde{x}^{(1)}(t) + \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in (t_2; t_1).$$

В частности, $\tilde{x}^{(1)}(t) < \tilde{x}^{(2)}(t)$. Так как $|\tilde{x}^{(1)}(t) - \tilde{x}^*| < \frac{c}{2}$ при $t \geqslant T$, то

$$\tilde{x}^* - \tfrac{c}{2} < \tilde{x}^{(2)}(t) < \tilde{x}^* + \tfrac{c}{2} + \varepsilon < \tilde{x}^* + c \quad \text{при} \quad t \in (t_2; t_1).$$

Следовательно, используя неубывание функции $\tilde{\lambda}(x)$ на $(\tilde{x}^* - c, \tilde{x}^* + c)$,

$$\tilde{\lambda}(\tilde{x}^{(2)}(s)) - \tilde{\lambda}(\tilde{x}^{(1)}(s)) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad s \in (t_2; t_1). \tag{17}$$

Прибавляя и вычитая $\tilde{x}^{(1)}(t_2)$ в правой части равенства

$$\tilde{x}^{(1)}(t_1) = \tilde{g}^{(1)}(t_1) + \int_0^{t_1} (\beta - \tilde{\lambda}(\tilde{x}^{(1)}(s)))\, ds,$$

приходим к равенству

$$\tilde{x}^{(1)}(t_1) = \tilde{x}^{(1)}(t_2) - \tilde{g}^{(1)}(t_2) + \tilde{g}^{(1)}(t_1) + \int_{t_2}^{t_1} (\beta - \tilde{\lambda}(\tilde{x}^{(1)}(s)))\, ds. \tag{18}$$

Аналогично получаем равенство

$$\tilde{x}^{(2)}(t_1) = \tilde{x}^{(2)}(t_2) - \tilde{g}^{(2)}(t_2) + \tilde{g}^{(2)}(t_1) + \int_{t_2}^{t_1} (\beta - \tilde{\lambda}(\tilde{x}^{(2)}(s)))\, ds. \tag{19}$$

Вычитая (18) из (19) и используя (17), получаем противоречие

$$\varepsilon = \tilde{x}^{(2)}(t_1) - \tilde{x}^{(1)}(t_1) = \left[\tilde{x}^{(2)}(t_2) - \tilde{x}^{(1)}(t_2)\right] + \left[\tilde{g}^{(1)}(t_2) - \tilde{g}^{(2)}(t_2)\right] +$$

$$\left[\tilde{g}^{(2)}(t_1) - \tilde{g}^{(1)}(t_1)\right] - \int_{t_2}^{t_1} (\tilde{\lambda}(\tilde{x}^{(2)}(s)) - \tilde{\lambda}(\tilde{x}^{(1)}(s)))\, ds < \tfrac{\varepsilon}{3} + 2\tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Случай, когда $\tilde{x}^{(2)}(t) \leqslant \tilde{x}^{(1)}(t) - \varepsilon$ для некоторого $t > T$ рассматривается аналогично.

Если функция $\lambda(x)$ возрастает в некоторой окрестности корня x^*, то корень x^* будет изолированным. Значит, существует $0 < c < x^*$ такое, что интервал $(x^* - c; x^* + c)$ не будет содержать корней уравнения $\lambda(x) = \beta$, кроме корня x^*. Из приведенного выше доказательства имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_R < \delta$ следует

$$|x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)| < \varepsilon \wedge c \quad \text{при} \quad t \geqslant T. \tag{20}$$

Согласно теореме 2, существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} x^{(2)}(t) = x^{*(2)}$, где $x^{*(2)}$ либо равен 0, либо равен $+\infty$, либо является корнем уравнения $\lambda(x) = \beta$. Переходя к пределу в (20) получаем, что $|x^* - x^{*(2)}| < c$. Следовательно, $x^{*(2)} = x^*$ и $x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t) \to x^* - x^* = 0$ при $t \to +\infty$.

На этом доказательство теоремы завершено. □

Список литературы

[1] Sharpe F. R., Lotka A. J., *A problem in age-distribution* // Philosophical Magazine, ser. 6, **21** (1911), 435–438.

[2] Lotka A. J., *The stability of the normal age distribution* // Proceedings of the National Academy of Sciences (USA), **8** (1922), 339–345. PMC1085180

[3] Беллман Р., Кук К., *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, Москва, 1967.

[4] Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*, Наука, Москва, 1971.

[5] Полуэктов Р. А., Пых Ю. А., Швитов И. А., *Динамические модели экологических систем*, Гидрометеоиздат, Ленинград, 1980.

[6] Н. В. Перцев, *Исследование решений одной системы интегродифференциальных уравнений, возникающей в моделях динамики популяций*, Вестник Омского Университета, **1** (1996), 24–26.

[7] Н. В. Перцев, *Исследование решений интегральной модели Лотки–Вольтерра*, Сиб. журн. индустр. матем. **2**:4 (1999), 153–167. MR1785589

[8] А. Н. Пичугина, *Поведение решений нелинейной модели Шарпа–Лотки*, Сиб. журн. индустр. матем., **5**:3 (2002), 146–154. MR1964117

[9] Н. В. Перцев, А. Н. Пичугина, Б. Ю. Пичугин, *Поведение решений диссипативной интегральной модели Лотки–Вольтерра*, Сиб. журн. индустр. матем., **2**:14 (2003), 95–106. MR2041578

Анна Николаевна Пичугина
ИМИТ ОмГУ им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира 55,
644077, Омск, Россия
E-mail address: pichugina@omsu.ru

Борис Юрьевич Пичгин
Омский филиал института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова 13,
644043, Омск, Россия
E-mail address: boris.pichugin@gmail.com