S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 10, стр. 241–270 (2013)*
УДК 519.177+514.146.5+514.146.7
MSC 05C30, 05C38, 05C50, 51E15

# ПОДСЧЁТ $k$-УГОЛЬНИКОВ В КОНЕЧНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

А.Н. ВОРОПАЕВ

Abstract. In the study of combinatorial properties of finite projective planes, an open problem is to determine whether the number of $k$-gons in a plane depends on its structure. For the values of $k = 3, 4, 5, 6$, the number of $k$-gons is a function of plane's order $q$ only. By means of the explicit formulae for counting $2k$-cycles in bipartite graphs of girth at least 6 derived in this work for the case $k \leqslant 10$, we computed the numbers of $k$-gons in the form of polynomials in plane's order up to the value of $k = 10$. Some asymptotical properties of the numbers of $k$-gons when $q \to \infty$ were also discovered. Our conjectured value of $k$ such that the numbers of $k$-gons in non-isomorphic planes of the same order may differ is 14.

**Keywords:** counting cycles, adjacency matrix, finite projective planes, non-Desarguesian planes.

## 1. Введение

Пусть $P$ и $L$ — два непересекающихся конечных множества, элементы которых будем называть точками и прямыми, а $I$ — отношение на множествах $P$ и $L$, называемое инцидентностью. Если заданная инцидентность $I$ такова, что

(1) через всякие две различные точки проходит единственная прямая,
(2) произвольные две различные прямые пересекаются в единственной точке,
(3) существуют четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой,

Voropaev, A.N., Counting $k$-gons in finite projective planes.

*Поступила 17 сентября 2012 г., опубликована 25 марта 2013 г.*

то набор $(P; L; I)$ называется конечной проективной плоскостью [1]. Из перечисленных свойств следует, что конечная проективная плоскость может быть образована только $q^2 + q + 1$ точкой и $q^2 + q + 1$ прямой для некоторого натурального $q$, отличного от 1, причём через каждую точку проходит ровно $q + 1$ прямая, а каждая прямая содержит в точности $q+1$ точку. Число $q$ называется порядком плоскости.

Одно из семейств конечных проективных плоскостей, называемых классическими, или дезарговыми, конструируется на основе конечных полей. Роли точек и прямых выполняют одномерные и двумерные подпространства трёхмерного векторного пространства над полем $GF(q)$, а инцидентность определяется включением подпространств. Разумеется, существует много способов представления одной и той же плоскости, сохраняющих её структуру. Например, можно заменить точки натуральными числами, а прямые — множествами из номеров точек, через которые они проходят. Как правило, конечные проективные плоскости рассматриваются с точностью до изоморфизма. В данной работе мы также будем отождествлять изоморфные плоскости.

Вопрос существования недезарговых плоскостей простых порядков, а также каких-либо семейств конечных проективных плоскостей для значений порядка, не являющихся простыми числами или их степенями, ещё не получил полного ответа. Хорошо изучены лишь случаи $q \leqslant 10$: при $q = 2, 3, 4, 5, 7, 8$ единственной конечной проективной плоскостью является дезаргова плоскость [2], плоскостей порядка 6 или 10 не существует [3], а при $q = 9$ насчитывается ровно 4 неизоморфные плоскости [4]. Показано также, что не существует конечных проективных плоскостей порядка $q \equiv 1, 2 \pmod 4$, который не представим в виде суммы квадратов двух натуральных чисел (как, например, 6). Начиная же со значения $q = 11$, для простых порядков известны только классические плоскости, для порядков, равных степеням простых чисел, построены отдельные классы неизоморфных плоскостей [5], а для остальных составных порядков не найдено ни одного примера плоскости. Вместе с тем, не доказано и отсутствие других плоскостей в первых двух случаях и каких-нибудь плоскостей вообще во втором.

Естественно ожидать, что структурные отличия неизоморфных плоскостей могут отразиться на статистике фигур, составленных из точек и прямых с определённым взаимным расположением. Одним из примеров такого семейства фигур являются многоугольники. Многоугольником с $k$ вершинами, или $k$-угольником, называется последовательность $k$ различных точек $P_1$, $P_2$, $\ldots$, $P_k$, такая что все $k$ прямых $P_1P_2$, $P_2P_3$, $\ldots$, $P_{k-1}P_k$, $P_kP_1$ также различны. Выбор начальной вершины или направления обхода вершин не учитывается. Одна из интересных задач, возникших при изучении неизоморфных конечных проективных плоскостей, состоит в разрешении вопроса, зависит ли число $k$-угольников в плоскости от её структуры или же оно определяется только порядком $q$ [6].

Авторы [6] вычислили количество $k$-угольников при $k = 3, 4, 5, 6$ и произвольном значении $q$, подсчитав способы добавления очередной вершины многоугольника. В случаях $k = 3, 4$ данный подход применяется относительно просто, поскольку число вариантов выбора каждой новой точки не зависит от способов выбора предыдущих. При $k = 5$ количество вариантов выбора последней вершины принимает одно из двух значений, в зависимости от взаимного расположения первых трёх и четвёртой точек. Однако уже в случае $k = 6$ семейство наборов вершин разбивается на два десятка классов в зависимости от их взаимного расположения. Все они подробно рассмотрены в [6]. Очевидно, резкий рост объёма вычислений, вместе с усложнением возникающих структур, и послужил причиной ограничения $k \leqslant 6$.

При подсчёте многоугольников авторы [6] использовали только общие свойства конечных проективных плоскостей, перечисленные выше. Следовательно, при $k = 3, 4, 5, 6$ все плоскости заданного порядка $q$ содержат $k$-угольники в одном и том же количестве. Во всех четырёх случаях зависимость числа многоугольников от порядка плоскости представляет собой многочлен степени $2\,k$.

Результаты работы [6] не позволяют сделать вывод о наличии зависимости количества $k$-угольников от структуры плоскости в общем случае. Однако возможность появления такой зависимости при $k \geqslant 10$ отмечалась в [6].

Существует альтернативный подход к подсчёту многоугольников в конечных проективных плоскостях, основанный на графовой интерпретации этих плоскостей. Вершинами графа являются точки и прямые, а множество рёбер определяется отношением инцидентности точек и прямых. Построенный таким образом граф является двудольным, регулярным и имеет обхват 6. Многоугольникам плоскости с $k$ вершинами соответствуют циклы длины $2\,k$ указанного графа. Данное соответствие формально позволяет воспользоваться алгоритмами подсчёта циклов в графах для определения количества многоугольников в конечных проективных плоскостях. Однако многие известные методы подсчёта циклов непрактичны для проверки сформулированной выше гипотезы о десятиугольниках даже в случае самых небольших неизоморфных плоскостей, имеющих порядок 9.

Вычислительная сложность любого перечислительного алгоритма, в котором явно конструируется каждый цикл заданной длины, растёт, по крайней мере, как само число циклов (многоугольников). Ниже будет показано, что главный член асимптотики количества $k$-угольников в плоскости порядка $q$ имеет вид $q^{2\,k}/(2\,k)$. Согласно данной оценки, в случае $q = 9$ число десятиугольников в сотни тысяч раз превосходит число семиугольников, перебор которых уже занимает несколько суток. Все оценки временны́х затрат, встречающиеся в данной работе, формулируются для персонального компьютера, работающего при одном загруженном ядре с частотой 3 ГГц.

Кроме перечислительных методов известны и другие универсальные алгоритмы подсчёта циклов длины $k$, сложности которых оцениваются как $O(n^{k-1})$ или $O(n^k)$, где $n$ — порядок графа [7]. Однако применительно к задаче о числе $k$-угольников в плоскости порядка $q$ такие алгоритмы характеризуются ещё бо́льшими временны́ми затратами по сравнению с перечислительными методами. Действительно, с учётом того, что в графе конечной проективной плоскости насчитывается $2\,(q^2 + q + 1)$ вершин, а длины подсчитываемых циклов равны $2\,k$, указанные оценки принимают вид $O(q^{4\,k})$ и $O(q^{4\,k-2})$.

В одной из наших предыдущих работ [8] были представлены явные формулы для определения количества циклов длин 14 и 16 в двудольных графах с обхватом не менее 6. Вычислительная сложность каждой из этих формул составляет всего $O(n^4)$, или, применительно к случаю подсчёта многоугольников в конечных проективных плоскостях, $O(q^8)$. Практически в пределах нескольких часов по явным выражениям можно вычислить количество семиугольников и восьмиугольников в плоскостях порядка, по меньшей мере, 23. Накопленная в ходе экспериментов статистика указанных многоугольников приводится в приложении [8].

Явные формулы для подсчёта циклов позволяют выполнять не только численные расчёты, но и символьные вычисления. Например, рассматривая порядок плоскости $q$ в качестве параметра семейства графов конечных проективных плоскостей, можно попытаться вывести зависимость количества $k$-угольников от величины $q$. При таком подходе к подсчёту циклов главную проблему представляет резкий рост трудоёмкости вывода самих формул по мере увеличения длины цикла [7].

Целью данной работы стал анализ циклической структуры конечных проективных плоскостей с использованием явных формул для определения количества циклов фиксированной длины в неориентированных графах. В первую очередь, необходимо было вывести новые формулы, которые, в совокупности с уже имеющимися, позволили бы подсчитывать циклы длины вплоть до 20 в двудольных графах с обхватом 6. Выбор значения 20 обусловлен тем, что в качестве предполагаемого наименьшего значения $k$, при котором можно было бы ожидать различия неизоморфных плоскостей по количеству $k$-угольников, авторы [6] назвали число 10. Другая задача состояла в аналитическом выводе зависимости числа $k$-угольников от порядка плоскости $q$ по явным формулам средствами системы компьютерной алгебры.

Раздел 3 содержит описание общей структуры явных выражений для подсчёта циклов фиксированной длины. В частности, представлен способ упрощения сумм, составляющих формулы, с помощью которого удалось существенно понизить вычислительную сложность выражений для количества циклов длин 18 и 20 в двудольных графах с обхватом 6. В следующем разделе обсуждаются результаты численных экспериментов с применением программы для подсчёта циклов по указанным формулам, созданной в рамках данной работы. Расчёты для графов конечных проективных плоскостей порядков 9 и 16 показали, что в неизоморфных плоскостях каждого из этих порядков насчитывается одно и то же число $k$-угольников при $k = 7, 8, 9, 10$.

Разделы 5–9 посвящены аналитическому выводу многочленов, выражающих количество $k$-угольников в конечной проективной плоскости порядка $q$, при $k \leqslant 10$, посредством символьных преобразований явных формул для подсчёта циклов длины не более 20. Возможность такого вывода обусловлена тем, что удаётся аналитически выразить зависимость числа маршрутов с заданными длиной, начальной и конечной вершинами в графах плоскостей от порядка плоскости.

В разделе 10 обсуждаются гипотезы об общем виде зависимости количества $k$-угольников в конечной проективной плоскости от её порядка.

## 2. Основные определения

В данной работе конечные проективные плоскости и многоугольники в них изначально рассматриваются в графовой интерпретации, указанной во введении. Геометрическая терминология на уровне взаимного расположения точек и прямых используется для удобства и наглядности изложения только в разделе 7.

Термины, связанные с теорией графов, следует толковать согласно [9].

Маршрутом длины $k$ называется упорядоченный набор $(v_1; v_2; \ldots; v_{k+1})$ вершин графа, в котором каждые две соседние вершины $v_i$ и $v_{i+1}$ смежны. Маршрут длины не менее 3, для которого все вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k$ различны, а $v_{k+1} = v_1$, называется циклом. При подсчёте циклы, отличающиеся только выбором начальной вершины или направления обхода вершин, будут рассматриваться как один.

В работе используются следующие обозначения:

| | |
|---|---|
| $c_k$ | — количество циклов длины $k$; |
| $q$ | — порядок конечной проективной плоскости; |
| $n,\ A$ | — порядок (количество вершин) и матрица смежности графа, в котором подсчитываются циклы; |
| $a_{ij},\ a_{ij}^{(k)}$ | — элементы матриц $A$ и $A^k$; |
| $d_i$ | — степень вершины $i$ (равна $a_{ii}^{(2)}$); |
| $a\,..\,b$ | — диапазон целых чисел от $a$ до $b$; |
| $(m)_n$ | — число размещений из $m$ по $n$, или убывающий факториал: $(m)_n = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$; |
| $S \times T$ | — прямое произведение множеств $S$ и $T$; |
| $S^n$ | — прямая степень множества $S$. |

Матрицы, в обозначениях элементов которых использованы строчные буквы, сами именуются соответствующими заглавными буквами.

Для графов конечных проективных плоскостей всегда справедливы соотношения

$$n = 2\,(q^2 + q + 1) \quad \text{и} \quad d_i = q + 1.$$

В разделе 5 рассматриваются маршруты с *фиксированными* начальной и конечной вершинами $u$ и $v$ в графе конечной проективной плоскости. Количество таких маршрутов чётной длины $k$ отлично от нуля, только если обе вершины $u$ и $v$ принадлежат одной доле графа. При $u = v$ число маршрутов обозначается символом $w_0(k)$, а для случая $u \neq v$ используется обозначение $w_1(k)$. Когда длина маршрута $k$ нечётна, интерес представляют, наоборот, только пары тех вершин $u$ и $v$, которые принадлежат разным долям графа. Величина $\widetilde{w}_0(k)$ соответствует случаю смежных $u$ и $v$, а $\widetilde{w}_1(k)$ — несмежных $u$ и $v$.

## 3. Структура явных формул

Явные формулы для подсчёта циклов длины $k$ в графе представляют собой комбинации сумм, составленных из произведений элементов матрицы смежности графа и некоторых других матриц (например, степеней матрицы смежности). Вывод и структура таких выражений подробно обсуждаются в [7, 10, 8, 11]. Например, при $k = 6, 8$ количество циклов длины $k$ в графе с обхватом не менее 6 можно определить по формулам

$$c_6 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n} \Big( a_{ii}^{(6)} - 2\,d_i^3 + 6\,d_i^2 - 2\,d_i \Big) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(3)}, \tag{1a}$$

$$c_8 = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{n}\Big(a_{ii}^{(8)} - 8\,a_{ii}^{(6)}d_i + 8\,a_{ii}^{(6)} + 6\,d_i^4 - 28\,d_i^3 + 44\,d_i^2 - 11\,d_i\Big) + \tag{1b}$$

$$+\,\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(a_{ij}^{(4)} + 4\,a_{ij}^{(2)}d_i^2 - 8\,a_{ij}^{(3)}\Big). \tag{1c}$$

Каждое слагаемое в явном выражении соответствует множеству замкнутых маршрутов длины $k$ определённого вида. Деление на число $2\,k$ выполняется с тем, чтобы учитывать только по одному представителю из совокупности циклов, отличающихся выбором начальной вершины или направления обхода вершин.

С ростом значения длины цикла количество слагаемых (сумм) в выражении для величины $c_k$ резко увеличивается (таблица 1). На протяжении оставшейся части работы оба термина «сумма» и «слагаемое» будут связываться с суммированием какого-либо одного произведения элементов матрицы смежности и её степеней. Так, в формуле (1a) насчитывается 5 сумм, сгруппированных по кратностям, а формула для $c_8$ содержит 10 слагаемых. Наибольшая кратность

Таблица 1. Количество и наибольшие кратности сумм в явных формулах

| $k$ | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество сумм | 5 | 10 | 21 | 51 | 156 | 528 | 2 031 | 8 981 |
| Наибольшая кратность суммы | | | | | 4 | 4 | 6 | 8 |

суммы также повышается, но вплоть до значения $k = 12$ наиболее трудоёмкой операцией в формулах остаётся умножение матриц, что и отражено пустыми ячейками таблицы 1. Детальное обсуждение кратностей сумм в формулах для $c_k$ приводится ниже.

Выражение для подсчёта циклов чётной длины $k$ содержит все или почти все суммы, входящие в формулы для количества циклов чётной длины, меньшей $k$. Например, все пять сумм, составляющие выражение (1a), участвуют и в формуле (1b), (1c), только с другими коэффициентами. Следовательно, при подсчёте коротких циклов сразу нескольких длин целесообразно сначала отдельно вычислить значения всех требуемых сумм, по одному разу для каждой суммы, и уже затем подставлять их в выражения для количества циклов. В таблице 1 для каждого значения $k$ указано общее число различных сумм, входящих в формулы для подсчёта циклов длин 6, 8, …, $k$.

Количество сумм и наибольшая кратность суммы играют разные роли при выводе явных формул и в расчётах по ним. Если наибольшая кратность суммы определяет порядок вычислительной сложности выражения, то от числа сумм, главным образом, зависит трудоёмкость вывода самого выражения. Наиболее требовательна к вычислительным ресурсам процедура расчёта коэффициентов при суммах. Временны́е затраты оцениваются кубической зависимостью от числа сумм, а количество требуемой памяти — квадратичной. Практически, применявшаяся в [7, 10, 8] программа вывода явного выражения для $c_k$ при $k = 20$ выполнялась бы в системе компьютерной алгебры, предположительно, несколько недель. По этой причине в рамках данной работы была создана бинарная реализация алгоритма вывода, для которой затраты вычислительных ресурсов в случае $c_{20}$ составили всего несколько часов процессорного времени и примерно 1 ГБ памяти.

Возможно, за счёт оптимизации алгоритмов вывода явных формул достижимы приемлемые вычислительные затраты и для нескольких значений $k > 20$. Однако небольшой диапазон таких значений не представляет интереса с точки зрения вопроса о наличии зависимости количества многоугольников в конечной проективной плоскости от её структуры. В разделе 10 данное соображение сформулировано более подробно.

Рост числа сумм усложняет не только вывод формул, но и сами вычисления по этим формулам. Однако ещё более существенным фактором, влияющим на вычислительную сложность явных выражений, являются кратности входящих в них сумм (таблица 2).

Таблица 2. Количество сумм кратности не менее 4 в формулах для подсчёта циклов длины не более $k$ в двудольных графах с обхватом не менее 6

| $k$ | 14 | 16 | | 18 | | | 20 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Кратность | 4 | 5 | 4 | 6 | 5 | 4 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |
| Вариант 1 | 4 | 3 | 65 | 10 | 87 | 559 | 1 | 12 | 206 | 1241 | 3343 |
| Вариант 2 | 1 | | 10 | 5 | 6 | 91 | 1 | 1 | 66 | 124 | 737 |
| Вариант 3 | 1 | | 10 | | 5 | 97 | | | | 10 | 919 |

Варианты, указанные в таблице 2, соответствуют различным наборам матричных операций, используемым при упрощении сумм. В первом варианте в качестве вспомогательных матриц задействуются только степени матрицы смежности графа, как в (1). Во втором варианте формул помимо степеней матрицы смежности используются матрицы, получаемые из степеней с помощью композиций обычного умножения, поэлементного умножения и ряда других операций [7, 10]. Использование расширенного набора вспомогательных матриц может привести к уменьшению наибольшей кратности суммы или количества сумм высокой кратности. Так, в случае $k = 16$ (таблица 2) удаётся упростить все три пятикратные суммы. Например, для одной из этих сумм получаем:

$$\sum_{i_1=1}^{n} d_{i_1} \sum_{i_2=1}^{n} a^{(2)}_{i_1 i_2} d_{i_2} \sum_{i_3=1}^{n} a_{i_2 i_3} d_{i_3} \sum_{i_4=1}^{n} a_{i_3 i_4} d_{i_4} \sum_{i_5=1}^{n} a_{i_4 i_5} d_{i_5} a_{i_5 i_1} = \\ = \sum_{i_1=1}^{n} d_{i_1} \sum_{i_2=1}^{n} a^{(2)}_{i_1 i_2} d_{i_2} \sum_{i_3=1}^{n} b_{i_2 i_3} \sum_{i_4=1}^{n} b_{i_3 i_4} \sum_{i_5=1}^{n} b_{i_4 i_5} a_{i_5 i_1} = \\ = \sum_{i_1=1}^{n} d_{i_1} \sum_{i_2=1}^{n} a^{(2)}_{i_1 i_2} d_{i_2} \sum_{i_5=1}^{n} b^{(3)}_{i_2 i_5} a_{i_5 i_1},$$

где $b_{ij} = a_{ij} d_j$. За счёт введения вспомогательных матриц суммирование по некоторому индексу можно исключить в том случае, если он встречается в парах не более чем с двумя другими индексами [7, 10]. Данные в таблице 1 соответствуют именно второму варианту представления явных формул для $c_k$.

В третьем варианте используется дальнейшая оптимизация выражений, основанная на идее, предложенной в [12]. Приём состоит в замене нескольких множителей вида $a_{ij}$ с общим индексом $i$ сужением областей суммирования по другим индексам, которые встречаются в этих множителях. А именно, наличие множителя $a_{ij}$, когда $j$ пробегает диапазон $1\,..\,n$, эквивалентно условию $j \in I(i)$, где $I(i)$ — множество номеров всех вершин, смежных с $i$-й вершиной. В результате могут вновь оказаться применимы приёмы уменьшения кратностей сумм, указанные выше. Например, одна из шестикратных сумм в случае $k = 18$ (таблица 2) приводится к «четырёхкратной» следующим образом:

$$\begin{aligned}(2)\quad &\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1i_2} \sum_{i_3=1}^{n} a_{i_1i_3} \sum_{i_4=1}^{n} a^{(2)}_{i_2i_4} a^{(2)}_{i_3i_4} \sum_{i_5=1}^{n} a^{(2)}_{i_2i_5} a^{(2)}_{i_3i_5} \sum_{i_6=1}^{n} a^{(2)}_{i_1i_6} a_{i_4i_6} a_{i_5i_6} = \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2\in I(i_1)} \sum_{i_3\in I(i_1)} \sum_{i_4=1}^{n}\sum_{i_5=1}^{n} \left(a^{(2)}_{i_4i_2} a^{(2)}_{i_2i_5}\right)\left(a^{(2)}_{i_4i_3} a^{(2)}_{i_3i_5}\right) \sum_{i_6=1}^{n} a^{(2)}_{i_1i_6} a_{i_4i_6} a_{i_5i_6} = \\ &= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_4=1}^{n}\sum_{i_5=1}^{n} p(i_1)_{i_4i_5} \sum_{i_6=1}^{n} a^{(2)}_{i_1i_6} a_{i_4i_6} a_{i_5i_6} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_6=1}^{n} a^{(2)}_{i_1i_6} q(i_1)_{i_6i_6},\end{aligned}$$

$$\text{где}\quad p(l)_{ij} = \left(\sum_{k\in I(l)} a^{(2)}_{ik} a^{(2)}_{kj}\right)^2, \quad \text{а}\quad Q(l) = A\cdot P(l)\cdot A.$$

Перестановка индексов, выполненная вместе с группировкой множителей во второй и третьей строках (2), возможна благодаря неориентированности рассматриваемых графов.

Несмотря на то, что выражение, полученное в результате преобразований (2), записано в виде двойной суммы, с точки зрения вычислительных затрат данной сумме фактически следует приписать бо́льшую кратность, равную 4. Прежде всего, необходимо вычислить матрицу $A^2$, элементы которой участвуют при расчёте величин $p(l)_{ij}$, а также непосредственно присутствуют в членах суммы. Сложность вычисления $A^2$ уже превосходит $O(n^2)$. Однако расчёты, связанные с матрицей $A^2$, можно выполнить единственный раз, сохранив полученный результат для дальнейших вычислений. Наличие же матрицы $Q(i_1)$ вносит более существенный вклад в общую сложность по сравнению с $A^2$, поскольку расчёт элементов $Q(i_1)$ необходимо осуществлять заново для каждого значения индекса $i_1$. Наиболее затратной частью всего процесса по вычислению элементов $q(i_1)_{i_6i_6}$ является определение матрицы $P(i_1)$, которое по сложности можно грубо оценить в $O(n^3)$. Подобно тому, как матрица $A^2$ рассчитывается единственный раз для всей суммы, вычисление элементов $Q(i_1)$ также следует «вынести» за знак суммы по $i_6$, так как величина $Q(i_1)$ определяется лишь значением $i_1$ и не зависит от $i_6$. В итоге, для каждого значения $i_1 \in 1\,..\,n$ выполняется расчёт диагональных элементов матрицы $Q(i_1)$ со сложностью $O(n^3)$ и суммирование по $i_6$ за время $O(n)$. Общая вычислительная сложность выражения, полученного в (2), оценивается, таким образом, величиной $O(n^4)$. Именно в этом смысле итоговая сумма (2) названа четырёхкратной.

После выполнения всех перечисленных выше преобразований в случае $k = 20$ вычислительно наиболее трудоёмкими оказываются сумма

$$(3)\qquad \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} a^{(2)}_{i_1i_2} \sum_{i_3=1}^{n} a^{(2)}_{i_1i_3} a^{(2)}_{i_2i_3} \sum_{i_4=1}^{n} a^{(2)}_{i_1i_4} a^{(2)}_{i_2i_4} a^{(2)}_{i_3i_4} \sum_{i_4=1}^{n} a^{(2)}_{i_1i_5} a^{(2)}_{i_2i_5} a^{(2)}_{i_3i_5} a^{(2)}_{i_4i_5}$$

и ещё одна пятикратная сумма, очень похожая на неё, в которой отсутствуют множители $a^{(2)}_{i_2 i_4}$ и $a^{(2)}_{i_1 i_5}$. Остальные восемь сумм, соответствующие кратности 5 (таблица 2), представляют собой двойные суммы, при вычислении членов которых выполняется умножение матриц. В отличие от двойной суммы, полученной в (2), для этих восьми сумм результаты промежуточных расчётов зависят от обоих индексов суммирования, так что вычисление каждого значения члена двойной суммы обходится в $O(n^3)$.

С точки зрения численных расчётов первый вариант формул существенно уступает в эффективности оптимизированной версии (вариант 3), однако благодаря простой структуре более удобен для выполнения символьных преобразований. Действительно, при наличии явного выражения для $c_k$, подсчёт циклов длины $k$ в графах заданного параметризованного семейства сводится к двум следующим задачам.

(1) Аналитически выразить количество маршрутов длины $l \leqslant k$, соединяющих $i$-ю и $j$-ю вершины, через параметры семейства для всевозможных пар $(i; j)$. Указанные величины в точности равны значениям элементов $a^{(l)}_{ij}$, из которых, и только из них, составлены общие члены всех сумм, входящих в явную формулу. В случае достаточно регулярной структуры графов существенно сужается разнообразие классов пар $(i; j)$, для которых величины $a^{(l)}_{ij}$ различны.

(2) Для каждой суммы в соответствии с обнаруженными классами пар $(i; j)$ выполнить определённое разбиение области суммирования. Подобласти должны быть такими, чтобы в рамках каждой из них всякая пара $(i; j)$, присутствующая в записи общего члена суммы, пробегала значения из какого-либо одного класса. В результате общий член будет принимать одно и то же значение на всей подобласти суммирования. После вычисления мощности каждой подобласти значение исходной суммы можно будет получить, сложив произведения мощностей всех подобластей и соответствующих им значений общего члена.

Именно первый вариант явных выражений использовался в данной работе для аналитического вывода многочленов, описывающих количество $k$-угольников в конечных проективных плоскостях.

## 4. Результаты численных экспериментов

Численные расчёты выполнялись по специально разработанной программе на языке C++. Для заданного графа в программе вычисляются все суммы, входящие в явные формулы для подсчёта циклов в двудольных графах с обхватом не менее 6, длины которых изменяются от 6 до 20. Найденные значения сумм подставляются в выражения для величин $c_6$, $c_8$, …, $c_{20}$, значения которых и выводятся в качестве результата. В программе реализован третий способ представления сумм, описанный в предыдущем разделе. Вычислительная сложность составляет $O(n^5)$, где $n$ — порядок графа. Исходный код размещён на сайте [13].

Предусмотрены два варианта программы — с использованием встроенного типа long long int и класса Int128, созданного в рамках [14]. Первая версия позволяет без переполнения подсчитать многоугольники в плоскостях порядка не более 8, что соответствует графу со 146 вершинами. Время вычислений для графа такого порядка составляет несколько минут. Вариант программы со 128-битовым типом выполняется в 1,5–7 раз медленнее, но запас в 128 бит обеспечивает корректные результаты, по крайней мере, до $q = 81$ (13286 вершин). Данная граница по $q$, в силу сложности программы, оцениваемой величиной $O(n^5)$, или $O(q^{10})$, уже превышает практически достижимое значение $q$. Требуемый тип целых чисел, long long int или Int128, указывается при компиляции программы. Использование универсальных библиотек «длинной» арифметики в данном случае нецелесообразно, поскольку на практике результаты всех расчётов заведомо умещаются в небольшой фиксированный набор разрядов.

Основная цель выполнения численных расчётов состояла в сравнении неизоморфных конечных проективных плоскостей по количеству многоугольников. Наименьшее значение порядка $q$, при котором появляются неизоморфные плоскости, равно 9. Существуют четыре различные плоскости порядка 9 [4]. Следующий порядок, для которого известны семейства неизоморфных плоскостей, равен уже 16. К настоящему времени построены 22 разные плоскости, предположительно, исчерпывающие множество всех плоскостей 16-го порядка [15]. Коллекция данных по конечным проективным плоскостям представлена на сайте [5].

В изоморфизмах плоскостей учитываются типы сопоставляемых элементов: точки соответствуют точкам, а прямые отображаются на прямые. За счёт данного ограничения двойственные плоскости, которые получаются друг из друга переименованием точек в прямые и прямых в точки, могут оказаться неизоморфны. Например, различные плоскости порядка 9 включают одну пару двойственных, а среди плоскостей порядка 16 насчитывается 9 таких пар. Графы же двойственных плоскостей, очевидно, изоморфны. В представленных ниже расчётах участвовали только неизоморфные графы конечных проективных плоскостей: 3 — для порядка 9, и 13 — для порядка 16.

С помощью созданной программы удалось выяснить, что все четыре плоскости порядка 9 содержат 7, 8, 9 и 10-угольники в одном и том же количестве, а именно:

$$\begin{aligned} c_{14} &= 1\,403\,569\,477\,440, \quad & c_{16} &= 89\,866\,540\,305\,360, \\ c_{18} &= 5\,734\,113\,022\,048\,320, \quad & c_{20} &= 362\,728\,471\,330\,173\,312. \end{aligned} \tag{4}$$

Для проведения всех расчётов потребовалось примерно 2 часа.

При $q = 16$ объём вычислений существенно больше по сравнению со случаем $q = 9$. Временны́е затраты составляют приблизительно 100 часов на одну плоскость. Для ускорения подсчёта многоугольников по явным формулам была предпринята оптимизация программного кода. Во-первых, класс Int128 использовался только в случаях, когда значения сумм не умещались в 64 бита. С учётом вспомогательных матриц наиболее трудоёмкой операцией при вычислении сумм с указанным свойством оказалось умножение матриц. Во-вторых, был вручную упрощён код, относящийся к вычислению двух пятикратных сумм, одна из которых указана в (3). Матрица $A^2$, используемая при расчёте указанных сумм, хранится в виде пары ненулевых блоков, соответствующих разным долям графа. В исходном варианте кода всякий раз при обращении к какому-либо элементу $A^2$ предварительно определяется блок, содержащий этот элемент. В оптимизированной же версии за счёт разделения суммирования на две части — для одной доли и для другой — обращение к нужному блоку происходит напрямую. Обе модификации программы обеспечили почти по четырёхкратному ускорению, в результате чего временны́е затраты сократились примерно до 7 часов на одну плоскость. Расчёты показали, что для всех плоскостей порядка 16 количество 7, 8, 9 и 10-угольников одно и то же:

$$\begin{aligned} c_{14} &= 4\,893\,705\,303\,552\,000, \quad c_{16} = 1\,059\,325\,386\,621\,465\,600, \\ c_{18} &= 231\,387\,871\,393\,192\,550\,400, \quad c_{20} = 50\,824\,301\,605\,046\,925\,096\,960. \end{aligned} \tag{5}$$

Ранее в [10, 8] уже было показано, что в случае достаточно плотных графов явные формулы для подсчёта циклов фиксированной длины существенно эффективнее перечислительных методов. На примере графов конечных проективных плоскостей, которые являются самыми плотными среди двудольных графов с долями той же мощности и обхватом 6, указанное превосходство демонстрируется наиболее наглядно. Так, определение даже минимального значения из приведённых в (4) и (5) наборов данных ($c_{14}$ при $q = 9$) путём перебора занимает несколько суток. В предположении, что затраты на построение каждого отдельно взятого цикла ограничены константой, подсчёт всех указанных в (4) и (5) циклов посредством перечисления, очевидно, практически неприемлем.

Проверка конечных проективных плоскостей порядков 9 и 16 не выявляет наличия зависимости количества десятиугольников от структуры плоскости, тем самым не подтверждая ожидания авторов работы [6]. Выполнение аналогичных расчётов для следующего известного класса неизоморфных плоскостей, порядка 25, даже с использованием явных формул, потребовало бы ощутимо бо́льших вычислительных затрат по сравнению со случаями $q = 9, 16$. Время подсчёта десятиугольников в одной плоскости возрастает, предположительно, в 75 раз. К тому же, среди графов известных плоскостей порядка 25 насчитывается 99 неизоморфных [5].

Альтернативный подход к изучению конечных проективных плоскостей на предмет их тождественности по количеству $k$-угольников, снимающий проблему роста вычислительной сложности при увеличении порядка плоскости, состоит в том, чтобы заменить конкретное значение порядка символьным параметром $q$, а численные расчёты — аналитическими вычислениями. Вывести выражение для числа $k$-угольников через величину $q$ из первых принципов удаётся только для рассмотренных в [6] случаев $k = 3, 4, 5, 6$. В то же время, опираясь на свойство регулярности графов конечных проективных плоскостей, зависимость числа $k$-угольников от $q$ можно получить по представленным выше явным формулам для величин $c_{2\,k}$ при $k \leqslant 10$. На основе этих формул вычисление количества $k$-угольников сводится к подсчёту конфигураций меньшего размера, упрощающихся до такой степени, что с ними уже нетрудно справиться вручную. Кажущаяся громоздкость явных формул не является препятствием для расчётов, поскольку все преобразования входящих в них сумм можно осуществить систематически и реализовать средствами одной из систем компьютерной алгебры. Техника таких преобразований описывается в следующих разделах.

## 5. Подсчёт маршрутов в графах плоскостей

Возможность символьных вычислений по явным формулам вида (1) обеспечивается, в первую очередь, наличием выражений, описывающих зависимость значений элементов $a_{ij}^{(k)}$ от параметра семейства графов. В рассматриваемом случае графов конечных проективных плоскостей таким параметром является порядок плоскости $q$.

Известно, что величина $a_{ij}^{(k)}$ представляет собой количество маршрутов длины $k$, соединяющих $i$-ю и $j$-ю вершины. Для графа плоскости всякий маршрут является упорядоченным набором, в котором чередуются точки и прямые плоскости. Каждая прямая в составе такого маршрута проходит через смежные с ней точки, а каждая точка является пересечением соседних прямых. В частности, циклы длины $2\,k$ в графе конечной проективной плоскости соответствуют помеченным $k$-угольникам самой плоскости.

Число всех маршрутов фиксированной длины в графе плоскости, соединяющих заданные вершины, существенно легче выразить аналитически через порядок плоскости, нежели количество маршрутов, являющихся именно циклами определённой длины. Заранее подчеркнём, что при выводе выражений для элементов $a_{ij}^{(k)}$ использовались только общие свойства конечных проективных плоскостей, сформулированные во введении. Следовательно, полученные выражения справедливы для произвольной плоскости.

**Утверждение 1.** *Пусть $A$ — матрица смежности графа конечной проективной плоскости порядка $q$. Тогда при чётном неотрицательном значении $k$*

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_0(k), & \textit{если } i = j, \\ w_1(k), & \textit{если } i \textit{ и } j \textit{ принадлежат одной доле и различны}, \\ 0, & \textit{если } i \textit{ и } j \textit{ принадлежат разным долям}, \end{cases}$$
$$\textit{где}\quad w_1(k) = \frac{(q+1)^k - q^{k/2}}{q^2+q+1}, \quad \textit{а}\quad w_0(k) = w_1(k) + q^{k/2}. \tag{6}$$

*Доказательство.* Нулевое значение $a_{ij}^{(k)}$ в третьей строке (6) следует из двудольности графа плоскости. Рассмотрим случай, когда вершины $i$ и $j$ принадлежат одной доле графа.

Подсчёт маршрутов из $i$ в $j$ можно осуществить индуктивно по значению длины. Если $k = 0$, то степень $A^k$ равна единичной матрице и значение $a_{ij}^{(k)}$ равно 1 или 0, в зависимости от того, совпадают вершины $i$ и $j$ или нет. Единственный маршрут нулевой длины формально представляет собой набор из одной вершины $(i)$ и автоматически замкнут. Элемент $a_{ij}^{(2)}$ равен 1, если $i \neq j$, так как согласно свойств плоскости две точки соединяются единственной прямой, а две прямые пересекаются в единственной точке, и $q+1$, если $i = j$, поскольку через точку проходит $q+1$ прямая, а прямая содержит $q+1$ точку.

При чётном значении $k \geqslant 4$ величину $a_{ij}^{(k)}$ можно выразить через элементы матриц $A^{k-2}$ и $A^2$. Если $i = j$, то

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ii}^{(k)} = \sum_{l\in V_i} a_{il}^{(k-2)} a_{li}^{(2)} = (q+1)\cdot a_{ii}^{(k-2)} + \sum_{l\in V_i\setminus\{i\}} a_{il}^{(k-2)}, \tag{7}$$

где $V_i$ — доля графа плоскости, содержащая вершину $i$. В случае же $i \neq j$

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{l\in V_i} a_{il}^{(k-2)} a_{lj}^{(2)} = a_{ii}^{(k-2)} + (q+1)\cdot a_{ij}^{(k-2)} + \sum_{l\in V_i\setminus\{i;j\}} a_{il}^{(k-2)}. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что в силу свойств $a_{ij}^{(2)}$ и рекуррентных соотношений (7) и (8) значение элемента $a_{ij}^{(k)}$ для всякого чётного $k$ по индукции определяется только взаимным расположением вершин $i$ и $j$: совпадают они или нет.

Перепишем и упростим систему уравнений (7) и (8), обозначив $a_{ii}^{(k)}$ символом $w_0(k)$, а $a_{ij}^{(k)}$ при $i \neq j$ — символом $w_1(k)$, и учитывая, что $|V_i| = q^2 + q + 1$:

$$\begin{cases} w_0(k) = (q+1)(w_0(k-2) + q\,w_1(k-2)), \\ w_1(k) = w_0(k-2) + q\,(q+2)\,w_1(k-2). \end{cases} \tag{9}$$

Посредством замены $w_0(2\,k) = w_0'(k)$ и $w_1(2\,k) = w_1'(k)$ порядки рекуррентных соотношений в системе (9) понижаются до 1. Решая данную систему относительно $w_0'$ и $w_1'$ с начальными условиями $w_0'(0) = 1$ и $w_1'(0) = 0$ или $w_0'(1) = q + 1$ и $w_1'(1) = 1$ и возвращаясь к исходным обозначениям $w_0$ и $w_1$, получаем явные выражения, записанные в (6). $\square$

В следующем утверждении значения элементов $a_{ij}^{(k)}$ при нечётном $k$ выражаются через величины $w_0$ и $w_1$ с чётными аргументами, которые следует понимать в смысле (6).

**Утверждение 2.** *Пусть $A$ — матрица смежности графа конечной проективной плоскости порядка $q$. Тогда при нечётном положительном значении $k$*

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \widetilde{w}_0(k), & \textit{если } i \textit{ и } j \textit{ смежны,} \\ \widetilde{w}_1(k), & \textit{если } i \textit{ и } j \textit{ принадлежат разным долям и несмежны,} \\ 0, & \textit{если } i \textit{ и } j \textit{ принадлежат одной доле,} \end{cases} \tag{10}$$

$$\textit{где}\quad \widetilde{w}_0(k) = w_0(k-1) + q\,w_1(k-1), \quad \textit{а} \quad \widetilde{w}_1(k) = (q+1)\,w_1(k-1).$$

*Доказательство.* Когда вершины $i$ и $j$ находятся в одной доле графа плоскости, $a_{ij}^{(k)} = 0$ в силу двудольности этого графа. Если же $i$ и $j$ принадлежат разным долям, то величина $a_{ij}^{(k)}$ принимает ненулевое значение:

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{l \in V_i} a_{il}^{(k-1)} a_{lj} = \sum_{l \in V_i \setminus \{i\},\ a_{lj}=1} a_{il}^{(k-1)} + \begin{cases} a_{ii}^{(k-1)}, & \text{если } i \text{ и } j \text{ смежны,} \\ 0, & \text{если } i \text{ и } j \text{ несмежны,} \end{cases} \tag{11}$$

где $V_i$ — доля графа плоскости, содержащая вершину $i$.

Согласно (6) величины $a_{ii}^{(k-1)}$ и $a_{il}^{(k-1)}$ при $l \neq i$, участвующие в (11), не зависят от значений $i$ и $l$ и равны $w_0(k-1)$ и $w_1(k-1)$ соответственно. В случае несмежных $i$ и $j$ индекс $l$ пробегает множество всех вершин, смежных с $j$, которых насчитывается $q+1$. Если же $i$ и $j$ смежны, то количество значений $l$ на 1 меньше и равно $q$. Переписав равенство (11) в обозначениях $w_0(k-1)$ и $w_1(k-1)$, получим соотношения (10). $\square$

Пары обозначений $w_0(k), w_1(k)$ и $\widetilde{w}_0(k), \widetilde{w}_1(k)$, введённые в формулировках утверждений 1 и 2, строго соответствуют случаям чётных и нечётных значений аргумента $k$. Используя данное разграничение, можно всегда установить необходимость наличия или отсутствия символа «$\widetilde{\ }$», который в дальнейшем будем опускать.

## 6. Разбиение областей суммирования

Указанная в (6) формула для величины $w_0(k)$ при чётном $k$ позволяет сразу же вычислить суммы с одним индексом наподобие тех, которые входят в (1a) и (1b). Общие члены таких сумм составлены из диагональных элементов степеней матрицы смежности, поэтому расчёты сводятся к подстановке выражений для $w_0(k)$ вместо указанных элементов и замене знака суммирования на множитель $n = 2\,(q^2+q+1)$. Однако уже в случае двойных сумм нельзя обойтись только подстановкой выражений (6) и (10) в общий член суммы, поскольку индексы суммирования независимо пробегают весь диапазон $1\,..\,n$, а значение элемента $a_{ij}^{(h)}$ определяется взаимным расположением вершин $i$ и $j$.

Всякую сумму кратности $m \geqslant 2$, входящую в явные формулы для подсчёта циклов, можно вычислить посредством разбиения её области суммирования $(1\,..\,n)^m$. Разбиение должно быть таким, чтобы каждая подобласть характеризовалась определённым взаимным расположением вершин, соответствующих парам индексов $(i;j)$ в составе множителей $a_{ij}^{(h)}$, которые образуют общий член суммы. Например, для двух двойных сумм, входящих в (1c), имеем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(4)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} a_{ij}^{(4)} = n\,w_0(4) + n\,(q^2+q)\,w_1(4),\\
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(3)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{a_{ij}=1} a_{ij}^{(3)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{a_{ij}=0} a_{ij}^{(3)} = n\,(q+1)\,w_0(3) + n\,q^2\,w_1(3).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Ввиду двудольности рассматриваемых графов многим наборам значений индексов из всего гиперкуба $(1\,..\,n)^m$ соответствуют заведомо нулевые члены. Так, в первой сумме из (12) в качестве значений индекса $j$ имеет смысл брать только номера вершин из доли, содержащей $i$-ю вершину, в силу чётности показателя 4. Во второй сумме, наоборот, для индекса $j$ следует ограничиться номерами вершин той доли, которая не содержит $i$-ю вершину. Данное замечание учитывалось и при численных расчётах по явным формулам, которые обсуждались выше.

Выражений (1), (6) и (10), в совокупности с приёмом вычисления двойных сумм, продемонстрированным в (12), вполне достаточно, чтобы вывести формулы, описывающие зависимость количества треугольников и четырёхугольников в конечной проективной плоскости от её порядка $q$:

$$
\begin{aligned}
c_6 &= \frac{1}{12}\,n\Big(w_0(6) - 2\,(q+1)^3 + 6\,(q+1)^2 - 2\,(q+1)\Big) -\\
&\quad - \frac{1}{4}\,n\,\big((q+1)\,w_0(3) + q^2\,w_1(3)\big) = \frac{1}{6}\,q^3(q+1)\,(q^2+q+1),\\
c_8 &= \frac{1}{16}\,n\Big(w_0(8) - 8\,w_0(6)\,(q+1) + 8\,w_0(6) + 6\,(q+1)^4 - 28\,(q+1)^3 +\\
&\quad + 44\,(q+1)^2 - 11\,(q+1)\Big) + \frac{1}{4}\,n\Big(\big(w_0(4) + (q^2+q)\,w_1(4)\big) +\\
&\quad + 4\,\big(w_0(2) + (q^2+q)\,w_1(2)\big)\,(q+1)^2 - 8\,\big((q+1)\,w_0(3) + q^2\,w_1(3)\big)\Big) =\\
&= \frac{1}{8}\,q^3(q+1)\,(q-1)^2(q^2+q+1).
\end{aligned}
$$

Совершенно аналогично можно получить многочлен и в случае пятиугольников, так как явная формула для величины $c_{10}$, подобно $c_6$ и $c_8$, состоит из сумм с одним или двумя индексами.

При значении длины цикла 12 в формуле для $c_k$ появляются уже три тройных суммы, а в случае длины 20 кратность одной из сумм достигает значения 8. Ниже рассматривается общий метод разбиения произвольных повторных сумм.

В основу метода положено общее свойство всех входящих в явные формулы сумм, состоящее в том, что при фиксированном взаимном расположении участвующих в суммировании вершин, применительно к графам конечных проективных плоскостей, значение общего члена суммы также постоянно. Данное свойство не зависит от кратности суммы и состава множителей в её общем члене. Введём несколько обозначений для формального описания метода.

Общий член суммы с индексами $i_1$, $i_2$, $\ldots$, $i_m$, являющийся произведением элементов вида $a^{(h)}_{i_s i_t}$, будем записывать как $f(i_1; i_2; \ldots; i_m)$, отвлекаясь от конкретных значений $h$ и набора пар $(i_s; i_t)$. Буквами $U$, $V$ и $A$ обозначим доли и матрицу смежности графа конечной проективной плоскости порядка $q$. Подразумевается, что $U, V \subset 1\,..\,n$.

Структура разбиения области суммирования существенно зависит от наличия в общем члене суммы элементов степеней матрицы смежности с нечётными показателями. Описание метода разбиения удобно начать с наиболее простого случая, когда все показатели чётны.

Значение члена суммы, в которой участвуют элементы степеней матрицы смежности только с чётными показателями, отлично от нуля при условии, что все индексы пробегают номера вершин из какой-либо одной доли графа. Согласно утверждения 1, для вычисления этого значения необходимо лишь учесть, какие индексы совпадают и какие различны. Вариант совпадения индексов будем представлять в виде разбиения $P$ диапазона их номеров $1\,..\,m$, помещая в один и тот же элемент разбиения $S \in P$ номера индексов, принимающих одинаковые значения. Например, для двойной суммы с индексами $i_1$ и $i_2$ случаю $i_1 = i_2$ будет соответствовать разбиение $P = \{\{1; 2\}\}$, а случаю $i_1 \neq i_2$ — разбиение $P = \{\{1\}; \{2\}\}$.

Семейство всех разбиений диапазона $1\,..\,m$ обозначим символом $\mathcal{P}_m$. Совокупность всевозможных наборов значений индексов, принадлежащих заданному множеству $X \subset (1\,..\,n)^m$ и соответствующих фиксированному разбиению $P \in \mathcal{P}_m$ по сформулированному выше правилу, будем обозначать как $D(X; P)$. Формально,

$$D(X;P) = \bigl\{(i_1; i_2; \ldots; i_m) \in X \mid i_s = i_t \iff \exists\, S \in P\ \{s;t\} \subset S\bigr\}.$$

**Утверждение 3.** *Пусть для каждого множителя вида $a^{(h)}_{i_s i_t}$ в составе члена $f(i_1; i_2; \ldots; i_m)$ значение $h$ чётно. Тогда для графа конечной проективной плоскости порядка $q$*

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} f(i_1; i_2; \ldots; i_m) = 2 \sum_{P \in \mathcal{P}_m} (q^2+q+1)_{|P|} \cdot f|_P, \tag{13}$$

*где $f|_P$ — значение $f(i_1; i_2; \ldots; i_m)$ для наборов $(i_1; i_2; \ldots; i_m) \in D(U^m \cup V^m; P)$.*

*Доказательство.* Если $f(i_1; i_2; \ldots; i_m) \neq 0$, то согласно (6) все значения $i_1$, $i_2$, $\ldots$, $i_m$ принадлежат либо $U$, либо $V$. Область $U^m \cup V^m$ распадается на подобласти $D(U^m \cup V^m; P)$, $P \in \mathcal{P}_m$, так что для всех наборов из одной и той же подобласти $D(U^m \cup V^m; P)$ применение формулы (6) даёт и одинаковые значения $f(i_1; i_2; \ldots; i_m)$. В результате члены суммы можно сгруппировать следующим образом:

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} f(i_1; i_2; \ldots; i_m) = \sum_{P \in \mathcal{P}_m} |D(U^m \cup V^m; P)| \cdot f|_P. \tag{14}$$

Каждый набор из множества $D(U^m \cup V^m; P)$ соответствует размещению различных вершин $U$ или $V$ по элементам разбиения $P$. Учитывая, что $|U| = |V| = q^2 + q + 1$, получаем из (14) искомое соотношение (13). □

Посредством формул (13) и (6) суммирование по области, зависящей от порядка графа $n$ (или порядка плоскости $q$), сводится к вычислению суммы на множестве, мощность которого определяется кратностью исходной суммы. Значения же кратностей сумм связаны лишь с длинами подсчитываемых циклов. Зависимость суммы от порядка графа учитывается аналитически.

Несмотря на то, что количество разбиений диапазона $1\,..\,m$, известное как число Белла $B_m$, быстро растёт при увеличении $m$, для сумм небольшой кратности использование соотношения (13) практически оправдано. Так, в случае выражения для $c_{20}$ наибольшая кратность суммы, содержащей элементы степеней $A$ только с чётными показателями, равна 6. Соответственно, при проведении вычислений по формуле (13) рассматриваются всего 203 разбиения. Повышение кратности на несколько единиц, которое можно ожидать при небольшом увеличении длины цикла, не лишает нас практической возможности перечислить все требуемые разбиения: $B_7 = 877$, $B_8 = 4\,140$, $B_9 = 21\,147$, $B_{10} = 115\,975$.

Рассмотрим правило разбиения областей суммирования для оставшегося класса сумм, общие члены которых содержат элементы $a_{ij}^{(h)}$ с нечётными значениями $h$.

В соответствии с чётностью и нечётностью значений $h$, встречающихся в члене суммы, вся совокупность её $m$ индексов распадается на два множества $\{i_1; i_2; \ldots; i_\mu\}$ и $\{j_1; j_2; \ldots; j_\nu\}$, $\mu + \nu = m$, индексы из которых пробегают вершины, принадлежащие разным долям графа. В противном случае, если значения индексов из какой-либо одной части попадают в разные доли, или, наоборот, из разных частей — в одну долю, то, в силу двудольности графа конечной проективной плоскости, член суммы заведомо обращается в нуль. Вычисляя сумму с наборами индексов $\{i_1; i_2; \ldots; i_\mu\}$ и $\{j_1; j_2; \ldots; j_\nu\}$, необходимо учитывать совпадения значений индексов внутри каждого набора, а также смежность вершин, соответствующих индексам из разных наборов.

Для описания совпадений индексов воспользуемся, как и выше, разбиениями $P$ и $L$ диапазонов $1\,..\,\mu$ и $1\,..\,\nu$ соответственно. Смежность же вершин для определённых пар индексов $(i_s; j_t)$, $s \in S \in P$, $t \in T \in L$, будем представлять в виде отношения $I \subset P \times L$, составленного в точности из тех пар $(S; T)$, для которых $i_s$, $s \in S$, и $j_t$, $t \in T$, смежны. Совокупность всех наборов индексов, принадлежащих множеству $(U^\mu \times V^\nu) \cup (V^\mu \times U^\nu)$, которые соответствуют разбиениям $P \in \mathcal{P}_\mu$, $L \in \mathcal{P}_\nu$ и отношению $I \subset P \times L$, обозначим символом $B(P; L; I)$:

$$B(P;L;I) = \big\{((i_1;i_2;\dots;i_\mu);(j_1;j_2;\dots;j_\nu)) \in \\ \in D(U^\mu;P)\times D(V^\nu;L) \ \cup\ D(V^\mu;P)\times D(U^\nu;L) \ \big| \\ i_s \text{ и } i_t \text{ смежны} \Longleftrightarrow \exists\,(S;T)\in I \ s\in S \text{ и } t\in T\big\}.$$

Последовательность $i_1, i_2, \dots, i_\mu, j_1, j_2, \dots, j_\nu$ далее будем кратко записывать в виде $i_1, i_2, \dots, j_\nu$.

**Утверждение 4.** *Пусть в общем члене $f(i_1;i_2;\dots;j_\nu)$ для каждого множителя вида $a^{(h)}_{i_si_t}$ или $a^{(h)}_{j_sj_t}$ значение $h$ чётно, а для всех множителей вида $a^{(h)}_{i_sj_t}$ значения $h$ нечётны. Тогда для графа конечной проективной плоскости*

$$(15)\qquad \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\dots\sum_{j_\nu=1}^{n} f(i_1;i_2;\dots;j_\nu) = \sum_{P\in\mathcal{P}_\mu}\sum_{L\in\mathcal{P}_\nu}\sum_{I\subset P\times L} |B(P;L;I)|\cdot f|_{(P;L;I)},$$

*где $f|_{(P;L;I)}$ — значение $f(i_1;i_2;\dots;j_\nu)$ для наборов*

$$((i_1;i_2;\dots;i_\mu);(j_1;j_2;\dots;j_\nu)) \in B(P;L;I).$$

*Доказательство.* В силу (6) и (10) значение $f(i_1;i_2;\dots;j_\nu)$ отлично от нуля только в случае, когда либо $i_1, i_2, \dots, i_\mu \in U$, а $j_1, j_2, \dots, j_\nu \in V$, либо, наоборот, $i_1, i_2, \dots, i_\mu \in V$, а $j_1, j_2, \dots, j_\nu \in U$.

Из определения $D(X;P)$ следует, что семейство множеств $D(U^\mu;P)\times D(V^\nu;L)$ и $D(V^\mu;P)\times D(U^\nu;L)$, $P\in\mathcal{P}_\mu$, $L\in\mathcal{P}_\nu$, является разбиением области суммирования $(U^\mu\times V^\nu)\cup(V^\mu\times U^\nu)$. В свою очередь, наложение условий на смежность в виде отношений $I\subset P\times L$, согласно определения $B(P;L;I)$, обеспечивает разбиение самих подобластей $D(U^\mu;P)\times D(V^\nu;L)$ и $D(V^\mu;P)\times D(U^\nu;L)$. Таким образом, в правой части (15) участвуют те же наборы значений индексов $i_1$, $i_2$, …, $j_\nu$, что и в левой части этого соотношения.

В рамках каждой подобласти $B(P;L;I)$ взаимное расположение всякой пары вершин $(i_s;i_t)$, $(j_s;j_t)$ или $(i_s;j_t)$ полностью определяется номерами $s$ и $t$, поэтому значения общего члена $f$ для всех наборов в данной подобласти, вычисляемые по формулам (6) и (10), совпадают. Данное свойство и выражено в записи общего члена правой части (15). $\square$

При наличии выражений для величин $|B(P;L;I)|$ через порядок графа $n$ соотношение (15) позволяет, аналогично (13), перейти к суммированию по области, не зависящей от $n$ и определяемой только длинами подсчитываемых циклов. Вывод формул, выражающих значения $|B(P;L;I)|$ через $n$ или $q$, требует отдельных выкладок для каждого набора $(P;L;I)$ или класса таких наборов и обсуждается в следующем разделе.

Количество всевозможных троек $(P;L;I)$, участвующих в правой части (15), характеризуется ещё большей скоростью роста при увеличении кратности исходной суммы, нежели просто число разбиений $P$ в случае (13). Формально, насчитывается

$$(16)\qquad \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\nu} S(\mu;i)\cdot S(\nu;j)\cdot 2^{i\cdot j},$$

указанных наборов $(P;L;I)$, где $S(n;m)$ — число Стирлинга второго рода. Однако далеко не все тройки вносят вклад в правую часть (15). Во-первых, для всякого отношения $I$, содержащего подмножество вида $\{S_1;S_2\}\times\{T_1;T_2\}$,

$S_1 \neq S_2$, $T_1 \neq T_2$, подобласть $B(P;L;I)$ пуста, поскольку такие подмножества соответствуют циклам длины 4, которые отсутствуют в графах конечных проективных плоскостей. Во-вторых, если исходная сумма содержит множитель вида $a_{i_s j_t}$, но при этом в отношении $I$ нет такой пары $(S;T)$, для которой $s \in S$ и $t \in T$, то $f|_{(P;L;I)} = 0$. Наконец, к циклам длины 4 можно прийти в результате отождествления индексов. Например, фрагмент члена суммы вида $a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_3} a_{i_2 j_4}$ при отождествлении индексов $j_1$ и $j_3$, а также $j_2$ и $j_4$ превращается в $a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_1} a_{i_2 j_2}$. Полученное выражение равно нулю для всякого набора значений индексов, в котором $i_1 \neq i_2$ и $j_1 \neq j_2$.

В силу указанных факторов рассчитываемое по формуле (16) значение является довольно грубой верхней оценкой количества получаемых подобластей суммирования. Например, при $\mu = \nu = 3$ значение оценки (16) равно 1 082. Точная же верхняя граница числа подобластей $B(P;L;I)$, для которых $|B(P;L;I)| \cdot f|_{(P;L;I)} \neq 0$, полученная в результате построения всех таких подобластей, в случае $\mu = \nu = 3$ составляет 835. В рамках явных формул для подсчёта циклов длины не более 20 максимальное количество подобластей, равное 366, достигается на суммах с параметрами $\mu = \nu = 3$. Существенное отклонение данного значения от верхней границы обусловлено наличием множителей вида $a_{i_s j_t}$ в общих членах сумм.

Для упомянутой выше восьмикратной суммы, содержащей 8 множителей вида $a_{i_s j_t}$, в результате разбиения области суммирования образуются всего 74 множества $B(P;L;I)$, вносящие вклад в правую часть (15), тогда как значение оценки (16) составляет 143 050. Наибольшее количество подобластей $B(P;L;I)$, для которых $|B(P;L;I)| \cdot f|_{(P;L;I)} \neq 0$, в случаях $\mu = \nu = 4, 5$, найденное путём их явного построения, равно 62 072 и 9 301 067 соответственно. Данные оценки позволяют предположить, что разбиение сумм на основе соотношения (15) окажется практически приемлемым и при подсчёте циклов с длинами, незначительно превышающими значение 20.

## 7. Подсчёт элементов в подобластях суммирования

В случае, когда все индексы $i_1, i_2, \ldots, i_m$ пробегают вершины одной доли графа, каждая подобласть суммирования определяется некоторым разбиением $P \in \mathcal{P}_m$. Количество наборов значений индексов в такой подобласти можно найти, просто подсчитав всевозможные размещения из $q^2+q+1$ вершин каждой доли графа по $|P|$ совокупностям совпадающих индексов. Данное замечание учтено в утверждении 3: $|D(U^m \cup V^m; P)| = 2\,(q^2+q+1)_{|P|}$.

Если множество индексов разбито на две части $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$ и $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$, приписанные разным долям графа, то возможность совпадения значений индексов, уже внутри каждой части, также необходимо учитывать. Номера индексов с одинаковыми значениями образуют элементы разбиений $P \in \mathcal{P}_\mu$ и $L \in \mathcal{P}_\nu$. Однако подсчёт наборов значений индексов в указанном случае не сводится к вычислению количества размещений вершин из разных долей графа, поскольку при выборе вершин необходимо соблюсти их взаимное расположение, фиксированное для рассматриваемой подобласти суммирования отношением $I \subset P \times L$. Для номеров $s \in S \in P$ и $t \in T \in L$ вершины $i_s$ и $j_t$ должны быть смежны, если $(S;T) \in I$, и несмежны, если $(S;T) \notin I$.

Рассматривая тройки $(P;L;I)$, посредством которых задаются введённые в предыдущем разделе подобласти суммирования $B(P;L;I)$, будем использовать их геометрическую интерпретацию и отождествлять элементы множеств $P$ и $L$ с соответствующими геометрическими объектами. Пусть, для определённости, доля $U$ — это множество точек конечной проективной плоскости, а $V$ — совокупность её прямых. Тогда в случае $(i_1;i_2;\ldots;i_\mu) \in D(U^\mu;P)$, $(j_1;j_2;\ldots;j_\nu) \in D(V^\nu;P)$ элементы разбиения $P$ соответствуют *различным* точкам плоскости; элементы $L$ — *различным* прямым; наличие пары $(S;T)$ в отношении $I$ означает, что прямая $T$ проходит через точку $S$; а отсутствие такой пары, наоборот, указывает, что точка $S$ не лежит на прямой $T$. Аналогичная интерпретация имеет место, когда $U$ и $V$ меняются местами.

В силу свойств конечных проективных плоскостей, подобласти $B(P;L;I)$, для которых отношения $I$ содержат множества вида $\{S_1;S_2\}\times\{T_1;T_2\}$, $S_1 \neq S_2$, $T_1 \neq T_2$, пусты. За исключением наборов $(P;L;I)$ с указанным свойством, в утверждении 5 рассматриваются все конфигурации $(P;L;I)$ при $|L| = 1,2,3$ и одна конфигурация $(P;L;I)$ при $|P| = |L| = 4$, представляющая собой помеченный четырёхугольник. Случай $|L| \leqslant 3$, с учётом сформулированного после утверждения 5 замечания 1, охватывает все суммы вида (15) в составе явных формул для подсчёта циклов длиной не более 20, кроме единственной восьмикратной суммы, для вычисления которой, как раз, и потребовался подсчёт четырёхугольников.

**Утверждение 5.** *Пусть $P = \{S_1;S_2;\ldots;S_p\}$ и $L = \{T_1;T_2;\ldots;T_l\}$ — разбиения диапазонов $1\,..\,\mu$ и $1\,..\,\nu$; $I$ — бинарное отношение на множествах $P$ и $L$, такое что для всяких $M \subset P$ и $N \subset L$, $|M| = |N| = 2$, $M \times N \not\subset I$;*

$$r_v = \Bigl|\Bigl\{u \in 1\,..\,p \Bigm| \bigl(\{S_u\}\times L\bigr)\cap I = \bigl\{(S_u;T_v)\bigr\}\Bigr\}\Bigr|,\ v \in 1\,..\,l,$$
$$r_0 = \Bigl|\Bigl\{u \in 1\,..\,p \Bigm| \bigl(\{S_u\}\times L\bigr)\cap I = \varnothing\Bigr\}\Bigr|.$$

*Тогда для конечной проективной плоскости порядка $q$ значение $|B(P;L;I)|$ равно*

*при* $l = 1 : b_1 = 2\,(q^2+q+1)\cdot(q+1)_{r_1}\cdot(q^2)_{r_0};$

*при* $l = 2 : b_2 = 2\,(q^2+q+1)_2\cdot(q)_{r_1}\cdot(q)_{r_2}\cdot(q^2-q)_{r_0};$

*при* $l = 3,$ *если существует $S_u \in P$, такое что* $\{S_u\}\times L \subset I :$

$$b_{31} = 2\,(q^2+q+1)_2\cdot(q-1)\cdot(q)_{r_1}\cdot(q)_{r_2}\cdot(q)_{r_3}\cdot(q^2-2\,q)_{r_0};$$

*при* $l = 3,$ *если существует $S_u \in P$, такое что* $\bigl|\bigl(\{S_u\}\times L\bigr)\cap I\bigr| = 2 :$

$$b_{32} = 2\,(q^2+q+1)_2\cdot q^2\cdot(q-1)_{r_1}\cdot(q-1)_{r_2}\cdot(q-1)_{r_3}\cdot(q^2-2\,q+1)_{r_0};$$

*при* $l = 3,$ *если для всякого* $S_u \in P$ $\bigl|\bigl(\{S_u\}\times L\bigr)\cap I\bigr| \leqslant 1 :$

$$b_{33} = b_{31} + b_{32};$$

*при* $l = p = 4,$ *если для всяких* $S_u \in P$ *и* $T_v \in L$

$\bigl|\bigl(\{S_u\}\times L\bigr)\cap I\bigr| = \bigl|\bigl(P\times\{T_v\}\bigr)\cap I\bigr| = 2 :$

$$b_4 = 2\,(q^2+q+1)_2\cdot q^2\cdot(q^2-2\,q+1).$$

*Доказательство.* Рассуждения данного доказательства сформулированы для случая, когда значениями индексов $i_1$, $i_2$, …, $i_\mu$ являются точки, а $j_1$, $j_2$, …,

$j_\nu$ — прямые. Однако все выводы опираются только на общие свойства конечных проективных плоскостей, перечисленные во введении. При перестановке точек и прямых местами выкладки сохраняют силу и дублируют результаты для второго случая, когда индексы $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$ пробегают множество прямых, а $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ — множество точек. Наличие коэффициента 2 в полученных формулах для величин $B(P; L; I)$ обусловлено именно указанным соображением симметрии.

Согласно геометрической интерпретации наборов $(P; L; I)$, каждая величина $r_v$, $v \in 1\,..\,l$, представляет собой количество точек из набора $P$, лежащих на прямой $T_v$, и только на ней из всего множества $L$, а значение $r_0$ равно числу точек $P$, через которые не проходит ни одна прямая из совокупности $L$.

В случае одной прямой ($l = 1$) множество точек $P$ распадается на две части: $r_1$ находятся на прямой $T_1$, а остальные $r_0$ — вне этой прямой. Саму прямую можно выбрать $b_{11} = q^2 + q + 1$ способом. Каждая прямая конечной проективной плоскости порядка $q$ содержит ровно $q + 1$ точку, поэтому для выбранной прямой насчитывается $b_{12} = (q + 1)_{r_1}$ вариантов размещения $r_1$ точек. Оставшиеся $r_0$ точек требуется набрать среди тех, которые не лежат на прямой $T_1$. Количество таких точек составляет $q^2$, поэтому существует $b_{13} = (q^2)_{r_0}$ способов выбора $r_0$ из них. Общее число комбинаций прямой и $r_1 + r_0$ точек равно $b_{11}b_{12}b_{13}$. Удвоив полученное произведение, получим значение $b_1$.

В каждом из остальных случаев, перечисленных в формулировке утверждения, когда $l \geqslant 2$, построение конфигурации начинается с выбора двух прямых. При $l = 2$ необходимо учесть, что прямые $T_1$ и $T_2$, как и всякие две различные прямые конечной проективной плоскости, имеют одну общую точку. В силу данного свойства, для выбора $r_1$ и $r_2$ точек остаются совокупности, состоящие лишь из $q$ элементов, а не $q + 1$, как в случае $l = 1$. Количество же точек, не лежащих ни на одной из двух прямых, равно $q^2 - q$. В зависимости от определения отношения $I$, в множестве $P$ может быть одна точка, которая находится на пересечении прямых $T_1$ и $T_2$. Однако её выбор при условии, что сами прямые заданы, однозначен и не влияет на значение $|B(P; L; I)|$.

Три различные прямые могут располагаться друг относительно друга двумя способами. В одном случае они образуют «пучок», проходя через одну общую точку. Вариант «пучка» единственно возможен, если какая-либо точка $P$ принадлежит всем трём прямым $T_1$, $T_2$ и $T_3$. Вывод формулы для величины $b_{31}$, соответствующей данному условию, аналогичен выкладкам, выполненным выше при $l = 2$. Основное отличие — это выбор третьей прямой. После того как уже определены $T_1$ и $T_2$, прямая $T_3$ должна обязательно пройти через их общую точку. Прямых с таким свойством, за исключением самих $T_1$ и $T_2$, насчитывается $q - 1$.

Если три различные прямые не пересекаются в одной точке, то они образуют «треугольник». Данная ситуация имеет место в случае, когда некоторые точки $P$ лежат ровно на двух прямых (величина $b_{32}$). Во избежание образования «пучка», прямую $T_3$ необходимо выбрать из $q^2$ прямых, которые не проходят через общую точку $T_1$ и $T_2$.

При отсутствии в множестве $P$ точек, которые находятся на двух или трёх прямых, допустимы оба варианта взаимного расположения прямых $T_1$, $T_2$ и $T_3$ — как «пучок», так и «треугольник».

В последнем случае $l = p = 4$ каждая из 4 точек лежит ровно на двух прямых из 4 имеющихся, а всякая прямая проходит через две точки. Из ограничения на отношение $I$ следует, что точки $S_u$ и прямые $T_v$, чередуясь, образуют цепочку, в которой очередная точка находится в пересечении двух прямых, а прямая проходит через соседние точки. Другими словами, данные точки и прямые являются вершинами и сторонами четырёхугольника. Для определённости будем считать, что нумерация $S_u$ и $T_v$ соответствует обходу четырёхугольника: $(S_1; T_1; S_2; T_2; \ldots; T_4; S_1)$. При построении четырёхугольника все вершины будут автоматически получаться как результат пересечений сторон. Первые две прямые $T_1$ и $T_2$ выбираем произвольно. Их пересечение даёт точку $S_1$. Третья прямая не должна проходить через $S_1$. Выбор $T_3$, любым из $q^2$ допустимых вариантов, приводит к образованию треугольника. В пересечении $T_2$ и $T_3$ находится $S_2$. Наконец, прямую $T_4$ необходимо провести так, чтобы она не проходила через вершины образовавшегося треугольника. В результате её пересечений с $T_3$ и $T_1$ получим $S_3$ и $S_4$. $\square$

**Замечание 1.** *В случае, когда вместо условия $l \leqslant 3$ выполняется ограничение $p \leqslant 3$, перечисленные в утверждении 5 формулы также можно применить, учитывая равномощность множеств $B(P; L; I)$ и $B(L; P; I^{-1})$, где $I^{-1}$ — обратное к $I$ отношение.*

Благодаря небольшим значениям кратностей сумм в явных формулах для подсчёта циклов длины не более 20, все необходимые выражения для величин $|B(P; L; I)|$ через порядок плоскости $q$ оказалось незатруднительно вывести из первых принципов. Однако, по опыту работы [6], применение данного подхода может существенно осложниться даже при незначительном увеличении кратностей сумм, которое следует ожидать при повышении длин подсчитываемых циклов. Возможное решение проблемы состоит в повторном задействовании явных формул.

Предложенный в [7] способ вывода явных формул позволяет получать выражения для подсчёта не только циклов, но и подграфов, изоморфных произвольному фиксированному графу. Величина же $B(P; L; I)$ представляет собой не что иное, как количество подграфов, изоморфных двудольному графу с долями $P$, $L$ и множеством рёбер $\{\{S; T\} \mid (S; T) \in I\}$. Применение явных формул для вычисления $B(P; L; I)$ может обеспечить понижение размеров подсчитываемых конфигураций, подобно тому, как за счёт формулы для $c_{20}$ подсчёт десятиугольников «сводится» к определению количества четырёхугольников.

## 8. Примеры вычисления сумм

С помощью представленных в утверждениях 1–5 соотношений можно систематически вычислять суммы в составе явных формул для величин $c_{2\,k}$. Рассмотрим схему применения данных соотношений на примере двух следующих четырёхкратных сумм:

$$\sigma_1 = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_3=1}^{n} \sum_{i_4=1}^{n} a^{(2)}_{i_1 i_2} a^{(2)}_{i_1 i_3} a^{(2)}_{i_2 i_3} a^{(2)}_{i_1 i_4} a^{(2)}_{i_2 i_4} a^{(2)}_{i_3 i_4}$$

$$\text{и} \quad \sigma_2 = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_3=1}^{n} \sum_{i_4=1}^{n} a_{i_1 i_2} a^{(2)}_{i_1 i_3} a^{(3)}_{i_2 i_3} a^{(3)}_{i_1 i_4} a^{(2)}_{i_2 i_4} a^{(3)}_{i_3 i_4}.$$

Сумма $\sigma_1$ входит в формулу для подсчёта циклов с длинами 16, 18 и 20, а $\sigma_2$ встречается в выражениях для $c_{18}$ и $c_{20}$. Общие члены обеих сумм содержат один и тот же набор пар $(i_s; i_t)$ в качестве индексов $a^{(h)}_{i_s i_t}$, однако в $\sigma_1$ все значения $h$ чётны, а в $\sigma_2$ встречаются как чётные, так и нечётные значения $h$.

Для вычисления суммы $\sigma_1$ воспользуемся формулой (13). Всего насчитывается $B_4 = 15$ разбиений диапазона $1\,..\,4$, однако, в силу симметричности общего члена $\sigma_1$ относительно номеров индексов, достаточно рассмотреть только 5 разбиений с учётом кратности:

$$\begin{gathered} P_1 = \{\{1\};\{2\};\{3\};\{4\}\}\ (\times 1), \quad P_2 = \{\{1\};\{2\};\{3;4\}\}\ (\times 6), \\ P_3 = \{\{1\};\{2;3;4\}\}\ (\times 4), \quad P_4 = \{\{1;2\};\{3;4\}\}\ (\times 3), \\ P_5 = \{\{1;2;3;4\}\}\ (\times 1). \end{gathered} \tag{17}$$

Применяя формулу (6), получаем значения члена суммы $\sigma_1$ для перечисленных разбиений:

$$\begin{gathered} f|_{P_1} = w_1(2)^6, \quad f|_{P_2} = w_1(2)^5 w_0(2), \quad f|_{P_3} = w_1(2)^3 w_0(2)^3, \\ f|_{P_4} = w_1(2)^4 w_0(2)^2, \quad f|_{P_5} = w_0(2)^6. \end{gathered}$$

Подстановка данных выражений в (13) с учётом указанных в (17) кратностей и упрощение суммы дают следующий результат:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = 2\,\big((q^2+q+1)_4 \cdot f|_{P_1} \times 1 + (q^2+q+1)_3 \cdot f|_{P_2} \times 6 + \\ + (q^2+q+1)_2 \cdot f|_{P_3} \times 4 + (q^2+q+1)_2 \cdot f|_{P_4} \times 3 + (q^2+q+1)_1 \cdot f|_{P_5} \times 1\big) = \\ = 2\,(q+1)\,(q^2+q+1)\,(2\,q^5 + 17\,q^4 + 35\,q^3 + 25\,q^2 + 8\,q + 1). \end{aligned}$$

Сумму $\sigma_2$ можно вычислить, применив правило (15) и несколько формул из утверждения 5. Переименуем индексы $i_1$, $i_2$, $i_3$ и $i_4$ в $i_1$, $j_1$, $i_2$ и $j_2$, следуя условию утверждения 4:

$$\sigma_2 = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} a_{i_1 j_1} a^{(2)}_{i_1 i_2} a^{(3)}_{j_1 i_2} a^{(3)}_{i_1 j_2} a^{(2)}_{j_1 j_2} a^{(3)}_{i_2 j_2}.$$

Для каждой из двух совокупностей индексов $\{i_1; i_2\}$ и $\{j_1; j_2\}$ необходимо рассмотреть по два разбиения $P_1 = L_1 = \{\{1\};\{2\}\}$ и $P_2 = L_2 = \{\{1;2\}\}$, построив всевозможные бинарные отношения для пар $P_s$ и $L_t$.

В случае разбиений $P_1$ и $L_1$ насчитывается 16 отношений $I \subset P_1 \times L_1$, однако ненулевой вклад в сумму (15) вносят только 7 из них. Во-первых, в силу наличия множителя $a_{i_1 j_1}$ в общем члене $\sigma_2$, значение $f|_{(P_1;L_1;I)}$ отлично от нуля лишь при условии, что пара $(\{1\};\{1\})$ принадлежит отношению $I$. За счёт данного ограничения отсеивается ровно половина отношений $I \subset P_1 \times L_1$. Во-вторых, для полного отношения $I = P_1 \times L_1$ само множество $B(P_1; L_1; I)$ пусто, поскольку всякие четыре вершины $i_1$, $i_2$, $j_1$ и $j_2$, такие что $((i_1; i_2); (j_1; j_2)) \in B(P_1; L_1; I)$, образуют цикл длины 4. Оставшиеся 7 отношений $I_1$, $I_2$, $\ldots$, $I_7$, удовлетворяющие условию $|B(P_1; L_1; I)| \cdot f|_{(P_1;L_1;I)} \neq 0$, удобно представить матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

строки которых, также как и столбцы, соответствуют элементам разбиений $\{1\}, \{2\} \in P_1, L_1$. Принадлежность пары $(S; T)$ отношению $I$ отмечается единицей в строке $S \in P_1$ и столбце $T \in L_1$, а отсутствие такой пары — нулём.

Для пар разбиений $(P_1; L_2)$, $(P_2; L_1)$ и $(P_2; L_2)$ рассмотрения заслуживает только половина всех возможных отношений, вновь благодаря тому, что общий член суммы $\sigma_2$ содержит элемент $a_{i_1 j_1}$. По аналогии с первыми семью отношениями $I_1$, $I_2$, …, $I_7$, данные 5 отношений $I_8, I_9 \subset P_1 \times L_2$, $I_{10}, I_{11} \subset P_2 \times L_1$ и $I_{12} \subset P_2 \times L_2$ имеют следующие матричные представления:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

В каждой из 12 подобластей суммирования $B(P_s; L_t; I_h)$ значение общего члена суммы $\sigma_2$ постоянно и может быть определено по формулам (6) и (10):

$$\begin{aligned}
f|_{(P_1;L_1;I_1)} &= w_1(2)^2 w_1(3)^3;\\
f|_{(P_1;L_1;I_h)} &= w_1(2)^2 w_1(3)^2 w_0(3), \ h = 2,3,5;\\
f|_{(P_1;L_1;I_h)} &= w_1(2)^2 w_0(3)^2 w_1(3), \ h = 4,6,7;\\
f|_{(P_1;L_2;I_8)} &= f|_{(P_2;L_1;I_{10})} = w_1(2)\, w_1(3)^2 w_0(3)\, w_0(2);\\
f|_{(P_1;L_2;I_9)} &= f|_{(P_2;L_1;I_{11})} = w_1(2)\, w_0(3)^3 w_0(2);\\
f|_{(P_2;L_2;I_{12})} &= w_0(2)^2 w_0(3)^3.
\end{aligned}$$

Мощности самих множеств $B(P_s; L_t; I_h)$ вычислим по формулам, указанным в утверждении 5. В рассматриваемом примере $\mu = \nu = 2$, поэтому значения $p$ и $l$ не превышают 2 и понадобятся лишь два первых выражения — для $b_1$ и $b_2$. Значения $|B(P_s; L_1; I_h)|$ рассчитываются как $b_2$, а $|B(P_s; L_2; I_h)|$ — как $b_1$. В терминах матричного представления отношений $I_h$, величина $r_v$, $v \in 1\,..\,l$, представляет собой количество строк ровно с одной единицей, находящейся в $v$-м столбце, а $r_0$ — число нулевых строк. В результате подстановки значений $r_v$ и $r_0$ в формулы для $b_1$ и $b_2$ получаем следующие выражения величин $|B(P_s; L_t; I_h)|$ через порядок плоскости $q$:

$$\begin{aligned}
|B(P_1; L_1; I_1)| &= 2\,(q^2+q+1)_2\, q\,(q^2-q);\\
|B(P_1; L_1; I_2)| &= 2\,(q^2+q+1)_2\, q^2;\\
|B(P_1; L_1; I_h)| &= 2\,(q^2+q+1)_2 (q)_2, \ h = 3,5;\\
|B(P_1; L_1; I_h)| &= 2\,(q^2+q+1)_2\, q, \ h = 4,6,7;\\
|B(P_1; L_2; I_8)| &= |B(P_2; L_1; I_{10})| = 2\,(q^2+q+1)\,(q+1)\, q^2;\\
|B(P_1; L_2; I_9)| &= |B(P_2; L_1; I_{11})| = 2\,(q^2+q+1)\,(q+1)_2;\\
|B(P_2; L_2; I_{12})| &= 2\,(q^2+q+1)\,(q+1).
\end{aligned}$$

Заключительный шаг вычисления суммы $\sigma_2$ состоит в сложении произведений $|B(P_s; L_t; I_h)| \cdot f|_{(P_s;L_t;I_h)}$ и упрощении полученного выражения:

$$\sigma_2 = 2\,(q+1)^2\,(q^2+q+1)\,(q^6 + 11\,q^5 + 50\,q^4 + 60\,q^3 + 33\,q^2 + 9\,q + 1).$$

Как показывают рассмотренные выше примеры, вычисление суммы путём разбиения области суммирования сопряжено с довольно громоздкими выкладками даже при относительно небольших значениях кратности суммы. Количество же самих сумм в явных формулах для $c_k$, вывод которых практически осуществим, может исчисляться десятками тысяч. С целью подсчёта $k$-угольников при $k \leqslant 10$ в рамках данной работы правила символьных преобразований сумм по представленным в разделах 5–7 формулам были запрограммированы в системе компьютерной алгебры. Детали выполненной реализации представлены в следующем разделе.

## 9. Вычисление сумм в системе компьютерной алгебры

Фактически, программа подсчёта $k$-угольников в конечных проективных плоскостях по явным формулам для величин $c_{2\,k}$ разработана в системе Maple. Однако набор используемых в программе средств достаточно стандартен для многих систем компьютерной алгебры, поэтому возможность её реализации не ограничена какой-либо конкретной версией Maple и системой Maple вообще. Рабочий лист Maple с кодом разработанной программы и исходные файлы, содержащие явные формулы для $c_{2\,k}$ при $k \leqslant 10$, доступны на сайте [13].

Исходным условием вычисления $c_{2\,k}$ является наличие списков коэффициентов и сумм, образующих формулу для этой величины. Вывод самих сумм и расчёт коэффициентов при них составляют отдельную задачу. В данной работе рассмотрен диапазон значений $k = 3, 4, \ldots, 10$. Например, выражение (1a)

$$c_6 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(6)} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(3)} - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} d_i^3 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} d_i$$

задаётся следующими списками:

```
coefs := [1/12, -1/4, -1/6, 1/2, -1/6];
terms := [tr(A^6), ad(ad((A^3)[i1,i2],i2 = P2(i1)),i1 = U()),
ad((A^2)[i1,i1]^3,i1 = U()), ad(ad((A^2)[i1,i2],i2 = P1(i1)),
i1 = U()), tr(A^2)];.
```

Функция `tr` представляет след матрицы, `ad(...,<индекс>=<множество>)` — суммирование по заданной области, `U()` — множество всех вершин $1\,..\,n$, `P1(...)` — долю графа, содержащую заданную вершину, а `P2(...)` — долю, которой указанная вершина не принадлежит. В силу особенностей алгоритма вывода явных формул четвёртая сумма из списка `terms` отличается от эквивалентной ей предпоследней суммы в составе выражения для $c_6$. Четырёхкратная сумма $\sigma_2$, рассмотренная в предыдущем разделе, записывается как

```
ad(ad(A[i1,i2]*ad((A^2)[i1,i3]*(A^3)[i2,i3]*ad((A^3)[i1,i4]*(A^2)[i2,
i4]*(A^3)[i3,i4],i4 = P2(i1)),i3 = P1(i1)),i2 = P2(i1)),i1 = U()).
```

Для вычисления суммы запускаются несколько процедур. В первую очередь, исходное выражение обрабатывается функцией `fix`, которая возвращает общий член суммы в форматированном виде, списки индексов, соответствующих разным долям графа, а также «заготовку» для матриц отношений, используемых при разбиении области суммирования. В случае суммы $\sigma_2$ результатом `fix` является следующая последовательность:

```
a(2,i1,i3)*a(3,i2,i3)*a(3,i1,i4)*a(2,i2,i4)*a(3,i3,i4),
[i1, i3], [i2, i4], [[1, 0], [0, 0]].
```

Каждый множитель $a_{ij}^{(h)}$ в составе общего члена суммы записывается в виде `a(<h>,<i>,<j>)`. Информация о наличии элементов вида $a_{ij}$, которые исключаются из произведения, заносится в матрицу (список списков) в виде единиц на пересечении строк и столбцов, соответствующих индексам $i$ и $j$. Соответствие строк и столбцов индексам определяется двумя списками, предшествующими матрице.

Сформированная функцией `fix` $(\mu;\nu)$-матрица передаётся процедуре `enum`, которая генерирует наборы $(P;L;I)$, описывающие подобласти суммирования. Работа функции `enum` состоит в переборе разбиений $P=\{S_1;S_2;\ldots;S_p\}\in\mathcal{P}_\mu$, $L=\{T_1;T_2;\ldots;T_l\}\in\mathcal{P}_\nu$ и построении для каждой пары $(P;L)$ всех отношений $I\subset P\times L$, для которых $|B(P;L;I)|\cdot f|_{(P;L;I)}\neq 0$. При фиксированных $P$ и $L$, $p\times l$-матрица одного из отношений $I_*\subset P\times L$ получается из исходной матрицы-«заготовки» путём сложения её строк с номерами из $S_u$, затем сложении столбцов образованной $p\times\nu$-матрицы с номерами из $T_v$ и замене положительных элементов единицами. Данные операции позволяют учесть наличие множителей $a_{ij}$ в исходной сумме: всякое отношение $I$, для которого $f|_{(P;L;I)}\neq 0$, необходимо содержит $I_*$. Если в матрице отношения $I_*$ обнаруживается цикл длины 4, то есть существует пара строк со скалярным произведением не менее 2, то отношения $I\supset I_*$ исключаются из рассмотрения, поскольку $|B(P;L;I)|=0$ для всех таких $I$. В противном случае генерируются всевозможные варианты замены нулей на единицы в матрице отношения $I_*$, из которых затем отбираются те варианты, которые не приводят к образованию цикла длины 4. Результатом функции `enum` является список всех троек $(P;L;I)$, заслуживающих рассмотрения при разбиении области суммирования. Для суммы $\sigma_2$ насчитывается 12 таких наборов, перечисленных выше:

```
[[{{1}, {2}}, {{1}, {2}}, [[1, 0], [0, 0]]], <...>,
[{{1, 2}}, {{1, 2}}, [[1]]]].
```

В данном фрагменте представлены первая и последняя тройки $(P_1;L_1;I_1)$ и $(P_2;L_2;I_{12})$.

На основе данных, предоставленных функциями `fix` и `enum`, в главной процедуре `evalsum` выполняется подстановка величин $w_0(k)$ и $w_1(k)$ вместо элементов $a_{ij}^{(h)}$ в общем члене для каждого набора $(P;L;I)$, результатом которой являются значения $f|_{(P;L;I)}$. Явные выражения (6) и (10) для $w_0(k)$ и $w_1(k)$ через порядок плоскости $q$, также как и набор формул для вычисления $|B(P;L;I)|$ из утверждения 5, с учётом замечания 1, реализованы отдельными функциями `w(<k>,<0 или 1>)` и `count(<матрица отношения>)`. В качестве результата функция `evalsum` возвращает сумму произведений $f|_{(P;L;I)}\cdot|B(P;L;I)|$.

Рассмотренный в утверждении 3 случай, когда показатели всех степеней матрицы смежности, участвующих в общем члене $m$-кратной суммы, чётны, «укладывается» в рамки вычислительной схемы, разработанной для сумм вида (15). Технически, данный случай описывается «матрицей» с $m$ пустыми строками: `[[ ], <...>, [ ]]`.

Созданные функции для подсчёта $k$-угольников по явным формулам для $c_{2\,k}$ при $k\leqslant 10$ в большей или меньшей степени применимы и к случаю $k>10$, при наличии соответствующих явных выражений. Функции `evalsum`, `fix` и `w` универсальны и не требуют каких-либо доработок. Процедура `enum` формально также рассчитана на общий случай, однако с ростом $k$ потребуется оптимизация её кода. В настоящей версии `enum` явно генерируются списки разнообразных наборов $(P; L; I)$, включая «лишние» тройки, которые затем отсеиваются из готовых списков. При ограничении $k \leqslant 10$ такой подход оказался практически приемлем. С увеличением же значения $k$ потребуется экономнее расходовать вычислительные ресурсы, нежели в существующем варианте `enum`. Самой «чувствительной» к повышению $k$ частью программы является функция `count`. По мере роста $k$ необходимо будет расширять набор представленных в утверждении 5 выражений для величин $|B(P; L; I)|$ формулами для новых вариантов конфигураций $(P; L; I)$, причём более сложных по сравнению с уже рассмотренными.

## 10. Зависимость количества $k$-угольников от порядка плоскости

Совокупность сформулированных в утверждениях 1–5 правил вычисления повторных сумм в явных формулах для величин $c_{2k}$ применительно к графам конечных проективных плоскостей позволила систематическим образом, средствами системы компьютерной алгебры, аналитически вывести выражения, описывающие зависимость количества $k$-угольников в плоскости от её порядка $q$ при $k \leqslant 10$. Выражения для случаев $k = 3, 4, 5, 6$, представляющие собой многочлены от $q$, совпали с многочленами, выведенными в [6]. Ранее не известные зависимости при $k = 7, 8, 9, 10$, которые также описываются многочленами, представлены в следующем утверждении.

**Утверждение 6.** *Для графа конечной проективной плоскости порядка $q$*

$$
\begin{aligned}
&c_{14} = \frac{1}{14} \cdot f \cdot (q^6 - 13\,q^4 + 22\,q^3 + 15\,q^2 - 70\,q + 50),\\
&c_{16} = \frac{1}{16} \cdot f \cdot (q-2) \cdot (q^7 + 2\,q^6 - 19\,q^5 + 11\,q^4 + 75\,q^3 -\\
&\qquad\qquad - 177\,q^2 + 191\,q - 90),\\
&c_{18} = \frac{1}{18} \cdot f \cdot (q-2) \cdot (q^9 + 2\,q^8 - 31\,q^7 + 20\,q^6 + 260\,q^5 -\\
&\qquad\qquad - 646\,q^4 + 399\,q^3 + 168\,q^2 + 46\,q - 306),\\
&c_{20} = \frac{1}{20} \cdot f \cdot (q-2) \cdot (q^{11} + 2\,q^{10} - 45\,q^9 + 31\,q^8 + 648\,q^7 - 1833\,q^6 -\\
&\qquad\qquad - 279\,q^5 + 8308\,q^4 - 11838\,q^3 - 1095\,q^2 + 14851\,q - 9203),\\
&\textit{где}\quad f = q^3 \cdot (q-1)^2 \cdot (q+1) \cdot (q^2 + q + 1).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Структура явных формул объясняет наличие множителя $(q+1)\,(q^2+q+1)$ в составе многочлена для количества $k$-угольников. Именно такое значение, с точностью до коэффициента, принимает самая «маленькая» сумма $\sum d_i$, входящая во все формулы для подсчёта циклов чётной длины. Подход же авторов [6] позволяет назвать в качестве общего множителя величин $c_{2k}$ многочлен $q^3(q+1)\,(q^2+q+1)$.

Вывод формулы предложенным в [6] способом независимо от значения $k$ начинается с произвольного выбора трёх неколлинеарных точек. Количество всех упорядоченных наборов таких точек, как раз, равно значению указанного многочлена. Фактически же множитель $f$, входящий в состав многочленов $c_{2\,k}$ при $k = 4, 5, \ldots, 10$, соответствует конфигурациям из четырёх точек, никакие три из которых неколлинеарны (величина $b_4$ в утверждении 5). В частности, $c_8 = f/8$. С ростом $k$ делителями $c_{2\,k}$ постепенно должны становиться и двучлены вида $(q - q_0)$, где $q_0$ таково, что $q_0^2 + q_0 + 1 < k$ (случай, когда количество вершин многоугольника превышает число точек самой плоскости).

Формула для количества шестиугольников и ряд новых выражений (18) позволяют предположить, что в случае $k \geqslant 6$ зависимость числа $k$-угольников от порядка плоскости $q$ имеет вид

$$(19)\quad c_{2\,k} = \frac{1}{2\,k}\,q^{2\,k} - \frac{k-5}{2}\,q^{2\,k-2} + \frac{3\,(k-6)}{2}\,q^{2\,k-3} + O\left(q^{2\,k-4}\right) \quad \text{при} \quad q \to \infty.$$

При $k = 3, 4, 5$ только один, два и три старших коэффициента (включая 0 при $q^{2\,k-1}$), соответственно, описываются формулой (19).

Ниже обоснованы значения двух старших коэффициентов при произвольном $k \geqslant 4$.

**Утверждение 7.** *При фиксированном $k \geqslant 4$ для графа конечной проективной плоскости порядка $q$*

$$c_{2\,k} = \frac{1}{2\,k}\,q^{2\,k} + O\left(q^{2\,k-2}\right), \quad q \to \infty.$$

*Доказательство.* Все представленные ниже асимптотические оценки выполнены в предположении $q \to \infty$.

Количество замкнутых маршрутов длины $2\,k$ в графе конечной проективной плоскости порядка $q$ равно

$$(20)\quad n\,w_0(2\,k) = 2\left((q+1)^{2\,k} - q^{k+1}(q+1)\right) = 2\left(q^{2\,k} + 2\,k\,q^{2\,k-1}\right) + O\left(q^{2\,k-2}\right).$$

Второе равенство справедливо при $k \geqslant 4$.

Число же циклов длины $2\,k$ можно получить путём вычитания из (20) количества замкнутых маршрутов, не являющихся циклами. Во всяком таком маршруте помимо совпадающих начальной и конечной вершин найдётся ещё хотя бы одна пара одинаковых вершин. Обозначим символом $W_{ij}$, $1 \leqslant i < j \leqslant 2\,k$, множество замкнутых маршрутов $w$ длины $2\,k$, для которых $w_i = w_j$. Тогда

$$(21)\qquad c_{2\,k} = \frac{1}{4\,k}\left|W \setminus \bigcup\nolimits_{1 \leqslant i < j \leqslant 2\,k} W_{ij}\right|,$$

где $W$ — совокупность всех замкнутых маршрутов длины $2\,k$.

Множество $W_{ij}$ заведомо пусто, когда разность $j - i$ нечётна, поскольку в двудольном графе отсутствуют петли и циклы нечётной длины. В остальных случаях каждый маршрут $w \in W_{ij}$ можно составить из двух замкнутых маршрутов меньшей длины с общей вершиной. Вычислим количество маршрутов, принадлежащих множеству $W_{ij}$ при чётной разности $j - i$, воспользовавшись указанной интерпретацией.

$$(22)\quad |W_{ij}| = n\,w_0(j-i)\,w_0(2\,k-(j-i)) \sim \begin{cases} 2\,q^{2\,k-1}, & \text{если } j - i \in \{2; 2\,k-2\}; \\ 2\,q^{2\,k-2}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Оценка эквивалентными функциями в (22) верна для $k \geqslant 3$.

При вычислении выражения (21) по формуле включения — исключения в качестве слагаемых участвуют отдельные величины $|W_{ij}|$ и мощности пересечений множеств $W_{ij}$ во всевозможных сочетаниях. Если хотя бы для одного из пересекаемых множеств $j-i \notin \{2; 2\,k-2\}$, то мощность пересечения оценивается как $O(q^{2\,k-2})$. Однако и в случае двух множеств $W_{ij}$, для каждого из которых $j-i \in \{2; 2\,k-2\}$, количество маршрутов, принадлежащих их пересечению, также оказывается величиной $O(q^{2\,k-2})$.

Действительно, пусть $j_1-i_1, j_2-i_2 \in \{2; 2\,k-2\}$. Если пары $\{i_1; j_1\}$ и $\{i_2; j_2\}$ имеют один общий элемент, то маршрут, являющийся элементом множества $W_{i_1j_1} \cap W_{i_2j_2}$, можно сопоставить с набором из трёх замкнутых маршрутов, начинающихся в одной и той же вершине. Длина одного из них составляет $2\,k-4$, а длины двух других равны 2. Следовательно, при $k \geqslant 4$

$$|W_{i_1j_1} \cap W_{i_2j_2}| = n\,w_0(2)^2\,w_0(2\,k-4) \sim 2\,q^{2\,k-2}.$$

В случае, когда пары $\{i_1; j_1\}$ и $\{i_2; j_2\}$ не имеют общих элементов, но диапазоны $i_1\,..\,j_1$ и $i_2\,..\,j_2$ пересекаются, причём ни один из них не содержится в другом, маршрут $w \in W_{i_1j_1} \cap W_{i_2j_2}$ на определённом шаге проходит, по крайней мере, трижды подряд по одному и тому же ребру. Из указанного свойства следует эквивалентность множества $W_{i_1j_1} \cap W_{i_2j_2}$ и совокупности всех замкнутых маршрутов длины $2\,k-2$:

$$|W_{i_1j_1} \cap W_{i_2j_2}| = n\,w_0(2\,k-2) \sim 2\,q^{2\,k-2}.$$

Последняя оценка справедлива для $k \geqslant 3$.

Наконец, при ином соотношении пар $\{i_1; j_1\}$ и $\{i_2; j_2\}$, возможном в случае $k \geqslant 3$, маршрут $w \in W_{i_1j_1} \cap W_{i_2j_2}$ разбивается на четыре части. Две части этого маршрута замкнуты и имеют длины, равные 2, а две другие части с положительными длинами $s$ и $t$, $s+t = 2\,k-4$, соединяют их начальные вершины $u$ и $v$. Величины $s$ и $t$, зависящие от значений $i_1$, $j_1$, $i_2$ и $j_2$, не влияют на оценку, которая выводится ниже. Учитывая различные варианты взаимного расположения вершин $u$ и $v$, получаем следующее выражение для количества маршрутов, принадлежащих множеству $W_{i_1j_1} \cap W_{i_2j_2}$:

$$|W_{i_1j_1} \cap W_{i_2j_2}| = n\,w_0(2)^2 \cdot \\ \cdot \begin{cases} w_0(s)\,w_0(t) + (q^2+q)\,w_1(s)\,w_1(t), & \text{если } i_2-i_1 \text{ чётно;} \\ (q+1)\,w_0(s)\,w_0(t) + q^2\,w_1(s)\,w_1(t), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если $k \geqslant 4$, то в обоих случаях $|W_{i_1j_1} \cap W_{i_2j_2}| = O(q^{2\,k-2})$.

Возвращаясь к формуле (21), находим, что при $k \geqslant 4$

$$c_{2\,k} = \frac{1}{4\,k}|W| - \frac{1}{4\,k}\sum_{\{i;j\}\in P}|W_{ij}| + O\left(q^{2\,k-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\,k}\left(2\,\left(q^{2\,k} + 2\,k\,q^{2\,k-1}\right) - 2\,k\cdot 2\,q^{2\,k-1}\right) + O\left(q^{2\,k-2}\right) = \frac{1}{2\,k}\,q^{2\,k} + O\left(q^{2\,k-2}\right),$$

где $P = \{\{1;3\};\{2;4\};\ldots;\{2\,k-2;2\,k\};\{2\,k-1;1\};\{2\,k;2\}\}$. □

Интересной задачей является развитие применённой в предложенном выше доказательстве утверждения 7 техники рассуждений с целью определения значений следующих коэффициентов, входящих в выражение $c_{2\,k}$. Однако продвижение по коэффициентам сопряжено с резким ростом количества возникающих классов маршрутов, а также усложнением их конфигураций, и представляется затруднительным без автоматизации.

В данной работе показано, что количество $k$-угольников в конечной проективной плоскости при $k \leqslant 10$ зависит только от порядка плоскости $q$, причём описывается многочленом от $q$. Всё же, остаются открытыми общие вопросы,

- выражается ли число $k$-угольников для заданного семейства плоскостей многочленом от порядка плоскости $q$ при произвольном $k \geqslant 3$,
- и возникает ли различие между неизоморфными плоскостями одного порядка $q$ по количеству $k$-угольников при некоторых значениях $q$ и $k$.

Явные формулы, также как и подставляемые в них выражения для чисел маршрутов фиксированной длины в графах конечных проективных плоскостей, имеют полиномиальную структуру. Однако неочевиден характер зависимости величин $|B(P; L; I)|$ от порядка плоскости $q$ для конфигураций $(P; L; I)$, которые могут возникать при значениях $k > 20$. Аналогичное сомнение возникает относительно того, всегда ли число таких конфигураций будет определяться только порядком плоскости.

Авторы [6] связывали предположение о различиях между неизоморфными плоскостями по количеству $k$-угольников со значением $k = 10$, поскольку дезаргова конфигурация, относительно вложения которой дезарговы и недезарговы плоскости проявляют разные свойства, содержит, как раз, 10 точек и 10 прямых. Учитывая же структуру явных формул, более правдоподобно предположить, что отличия возникнут, когда формула для подсчёта циклов длины $2\,k$ будет содержать сумму, соответствующую графу дезарговой конфигурации (дезаргову графу). Данная ситуация возможна лишь при условии, что существует замкнутый маршрут длины $2\,k$, проходящий через все вершины и рёбра графа. Порядок дезаргова графа равен 20, а его вершины имеют степени 3, поэтому длина его замкнутого обхода составляет, по меньшей мере, 40. Нетрудно убедиться, что 40 шагов достаточно. Из данного замечания следует предположение, что в неизоморфных плоскостях могут не совпадать числа 20-угольников, а не 10-угольников.

Известно, однако, что различие между неизоморфными плоскостями проявляется уже при вложении конфигурации с 7 точками и 7 прямыми, а именно, конечной проективной плоскости порядка 2. Например, дезаргова плоскость порядка 9 не содержит подплоскостей порядка 2, а плоскость Холла порядка 9 допускает вложение плоскости порядка 2 [16]. Все известные плоскости порядка 16 с точностью до двойственности содержат подплоскости порядка 2 в разном количестве [5]. Граф конечной проективной плоскости порядка 2 имеет 14 вершин, степень каждой из которых равна 3. Наименьшая длина замкнутого обхода всех вершин и рёбер этого графа составляет 28. Используя ту же аргументацию, что в случае с дезарговой конфигурацией, приходим к выводу о возможном различии неизоморфных плоскостей уже по количеству 14-угольников.

## 11. Заключение

В данной работе на примере графов конечных проективных плоскостей продемонстрирован общий подход к символьным вычислениям по явным формулам для подсчёта циклов. Аналогичную процедуру можно применить к любому семейству достаточно «регулярных» графов, для которых удаётся аналитически выразить элементы степеней матрицы смежности. Разумеется, предложенный приём не ограничен и семейством двудольных графов с обхватом 6.

Применительно к конечным проективным плоскостям явные формулы позволили выяснить, что вплоть до значения $k = 10$ все плоскости одного порядка содержат $k$-угольники в одном и том же количестве, и выдвинуть новое предположение, что различие может возникнуть при $k = 14$.

## Список литературы


[1] D.R. Hughes, F.C. Piper, *Projective Planes*, Springer, Berlin, 1973. MR0333959

[2] M. Hall, Jr., J.D. Swift, R.J. Walker, *Uniqueness of the Projective Plane of Order Eight*, Mathematical Tables and Other Aids to Computation, **10** (1956), 186–194. MR0084142

[3] C.W.H. Lam, L. Thiel, S. Swiercz, *The Non-Existence of Finite Projective Planes of Order 10*, Canadian Journal of Mathematics, **XLI** (1989), 1117–1123. MR1018454

[4] C.W.H. Lam, G. Kolesova, L. Thiel, *A Computer Search for Finite Projective Planes of Order 9*, Discrete Mathematics, **92** (1991), 187–195. MR1140586

[5] *Projective Planes of Small Order*, `http://www.uwyo.edu/moorhouse/pub/planes`.

[6] F. Lazebnik, K.E. Mellinger, O. Vega, *On the Number of k-gons in Finite Projective Planes*, Note di Matematica, **29** (2009), 135–152. MR2942764

[7] А.Н. Воропаев, *Вывод явных формул для подсчёта циклов фиксированной длины в неориентированных графах*, Информационные процессы, **11** (2011), 90–113.

[8] А.Н. Воропаев, *Подсчёт циклов в двудольных графах с длиной менее трёх обхватов*, Информационные процессы, **11** (2011), 500–509.

[9] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, Москва, 1973. MR0345856

[10] А.Н. Воропаев, *Учёт обхвата при подсчёте коротких циклов в двудольных графах*, Информационные процессы, **11** (2011), 225–252.

[11] А.Н. Воропаев, *Кратности сумм в явных формулах для подсчёта циклов фиксированной длины в неориентированных графах*, Прикладная дискретная математика, **14** (2011), 42–55.

[12] N. Alon, R. Yuster, U. Zwick, *Finding and Counting Given Length Cycles*, Algorithmica, **17** (1997), 209–223. MR1425734

[13] *Explicit formulae : FlowProblem*, `http://flowproblem.ru/cycles/explicit-formulae`.

[14] А.М. Караваев, А.Н. Воропаев, *Эффективность распараллеливания явных формул для подсчёта коротких циклов в графе*, Международная научная конференция «Параллельные вычислительные технологии» (ПаВТ'2010), Изд. центр ЮУрГУ, Челябинск, 2010, 486–497.

[15] T. Penttila, G.F. Royle, M.K. Simpson, *Hyperovals in the Known Projective Planes of Order 16*, Journal of Combinatorial Designs, **4** (1996), 59–65. MR1364099

[16] H. Neumann, *On Some Finite Non-Desarguesian Planes*, Archiv der Mathematik, **6** (1954), 36–40. MR0067506



Антон Николаевич Воропаев
Петрозаводский государственный университет,
пр. Ленина 33,
185910, Петрозаводск, Россия
*E-mail address*: `voropaev@psu.karelia.ru`