S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 271–284 (2013) УДК 517.925
MSC 34C05

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО ДАРБУ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ

Е.П. ВОЛОКИТИН

Abstract. We prove that a polynomial system with Cauchy-Riemann conditions has Darboux integral which may be derived without quadratures. We give classes of such systems which have the rational first integral.

Keywords: Darboux integrability, the first integrals, the rational first integrals.

Введение. Задача интегрирования плоских систем обыкновенных дифференциальных уравнений возникла вместе с самим понятием дифференциального уравнения и является классической задачей качественной теории уравнений. Обычно эта задача рассматривается для полиномиальных систем.

Мы рассматриваем плоскую полиномиальную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = U(x,y),\ \dot{y} = V(x,y), \tag{1}$$

у которой функции $U(x,y)$ и $V(x,y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$U_x(x,y) = V_y(x,y),\ U_y(x,y) = -V_x(x,y),$$

точкой обозначено дифференцирование по переменной $t \in \mathbb{R}$.

Такая система получается овеществлением комплексного уравнения

$$\dot{z} = P(z),$$

$z = x + iy,\ P(z) = P(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$.

В первом разделе статьи мы доказываем, что рассматриваемая система интегрируема по Дарбу и характеризуем её первый интеграл Дарбу (Теорема 1).

Volokitin E.P., Darboux integrability of planar polynomial systems.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00074) и СО РАН (проект №80).
Поступила 15 декабря 2012 г., опубликована 2 апреля 2013 г.

В ходе доказательства мы предъявляем способ отыскания первого интеграла, который является чисто алгебраическим и не требует вычисления квадратур.

Во втором разделе мы иллюстрируем на примерах использование наших результатов и методов.

В качестве первого примера мы приводим элементарное доказательство известной теоремы, описывающей изохронные центры рассматриваемых систем (Теорема 2).

В Теореме 3 и в дополнении к ней мы выделяем классы систем, имеющих рациональный первый интеграл.

1. Рассмотрим плоскую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = U(x, y),\ \ \dot{y} = V(x, y), \tag{1}$$

где $U(x, y), V(x, y)$ — действительные многочлены от переменных x, y степени n, точкой обозначено дифференцирование по независимой переменой $t \in \mathbb{R}$.

Предполагается, что функции $U(x, y),\ V(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$U_x = V_y,\ \ U_y = -V_x.$$

В таком случае $P = U + iV$ является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$, и система (1) может быть записана в виде

$$\dot{z} = P(z), \tag{2}$$

где $P(z)$ — комплексный многочлен степени n

$$P(z) = (z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \dots (z - z_m)^{r_m}.$$

Здесь и далее мы рассматриваем случай, когда старший коэффициент в $P(z)$ равен единице.

Система (1) и уравнение (2) эквивалентны в том смысле, что если функция $z(t)$ является решением уравнения (2) на некотором временном интервале, то вектор-функция $(x(t), y(t))$ будет решением системы (1) на том же интервале, и наоборот. Поэтому мы будем называть уравнение (2) комплексной системой (иногда просто системой) и использовать при его исследовании терминологию качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которая применяется при описании плоских динамических систем. На систему (1) мы будем ссылаться как на действительную или комплексную систему, отвечающую системе (2). Иногда в литературе такие системы называют системами Коши-Римана. Мы также будем употреблять это название, имея в виду и систему (1), и систему (2).

Исследованию систем (1), (2) посвящены, например, работы [1–7].

Система (1) коммутирует [8] с системой

$$\dot{x} = -V(x, y),\ \ \dot{y} = U(x, y).$$

В таком случае функция

$$\mu(x, y) = \frac{1}{U^2(x, y) + V^2(x, y)}.$$

будет интегрирующим множителем для каждой из коммутирующих систем (так называемый интегрирующий множитель Ли) [9–11].

Это означает, что интеграл $H(x, y)$ системы (1) может быть найден из соотношений

$$H_x(x, y) = \mu(x, y)V(x, y),\ H_y(x, y) = -\mu(x, y)U(x, y)$$

с помощью квадратур.

Такой способ решения работает для произвольной (не обязательно полиномиальной) комплексной системы.

В нашем случае, когда мы имеем дело с полиномиальной комплексной системой, её интеграл может быть найден алгебраическими средствами, с помощью методики, восходящей к Дарбу.

Напомним некоторые факты, касающиеся метода Дарбу интегрирования полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод позволяет построить общее решение системы, используя её частные решения. Для более подробных сведений по этому вопросу см., например, [5, 10, 12, 13].

Пусть дана полиномиальная система

$$\dot{x} = p(x, y),\ \dot{y} = q(x, y), \tag{3}$$

где $p(x, y),\ q(x, y)$ — многочлены степени не выше n.

Непрерывно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ называется инвариантом системы (3), если существует многочлен $c(x, y)$ степени не выше $n - 1$, удовлетворяющий условию

$$Df(x, y) = c(x, y)f(x, y),$$

где

$$Df = \dot{f} = f_x(x, y)p(x, y) + f_y(x, y)q(x, y).$$

Многочлен $c(x, y)$ называется кофактором инварианта $f(x, y)$.

Известно [12], что если система (3) имеет S инвариантов $f_1(x, y), \ldots, f_S(x, y)$ с кофакторами $c_1(x, y), \ldots, c_S(x, y)$, соответственно, и найдутся $\gamma_1, \ldots, \gamma_S$, не все равные нулю, такие что

$$\sum_{s=1}^{S} \gamma_s c_s(x, y) = 0,$$

то система (3) имеет первый интеграл вида

$$H(x, y) = \prod_{s=1}^{S} f_s^{\gamma_s}(x, y),$$

который назывется интегралом Дарбу системы (3).

Для произвольной полиномиальной системы интеграл Дарбу, вообще говоря, будет комплекснозначным. Отыскание вещественного интеграла требует дополнительных исследований [10]. В нашем специальном случае, когда мы рассматриваем полиномиальные системы Коши-Римана, нам удаётся сразу же сконструировать вещественный интеграл Дарбу.

Теорема 1. *Система (1) имеет вещественный интеграл Дарбу вида*

$$H(x, y) = \prod_{s=1}^{S} \mathbf{f}_s^{\gamma_s}(x, y),$$

где $\gamma_s \in \mathbb{R}$, *а каждая из функций* $\mathbf{f}_s(x,y)$ *является функцией одного из трёх типов:*

либо $\mathbf{f}_s(x,y) = (x-x_k)^2 + (y-y_k)^2,\ k = 1,2,\ldots,m,$

либо $\mathbf{f}_s(x,y) = \exp(\operatorname{arctg}\dfrac{y-y_k}{x-x_k}),\ k = 1,2,\ldots,m,$

либо $\mathbf{f}_s(x,y) = \exp\dfrac{\mathbf{p}_s(x,y)}{((x-x_k)^2+(y-y_k)^2)^{n_s}}$, *где* $\mathbf{p}_s(x,y)$ *— многочлен от* x, y *с действительными коэффициентами,* $n_s \in \mathbb{N}$.

Здесь $z_k = x_k + iy_k$ *— корни многочлена* $P(z)$.

Доказательство.

Отметим вначале, что если комплексная функция $F(z,\bar{z})$ удовлетворяет условию

$$F_z(z,\bar{z})P(z) + F_{\bar{z}}(z,\bar{z})\bar{P}(z) = C(z,\bar{z})F(z,\bar{z}),$$

то функция $f(x,y) = F(x+iy, x-iy)$ будет инвариантом системы (1) с кофактором $c(x,y) = C(x+iy, x-iy)$. Использование этого свойства заметно упрощает выкладки, которые нам придётся проводить при отыскании инвариантов.

Справедливость его следует из цепочки очевидных равенств:

$$f_xU+f_yV=(F_z+F_{\bar{z}})U+i(F_z-F_{\bar{z}})V=F_z(U+iV)+F_{\bar{z}}(U-iV)=F_zP+F_{\bar{z}}\bar{P}=CF=cf.$$

Рассмотрим функцию

$$F(z,\bar{z}) = |z-z_k|^2 = (z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k).$$

Для неё имеем

$$F_zP(z) + F_{\bar{z}}\bar{P}(z) = (\bar{z}-\bar{z}_k)P(z) + (z-z_k)\bar{P}(z) =$$

$$= (z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)(\frac{P(z)}{z-z_k} + \frac{\bar{P}(z)}{\bar{z}-\bar{z}_k}) = 2\mathrm{Re}\frac{P(z)}{z-z_k}F(z,\bar{z}).$$

Отсюда в силу сформулированного выше утверждения следует, что система (1) имеет действительные инварианты

$$f_k(x,y) = (x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 \tag{4}$$

с действительными кофакторами

$$c_k(x,y) = 2\mathrm{Re}\frac{P(z)}{z-z_k},\ k = 1,2,\ldots,m.$$

Каждый из этих кофакторов является многочленом степени $n-1$ и представляет собой действительную линейную комбинацию многочленов

$$R_0(x,y) = 1,\ R_1(x,y) = \mathrm{Re}z = x,\ I_1(x,y) = \mathrm{Im}z = y,\ R_2(x,y) = \mathrm{Re}z^2 = x^2 - y^2,$$
$$I_2 = \mathrm{Im}z^2 = 2xy, \ldots,\ R_{n-1}(x,y) = \mathrm{Re}z^{n-1}.$$

Аналогичным образом, используя функцию

$$F(z,\bar{z}) = \exp(-\operatorname{arctg} i\frac{(z-z_k)-(\bar{z}-\bar{z}_k)}{(z-z_k)+(\bar{z}-\bar{z}_k)}),$$

можно показать, что система (1) имеет действительные инварианты вида

$$g_k(x,y) = \exp(\operatorname{arctg}\frac{y-y_k}{x-x_k}) \tag{5}$$

с действительными кофакторами

$$d_k(x,y) = \mathrm{Im}\frac{P(z)}{z-z_k},\ k=1,2,\dots,m.$$

По-прежнему каждый из этих кофакторов является многочленом степени $n-1$ и представляет собой действительную линейную комбинацию многочленов $R_0(x,y),\ R_1(x,y),\ I_1(x,y),\ R_2(x,y),\ I_2(x,y),\dots,\ R_{n-2}(x,y),\ I_{n-2},\ I_{n-1}(x,y) = \mathrm{Im}z^{n-1}$.

Предположим, что все корни многочлена $P(z)$ — простые ($m=n$). В таком случае мы имеем для системы (1) набор из $2n$ инвариантов, все $2n$ кофакторов которых лежат в $(2n-1)$-мерном линейном подпространстве L_{2n-1} пространства многочленов от переменных x,y, образованном многочленами $R_0(x,y),\ R_1(x,y),\ I_1(x,y),\ R_2(x,y),\ I_2,\dots,\ R_{n-1}(x,y),\ I_{n-1}(x,y)$. Поэтому эти кофакторы линейно зависимы, то есть найдутся действительные числа $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$ такие, что

$$\alpha_1c_1(x,y)+\dots+\alpha_nc_n(x,y)+\beta_1d_1(x,y)+\dots+\beta_nd_n(x,y)=0. \tag{6}$$

Поэтому в данном случае функция

$$H(x,y)=\prod_{k=1}^{n}((x-x_k)^2+(y-y_k)^2)^{\alpha_k}\prod_{k=1}^{n}\exp(\beta_k\,\mathrm{arctg}\,\frac{y-y_k}{x-x_k})$$

будет интегралом системы (1).

Замечание. Каждый из кофакторов $c_k(x,y)$ раскладывается по базису

$$R_0(x,y),\ R_1(x,y),\ I_1(x,y),\ R_2(x,y),\ I_2(x,y),\dots,\ R_{n-1}(x,y),\ I_{n-1}(x,y)$$

с коэффициентом при $R_{n-1}=\mathrm{Re}z^{n-1}$, равным двум, и коэффициентом при $I_{n-1}=\mathrm{Im}z^{n-1}$, равным нулю. Аналогично, для каждого из кофакторов $d_k(x,y)$ в таком разложении коэффициент при $R_{n-1}=\mathrm{Re}z^{n-1}$ равен нулю и коэффициент при $I_{n-1}=\mathrm{Im}z^{n-1}$, равен единице.

Отсюда следует, что в разложении (6) имеем

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=0,\ \beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n=0.$$

Отметим, что комплекснозначный интеграл системы $\dot z = iP(z)$ для случая, когда многочлен $P(z)$ имеет только простые корни, с помощью аналогичных рассуждений был получен в [6].

Предположим, что многочлен $P(z)$ имеет кратные корни. Пусть, например, $z=0$ является корнем кратности r: $P(z)=z^rQ(z),\ \deg Q = n-r$.

Используя функции

$$F(z,\bar z)=\exp(\frac{1}{z^j}\pm\frac{1}{\bar z^j}),$$

можно показать, что для $j=1,2,\dots,r-1$ функции

$$h_j(x,y)=\exp\frac{\mathrm{Re}z^j}{|z|^{2j}},\ h_{r+j-1}(x,y)=\exp\frac{\mathrm{Im}z^j}{|z|^{2j}} \tag{7}$$

будут действительными инвариантами с действительными кофакторами

$$e_j(x,y){=}-j\mathrm{Re}z^{r-j-1}Q(z){=}-j\mathrm{Re}\frac{P(z)}{z^{j+1}},\ e_{r+j-1}(x,y){=}j\mathrm{Im}z^{r-j-1}Q(z){=}j\mathrm{Im}\frac{P(z)}{z^{j+1}}, \tag{8}$$

соответственно[1].

Таким образом, при наличии у многочлена $P(z)$ корня кратности r мы получили $2(r-1)$ действительных инвариантов системы (1) вида (7), кофакторы (8) которых являются полиномами степени не выше $n-2$ и вновь лежат в подпространстве L_{2n-1}. Добавляя в этот список два инварианта вида (4) и (5), для корня кратности r мы имеем $2r$ действительных инвариантов с нужными свойствами.

Поступая подобным образом в случае каждого кратного корня многочлена $P(z)$, мы наберем в точности $2n$ действительных инвариантов, кофакторы которых образуют линейно зависимую систему.

Это значит, что мы можем с использованием найденных инвариантов построить предложенный интеграл Дарбу для системы (1).

Теорема доказана.

Следствие. Рассмотрим комплексную систему $\dot{z} = z^n$. Соответствующая действительная система имеет инвариант $h_{2n-1}(x,y) = \exp(\mathrm{Im} z^{n-1}/|z|^{2(n-1)})$ с кофактором $e_{2n-1} = (n-1)\mathrm{Im}1 = 0$. Это означает, что функция $h_{2n-1}(x,y)$ будет интегралом системы. В таком случае интегралом системы будет и функция

$$H(x,y) = \frac{\mathrm{Im}(x+iy)^{n-1}}{(x^2+y^2)^{n-1}}. \qquad (9)$$

Комплексные системы вида $\dot{z} = z^n$ представляют интерес с той точки зрения, что поведение их траекторий на бесконечности описывает поведение бесконечно удалённых траекторий произвольной системы $\dot{z} = P(z)$ [5, 7].

Из (9) следует, что неограниченные траектории системы $\dot{z} = z^n$ задаются соотношением $\mathrm{Im} z^{n-1} = 0$, которое в полярных координатах имеет вид $\sin(n-1)\varphi = 0$, то есть такие траектории являются лучами и представляют собой сепаратрисы $2(n-1)$ бесконечно удалённых сёдел, равномерно распределенных по экватору диска Пуанкаре.

Тем самым мы получаем представление о строении экватора диска Пуанкаре для произвольной системы Коши-Римана, отвечающей системе $\dot{z} = P(z)$.

Отметим, что для комплексных полиномиальных систем при построении интеграла Дарбу оказалось достаточным найти не более, чем $2n$ инвариантов, в то время как в общем случае для произвольной полиномиальной системы при построении интеграла Дарбу требуется $n(n+1)/2+1$ инвариантов [10].

Теорема 1 уточняет для случая комплексных полиномиальных систем результат, приведённый в [14].

2. В качестве примера использования наших результатов и методов докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Для действительной системы*

$$\dot{x} = U(x,y), \; \dot{y} = V(x,y), \qquad (1)$$

отвечающей комплексной полиномиальной системе $\dot{z} = P(z)$, начало координат будет центром в том и только в том случае, когда $P(0) = 0, P'(0) = i\omega, \omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$.

[1] Инвариаты вида $f = \exp(\mathbf{p}/\mathbf{q})$, где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ — многочлены, были предложены в [13], где для них было введено название экспоненциальные множители.

Доказательство.

Необходимость.

В рассматриваемом случае $z=0$ не может быть кратным корнем многочлена $P(z)$, так как в противном случае окрестность начала координат содержала бы эллиптические секторы и не являлась бы центром, [1, 7]. Это значит, что $P'(z)\neq 0$, а в таком случае матрица линейного приближения в окрестности начала координат ненулевая и имеет чисто мнимые собственные числа $\lambda_{1,2}=\pm i\omega$.

Достаточность.

Многочлен $P(z)$ имеет в нуле простой корень, так как $P'(z)\neq 0$, то есть $P(z)=z(z-z_2)^{r_2}...(z-z_m)^{r_m},\ P'(0)=(-1)^{n-1}z_2^{r_2}...z_m^{r_m}=i\omega$.

Без ущерба для общности мы можем считать, что ни одно из оставшихся состояний равновесия не попадает на мнимую ось, то есть ни одно из чисел $x_2,\dots,x_m$ не равно нулю. Этого всегда можно добиться поворотом на подходящий угол, поскольку поворот не меняет тип особой точки, а также тип системы.

В самом деле, пусть $\dot z=P(z)=i\omega z+p(z),\ \deg p\geq 2$, и $\tilde z=ze^{i\theta}$ $(z=\tilde z e^{-i\theta})$. Тогда

$$\dot{\tilde z}=\dot z e^{i\theta}=(i\omega z+p(z))e^{i\theta}=(i\omega\tilde z e^{-i\theta}+p(\tilde z e^{-i\theta})e^{i\theta}=i\omega\tilde z+\tilde p(\tilde z).$$

Система (1) в рассматриваемом случае имеет инвариант

$$f_1(x,y)=x^2+y^2$$

с кофактором

$$c_1(x,y)=2\mathrm{Re}\frac{P(z)}{z}=2\mathrm{Re}(z-z_2)^{r_2}...(z-z_s)^{r_s}=2\mathrm{Re}(i\omega+a_1z+\dots),$$

а также инвариант

$$g_1(x,y)=\exp(\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x})$$

с кофактором

$$d_1(x,y)=\mathrm{Im}\frac{P(z)}{z}=\mathrm{Im}(z-z_2)^{r_2}...(z-z_s)^{r_s}=\mathrm{Im}(i\omega+a_1z+\dots).$$

В многочлене-кофакторе $c_1(x,y)$ отсутствует свободный член (в $d_1(x,y)$ он равен $\omega\neq 0$). Свободный член будет отсутствовать также во всех остальных кофакторах $c_2(x,y),\dots,c_m(x,y),d_2(x,y),\dots,d_m(x,y)$, а также в кофакторах $h_j(x,y)$, отвечающих кратным ненулевым корням, поскольку во всех порождающих их комплексных выражениях есть сомножитель z. Все кофакторы без свободного члена в количестве $2n-1$ лежат в $(2n-2)$-мерном линейном подпространстве, натянутом на многочлены $\mathrm{Re}z,\mathrm{Im}z,\mathrm{Re}z^2,\mathrm{Im}z^2,\dots,\mathrm{Re}z^{n-1},\mathrm{Im}z^{n-1}$, и, следовательно, линейно зависимы.

В таком случае, мы можем сконструировать многочлен Дарбу, не содержащий множителя $g_1(x,y)=\exp(\mathrm{arctg}(y/x))$,

$$H(x,y)=(x^2+y^2)^{\alpha_1}\Phi(x,y),$$

где $\Phi(x,y)$ — функция, аналитическая в окрестности начала координат; при этом если $\alpha_1\neq 0$, то в качестве интеграла можно взять функцию

$$H(x,y)=(x^2+y^2)\Phi^{\frac{1}{\alpha_1}}(x,y),$$

Значит, начало координат является центром [15].

Теорема доказана.

Отметим, что центр будет изохронным, что следует из наличия системы, коммутирующей с рассматриваемой [7].

Теорема 2 в более общей формулировке, когда система (2) не обязательно является полиномиальной, была доказана ранее, например, в [1, 3, 6]. Для случая полиномиальных систем Теорема 2 рассматривалась в [5].

Предложенное нами доказательство для случая полиномиальных систем является, на наш взгляд, более простым. Кроме того мы можем охарактеризовать первый интеграл системы.

В теории интегрирования плоских полиномиальных систем большое внимание уделяется вопросу о существовании рационального первого интеграла у рассматриваемой системы. Этот интерес объясняется, в частности, тем фактом, что при наличии рационального первого интеграла все траектории системы являются алгебраическими кривыми. Более детальную историю вопроса и ссылки на литературу можно найти, например, в [14].

Напомним, что выше мы доказали, что комплексная полиномиальная система $\dot{z} = z^n$ имеет рациональный первый интеграл (9).

Наш подход позволяет сравнительно просто доказать следующую теорему

Теорема 3. *Пусть все корни многочлена $P(z)$ — простые и являются рациональными числами:*

$$P(z) = (z - q_1)(z - q_2)\dots(z - q_n),\ q_k \in \mathbb{Q},\ k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда вещественная система

$$\dot{x} = u(x, y),\ \dot{y} = v(x, y), \tag{10}$$

отвечающая комплексной системе $\dot{z} = iP(z)$, имеет рациональный первый интеграл Дарбу

$$H(x, y) = ((x-q_1)^2+y^2)^{\alpha_1}((x-q_2)^2+y^2)^{\alpha_2}\dots((x-q_n)^2+y^2)^{\alpha_n},\ \alpha_k \in \mathbb{Z},\ \sum_1^n \alpha_k = 0. \tag{11}$$

Доказательство.

Рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве Теоремы 1, можно проверить, что система (10) имеет вещественные алгебраические инварианты

$$f_k(x, y) = (x - q_k)^2 + y^2$$

с действительными кофакторами

$$\tilde{c}_k(x, y) = -2\mathrm{Im}\frac{P(z)}{z - q_k},\ k = 1, 2, \dots, n.$$

Имеем

$$\frac{P(z)}{z - q_k} = \prod_{\substack{1 \le s \le n,\\ s \ne k}} (z - q_s) = z^{n-1} + Q_{k1}z^{n-2} + \dots + Q_{k,n-1},\ Q_{kj} \in \mathbb{Q}.$$

В таком случае

$$\begin{aligned}\tilde{c}_k(x, y) &= -2\mathrm{Im}(z^{n-1} + Q_{k1}z^{n-2} + \dots + Q_{k,n-2}z + Q_{k,n-1}) = \\ &= -2(\mathrm{Im}z^{n-1} + Q_{k1}\mathrm{Im}z^{n-2} + \dots + Q_{k,n-2}\mathrm{Im}z + \mathrm{Im}Q_{k,n-1}).\end{aligned}$$

Поскольку $\mathrm{Im} Q_{k,n-1} = 0$, каждый кофактор $\tilde{c}_k(x, y)$ является рациональной линейной комбинацией многочленов $I_1 = \mathrm{Im} z, \dots, I_{n-1} = \mathrm{Im} z^{n-1}$:

$$\tilde{c}_k(x, y) = -2I_{n-1} - 2Q_{k1}I_{n-2} - \dots - 2Q_{k,n-2}I_1. \tag{12}$$

Мы видим, что система (10) имеет n полиномиальных инвариантов $f_k(x, y)$, кофакторы $\tilde{c}_k(x, y)$ которых лежат в $(n-1)$-мерном линейном подпространстве, натянутом на многочлены $I_1, \dots, I_{n-1}$. В таком случае эти кофакторы образуют линейно зависимую систему, то есть найдутся числа α_k не равные одновременно нулю такие, что

$$\alpha_1\tilde{c}_1(x, y) + \alpha_2\tilde{c}_2(x, y) + \dots + \alpha_n\tilde{c}_n(x, y) = 0.$$

С учетом (12) последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&-2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)I_{n-1} - 2(Q_{11}\alpha_1 + Q_{21}\alpha_2 + \dots + Q_{n1}\alpha_n)I_{n-2} - \dots \\
&-2(Q_{1,n-2}\alpha_1 + Q_{2,n-2}\alpha_2 + \dots + Q_{n,n-2}\alpha_n)I_1 = 0,
\end{aligned}$$

что дает нам линейную систему для определения чисел α_k:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0,\\
Q_{11}\alpha_1 + Q_{21}\alpha_2 + \dots + Q_{n1}\alpha_n = 0,\\
\dots\\
Q_{1,n-2}\alpha_1 + Q_{2,n-2}\alpha_2 + \dots + Q_{n,n-2}\alpha_n = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Это система с рациональными коэффициентами, и она имеет рациональное, а значит, и целочисленное решение. В частности, компоненты этого решения удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$.

Отсюда вытекает, что система (10) имеет рациональный интеграл Дарбу вида (11), что и требовалось доказать.

Замечание. Если мы имеем квадратичную систему, то теорема справедлива и в том случае, когда корни $q_1,\ q_2$ — действительные.

В самом деле, расмотрим квадратичную комплексную систему

$$\dot{z} = i(z - q_1)(z - q_2),\ q_1, q_2 \in \mathbb{R},$$

и отвечающую ей действительную квадратичную систему

$$\dot{x} = (q_1 + q_2)y - 2xy,\ \dot{y} = q_1q_2 - (q_1 + q_2)x + x^2 - y^2. \tag{14}$$

Система (14) имеет инварианты

$$f_1(x, y) = (x - q_1)^2 + y^2,\ f_2(x, y) = (x - q_2)^2 + y^2$$

с одинаковыми кофакторами

$$\tilde{c}_1(x, y) = \tilde{c}_2(x, y) = 2\mathrm{Im}(z - q_1) = 2\mathrm{Im}(z - q_2) = 2y.$$

Поэтому система (14) имеет рациональный первый интеграл

$$H(x, y) = \frac{(x - q_1)^2 + y^2}{(x - q_2)^2 + y^2}.$$

Фазовый портрет системы (14) схематично изображён на рис. 1.

Точки $(q_1, 0),\ (q_2, 0)$ являются точками покоя типа изохронный центр. Остальные траектории системы задаются соотношением $H(x, y) = C, C > 0$ и при $C \neq 1$ представляют собой окружности, центры которых расположены на оси абсцисс вне точек покоя. Траектория, определяемая равенством $H(x, y) = 1$,

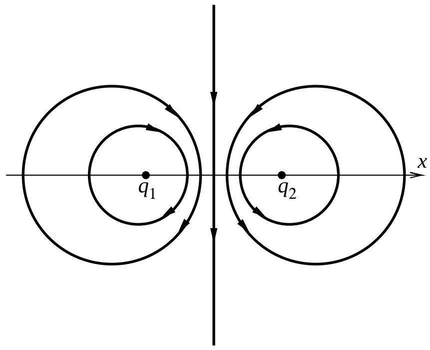


Рис. 1

является инвариантной прямой системы (14) и представляет собой сепаратрису, разделяющую области центров. Она является осью симметрии фазового портрета.

В общем случае все n точек покоя системы (10) также являются изохронными центрами, как это следует из Теоремы 2. Для каждого из них граница области центра состоит из конечного числа открытых неограниченных траекторий [16]. Напомним, что, когда таких траекторий k, центр называется центром типа B^k. Для системы (10) единственно возможными неограниченными тректориями являются сепаратрисы бесконечно удалённых сёдел, равномерно распределенных на экваторе диска Пуанкаре в количестве $2(n-1)$ штук [5, 7]. В нашем случае сепаратрисы идут из седла в седло; значит, их будет $n-1$. Все эти сепаратрисы лежат в множестве уровня первого интеграла (11) $H(x,y)=1$. Простые соображения показывают, что крайние из центров будут центрами типа B^1, а остальные — центрами типа B^2. Поскольку $P(\bar{z})=\bar{P}(z)$, система (10) является реверсивной и её фазовый портрет симметричен относительно оси Ox.

Отметим, что мы использовали n инвариантов, чтобы построить рациональный интеграл системы (10), в то время как для произвольной полиномиальной системы степени n существование рационального интеграла гарантируется наличием $n(n+1)+2$ алгебраических инвариантов [10, 14].

Рис. 2 даёт описание процедуры `rationalintegral` в системе *Mathematica*, которая по заданному списку координат стационаров возвращает правые части системы (10) и её рациональный первый интеграл (11). Кроме того приведено описание сеанса, демонстрирующего использование этой процедуры.

Замечание. Для составления системы (13) мы должны разложить линейную комбинацию $\Sigma\alpha_i\tilde{c}_i(x,y)$ по базису $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$ и приравнять нулю соответствующие коэффициенты[2]. Анализ рассматриваемых выражений показывает, что для получения требуемых уравнений можно приравнять нулю коэффициенты при *мономах* степени от 1 до $n-1$ в рассматриваемой линейной комбинации, например при мономах $y, xy, x^2y, \ldots$. Именно такой способ был использован ними при написании процедуры `rationalintegral`.

[2]Можно воспользоваться командой `PolynomialReduce`.

```
In[1]:= rationalintegral[centers_List] :=
  Module[{xx, yy, zz, dx, dy, dz, re, im, n, cc, c, p, f, a, ah, h, tmp, eqs},
   n = Length[centers];
   re[dz_] := Simplify[Re[ComplexExpand[dz /. zz → xx + I yy]],
     Assumptions → Element[{xx, yy}, Reals]];
   im[dz_] := Simplify[Im[ComplexExpand[dz /. zz → xx + I yy]],
     Assumptions → Element[{xx, yy}, Reals]];
   Do[cc[i] = centers[[i]], {i, n}];
   Do[p[i] = zz - cc[i], {i, n}];
   dz = I Product[p[i], {i, n}];
   dx = re[dz];
   dy = im[dz];
   Do[f[i] = (xx - cc[i])^2 + yy^2, {i, n}];
   Do[c[i] = im[(dz / I / p[i]) // Factor], {i, n}];
   tmp = Sum[a[i] c[i], {i, n}];
   tmp = CoefficientList[tmp, {xx, yy}];
   eqs = Append[Table[tmp[[i, 2]] == 0, {i, n - 1}], ! (Sum[a[i]^2, {i, n}] == 0)];
   tmp = FindInstance[eqs, Table[a[i], {i, n}], Integers];
   ah = Table[a[i] /. tmp[[1]], {i, n}];
   tmp = GCD[ah /. List → Sequence];
   ah = ah / tmp;
   h = Product[f[i]^(ah[[i]]), {i, n}];
   {dx, dy, h} /. {xx → x, yy → y}
  ]

In[2]:= centers = {-2, -1 / 2};

In[3]:= Clear[x, y, u, v, h]; {u[x_, y_], v[x_, y_], h[x_, y_]} = rationalintegral[centers]
```

Out[3]= $\left\{-\frac{1}{2}(5+4x)\,y,\ 1+\frac{5x}{2}+x^2-y^2,\ \frac{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+y^2}{(2+x)^2+y^2}\right\}$

```
In[4]:= D[h[x, y], x] u[x, y] + D[h[x, y], y] v[x, y] // Simplify
```

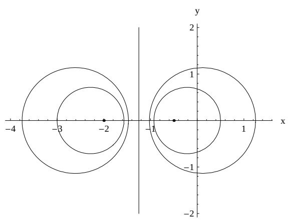
Out[4]= 0

```
In[5]:= pic = ContourPlot[{h[x, y] == h[-3, 0], h[x, y] == h[-3.75, 0], h[x, y] == h[1.25, 0],
     h[x, y] == h[1 / 2, 0], h[x, y] == 1}, {x, -4, 1.5}, {y, -2, 2},
    ContourShading → False, ContourStyle → {{Black}}, Frame → None, Axes → True,
    AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {"x", "y"}, AspectRatio → Automatic];

In[6]:= ss = Graphics[
    {PointSize[.01], Table[Point[{centers[[i]], 0}], {i, Length[centers]}]}];

In[7]:= pic = Show[pic, ss]
```

Out[7]=




```
In[8]:= centers = {-2, -1 / 2, 3 / 2};

In[9]:= Clear[x, y, u, v, h]; {u[x_, y_], v[x_, y_], h[x_, y_]} = rationalintegral[centers]
```

Out[9]= $\left\{y\left(\frac{11}{4}-2x-3x^2+y^2\right),\ -\frac{3}{2}+x^2+x^3-y^2+x\left(-\frac{11}{4}-3y^2\right),\ \left(\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+y^2\right)^7 \Big/ \left(\left(\left(-\frac{3}{2}+x\right)^2+y^2\right)^3\left((2+x)^2+y^2\right)^4\right)\right\}$

```
In[10]:= D[h[x, y], x] u[x, y] + D[h[x, y], y] v[x, y] // Simplify
```

Out[10]= 0

```
In[11]:= pic = ContourPlot[{h[x, y] == h[-3, 0], h[x, y] == h[0, 0],
     h[x, y] == h[3, 0], h[x, y] == h[1 / 2, 0], h[x, y] == 1},
    {x, -4, 3.5}, {y, -2, 2}, ContourShading → False, PlotPoints → 75,
    ContourStyle → {{Black}}, Frame → None, Axes → True,
    AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {"x", "y"}, AspectRatio → Automatic];

In[12]:= ss = Graphics[
    {PointSize[.01], Table[Point[{centers[[i]], 0}], {i, Length[centers]}]}];

In[13]:= pic = Show[pic, ss]
```

Out[13]=

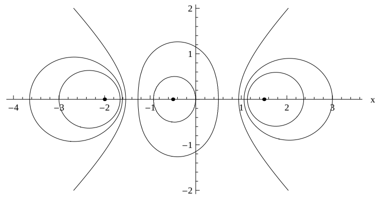


Рис. 2

В качестве ещё одного примера рассмотрим систему Коши-Римана с однородными нелинейностями

$$\dot{x} = -y + p_{n+1}(x, y),\ \dot{y} = x + q_{n+1}(x, y),\ p_{n+1,x} = q_{n+1,y},\ p_{n+1,y} = -q_{n+1,x},\quad (15)$$

отвечающую комплексной системе

$$\dot{z} = iz + az^{n+1},\ a \in \mathbb{C}.$$

Такие системы рассматривались в [6], где было показано, что все их точки покоя являются изохронными центрами. В дополнение к проведённому там исследованию найдём рациональный первый интеграл системы (15).

Как и при доказательстве Теоремы 1, можно показать, используя функции

$$F_1(z, \bar{z}) = |z|^2 = z\bar{z},\ F_2(z, \bar{z}) = |i + az^n|^2 = (i + az^n)(-i + \bar{a}\bar{z}^n),$$

что функции

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 = |z|^2,\ f_2(x, y) = |i + az^n|^2$$

будут вещественными инвариантами системы (15) с вещественными кофакторами

$$\tilde{c}_1(x, y) = 2\mathrm{Re}(az^n),\ \tilde{c}_2(x, y) = 2n\mathrm{Re}(az^n),$$

сответственно.

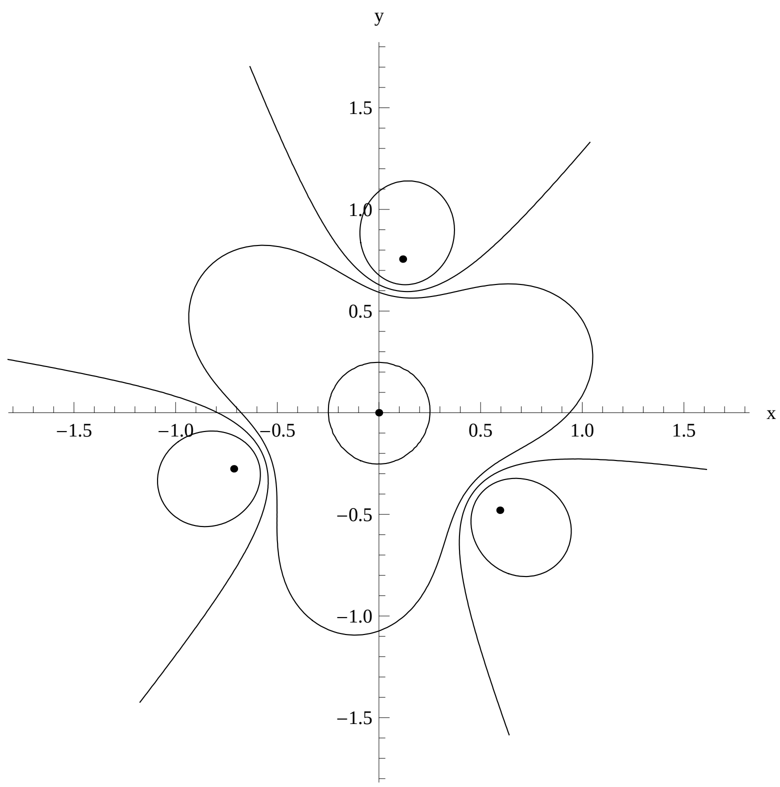


Рис. 3

Поскольку $n\tilde{c}_1(x,y) - \tilde{c}_2(x,y) = 0$, заключаем, что рассматриваемая система имеет рациональный первый интеграл

$$H(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^n}{\mathrm{Re}^2(az^n) + \mathrm{Im}^2(az^n+i)}. \tag{16}$$

Точками покоя системы (15) являются начало координат и точки $z_k = \sqrt[n]{-i/a}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, равномерно распределённые на окружности. Начало координат соответствует $H(x,y) = 0$, переферийные точки покоя отвечают $H(x,y) = \infty$.

Как уже отмечалось все эти точки будут изохронными центрами. При этом начало координат имеет тип B^n, остальные — B^1.

Граница областей центров образованы двоякоассимптотическими сепаратрисами соседних бесконечно удалённых седел, расположенных в вершинах правильного $2(n-1)$-угольника на экваторе диска Пуанкаре. Эти сепаратрисы лежат в множестве уровня интеграла (16) $H(x,y) = 1/|a|^2$.

Рассматриваемая система обладает группой симметрий, которая состоит из поворотов вокруг начала координат на углы, кратные углу $\theta = 2\pi/n$.

На рисунке 3 приведён фазовый портрет системы

$$\dot{x} = -y + 2x^4 - 4x^3y - 12x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4,\ \dot{y} = x + x^4 + 8x^3y - 6x^2y^2 - 8xy^3 + y^4,$$

отвечающей комплексной системе

$$\dot{z} = iz + (2+i)z^4.$$

Первый интеграл системы согласно (16) имеет вид

$$H(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^3}{(1+x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3)^2 + (2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3)^2}.$$

Рисунок получен средствами системы *Mathematica*. В частности, для изображения орбит была использована команда `ContourPlot` применительно к найденному интегралу.

Автор выражает благодарность рецензенту за критические замечания.

Список литературы

[1] *Gregor J.* Dynamické systémy s regulární pravou stranou. I // Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, **3**:2 (1958), 153–160. Zbl 0081.30802.

[2] *Гаврилов Н. И.* Методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1962. MR0173800.

[3] *Лукашевич Н. А.* Изохронность центра некоторых систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, **1**:5 (1965), 295–302. MR0197863.

[4] *Плешкан И. И.* Некоторый способ исследования на изохронность системы двух дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, **5**:6 (1969), 1083–1090. MR0249715.

[5] *Mardesic P., Rousseau C., Toni B.* Linearization of isochronous centers // Journal of Differential Equations, **121**:1 (1995), 67–108. MR1348536.

[6] *Christopher C. J., Devlin J.* Isochronous centers in planar polynomial systems // SIAM J. Math. Anal., **28**:1 (1997), 162–177. MR1427732.

[7] *Волокитин Е. П., Чересиз В. М.* Особые точки и первые интегралы голоморфных динамических систем // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2013. Вып. 2.

[8] *Villarini, M.* Regularity properties of the period function near a center of a planar vector field // Nonlinear Anal., **19**:8 (1992), 787–803. MR1186791.

[9] *Chavarriga J., Sabatini M.* A survay of isochronous centers // Qualitative Theory of Dynamical Systems, **1** (1999), 1–70. MR1747197.

[10] *Garcia I. A., Grau M.* A survey on the inverse integrating factor // Qualitative Theory of Dynamical Systems, **9** (2010), 115–166. MR2737359.

[11] *Ибрагимов Н. Х.* Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Нижний Новгород. Изд-во Нижегородского университета, 2007.

[12] *Darboux J. G.* Mémoire sur les'equations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges) // Bull. Sci. Math. (1878), 60–96, 123–144, 151–200.

[13] *Christopher C.* Invariant algebraic curves and conditions for a centre // Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A., **124** (1994), 1209–1229. MR1313199.

[14] *Ferragut A., Llibre J.* On the remarkable values of the rational first integrals of polynomial vector fields // Journal of Differential Equations, **241** (2007), 399–417. MR2358899.

[15] *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.—Л., Государственное издательство технической литературы, 1947.

[16] *Conti R.* Centers of planar polynomial systems. A review// Le Matematiche, **53** Fasc. II. (1998), 207–240. MR1710759.

Евгений Павлович Волокитин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: volok@math.nsc.ru