S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 285–301 (2013) УДК 512.54
MSC 20D99

О СИСТЕМАХ ПОРОЖДАЮЩИХ НЕКОТОРЫХ ГРУПП С 3-ТРАНСПОЗИЦИЯМИ

А.И. СОЗУТОВ, А.А. КУЗНЕЦОВ, В.М. СИНИЦИН

Abstract. The generator systems of groups $Sp(2n, 2)$, $O^+(2n, 2)$ and $O^-(2n, 2)$ which are similar to generators systems of Weyl groups of Lie algebras E_6, E_7 and E_8 are found.

Keywords: Coxeter groups, generators and relations, groups with 3-transpositions.

1. Введение

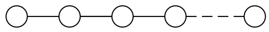
Множество $D = a^G$ инволюций группы G называется *классом* 3-*транспозиций*, если $|ab| \leq 3$ для любых $a, b \in D$ и $G = \langle D \rangle$; подгруппа H из G порожденная множеством $D \cap H$ называется D-*подгруппой* [1]. Каждому подмножеству $X \subseteq D$ поставим в соответствие граф Коксетера $\Gamma(X)$ [2]: 1) вершинами графа $\Gamma(X)$ являются элементы из X; 2) вершины a, b соединены ребром в $\Gamma(X)$ в том и только том случае, когда инволюции a и b неперестановочны. Если X — минимальная система порождающих группы G, граф $\Gamma = \Gamma(X)$ называем *графом группы* G, число $|X|$ — *рангом* группы, и группу G обозначаем через $G(\Gamma)$, а фактор-группу $G/O_2(G)$ — через $W^*(\Gamma)$. Группа G называется *связной*, если ее граф Γ связен. Введем обозначения некоторых графов с n вершинами (в том числе n-х пополнений графов Дынкина):

Sozutov, A.I., Kuznetsov, A.A., Sinitsin, V.M., About systems of generators of some groups with 3-transpositions.

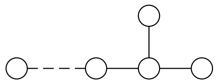
Работа поддержана РФФИ (проект 10-01-00509-а).

Поступила 18 февраля 2013 г., опубликована 3 апреля 2013 г.

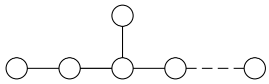
$A_n, \ n \geq 1:$



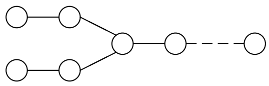
$D_n, \ n \geq 4:$



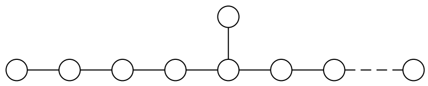
$E_n, \ n \geq 6:$



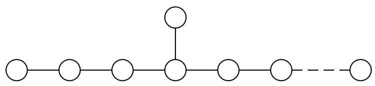
$I_n, \ n \geq 7:$



$J_n, \ n \geq 9:$



$K_n, \ n \geq 8:$



Группы Вейля $W(\Gamma)$ ($\Gamma \in \{A_n, D_n, E_6, E_7, E_8\}$), порождаются отражениями w_r, где r пробегает множество фундаментальных корней соответствующей алгебры Ли $L(\Gamma)$ [2], при этом множество отражений w_r, где r пробегает множество всех положительных корней алгебры $L(\Gamma)$, является классом 3-транспозиций группы $W(\Gamma)$. Это конечные группы Коксетера $S(\Gamma)$ с генетическим кодом, задаваемым графом Γ. Напомним используемые обозначения: S_n — симметрическая группа степени n, $Sp_{2n}(2)$ и $O^{\pm}_{2n}(2)$ — симплектическая и соответственно полные ортогональные группы типа $\pm$ над полем F_2 из двух элементов. Доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Если конечная группа G с классом D 3-транспозиций и графом Γ не содержит D-подгрупп порядков 18 и 54, то имеет место хотя бы один из изоморфизмов:*

(1) $W^*(\Gamma) \simeq W^*(A_n) \simeq S_{n+1}$;
(2) $W^*(\Gamma) \simeq W^*(E_n)$, $n \not\equiv 1 \pmod 4$;
(3) $W^*(\Gamma) \simeq W^*(I_n)$, $n \not\equiv 3 \pmod 4$;
(4) $W^*(\Gamma) \simeq W^*(J_n)$, $n \not\equiv 3 \pmod 4$;

(5) $W^*(\Gamma) \simeq W^*(K_n)$, $n \not\equiv 0 \pmod 2$.

Уточняет эту информацию

Теорема 2. *Для групп $W^*(\Gamma)$, где $\Gamma \in \{E_n, I_n, J_n, K_n\}$ справедливы следующие изоморфизмы:*

(1) $W^*(E_{4k}) \simeq W^*(J_{4k}) \simeq O_{4k}^{\delta_k}(2)$ *и* $W^*(I_{4k}) \simeq O_{4k}^{-\delta_k}(2)$,
(2) $W^*(I_{4k+1}) \simeq W^*(J_{4k+1}) \simeq W^*(K_{4k+1}) \simeq Sp_{4k}(2)$,
(3) $W^*(E_{4k+2}) \simeq W^*(I_{4k+2}) \simeq O_{4k+2}^{\delta_k}(2)$ *и* $W^*(J_{4k+2}) \simeq O_{4k+2}^{-\delta_k}(2)$,
(4) $W^*(E_{4k+3}) \simeq W^*(K_{4k+3}) \simeq Sp_{4k+2}(2)$,

где $\delta_k = +$ для четного k и $\delta_k = -$ для нечетного k.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Имеют место следующие изоморфизмы:*

(1) $Sp_{4k}(2) \simeq W^*(I_{4k+1}) \simeq W^*(J_{4k+1}) \simeq W^*(K_{4k+1})$;
(2) $Sp_{4k+2}(2) \simeq W^*(E_{4k+3}) \simeq W^*(K_{4k+3})$;
(3) $O_{4k}^-(2) \simeq W^*(I_{4k})$ *при четном k;*
(4) $O_{4k}^-(2) \simeq W^*(E_{4k}) \simeq W^*(J_{4k})$ *при нечетном k;*
(5) $O_{4k+2}^-(2) \simeq W^*(E_{4k+2}) \simeq W^*(I_{4k+2})$ *при нечетном k;*
(6) $O_{4k+2}^-(2) \simeq W^*(J_{4k+2})$ *при четном k;*
(7) $O_{4k}^+(2) \simeq W^*(E_{4k}) \simeq W^*(J_{4k})$ *при четном k;*
(8) $O_{4k}^+(2) \simeq W^*(I_{4k})$ *при нечетном k;*
(9) $O_{4k+2}^+(2) \simeq W^*(E_{4k+2}) \simeq W^*(I_{4k+2})$ *при четном k;*
(10) $O_{4k+2}^+(2) \simeq W^*(J_{4k+2})$ *при нечетном k.*

Полученные результаты будут использованы при нахождении определяющих соотношений групп $Sp(2m,2)$, $O^+(2m,2)$ и $O^-(2m,2)$ близких к генетическим кодам групп Вейля $W(E_n)$ ($n = 6$, 7, 8) в системах порождающих их 3-транспозиций [3]. Согласно результатам данной работы, основные определяющие соотношения (соотношения Коксетера) этих групп могут быть заданы графами E_n ($n \neq 4k+1$), I_n ($n \neq 4k+3$), K_n ($n \neq 2k$) и J_n ($n \neq 4k+3$). Как видно из теоремы 2 и следствия 1 граф Γ группы $W^*(\Gamma)$ определен не однозначно, он существенно зависит от выбора системы порождающих. Описание всех графов групп $Sp(2m,2)$, $O^+(2m,2)$ и $O^-(2m,2)$ не являлось целью данной работы, и может быть темой самостоятельных исследований.

2. Используемые результаты

Нам понадобятся простейшие свойства групп с 3-транспозициями (см. например, [4] леммы 1.1 – 1.4)

Предложение 1. *Пусть G — группа с классом D 3-транспозиций. Тогда*

(1) *Если $N \triangleleft G$ и $N \neq G$, то DN/N — класс 3-транспозиций в G/N;*
(2) *Любой граф Γ группы G связен;*
(3) *Если G не содержит D-подгрупп ранга 3 порядков 18 и 54, то все ее связные D-подгруппы ранга 3 изоморфны S_4 и любая фактор-группа $\overline{G}$ не содержит $\overline{D}$-подгрупп порядков 18 и 54.*

Следующие утверждения можно найти в [2][таблицы I, IV - VII] (см. также [5][табл. 9.1 стр. 222]):

Предложение 2. *Имеют место следующие изоморфизмы и равенства:*

(1) $W(A_n) \simeq S_{n+1}$, *где* S_n *— симметрическая группа,* $n \geq 1$;
(2) $|W(D_n)| = 2^{n-1} \cdot n!$, $n \geq 4$, $W^*(D_4) \simeq S_3$ *и* $W^*(D_n) \simeq S_n$ *при* $n \geq 5$;
(3) $|Z(W(E_6))| = 1$, $|Z(W(E_7))| = |Z(W(E_8))| = 2$;
(4) $W(E_6) = W^*(E_6) \simeq O_6^-(2)$, $|W(E_6)| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$;
(5) $W^*(E_7) \simeq Sp_6(2)$, $|W(E_7)| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$;
(6) $W^*(E_8) \simeq O_8^+(2)$, $|W(E_8)| = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Порядки рассматриваемых в работе классических линейных групп определены из [6] с учетом того, что $C_n(2) \simeq Sp_{2n}(2)$ и группы $D_n(2)$, ${}^2D_n(2)$ содержатся соответственно в группах $O_{2n}^+(2)$ и $O_{2n}^-(2)$ в качестве подгрупп индекса 2.

Предложение 3. *Справедливы следующие равенства:*

(1) $|Sp_{2n}(2)| = 2^{n^2} \prod_{s=1}^{n}(2^{2s}-1)$;
(2) $|O_{2n}^+(2)| = 2^{n^2-n+1}(2^n-1)\prod_{s=1}^{n-1}(2^{2s}-1)$;
(3) $|O_{2n}^-(2)| = 2^{n^2-n+1}(2^n+1)\prod_{s=1}^{n-1}(2^{2s}-1)$.

Список фактор-групп $W^*(\Gamma) = G/O_2(G)$ из теоремы 1 можно найти в [4] [теорема 5.3]:

Предложение 4. *Группа* $W^*(\Gamma) = G/O_2(G)$ *изоморфна одной из групп* S_n, $Sp_{2n}(2)$, $O_{2n}^-(2)$, $O_{2n}^+(2)$.

Пусть граф $\Gamma = \Gamma_n$ имеет n вершин $\{p_1, ..., p_n\}$, $G = G(\Gamma) = \langle s_1, ..., s_n\rangle$ и $G/O_2(G) = W^*(\Gamma)$ — группы из формулировки теоремы 1. Далее, пусть V_n — векторное пространство над полем F_2 с базисом $p_1, ..., p_n$. Введем трансвекции (сдвиги) $w_i \in SL_n(2)$, следующим их действием на базисных элементах (в экспоненциальной форме записи), $1 \leq i, j \leq n$:

$$
\begin{aligned}
&p_i^{w_i} = p_i, && && \\
&p_j^{w_i} = p_j + p_i, && i \neq j, && (i,j) \in \Gamma_n, \\
&p_j^{w_i} = p_j, && i \neq j, && (i,j) \notin \Gamma_n.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Следующее предложение вытекает из лемм 3.3, 3.5 и 3.6 [4]

Предложение 5. *Отображение* $\varphi : s_i \to w_i$ $(i = 1, ..., n)$ *продолжается до гомоморфизма* $\varphi : G(\Gamma_n) \to SL_n(2)$ *с ядром* $\operatorname{Ker}\varphi \leq O_2(G)$.

Условимся далее через W_n обозначать $\varphi(G)$, $w_i = w_{p_i}$ — образ s_i в W_n, и когда это удобно, вместо вершины p_i будем записывать ее номер i.

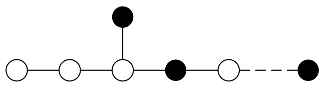
3. Окрашенные графы, действие W_n на V_n, системы корней

В данном параграфе граф Γ_n является деревом и содержит подграф E_6. Каждый вектор $x = p_j^w \in V_n$, где $w \in W_n$, назовем *корнем*; множество всех корней из V_n обозначим через $\prod_n$. Каждому вектору $x \in V_n$ поставим в соответствие биокрашенный граф $\Gamma_n(x)$, в котором вершина p_j черная, если в разложении $x = \sum \gamma_i p_i$ коэффициент $\gamma_j = 1$, и белая (пустая), если $\gamma_j = 0$. Стандартным образом определяется связная окрашенная компонента графа $\Gamma_n(x)$. Компоненту, состоящую из одной вершины, назовем *простой*; если все связные компоненты графа $\Gamma_n(x)$ простые, вектор x назовем *простым.* Число

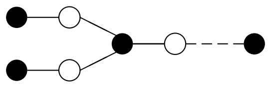
$h(x)$ связных окрашенных компонент в $\Gamma_n(x)$ назовем *числом связности* вектора $x \in V_n$. Если $w \in W_n$, $x \in V_n$ и $y = x^w$, то будем называть векторы x и y *сопряженными* (при помощи w).

Лемма 1. *Группа W_n не меняет четность связности вектора $x \in V_n$. Каждый ненулевой вектор сопряжен к простому вектору, в частности, ненулевой инвариантный вектор x является простым и у каждой вершины графа $\Gamma_n(x)$ четное число соседних черных вершин. Для случаев $\Gamma_n = E_n, I_n, J_n, K_n$ инвариантны следующие векторы:*

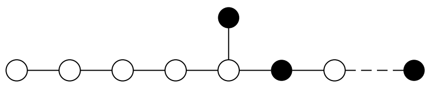
$E_n,\ n = 2k+1:$



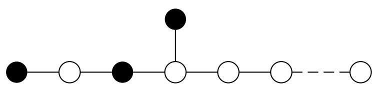
$I_n,\ n = 2k+1:$



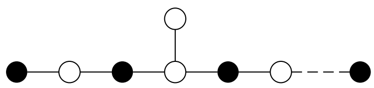
$J_n,\quad n = 2k+1:$



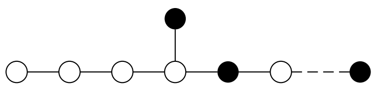
$K_n,\ n \geq 8:$



$K_n,\ n = 2k \geq 8:$



$K_n,\ n = 2k \geq 8:$



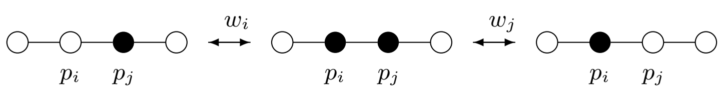
Доказательство. Действие порождающих элементов $w_1, \ldots, w_n$ группы W_n на $x = \sum \gamma_i p_i$ определяется формулой (1): $x^{w_j} = x + \delta p_j$, где $\delta = 1$, если число соседних с вершиной p_j черных вершин в графе $\Gamma_n(x)$ нечетно, и $\delta = 0$, если это число четно. Итак, если $x^{w_j} \neq x$, то $m_j \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)$ и $x^{w_j} = x + p_j$. Если вершина p_j в $\Gamma_n(x)$ черная, то она принадлежит связной компоненте графа $\Gamma_n(x)$ и в графе $\Gamma_n(x + p_j)$ вершина p_j белая, а так как Γ_n дерево, то исходная связная компонента распалась на m_j компонент. Следовательно, $h(x) \equiv h(x + p_j)(\mathrm{mod}\, 2)$. Если вершина p_j в $\Gamma_n(x)$ белая (пустая), то нечетное число m_j указанных компонент графа $\Gamma_n(x)$ слились в графе $\Gamma_n(x+p_j)$ в одну компоненту, и снова $h(x^{w_{p_j}}) \equiv h(x)(\bmod 2)$. Первое утверждение доказано.

Далее, поскольку в Γ_n нет циклов, то любая не простая компонента вектора x имеет вершины-концы (с одной черной соседней вершиной), пусть p_j одна из них. Тогда $x^{w_j} = x+p_j$ и вершина p_j в графе $\Gamma_n(x+p_j)$ стала белой (пустой), а число вершин исходной компоненты уменьшилось на единицу. Продолжая этот процесс получим простой вектор $y = x^w$. В частности, если r инвариантный относительно W_n вектор из V_n, то он простой и у каждой вершины в графе $\Gamma_n(r)$ четное число соседних черных вершин. Легко убедиться, что для графов E_n, I_n, J_n, K_n только приведенные в лемме конфигурации удовлетворяют последнему условию. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. *Группа W_n действует транзитивно на множестве всех неинвариантных (относительно W_n) нечётно связных векторов пространства V_n и на множестве всех неинвариантных чётно связных векторов. В частности, вектор $x \in V_n$ тогда и только тогда является корнем, когда он неинвариантен и нечетно связен.*

Доказательство. Пусть p_i и p_j соседние вершины в графе Γ_n. Тогда $p_j^{w_i w_j} = p_i$ и в силу связности графа Γ_n все корни $p_1, ..., p_n$ принадлежат одной орбите и W_n транзитивна на $\prod_n$.

Пусть x — произвольный неинвариантный вектор из V_n с числом связности $h(x)$. Поскольку Γ_n — дерево, то ввиду леммы 1 можно считать, что x — простой вектор. Если $h(x) = 1$, то имеем $x = p_i$ и как показано выше $x^{W_n} = \prod_n$. Пусть $h(x) = 2$. Поскольку x не инвариантен, то хотя бы одна из его компонент допускает движение (перекатывание) вида $x^{w w_i w_j} = x^w + p_j + p_i$, изображенное на рисунке.



И понятно, что при помощи указанных движений вектор x может быть приведен к неинвариантному вектору p_1+p_n, в котором вершины p_1 и p_n являются конечными. Это означает, что все 2-связные векторы сопряжены.

Пусть $h(x) \geq 3$. Поскольку Γ_n содержит подграф E_6 и не содержит циклов, то при помощи подходящих движений можно привести вектор x к вектору x^w, у некоторой пустой вершины p_j ветвления которого нечетное число $m_j \geq 3$ черных соседних вершин (простых компонент графа $\Gamma_n(x^w)$). Действуя симметрией w_j указанные компоненты сольем в одну компоненту, а затем, как и в доказательстве леммы 1, полученную компоненту сожмем до простой. Это означает, что вектор x сопряжен с вектором y с числом связности $h(y) < h(x)$, причем по лемме 1 $h(y) \equiv h(x) \,(\bmod 2)$. Следовательно, лемма верна. $\square$

Для каждого $r \in \prod_n$ определим преобразование w_r пространства V_n:

$$x^{w_r} = \begin{cases} x + r, & \text{если} \quad h(x) \equiv h(x+r) \,(\bmod 2); \\ x, & \text{если} \quad h(x) \not\equiv h(x+r) \,(\bmod 2). \end{cases} \tag{2}$$

Лемма 3. *Все преобразования w_r, определенные в (2), принадлежат W_n, причем для любого элемента $z \in W_n$ и любого корня $r \in \prod_n$ имеет место равенство $z^{-1}w_r z = w_{r^z}$.*

Доказательство. Пусть $r = p_j$ — фундаментальный корень. Рассмотрим действие $z^{-1}w_r z$ на текущем векторе $x = y^z$. Имеем $x^{z^{-1}w_r z} = y^{w_r z} = (y + \delta r)^z = x + \delta s$, где $s = r^z$. При этом, если векторы y, $y + r$ имеют одинаковую четность связности, то $\delta = 1$, а если противоположную, то $\delta = 0$. Поскольку четность связности есть инвариант при действии W_n (лемма 1), то четность связности у векторов x и $x + \delta s$ одна и та же, и согласно определению (2) $x + \delta s = x^{w_s}$, т.е. $w_s = z^{-1}w_{p_j}z \in W_n$. Ввиду леммы 2 $w_s \in W_n$ для любого $s \in \prod_n$ и понятно, что равенство $w_r^z = w_{r^z}$ справедливо для любого корня r. Лемма доказана. □

Из лемм 1 – 3 легко следует

Лемма 4. *Пусть r, s произвольные векторы из $\prod_n$. Если $r + s \in \prod_n$, то $r^{w_s} = s^{w_r} = r + s$ и, значит, $w_r^{w_s} = w_{r+s} = w_s^{w_r}$, а если $r + s \notin \prod_n$, то $r^{w_s} = r$, $s^{w_r} = s$ и потому $w_r w_s = w_s w_r$. Для произвольного $x \in V_n \setminus \prod_n$ либо $x + r \in V_n \setminus \prod_n$ и $x^{w_r} = x + r$, либо $x + r \notin V_n \setminus \prod_n$ и $x^{w_r} = x$.*

Элементы w_r из W_n ($r \in \prod_n$) будем называть *корневыми симметриями.* Корень r назовем *ортогональным* вектору x, если $x^{w_r} = x$.

4. Комбинаторика биокрашенных деревьев

Обозначим через t_n число нечетно связных векторов из пространства V_n.

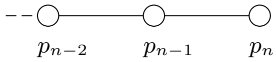
Лемма 5. *Пусть пространство V_n содержит единственный нечетно связный инвариантный вектор r. Тогда четность связности векторов x и $x + r$ противоположны для любого ненулевого вектора $x \in V_n$, $t_n = 2^{n-1}$ и $|\prod_n| = 2^{n-1} - 1$.*

Доказательство. Пусть r — нечетно связный инвариантный вектор в V_n. По лемме 1 r — простой вектор и поскольку Γ_n дерево, некоторая компонента p_j графа $\Gamma_n(r)$ является конечной (имеет валентность 1). Вложим граф Γ_n в граф Γ_{n+1}, добавив вершину p_{n+1} и ребро (p_j, p_{n+1}). Согласно леммам 2, 4 w_r — корневая симметрия в W_{n+1}, но ее очевидно нет в W_n. Из лемм 2, 4 и определения (2) следует, что четности связности векторов x и $x + r$ противоположны для любого ненулевого вектора $x \in V_n$. Значит, четно связных и нечетно связных векторов в V_n одинаковое число, равное 2^{n-1}. В частности, $|\prod_n| = 2^{n-1} - 1$. Лемма доказана. □

Лемма 6. *Если в V_n есть ненулевой четно связный инвариантный вектор r и нет нечетносвязных инвариантных векторов, то для любого корня s вектор $r + s$ является корнем и $t_n = 2t_{n-1}$.*

Доказательство. По лемме 1 каждая компонента вектора r проста. Так как Γ_n дерево, то граф $\Gamma_n(r)$ содержит компоненту валентности 1, не ограничивая общности считаем, что указанная компонента есть p_n. Ввиду условий леммы вектор $s = r + p_n$ нечетносвязен и по леммам 2, 4 является корнем. В силу транзитивности W_n на $\prod_n$ (лемма 2) и инвариантности r имеем $r = s^w + p_n^w$, где один из корней s^w, p_n^w принадлежит V_{n-1}, а второй содержится в $\prod_n \setminus V_{n-1}$. Значит, $t_n = 2t_{n-1}$. Лемма доказана. □

Далее предполагаем, что граф Γ_n имеет вид



и $\Gamma_{n-2} \subset \Gamma_{n-1} \subset \Gamma_n$, $V_{n-2} \subset V_{n-1} \subset V_n$.

Лемма 7. *Имеет место соотношение* $t_n = 2t_{n-1} + 2^{n-2} - 2t_{n-2}$.

Доказательство. Число нечетно связных векторов в V_n вида $r+p_n$, где r четно связный вектор из V_{n-2}, равно $2^{n-2} - t_{n-2}$. Число нечетно связных векторов вида $r+p_{n-1}+p_n$, где $r \in V_{n-2}$, равно $t_{n-1} - t_{n-2}$. И, наконец, нужно включить еще t_{n-1} нечетносвязных векторов из V_{n-1}. Следовательно, $t_n = 2t_{n-1} + 2^{n-2} - 2t_{n-2}$. Лемма доказана. □

Лемма 8. *Для случая* $\Gamma_n = E_n$ *справедливы следующие равенства:*
(1) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1}2^{2k-1} = 2^{2k-1}(2^{2k} + (-1)^{k+1}) = |\prod_{4k}|$;
(2) $t_{4k+1} = 2^{4k} + (-1)^{k+1}2^{2k} = 2^{2k}(2^{2k} + (-1)^{k+1}) = |\prod_{4k+1}|$;
(3) $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1}2^{2k} = 2^{2k}(2^{2k+1} + 1)^{k+1}) = |\prod_{4k+2}|$;
(4) $t_{4k+3} = 2^{4k+2}$ *и* $|\prod_{4k+3}| = 2^{4k+2} - 1$.

Доказательство. Ввиду лемм 1 и 5 $t_{4k+3} = 2^{4k+2}$ и $|\prod_{4k+3}| = 2^{4k+2} - 1$. При $n = 6, 7, 8$ $|\prod_n|$ равно числу положительных корней алгебры Ли E_n и согласно таблице 9.1 [5][стр. 222] $|\prod_6| = 36$, $|\prod_8| = 120$, т.е. для $n = 6, 8$ лемма также верна. Используя индукцию и реккурентное соотношение $t_n = 2t_{n-1} + 2^{n-2} - 2t_{n-2}$ из леммы 7, получаем

$$\begin{aligned}(3)\qquad t_{4k+1} &= 2(2^{4k-1} + (-1)^{k+1}2^{2k-1}) + 2^{4k-1} - 2 \cdot 2^{4k-2} = \\ &= 2^{4k} + (-1)^{k+1}2^{2k} + 2^{4k-1} - 2^{4k-1} = 2^{4k} + (-1)^{k+1}2^{2k},\end{aligned}$$

$$(4)\qquad t_{4k+2} = 2(2^{4k} + (-1)^{k+1}2^{2k}) + 2^{4k} - 2(2^{4k-1} + (-1)^{k+1}2^{2k-1}) =$$

$$= 2^{4k+1} + (-1)^{k+1}2^{2k+1} + 2^{4k} - 2^{4k} + (-1)^k 2^{2k} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1}2^{2k},$$

$$\begin{aligned}(5)\qquad t_{4k+3} &= 2(2^{4k+1} + (-1)^{k+1}2^{2k}) + 2^{4k+1} - 2(2^{4k} + (-1)^{k+1}2^{2k}) = \\ &= 2^{4k+2} + (-1)^{k+1}2^{2k+1} + 2^{4k+1} - 2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k+1} = 2^{4k+2}.\end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}(6)\qquad t_{4k+4} &= 2 \cdot 2^{4k+2} + 2^{4k+2} - 2(2^{4k+1} + (-1)^{k+1}2^{2k}) = \\ &= 2^{4k+3} + 2^{4k+2} - 2^{4k+2} + (-1)^{k+2}2^{2k+1} = 2^{4k+3} + (-1)^{k+2}2^{2k+1},\end{aligned}$$

то есть $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1}2^{2k-1}$. Остается заметить, что ввиду лемм 1, 2 при $n \neq 4k+3$ выполняется равенство $|\prod_n| = t_n$. Лемма доказана. □

Лемма 9. *Для случая* $\Gamma_n = I_n$ *справедливы следующие равенства:*
(1) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1} = 2^{2k-1}(2^{2k} + (-1)^k) = |\prod_{4k}|$;

(2) $t_{4k+1} = 2^{4k}$ *и* $|\prod_{4k+1}| = 2^{4k} - 1 = (2^{2k}+1)(2^{2k}-1)$;
(3) $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1}2^{2k} = 2^{2k}(2^{2k+1} + (-1)^{k+1}) = |\prod_{4k+2}|$;
(4) $t_{4k+3} = 2^{4k+2} + (-1)^{k+1}2^{2k+1} = 2^{2k+1}(2^{2k+1} + (-1)^{k+1}) = |\prod_{4k+3}|$.

Доказательство. Вначале установим основание индукции. Так как $I_6 = E_6$, то $t_6 = 36$ (табл. 9.1 [5][стр. 222]). По лемме 1 в V_7 есть ненулевой инвариантный четносвязный вектор и по лемме 6 $t_7 = 72$. Кроме того, из лемм 1 и 5 следует, что $t_{4k+1} = 2^{4k}$, $|\prod_{4k+1}| = 2^{4k} - 1$. Предполагая, что для всех значений $6 \leq n < 4k$ лемма верна, с помощью соотношения $t_n = 2t_{n-1} + 2^{n-2} - 2t_{n-2}$ (лемма 7) получаем

$$\begin{aligned}(7)\qquad t_{4k} &= 2(2^{4k-2} + (-1)^k 2^{2k-1}) + 2^{4k-2} - 2(2^{4k-3} + (-1)^k 2^{2k-2}) = \\ &= 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k} + 2^{4k-2} - 2^{4k-2} - (-1)^k 2^{2k-1} = 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8)\qquad t_{4k+1} &= 2(2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1}) + 2^{4k-1} - 2(2^{4k-2} + (-1)^k 2^{2k-1}) = \\ &2^{4k} + (-1)^k 2^{2k} + 2^{4k-1} - 2^{4k-1} - (-1)^k 2^{2k} = 2^{4k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(9)\qquad t_{4k+2} &= 2 \cdot 2^{4k} + 2^{4k} - 2(2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1}) = \\ &= 2^{4k+1} + 2^{4k} - 2^{4k} + (-1)^{k+1} 2^{2k} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1} 2^{2k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(10)\qquad t_{4k+3} &= 2(2^{4k+1} + (-1)^{k+1} 2^{2k}) + 2^{4k+1} - 2 \cdot 2^{4k} = \\ &= 2^{4k+2} + (-1)^{k+1} 2^{2k+1} + 2^{4k+1} - 2^{4k+1} = 2^{4k+2} + (-1)^{k+1} 2^{2k+1}.\end{aligned}$$

Таким образом, значения параметра t_n в лемме указаны верно, $|\prod_{4k+1}| = t_{4k+1} - 1$ и $|\prod_n| = t_n$ при $n \neq 4k+1$ в силу лемм 1, 2. Лемма доказана. □

Лемма 10. *Для случая* $\Gamma_n = J_n$ *справедливы следующие равенства:*
(1) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1}2^{2k-1} = 2^{2k-1}(2^{2k} + (-1)^{k+1}) = |\prod_{4k}|$;
(2) $t_{4k+1} = 2^{4k}$ *и* $|\prod_{4k+1}| = 2^{4k} - 1 = (2^{2k}+1)(2^{2k}-1)$;
(3) $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k} = 2^{2k}(2^{2k+1} + (-1)^k) = |\prod_{4k+2}|$;
(4) $t_{4k+3} = 2^{4k+2} + (-1)^k 2^{2k+1} = 2^{2k+1}(2^{2k+1} + (-1)^k) = |\prod_{4k+3}|$.

Доказательство. Поскольку $J_8 = E_8$, то $t_8 = 120$ (табл. 9.1 [5][стр. 222]), и ввиду лемм 1 и 5 $t_9 = 2^8$. Применяя соотношение $t_n = 2t_{n-1} + 2^{n-2} - 2t_{n-2}$ (лемма 7), получаем

$$\begin{aligned}(11)\qquad t_{4k+2} &= 2 \cdot 2^{4k} + 2^{4k} - 2(2^{4k-1} + (-1)^{k+1} 2^{2k-1}) = \\ &= 2^{4k+1} + 2^{4k} - 2^{4k} + (-1)^k 2^{2k} = 2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(12)\qquad t_{4k+3} &= 2(2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k}) + 2^{4k+1} - 2 \cdot 2^{4k} = \\ &= 2^{4k+2} + (-1)^k 2^{2k+1} + 2^{4k+1} - 2^{4k+1} = 2^{4k+2} + (-1)^k 2^{2k+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(13)\qquad t_{4k+4} &= 2(2^{4k+2} + (-1)^k 2^{2k+1}) + 2^{4k+2} - 2(2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k}) = \\ &2^{4k+3} + (-1)^k 2^{2k+2} + 2^{4k+2} - 2^{4k+2} + (-1)^{k+1} 2^{2k+1} = 2^{4k+3} + (-1)^k 2^{2k+1},\end{aligned}$$

то есть $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1}2^{2k-1}$. Наконец,

$$t_{4k+1} = 2(2^{4k-1} + (-1)^{k+1}2^{2k-1}) + 2^{4k-1} - 2(2^{4k-2} + (-1)^{k-1}2^{2k-1}) = \tag{14}$$
$$= 2^{4k} + (-1)^{k+1}2^{2k} + 2^{4k-1} - 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k} = 2^{4k}.$$

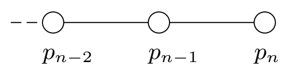
Как и в доказательствах лемм 8, 9 заключаем, что лемма верна. □

Лемма 11. *Для случая* $\Gamma_n = K_n$ *справедливы следующие равенства:*
(1) $t_{2k+1} = 2^{2k}$ *и* $|\prod_{2k+1}| = 2^{2k} - 1$;
(2) $t_{2k+2} = 2^{4k+1}$ *и* $|\prod_{2k+2}| = 2^{2k+1} - 2$.

Доказательство. По лемме 1 для любого $n \geq 8$ в V_n есть нечетно связный вектор инвариантный вектор, а при $n = 2k+1$ этот вектор единственный. По лемме 5 $t_{2k+1} = 2^{2k}$ и $|\prod| = 2^{2k} - 1$. При $n = 2k+2$ в V_n три ненулевых инвариантных вектора, один четносвязный и два нечетносвязных. По лемме 6 $t_{2k+2} = 2t_{2k+1} = 2^{2k+1}$ и понятно, что $|\prod_{2k+2}| = 2^{2k+1} - 2$. Лемма доказана. □

5. Нормальные подгруппы и вложение W_{n-1} в W_n

Далее рассматриваем серию графов, в которой граф Γ_n имеет вид



$\Gamma_{n-2} \subset \Gamma_{n-1} \subset \Gamma_n$ (серия графов), $V_{n-2} \subset V_{n-1} \subset V_n$ и пространства V_{n-2}, V_{n-1}, V_n не содержат общего ненулевого неивариантного вектора относительно групп W_{n-2}, W_{n-1}, W_n.

Лемма 12. *Все элементы* $w_r w_s$, *где* $r, s, r+s \in \prod_n$ *сопряжены в* W_n.

Доказательство. Достаточно доказать, что элемент $w_r w_s$ сопряжен с элементом $w_{p_{n-1}} w_{p_n}$. В силу лемм 2, 4 можно считать, что $s = p_n$, $r = p_{n-1} + v$, где $v \in V_{n-2}$. И если $v \neq 0$, то подгруппа $M = \langle w_{p_{n-1}}, w_{p_n}, w_r \rangle$ изоморфна группе S_4 (предложение 1), в которой все элементы порядка 3 сопряжены. Лемма доказана. □

Лемма 13. *Центр* $Z(W_n)$ *группы* W_n *тривиален, а коммутант* W_n' *совпадает с нормальным замыканием любого элемента* $w_r w_s$ *порядка 3, где* $r, s, r+s \in \prod_n$, *при этом либо* W_n' *совпадает с* W_n, *либо* $|W_n : W_n'| = 2$.

Доказательство. Если $z \in Z(W_n)$, то $w_{p_j}^z = w_{p_j}$ и по лемме 4 $p_j^z = p_j$ для любого $1 \leq j \leq n$. Следовательно, $z = 1$ и $Z(W_n) = 1$.

В силу лемм 2, 4 $w_r w_s \in W_n'$ для любых корней $r, s \in \prod_n$. В частности, $W_n = W_n'\langle w_r \rangle$, $W_n' w_r = W_n' w_s$ и $|W_n : W_n'| \leq 2$. Заметим также, что из равенства $W_n = W_n'\langle w_r \rangle$ и леммы 12 следует $W_n' = \langle w_r w_s \mid |w_r w_s| = 3, r, s \in \prod_n \rangle = \langle w_r w_s \mid |w_r w_s| = 2, r, s \in \prod_n \rangle$. □

Группа $W_{n-1} = \langle w_1, ..., w_{n-1} \rangle$ по определению действует на пространстве V_{n-1} и $w_i = s_i O_2(G(\Gamma_{n-1}))$, а соответствующая подгруппа из W_n действует уже на V_n и в W_n элементы w_i совпадают с $s_i O_2(G(\Gamma_n))$, где $G(\Gamma_{n-1}) < G(\Gamma_n)$. Обозначим подгруппу $\langle w_1, ..., w_{n-1}\rangle$ в W_n через $\hat{W}_{n-1}$, и поскольку $\hat{W}_{n-1}$ действует на V_{n-1} так же, как и W_{n-1}, то $W_{n-1} \simeq \hat{W}_{n-1}/K$, где K нормальная в $\hat{W}_{n-1}$ подгруппа. Если $K = 1$, то $\hat{W}_{n-1} \simeq W_{n-1}$, и можно считать, что $W_{n-1} < W_n$.

Лемма 14. *Пусть r — четносвязный инвариантный вектор в V_n. Тогда $p_n + r \in \prod_n$, нормальное замыкание T элемента $w_{p_n} w_{p_n+r}$ в группе W_n является элементарной абелевой группой порядка 2^{n-1} и $W_n = T \cdot \hat{W}_{n-1}$.*

Доказательство. Ввиду условий, наложенных на серию графов Γ_n, в пространствах V_{n-1}, V_n нет общих ненулевых инвариантных векторов, в частности, p_n является необходимой компонентой вектора r. Пусть s — произвольный корень из V_n, тогда по леммам 2, 4 $s' = s + r$ тоже корень и $r = s + s'$. Из леммы 4 следует, что $(w_s w_{s+r})^2 = 1$ и для любого корня v либо $s+v, s'+v \in \prod_n$, либо $s+v, s'+v \notin \prod_n$. С помощью леммы 4 выводим, что если $s+v, s'+v \in \prod_n$, то $[w_s w_{s'}, w_{s+v} w_{s'+v}] = 1$. Следовательно, нормальное замыкание T элемента $w_s w_{s+r}$ в группе W_n является элементарной абелевой 2-группой. Нетрудно убедиться, что $w_{p_1} w_{p_1+r}, ..., w_{p_{n-1}} w_{p_{n-1}+r}$ — минимальная система порождающих группы T, и очевидно, что $W_n = T \cdot \hat{W}_{n-1}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 15. *Если N — собственная нормальная подгруппа группы W_n отличная от коммутанта W_n', то V_n содержит ненулевой инвариантный четносвязный вектор.*

Доказательство. Пусть $1 \neq h \in N$. Ввиду леммы 13 $s = p_i^h \neq p_i$ для некоторого $1 \leq i \leq n$. Элемент $w_{p_i} w_s$ очевидно содержится в N, и если $|w_{p_i} w_s| = 3$, то по лемме 13 $N \geq W_n'$, вопреки условиям. Значит, $|w_{p_i} w_s| = 2$ и в силу леммы 4 корни p_i, s ортогональны. Допустим, что некоторый корень $v \in \prod_n$ ортогонален корню p_i, но не ортогонален корню s. Тогда элемент $w_v w_{p_i} w_s w_v w_{p_i} w_s = w_{p_i} w_{s+v} w_{p_i} w_s = w_{s+v} w_s$ принадлежит N, s, v, $s+v \in \prod_n$ и по лемме 13 $N \geq W_n'$, вопреки условиям. Следовательно, если корень из $\prod_n$ не ортогонален одному из корней p_i, s, то он не ортогонален и второму корню. Ввиду леммы 4 это означает, что ненулевой вектор $r = s + p_i$ ортогонален любому корню r и потому инвариантен относительно W_n. И поскольку $|w_{p_i} w_s| = 2$, то $r \notin \prod_n$ и согласно леммам 1, 4 r — четносвязный вектор. Лемма доказана. $\square$

Лемма 16. *Если $K \neq 1$, то $K = Z(\hat{W}_{n-1}) = \langle w_r \rangle$, где r нечетносвязный инвариантный вектор в V_{n-1} являющийся корнем в V_n.*

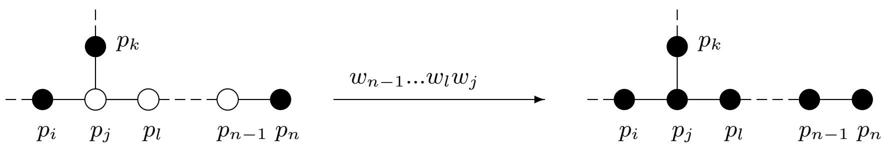
Доказательство. Понятно, что ввиду лемм 2, 4 $K \leq Z(\hat{W}_{n-1})$, и пусть $1 \neq z \in K$. Поскольку $p_j^z = p_j$ для $j < n$, то $p_n^z = p_n + r$, где r ненулевой вектор из V_{n-1}. Очевидно, что $(p_n + r)^z = p_n$, $z^2 = 1$ и $r = p_n + p_n^z$. Пусть $j < n-1$ и $r^{w_j} = s$. Тогда $p_n + r = p_n^z = p_n^{w_j z w_j} = (p_n + r)^{w_j} = p_n + s$ и $s = r$. Аналогично, $p_n + r = p_n^z = p_n^{w_{n-1} z w_{n-1}} = (p_n + p_{n-1})^{z w_j} = (p_n + r + p_{n-1})^{w_{n-1}} = p_n + r^{w_{n-1}}$ и снова $r^{w_{n-1}} = r$. Итак, вектор r инвариантен относительно $\hat{W}_{n-1}$. В силу леммы 1 r простой вектор и одна из его компонент равна p_{n-1}, а поскольку $p_n + r$ корень в V_n, то ввиду лемм 1, 2 r нечетносвязен. Наконец, $p_j^{z w_r} = p_j$ для всех $1 \leq j \leq n$ и $z = w_r$. Лемма доказана. $\square$

Поскольку $|w_r| = 2$ для любого $r \in \prod_n$, то из леммы 16 и лемм 14, 15 следует

Лемма 17. *Если подгруппа N нормальна в W_n и $1 < N < W_n'$, то $N \leq O_2(W_n)$.*

Лемма 18. *Подгруппа $\hat{W}_{n-1}$ транзитивна на множестве $\prod_n \setminus V_{n-1}$.*

Доказательство. Пусть r произвольный корень из $\prod_n \setminus V_{n-1}$. В силу выбора r одна из связных компонент графа $\Gamma_n(r)$ содержит вершину p_n и с помощью фундаментальных симметрий w_j $(j < n)$ она может быть сопряжена с p_n. Далее, ввиду леммы 1 с точностью до сопряженности в $\hat{W}_{n-1}$ можно считать, что все компоненты графа $\Gamma_n(r)$ простые. В частности, если r односвязен, то $r = p_n$ и все доказано. Пусть $\Gamma_n(r)$ состоит из $2+1 \geq 3$ компонент (лемма 2). Поскольку $r + p_n$ содержится в V_{n-2} и не инвариантен в V_{n-2}, то по лемме 2 $r^h = p_i + p_k + p_n$ для подходящего $h \in \hat{W}_{n-2}$ (см. левую конфигурацию рисунка). Действуя на r^h элементом $w_{n-1}...w_l w_j$ получим



односвязный вектор $r^{hw_{n-1}...w_l w_j}$. Следовательно, лемма верна. □

6. Отождествление групп W_n с классическими группами

В данном параграфе предполагается, что для графов $\Gamma = \Gamma_n$ пространств V_n и групп W_n выполняются условия, при которых справедливы леммы 1 — 18. Пусть $x = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ и $y = \sum_{i=1}^n y_i p_i$ — произвольные векторы из V_n. Положим

$$F(x) = \sum_{i\in\Gamma_n} x_i^2 + \sum_{(i,j)\in\Gamma_n} x_i x_j, \tag{15}$$

$$f(x,y) = f_n(x,y) = F(x+y) + F(x) + F(y). \tag{16}$$

Лемма 19. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *$F(x)$ — квадратичная форма на V_n и $F(x) = 1$ тогда и только тогда, когда вектор x нечетно связен;*
(2) *$f(x,y)$ — симплектическая форма на V_n и $f(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда среди векторов x, y, $x+y$ четное число нечетносвязных векторов.*

Доказательство. 1. Форма F квадратична по определению (15). Пусть $0 \neq x \in V_n$ и S некоторая связная компонента графа $\Gamma_n(x)$, содержащая $m(S)$ вершин. Легко убедиться, что

$$F(x) = \sum_{S\subset\Gamma_n(x)} F(S),$$

где суммирование ведется по связным компонентам $S \subset \Gamma_n(x)$. Так как Γ_n дерево, компонента S содержит ровно $m(S)-1$ ребер, и по определению (15) ограничение формы F на компоненте S принимает значение $2m(S)-1 \equiv 1\,(\mathrm{mod} 2) =$

$F(S)$. Отсюда следует, что $F(x) = 0$ в том и только том случае, когда вектор x четно связен.

2. Непосредственно по определению (16) $f(x, x) = F(0) + F(x) + F(x) = 0$ и $f(x, y) = F(x + y) + F(x) + F(y) = f(y, x)$ для всех $x, y \in V_n$.

Так как в поле характеристики 2 $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, то сумма всех квадратов в $f(x, y)$ согласно (15) и (16) равна 0:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + (x_i + y_i)^2) = 0.$$

Для каждой дуги $(i, j) \in \Gamma_n$ имеем $x_i x_j + y_i y_j + (x_i + y_i)(x_j + y_j) = x_i y_j + x_j y_i$ и, значит,

$$f(x, y) = \sum_{(i,j)\in\Gamma}(x_i y_j + x_j y_i). \tag{17}$$

Пусть $z = \sum_{i=1}^{n} z_i p_i$ — произвольный вектор из V_n. Докажем, что $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$. Согласно формуле (17) имеем

$$f(x, y+z) = \sum_{(i,j)\in\Gamma_n} x_i(y_j + z_j) + x_j(y_i + z_i) =$$

$$= \sum_{(i,j)\in\Gamma_n}(x_i y_j + x_j y_i) + \sum_{(i,j)\in\Gamma_n}(x_i z_j + x_j z_i) = f(x, y) + f(x, z).$$

Итак, отображение $f(x, y)$ симметрично, билинейно и $f(x, x) = 0$ для любого x, следовательно, $f(x, y)$ симплектическая форма.

Необходимое и достаточные условия равенства $f(x, y) = 0$ вытекают непосредственно из утверждения 1 леммы и формул (15), (16) определения. Лемма доказана. □

Лемма 20. *Для каждого корня $r \in \prod_n$ и каждого вектора $x \in V_n$ имеет место равенство $x^{w_r} = x + f(x, r)r$, в частности $W_n \le I(F) \le I(f)$, где $I(F), I(f)$ — группы изометрий форм F и f соответственно. Если в V_n нет ненулевых инвариантных векторов, то F и f — невырожденные формы.*

Доказательство. Согласно леммам 3, 4 равенство $x^{w_r} = x + r$ имеет место тогда и только тогда, когда четность связности векторов x и $x+r$ одинакова. По лемме 2 r — неинвариантный нечетносвязный вектор. В силу леммы 4 четность связности векторов x и $x + r = x^{w_r}$ одинакова. Следовательно, множество $\{x, r, x+r\}$ содержит либо 1, либо 3 нечетносвязных вектора. По утверждению 2 леммы 19 в этом случае $f(x, r) = 1$. Таким образом, в рассматриваемом случае $x^{w_r} = x + f(x, r)r$ и в этом случае утверждение леммы верно.

Пусть $x^{w_r} = x$. По лемме 4 четность связности векторов x и $x+r$ противоположны, и поскольку r — нечетносвязен, то множество $\{x, r, x + r\}$ содержит 2 нечетносвязных вектора. По лемме 19 $f(x, y) = 0$ и, значит, $x^{w_r} = x + f(x, r)r$.

Из лемм 2, 4, 19 следует, что $F(x) = F(x^w)$ для любых $x \in V_n$ и $w \in W_n$, то есть $W_n \le I(F)$. Очевидно также, что $W_n \le I(F) \le I(f)$. Когда в V_n нет ненулевых инвариантных векторов, то для любого ненулевого вектора x найдется корень $r \in \prod_n$ такой, что $x^{w_r} \ne x$. Согласно доказанному $f(x, r) \ne 0$, следовательно формы f и F невырождены. Лемма доказана. □

Согласно лемме 1 пространства $V_n = V(\Gamma_n)$ для $\Gamma_n \in \{E_{4k+1}, I_{4k+3}, J_{4k+3}, K_{2k}\}$ содержат инвариантные четносвязные векторы, и по лемме 14 $O_2(W_n) \neq 1$, т.е. W_n не изоморфна W_n^*. Следующая лемма закрывает рассмотрение остальных случаев Γ_n с нечетным n и случаев $\Gamma_n = K_n$ при любом n.

Лемма 21. *Для* $\Gamma_n \in \{E_{4k+3}, I_{4k+1}, J_{4k+1}, K_{2k+1}\}$ *и* $m = \frac{n-1}{2}$ *имеют место изоморфизмы* $W_n \simeq W_n^* \simeq Sp_{2m}(2)$.

Доказательство. По лемме 1 пространство V_n содержит единственный нечетно связный инвариантный вектор r. По лемме 5 четность связности вектора x и вектора $x+r$ противоположны для любого ненулевого вектора $x \in V_n$, в частности $f(x,r) = 0$ для каждого $x \in V_n$ (п. 2 леммы 19). Таким образом, каждый ненулевой вектор $\overline{x}$ фактор-пространства $\overline{V}_n = V_n/F_2r$ ($F_2 = GF(2)$) является образом точно одного корня $s_x \in \prod_n$. Нетрудно проверить, что равенствами $\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = f(s_x, s_y)$ для $x, y \in V_n \setminus \{0, r\}$ и $\overline{f}(\overline{x},\overline{0}) = 0$ на $\overline{V}_n$ определяется симплектическая форма $\overline{f}$. В силу лемм 1 и 15 группа W_n точно действует на $\overline{V}_n$. При этом действие порождающих группы W_n на $\overline{V}_n$ согласно лемме 20 определяется формулой $\overline{y}^{w_{s_x}} = \overline{y} + \overline{f}(\overline{x},\overline{y}) \cdot \overline{x}$. Ввиду леммы 5 W_n содержит 2^{n-1} трансвекций (т. е. все трансвекции) $w_{\overline{x}} = w_{s_x}$ относительно формы $\overline{f}$, и поскольку W_n порождена трансвекциями, то имеют место изоморфизмы $W_n \simeq W_n^* \simeq Sp_{2m}(2)$. Лемма доказана. □

Итак, согласно леммам 1, 14, 15 и 21 осталось рассмотреть случаи $\Gamma_n \in \{E_n, I_n, J_n\}$ при четном n. Ввиду леммы 19 t_n — число анизотропных относительно формы $f(x,y)$ векторов из V_n, $h_n = 2^n - t_n$ — число изотропных векторов. Сведем данные из лемм 8 – 10 в таблицу

Таблица 1.

	$n = 4k$		$n = 4k+2$	
Γ_n	$t_n = \lvert \prod_n \rvert$	h_n	$t_n = \lvert \prod_n \rvert$	h_n
E_n	$2^{4k-1} + (-1)^{k+1} 2^{2k-1}$	$2^{4k-1} + (-1)^{k} 2^{2k-1}$	$2^{4k+1} + (-1)^{k+1} 2^{2k}$	$2^{4k+1} + (-1)^{k} 2^{2k}$
I_n	$2^{4k-1} + (-1)^{k} 2^{2k-1}$	$2^{4k-1} + (-1)^{k+1} 2^{2k-1}$	$2^{4k+1} + (-1)^{k+1} 2^{2k}$	$2^{4k+1} + (-1)^{k} 2^{2k}$
J_n	$2^{4k-1} + (-1)^{k+1} 2^{2k-1}$	$2^{4k-1} + (-1)^{k} 2^{2k-1}$	$2^{4k+1} + (-1)^{k} 2^{2k}$	$2^{4k+1} + (-1)^{k+1} 2^{2k}$

Заметим, что $t(E_{4k}) = t(J_{4k})$ и $t(E_{4k+2}) = t(I_{4k+2})$.

Лемма 22. *Если* $\Gamma_n \in \{E_{4k+3}, I_{4k+1}, J_{4k+1}\}$, *то* $W_{n-1} \simeq W_{n-1}^* \simeq \hat{W}_{n-1}$ *и имеют место следующие изоморфизмы:*

(1) $W(E_{4k+2}) \simeq O_{4k+2}^{\delta_k}(2)$,

(2) $W(I_{4k}) \simeq O_{4k}^{\delta_{k+1}}(2)$,

(3) $W(J_{4k}) \simeq O_{4k}^{\delta_k}(2)$,

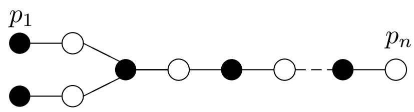
где $\delta_k = +$ *когда число* k *четно и* $\delta_k = -$, *если* k *— нечетное число.*

Доказательство. По лемме 1 в V_{n-1} нет ненулевых инвариантных векторов, ввиду лемм 15, 16, 17 $W_{n-1} \simeq W_{n-1}^* \simeq \hat{W}_{n-1}$ и $W_{n-1} \leq W_n$. Далее, из леммы 20 следует, что квадратичная и симплектическая формы F и f определенные на пространстве V_{n-1} невырождены и $W_{n-1} \leq I(F) \leq I(f)$. Заметим, что форма

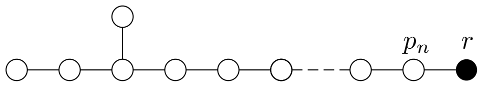
$\overline{f}$ из доказательства леммы 21 и форма f совпадают на пространстве V_{n-1}. По лемме 21 $W_n \simeq Sp_{2m}(2)$, где $m = \frac{n-1}{2}$. По лемме 18 $\hat{W}_{n-1}$ транзитивна на $\prod_n \setminus \prod_{n-1}$ и по лемме 4 $W_n = \langle \hat{W}_{n-1}, w_s \rangle$ для каждой трансвекции w_s из $W_n \setminus \hat{W}_{n-1}$ (каждого корня $s \in \prod_n \setminus \prod_{n-1}$). Значит W_{n-1} максимальная подгруппа группы $W_n \simeq Sp_{2m}(2)$ порожденная трансвекциями, отсюда заключаем, что $W_{n-1} = I(F)$. Используя таблицу 1, устанавливаем конкретные изоморфизмы. Для E_{4k+2} по этой таблице число изотропных векторов $h = 2^{2k}(2^{2k+1} + (-1)^k)$, поэтому $W(E_{4k+2}) \simeq O^{\delta_k}_{4k+2}(2)$. Для I_{4k} имеем $h_{4k} = 2^{2k-1}(2^{2k} + (-1)^{k+1})$, значит $W(I_{4k}) \simeq O^{\delta_{k+1}}_{4k}(2)$. Наконец для J_{4k} имеем $h_{4k} = 2^{2k-1}(2^{2k} + (-1)^k)$ и $W(J_{4k}) \simeq O^{\delta_k}_{4k}(2)$. Лемма доказана. □

Лемма 23. *Имеют место изоморфизмы* $W(E_{4k+2}) \simeq W(I_{4k+2}) \simeq O^{\delta_k}_{4k+2}(2)$, *где* $\delta_k = +$ *когда число* k *четно и* $\delta_k = -$, *если* k *— нечетное число.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_n = I_{4k+2}$ и r — корень, граф $\Gamma_n(r)$ которого имеет вид



Рассмотрим в $W_n = \langle w_1, w_2, ..., w_n \rangle$ подгруппу $H = \langle w_2, ..., w_n, w_r \rangle$. В системе порождающих $w_2, ..., w_n, w_r$ граф $\Gamma(H)$ есть граф E_{4k+2}:



и согласно таблице 1 $t(E_{4k+2}) = |w_r^H| = |w_1^{W_n}| = t(I_{4k+2})$. Отсюда выводим, что $H = W_n$ и $W(E_{4k+2}) \simeq W(I_{4k+2})$ и $W(I_{4k+2}) \simeq O^{\delta_k}_{4k+2}(2)$ по лемме 22. Лемма доказана. □

Лемма 24. *Если* $\Gamma_n \in \{E_{4k}, I_{4k+2}, J_{4k+2}\}$, *то* $W_n \simeq W_n^*$ *и имеют место следующие конкретные изоморфизмы*

(1) $W(E_{4k}) \simeq O^{\delta_k}_{4k}(2)$,
(2) $W(I_{4k+2}) \simeq O^{\delta_k}_{4k+2}(2)$,
(3) $W(J_{4k+2}) \simeq O^{\delta_{k+1}}_{4k+2}(2)$,

где $\delta_k = +$ *когда число* k *четно и* $\delta_k = -$, *если* k *— нечетное число.*

Доказательство. Согласно лемме 1 в рассматриваемых случаях в пространствах V_n нет ненулевых инвариантных векторов. Ввиду лемм 15, 17 $W^*(\Gamma_n) \simeq W(\Gamma_n)$ и по лемме 20 квадратичная форма F (15) на V_n невырождена.

Пусть согласно принятым обозначениям $\Gamma_{n-1} \subset \Gamma_n$ и r — ненулевой инвариантный вектор в $V_{n-1} \subset V_n$ (лемма 1). Тогда ввиду условий и леммы 1 r нечетносвязен и в силу лемм 16, 21 $|C_{W_n}(r)|$ делится на $2|Sp_{n-2}(2)|$. Значит, $|W_n|$ делится на число $2|Sp_{n-2}(2)| \cdot |\prod_n|$, которое ввиду таблицы 1 и предложения 3 совпадает с порядком одной из групп $O^{\pm}_n(2)$. Как известно, группы $O^+_{2m}(2)$ и $O^-_{2m}(2)$ не содержатся одна в другой (например, в силу предложения 3 и теоремы Лагранжа). И поскольку по лемме 20 $W_n \leq I(F)$, то W_n совпадает с группой $I(F) \simeq O_n^{\pm}(2)$. Если $\Gamma_n = E_{4k}$, то по таблице 1 $h_n = 2^{2k-1}(2^{2k} + (-1)^k)$ и $W(E_{4k}) \simeq O_{4k}^{\delta_k}(2)$. Для $\Gamma_n = I_{4k+2}$ согласно таблице $h_n = 2^{2k}(2^{2k+1} + (-1)^k)$ и $W(I_{4k+2}) \simeq O_{4k+2}^{\delta_k}(2)$. Наконец при $\Gamma_n = J_{4k+2}$ имеем $h_n = 2^{2k}(2^{2k+1} + (-1)^{k+1})$ и $W(J_{4k+2}) \simeq O_{4k+2}^{\delta_{k+1}}(2)$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. В леммах 21 – 24 установлено, что группы W_n с графами Γ_n из списка E_n $(n \not\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4))$, I_n $(n \not\equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4))$, J_n $(n \not\equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4))$ и K_n $(n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2))$, изоморфны группам $W^*(\Gamma_n)$. Кроме того, в этих же леммах доказано, что каждая из групп W_n изоморфна одной из групп $Sp_{2m}(2)$, $O_{2m}^-(2)$, $O_{2m}^+(2)$, при этом все указанные классические группы в утверждениях лемм 21 – 24 встречаются. По предложениям 2, 4 $W^*(\Gamma) = G/O_2(G)$ изоморфна одной из групп S_n, $Sp_{2n}(2)$, $O_{2n}^-(2)$, $O_{2n}^+(2)$. Следовательно, теорема верна.

Доказательство теоремы 2. Теорема вытекает из лемм 21 — 24. Пусть $\delta_k = +$ когда число k четно и $\delta_k = -$, если k — нечетное число. Из лемм 22, 24 заключаем, что

$$W^*(E_{4k}) \simeq W^*(J_{4k}) \simeq O_{4k}^{\delta_k}(2) \quad \text{и} \quad W^*(I_{4k}) \simeq O_{4k}^{-\delta_k}(2).$$

По лемме 21

$$W^*(I_{4k+1}) \simeq W^*(J_{4k+1}) \simeq W^*(K_{4k+1}) \simeq Sp_{4k}(2),$$

а из лемм 22, 24 следует

$$W^*(E_{4k+2}) \simeq W^*(I_{4k+2}) \simeq O_{4k+2}^{\delta_k}(2) \quad \text{и} \quad W^*(J_{4k+2}) \simeq O_{4k+2}^{-\delta_k}(2).$$

Наконец, по лемме 21

$$W^*(E_{4k+3}) \simeq W^*(K_{4k+3}) \simeq Sp_{4k+2}(2).$$

Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Следствие вытекает из теоремы 2, с акцентом на вид графа для каждой из классических групп $Sp_{2n}(2)$, $O_{2n}^-(2)$, $O_{2n}^+(2)$.

Авторы благодарны рецензенту первоначального текста статьи за ценные замечания.

Список литературы

[1] M. Aschbacher, *3-transposition groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. MR1423599

[2] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Группы Коскстера и системы Тикса, группы, порожденные отражениями системы корней*, Мир, Москва, **6**, 1972. MR0354927

[3] А.А. Кузнецов, В.М. Синицин, *Генетические коды некоторых групп, порожденных 3-транспозициями*, Сб. тез. междунар. конф. по алгебре и геометрии, посвященной 80-летию со дня рождения А. И Старостина, Екатеринбург, 2011, 95-96.

[4] А.И. Созутов, *О группах типа Σ_4, порожденных 3-транспозициями*, Сибирский математический журнал, **33**:1 (1992), 140–149. MR1165686

[5] А.С. Кондратьев, *Группы и алгебры Ли*, УрО РАН, Екатеринбург, 2009.

[6] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, *Atlas of Finite Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985. MR0827219

Анатолий Ильич Созутов
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 79,
660041, Красноярск, Россия
Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. академика М.Ф. Решетнёва,
пр. газеты Красноярский рабочий 31,
660037, Красноярск, Россия
E-mail address: sozutov_ai@mail.ru

Александр Алексеевич Кузнецов
Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. академика М.Ф. Решетнёва,
пр. газеты Красноярский рабочий 31,
660037, Красноярск, Россия
E-mail address: alex_kuznetsov80@mail.ru

Владимир Михайлович Синицин
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 79,
660041, Красноярск, Россия
E-mail address: sinfaust@yandex.ru