S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 10, стр. 311–323 (2013)* УДК 517.956.32
MSC 35L20

# ДИССИПАТИВНОСТЬ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В.М. ГОРДИЕНКО

Abstract. We consider a mixed problem for the real three-dimensional wave equation satisfying the uniform Lopatinskii condition. We describe all feasible ways of reduction of the problem to the mixed problem for the symmetric hyperbolic system with the dissipative boundary condition. These ways are patametrized by points of the upper part of a four-dimensional bodily cone of the second order. We characterize the cone location and its geometric parameters by means of the coefficients of the boundary condition in the problem under consideration.

**Keywords:** wave equation, mixed problem, symmetric hyperbolic system, dissipative boundary condition.

## 1. Введение

В [1] описаны все способы сведения волнового уравнения с тремя пространственными переменными к симметрической гиперболической по Фридрихсу системе. Там же кратко изложена история вопроса о сведении уравнения гиперболического по Петровскому к симметрической системе гиперболической по Фридрихсу и приведена библиография. В теории краевых задач удобным классом являются симметрические гиперболические системы с диссипативным граничным условием. Поэтому, если для волнового уравнения поставлено краевое условие, то сводить его следует к симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием.

---

Gordienko, V.M., Dissipativity of boundary condition in a mixed problem for the three-dimensional wave equation.



Работа поддержана СОРАН (междисциплинарный интеграционный проект № 80).

*Поступила 11 октября 2012 г., опубликована 10 апреля 2013 г.*

Итак, рассматривается смешанная задача для трёхмерного волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} = 0 \qquad t > 0\,,\ \ x_1 > 0 \tag{1}$$

$$pu_t + q_1u_{x_1} + q_2u_{x_2} + q_3u_{x_3} = 0 \qquad x_1 = 0 \tag{2}$$

$$u = \varphi,\ \ u_t = \psi \qquad t = 0 \tag{3}$$

$p, q_j$ — вещественные числа или гладкие функции от $t, x_j$.

Напомним постановку смешанной задачи для симметрических гиперболических систем с диссипативным граничным условием

$$A\,\frac{\partial U}{\partial t} - B_1\,\frac{\partial U}{\partial x_1} - B_2\,\frac{\partial U}{\partial x_2} - B_3\,\frac{\partial U}{\partial x_3} = 0 \qquad t > 0\,,\ \ x_1 > 0 \tag{4}$$

$$MU = 0 \qquad x_1 = 0 \tag{5}$$

$$U = \Phi \qquad t = 0 \tag{6}$$

Система (4) для $n$ - мерной вектор-функции $U$ называется $t$–гиперболической по–Фридрихсу, если $n \times n$ матрицы удовлетворяют условиям $A = A^\top > 0$, $B_j = B_j^\top$. Матрица $M$– прямоугольная, размера $k \times n$, число граничных условий $k$ равно числу отрицательных собственных чисел матрицы $B_1$. Граничное условие (5) диссипативно, если

$$\langle B_1U, U\rangle > 0 \quad \text{при} \quad MU = 0 \ \ (U \neq 0). \tag{7}$$

Смешанная задача (4–6) для симметрических гиперболических систем с диссипативным граничным условием корректна (см., например [2]).

Говорят, что смешанная задача для волнового уравнения (1–3) сведена к смешанной задаче (4–6) для симметрической гиперболической системы с диссипативным граничным условием, если для каждого $u$ — решения (1–3), вектор–функция $U = \begin{bmatrix} u_t \\ u_{x_1} \\ u_{x_2} \\ u_{x_3} \end{bmatrix}$ удовлетворяет (4–6), где $\Phi = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi_{x_1} \\ \varphi_{x_2} \\ \varphi_{x_3} \end{bmatrix}$.

Определим матрицы, зависящие от четырёх вещественных параметров

$$A = \begin{bmatrix} k & l_1 & l_2 & l_3 \\ l_1 & k & 0 & 0 \\ l_2 & 0 & k & 0 \\ l_3 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} l_1 & k & 0 & 0 \\ k & l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & l_2 & -l_1 & 0 \\ 0 & l_3 & 0 & -l_1 \end{bmatrix},$$
$$B_2 = \begin{bmatrix} l_2 & 0 & k & 0 \\ 0 & -l_2 & l_1 & 0 \\ k & l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & l_3 & -l_2 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} l_3 & 0 & 0 & k \\ 0 & -l_3 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -l_3 & l_2 \\ k & l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Дифференциальное тождество

$$A\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}u_t\\u_{x_1}\\u_{x_2}\\u_{x_3}\end{bmatrix}-B_1\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}u_t\\u_{x_1}\\u_{x_2}\\u_{x_3}\end{bmatrix}-B_2\frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}u_t\\u_{x_1}\\u_{x_2}\\u_{x_3}\end{bmatrix}-B_3\frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}u_t\\u_{x_1}\\u_{x_2}\\u_{x_3}\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}k\\l_1\\l_2\\l_3\end{bmatrix}(u_{tt}-u_{x_1x_1}-u_{x_2x_2}-u_{x_3x_3})$$

справедливо при любых параметрах $k, l_1, l_2, l_3$ и любой функции $u$. В силу этого тождества, если функция $u$ удовлетворяет волновому уравнению (1), то вектор–функция

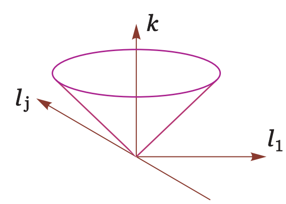
$$U=\begin{bmatrix}u_0\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_t\\u_{x_1}\\u_{x_2}\\u_{x_3}\end{bmatrix} \tag{9}$$

удовлетворяет системе (4) с матрицами (8), а если функция $u$ удовлетворяет смешанной задаче (1–3), то вектор–функция (9) удовлетворяет смешанной задаче (4–6), где $M=\begin{bmatrix}p & q_1 & q_2 & q_3\end{bmatrix}$, а начальная функция — $\Phi=\begin{bmatrix}\psi\\\varphi_{x_1}\\\varphi_{x_2}\\\varphi_{x_3}\end{bmatrix}$.

Обозначим через $\mathcal{K}$ множество таких $\big(k, l_1, l_2, l_3\big)$ при которых система (4) гиперболична, то есть, $A>0$. Легко показать что, $\mathcal{K}$ представляет собой прямой круговой конус:

$$\mathcal{K}=\Big\{\big(k,l_1,l_2,l_3\big):\ k>0,\ k^2-l_1^2-l_2^2-l_3^2>0\Big\}.$$

Будем называть $\mathcal{K}$ конусом гиперболичности.




Обозначим через $\mathcal{Q}$ множество таких $\big(k, l_1, l_2, l_3\big)$ при которых граничное условие (5) диссипативно, то есть (см. (7))

$$\left\langle B_1\begin{bmatrix}u_0\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u_0\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\right\rangle\Bigg|_{pu_0+q_1u_1+q_2u_2+q_3u_3=0}>0\quad\forall\begin{bmatrix}u_0\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\neq 0\,. \tag{10}$$

Ясно, что $\mathcal{Q}$ является конусом. Будем называть $\mathcal{Q}$ конусом диссипативности.

Таким образом, чтобы свести смешанную задачу для волнового уравнения (1–3) к смешанной задаче (4–6) для симметрической гиперболической системы с диссипативным граничным условием, нужно найти такие параметры

$k, l_1, l_2, l_3$, при которых матрица $A > 0$, а матрица $B_1$ удовлетворяет условию диссипативности (10), то есть нужно найти такие параметры $k, l_1, l_2, l_3$, при которых $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ и $\mathcal{K} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$.

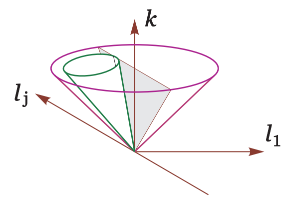
Мы докажем теорему

**Основная теорема**

$\mathcal{K} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0\,, \quad pq_1 < 0\,.$

*Если* $p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0\,, \quad pq_1 < 0\,,$

*то* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{K} \cap \{l_1 < 0\}$, *и*




$$\mathcal{Q} = \Big\{ \big(k, l_1, l_2, l_3\big) : \ k > 0; \\ \big(p^2 - q_2^2 - q_3^2\big)\big(k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2\big) - \big(pk - q_1 l_1 - q_2 l_2 - q_3 l_3\big)^2 > 0 \Big\}.$$

Таким образом, $\mathcal{Q}$ тоже представляет собой внутренность полы конуса второго порядка. Будут описаны геометрические размеры и расположение этого конуса.

## 2. Исследование конуса диссипативности

**Лемма 1.** *Для того чтобы выполнялось условие диссипативности (10) матрица* $B_1$ *должна иметь три положительных собственных числа.*

◀ Пусть $\lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$ собственные числа матрицы $B_1$.

В силу принципа Куранта-Фишера $$\lambda_1 = \max_{\substack{L;\\ \dim L = 3}} \left( \min_{\substack{U \in L;\\ \|U\| = 1}} \langle B_1 U, U \rangle \right).$$

Поэтому, если выполнено условие диссипативности, то $\lambda_1 > 0$. ▶

**Лемма 2.** *Матрица* $B_1$ *имеет три положительных собственных числа тогда и только тогда когда* $l_1 < 0$, $k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 > 0$. *При этом четвёртое собственное число матрицы* $B_1$ *отрицательно.*

◀ Имеем $$\langle B_1 U, U \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} l_1 & k & 0 & 0 \\ k & l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & l_2 & -l_1 & 0 \\ 0 & l_3 & 0 & -l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$= l_1(u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) + 2u_1(ku_0 + l_2 u_2 + l_3 u_3).$

Эта форма раскладывается в сумму квадратов следующим образом: $\langle B_1 U, U \rangle =$

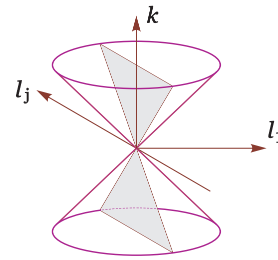
$$= -\frac{1}{l_1}\Big[(k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2)u_1^2 + (l_1 u_2 - l_2 u_1)^2 + (l_1 u_3 - l_3 u_1)^2 - (l_1 u_0 + k u_1)^2\Big].$$

Осталось сослаться на закон инерции квадратичных форм. ▶

В силу доказанных двух лемм для выполнения условия диссипативности (10) необходимо:

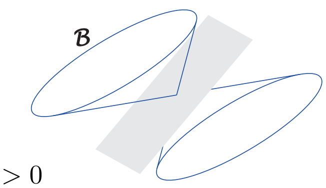
$$l_1 < 0,\ k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 > 0. \qquad (11)$$

Далее это условие всегда предполагается выполненым.



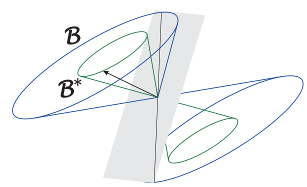

Обозначим через $\mathcal{B}$ конус второго порядка

$$\mathcal{B} = \left\{ U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} : \langle B_1 U, U \rangle = 0 \right\}.$$

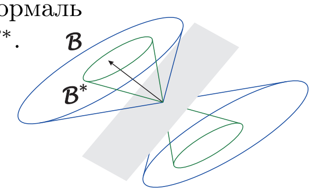



В силу (11) множество, где выполняется $\langle B_1 U, U \rangle > 0$ располагается между полами конуса $\mathcal{B}$. Условие диссипативности (10) означает геометрически, что гиперплоскость $pu_0 + q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 u_3 = 0$ разделяет полы конуса $\mathcal{B}$.

Назовём конус $\mathcal{B}^*$ двойственным конусу $\mathcal{B}$, если вершина конуса $\mathcal{B}^*$ совпадает с вершиной конуса $\mathcal{B}$, а образующие конуса $\mathcal{B}^*$ являются нормалями касательных плоскостей конуса $\mathcal{B}$.




В силу определения двойственного конуса, условие разделения гиперплоскостью пол конуса эквивалентно тому, что нормаль гиперплоскости лежит внутри двойственного конуса $\mathcal{B}^*$. Таким образом, условие диссипативности выполнено тогда и только тогда, когда вектор $\begin{bmatrix} p \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ лежит внутри двойственного конуса $\mathcal{B}^*$.




**Лемма 3.** *Координатные плоскости* $u_0 = 0$ *и* $u_1 = 0$ *разделяют полы двойственного конуса* $\mathcal{B}^*$.

◀ Для векторов $U = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $U = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ выполнено $\langle B_1 U, U \rangle = l_1 < 0$, значит, эти векторы лежат внутри конуса $\mathcal{B}$, а следовательно, плоскости $u_0 = 0$ и $u_1 = 0$ (перпендикулярные этим векторам) разделяют полы двойственного конуса $\mathcal{B}^*$. ▶

**Следствие.** *Если вектор* $\begin{bmatrix} p \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ *лежит внутри двойственного конуса* $\mathcal{B}^*$ *(выполнено условие диссипативности), то* $p \neq 0$ *и* $q_1 \neq 0$ .

**Лемма 4.** *Двойственный конус* $\mathcal{B}^*$ *тоже является конусом второго порядка*
$\mathcal{B}^* = \Big\{ U : \langle \widetilde{B}\, U, U \rangle = 0; \quad \widetilde{B} = \varrho B_1^{-1},\ \varrho \neq 0 \Big\}$.

◀ Пусть $U_0 \in \mathcal{B}$, то есть $\langle B_1 U_0, U_0 \rangle = 0$.
Тогда $\langle B_1 U_0, U \rangle = 0$ — касательная плоскость конуса $\mathcal{B}$ в точке $U_0$, а $V = B_1 U_0$ — вектор нормали этой касательной плоскости: $U_0 = B_1^{-1} V$.
Невырожденность матрицы $B_1$ обеспечена условием (11).
$\langle B_1 U_0, U_0 \rangle = 0 \iff \langle B_1^{-1} V, V \rangle = 0$. ▶

Определим матрицу $\widetilde{B}$ равенством

$$\widetilde{B} = \left(k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2\right) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k \\ -l_1 \\ -l_2 \\ -l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -l_1 & -l_2 & -l_3 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что $B_1 \cdot \widetilde{B} = l_1 \left(k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2\right) I$, значит,
$\widetilde{B} = l_1 \left(k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2\right) B_1^{-1}$ и равенство $\langle \widetilde{B}\ U, U \rangle = 0$ определяет конус $\mathcal{B}^*$ двойственный конусу $\mathcal{B}$.

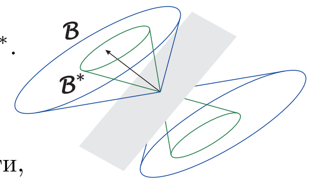
Напомним, что через $\mathcal{Q}$ мы обозначили множество таких $\left(k, l_1, l_2, l_3\right)$ при которых выполнено условие диссипативности (10):

$$\left\langle B_1 \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\rangle \Bigg|_{p u_0 + q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 u_3 = 0} > 0 \qquad \forall \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \neq 0 .$$

**Утверждение 1.**

$$\mathcal{Q} = \left\{ \left(k, l_1, l_2, l_3\right) : \quad \left\langle \widetilde{B} \begin{bmatrix} p \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \right\rangle > 0; \quad l_1 < 0; \quad k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 > 0 \right\}.$$

◀ Условие диссипативности выполнено тогда и только тогда, когда вектор $\begin{bmatrix} p \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ лежит внутри двойственного конуса $\mathcal{B}^*$.




Неравенства $l_1 < 0$; $k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 > 0$
необходимы для выполнения условия диссипативности,
а при их выполнении внутренность двойственного конуса $\mathcal{B}^*$
составляют векторы $U$ такие что $\langle \widetilde{B}\, U, U \rangle > 0$. ►

Форму $\left\langle \widetilde{B} \begin{bmatrix} p \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \right\rangle$ можно записать следующим образом:

$$\left\langle \widetilde{B} \begin{bmatrix} p \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \right\rangle = \left(k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2\right)\left(p^2 - q_2^2 - q_3^2\right) - \left(kp - l_1 q_1 - l_2 q_2 - l_3 q_3\right)^2 =$$

$$= \left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

где $\quad Q = \left(p^2 - q_2^2 - q_3^2\right) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix}.$

Теперь утверждение 1 можно сформулировать так:

**Утверждение 2.**

$$\mathcal{Q} = \left\{ \left(k, l_1, l_2, l_3\right) :\ l_1 < 0,\ k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 > 0,\ \left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle > 0 \right\},$$

где $\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle = \left(p^2 - q_2^2 - q_3^2\right)\left(k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2\right) - \left(pk - q_1 l_1 - q_2 l_2 - q_3 l_3\right)^2.$

**Утверждение 3.**
$\mathcal{Q} \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0\,, \quad q_1 \neq 0\,.$

◄ Докажем $\Longrightarrow$

Если $\mathcal{Q} \neq \emptyset$, то (в силу утверждения 2) $\exists \left(k, l_1, l_2, l_3\right)$ :

$\left(p^2 - q_2^2 - q_3^2\right)\left(k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2\right) > \left(pk - q_1 l_1 - q_2 l_2 - q_3 l_3\right)^2;$

$k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 > 0$. Отсюда следует, что $p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0\,.$

Неравенство $q_1 \neq 0$ вытекает из следствия леммы 3.

Докажем $\Longleftarrow$

Покажем что, $\begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = -\dfrac{q_1}{|q_1|} \begin{bmatrix} p + \dfrac{q_1^2}{p} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{Q}$. В самом деле,

$l_1 = -|q_1| < 0$; $k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 = \left(p^2 - q_2^2 - q_3^2\right) + q_1^2\left(1 + \dfrac{q_1^2}{p^2}\right) > 0$;

$$\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle Q \begin{bmatrix} p + \dfrac{q_1^2}{p} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p + \dfrac{q_1^2}{p} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{q_1^2}{p^2}\left(p^2 - q_2^2 - q_3^2\right)\left(p^2 + q_1^2\right) > 0\,. \quad \blacktriangleright$$

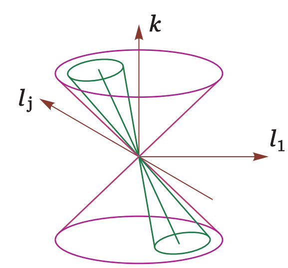
**Замечание.**

Отметим геометрический смысл вектора $\begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + \dfrac{q_1^2}{p} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$.

В сечении конуса $\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$ гиперплоскостью $k = const$

получаются эллипсоиды. Так вот центры этих эллипсоидов расположены

на прямой $t \begin{bmatrix} p + \dfrac{q_1^2}{p} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$.

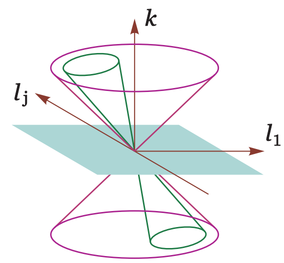


**Лемма 5.**

*При* $p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0$ *конус* $\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle > 0$

*содержится в конусе* $k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 > 0$.

*В частности, плоскость* $k = 0$ *разделяет полы обоих этих конусов.*




◀ Действительно, если $p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0$, то из неравенства

$$\left(p^2 - q_2^2 - q_3^2\right)\left(k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2\right) > \left(pk - q_1 l_1 - q_2 l_2 - q_3 l_3\right)^2$$

следует неравенство $k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 > 0$. ▶

Из утверждения 2 и доказанной леммы следует:

**Утверждение 4.**
*При выполнении условия* $p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0$

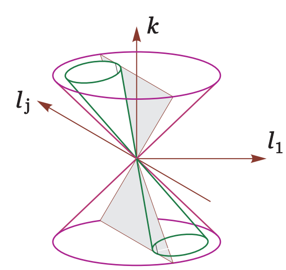
$$\mathcal{Q} = \left\{ \left(k, l_1, l_2, l_3\right) : \ l_1 < 0, \quad \left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle > 0 \right\}.$$

**Лемма 6.**

*При* $p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0$, $q_1 \neq 0$

*конус* $\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$

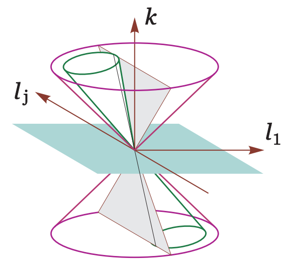
*касается плоскости* $l_1 = 0$ *по прямой* $t \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$.




◀ Легко проверить, что точки прямой $t \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ расположены на конусе $\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$. Уравнение плоскости, касающейся этого конуса в точках прямой $t \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ есть $\left\langle Q \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle \equiv -q_1 l_1 \left(p^2 - q_2^2 - q_3^2\right) = 0$.

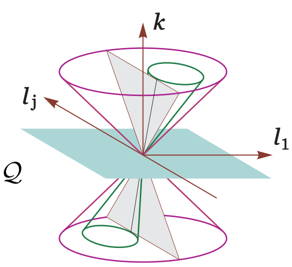
При $p^2 - q_2^2 - q_3^2 \neq 0$, $q_1 \neq 0$ это уравнение задаёт плоскость $l_1 = 0$. ▶

Таким образом, конус диссипативности $\mathcal{Q}$ представляет собой одну из двух пол конуса $\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle > 0$, а условие $l_1 < 0$ в утверждении 4 служит лишь для отбора нужной полы конуса $\mathcal{Q}$.




В силу леммы 5 плоскость $k = 0$ тоже разделяет полы конуса $\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle > 0$.

Значит, конус диссипативности $\mathcal{Q}$ расположен либо в полупространстве $k > 0$, либо в полупространстве $k < 0$. В первом случае имеем $\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}$, а во-втором — $\mathcal{Q} \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Чтобы выяснить какой из двух случаев имеет место, достаточно взять любую точку из конуса $\mathcal{Q}$ и определить какому из двух полупространств $k > 0$ или $k < 0$ эта точка принадлежит.




Мы можем использовать точку $\begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = -\dfrac{q_1}{|q_1|} \begin{bmatrix} p + \dfrac{q_1^2}{p} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{Q}$,

которая уже использовалась при доказательстве утверждения 3. Легко видеть, что если $pq_1 < 0$, то $k > 0$, а если $pq_1 > 0$ то $k < 0$.

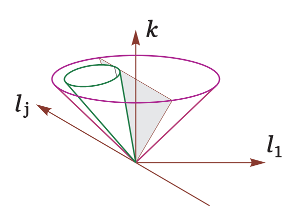
Мы доказали основную теорему

**Основная теорема**

$\mathcal{K} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0, \quad pq_1 < 0$.

*Если* $p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0, \quad pq_1 < 0$,

*то* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{K} \cap \{l_1 < 0\}$, *и*




$$\mathcal{Q} = \Big\{ (k, l_1, l_2, l_3) : \ k > 0; \\ (p^2 - q_2^2 - q_3^2)(k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2) - (pk - q_1 l_1 - q_2 l_2 - q_3 l_3)^2 > 0 \Big\}.$$

**Замечание.**

Обозначим через $\partial\mathcal{K}$ и $\partial\mathcal{Q}$ поверхностные конусы — границы конусов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{Q}$. Ясно что, $\partial\mathcal{K} = \Big\{\big(k, l_1, l_2, l_3\big) : k \geq 0;\ k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 = 0\Big\}$,

$$\partial\mathcal{Q} = \Bigg\{\ \big(k, l_1, l_2, l_3\big) :\ k \geq 0; \\ \big(p^2 - q_2^2 - q_3^2\big)\big(k^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2\big) = \big(pk - q_1 l_1 - q_2 l_2 - q_3 l_3\big)^2\ \Bigg\}.$$

Так как $\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}$, то либо $\partial\mathcal{Q} \cap \partial\mathcal{K} = \emptyset$, либо конус $\partial\mathcal{Q}$ касается конуса $\partial\mathcal{K}$.

Выясним когда происходит то, либо другое. Обозначим через $\mathcal{L}$ плоскость —

$\mathcal{L} = \Big\{\big(k, l_1, l_2, l_3\big) : kp - l_1 q_1 - l_2 q_2 - l_3 q_3 = 0\Big\}$.

Легко видеть, что конусы $\partial\mathcal{K}$ и $\partial\mathcal{Q}$ пересекаются, только если пересекаются конус $\partial\mathcal{K}$ и плоскость $\mathcal{L}$. Поэтому если $\big(p, q_1, q_2, q_3\big) \in \mathcal{K}$, то конусы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{K}$ не пересекаются. А если $\big(p, q_1, q_2, q_3\big) \notin \mathcal{K}$, то конусы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{K}$ касаются по двум лучам, тем лучам по которым пересекаются конус $\partial\mathcal{K}$ и плоскость $\mathcal{L}$.

## 3. Собственные числа и собственные векторы матрицы $Q$

Расположение и геометрические параметры конуса $\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \right\rangle > 0$ (одну из пол которого составляет конус диссипативности $\mathcal{Q}$) полностью характеризуют собственные числа и собственные векторы матрицы $Q$. Мы приведём явные формулы для собственных чисел и собственных векторов матрицы $Q$ в предположении $p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0$, $q_1 \neq 0$ (обеспечивающим непустоту конуса $\mathcal{Q}$).

Ясно, что матрица $Q$ имеет одно положительное и три отрицательных собственных числа и собственный вектор, соответствующий положительному собственному числу определяет направление оси нашего конуса.

Итак, пусть выполняется $p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0$, $q_1 \neq 0$.

Рассмотрим квадратное уравнение

$\lambda^2 + \big(p^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\big)\lambda - q_1^2\big(p^2 - q_2^2 - q_3^2\big) = 0.$

Его корни вещественны: один — положительный, другой — отрицательный. Обозначим через $\lambda_1$ отрицательный корень, а через $\lambda_4$ — положительный, введём векторы

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} p + \dfrac{q_1^2 + \lambda_1}{p} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} p + \dfrac{q_1^2 + \lambda_4}{p} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$

Легко убедиться в том что $Q\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$, $Q\mathbf{u}_4 = \lambda_4 \mathbf{u}_4$.

Обозначим $\quad \lambda_2 = \lambda_3 = -(p^2 - q_2^2 - q_3^2)$,

пусть $\quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad$ и

$\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \perp \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4, \quad$ то есть $\begin{cases} q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3 = 0 \\ q_1 w_1 + q_2 w_2 + q_3 w_3 = 0 \,. \end{cases}$

Легко проверить, что $\quad Q\mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2\,, \quad Q\mathbf{u}_3 = \lambda_3 \mathbf{u}_3$.

Будем (можно) считать, что $\quad \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$.

Можно показать, что

$\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < 0 < \lambda_4\,; \quad 0 < \lambda_4 < |\lambda_3| = |\lambda_2| < |\lambda_1|$.

## 4. Заключительные замечания

Условие $p^2 - q_2^2 - q_3^2 > 0\,,\ pq_1 < 0$, при котором $\mathcal{K} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, в точности выражает так называемое равномерное условие Лопатинского [6,7]. Если это условие для задачи (1–3) не выполняется, то можно построить пример некорректности Адамара для данной задачи или для задачи с как угодно близкими коэффициентами в граничном условии. Правда близкие граничные условия надо брать не только вещественные но и комплексные.

Вопрос о сведении смешанной задачи для двумерного волнового уравнения к смешанной задаче для симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием рассматривался в [3–5]. Допускались комплексные коэффициенты в граничном условии, а значит, и комплекснозначные решения, а в [3–4] решения — вектор–функции, коэффициенты граничного условия — матрицы. При исследовании диссипативности граничного условия и связи диссипативности с условием корректности использовались не геометрические средства (как в этой работе), а алгебраические, в частности, матричное уравнение Ляпунова.

В [7] рассматривалась смешанная задача для многомерного скалярного волнового уравнения. Используя преобразования Лоренца и конструкции из [3–4] для двумерного волнового уравнения, удалось каждую корректную смешанную задачу для многомерного волнового уравнения свести к смешанной задаче для симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием. Но при этом получились не все возможные способы сведения.

В [8] рассмотрен вопрос об обратном переходе от симметрической системы к волновому уравнению. Показано, что если (4–6) есть смешанная задача для симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием, к которой сведена смешанная задача для волнового уравнения (1–3) и если $\operatorname{rot}\Phi = 0$, то для решения $U$ задачи (4–6) найдётся такая функция $u$, что $U = \begin{bmatrix} u_t \\ u_{x_1} \\ u_{x_2} \\ u_{x_3} \end{bmatrix}$ и функция $u$ удовлетворяет (1–3).

## Список литературы

[1] В.М. Гордиенко, *Системы Фридрихса для трехмерного волнового уравнения*, Сиб. мат. журн., **6** (2010), 1282–1297. MR2797597

[2] С.К. Годунов, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1979. MR0548574

[3] V.M. Gordienko *Un probleme mixte pair l'eqution vectorielle des ondes: Cas de dissipation de l'energie; Cas mal poses*, C.r. Acad. Sci. 1979. T. 288, № 10. Serie A. P. 547–550. MR0532569

[4] В.М. Гордиенко, *Симметризация смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка с двумя пространственными переменными*, Сиб. мат. журн., **2** (1981), 84–104. MR0610771

[5] В.М. Гордиенко, *О корректности смешанной задачи для волнового уравнения*, Сибирские электронные математические известия, 2010, http://semr.math.nsc.ru/ (Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач часть I), 130–138.

[6] S. Miyatake, *Mixed problem for hyrperbolic equations of second order with first order complex boundary operators*, Japanese J. Math., **1** (1975), 111–158. MR0430542

[7] А.Н. Малышев, *Смешанная задача для гиперболического уравнений второго порядка с комплексным граничным условием первого порядка*, Сиб. мат. журн., **6** (1983), 102–121. MR0731048

[8] В.М. Гордиенко, *Гиперболические системы, эквивалентные волновому уравнению*, Сиб. мат. журн., **1** (2009), 19–27. MR2502870

Гордиенко Валерий Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
*E-mail address*: gordienk@math.nsc.ru