S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 335–377 (2013) УДК 517.95
MSC 35C20

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЫ М.А. ЛАВРЕНТЬЕВА НОРМОЙ ДРОБНОГО ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

А.И. ПАРФЁНОВ

Abstract. We generalize M.A. Lavrentiev's approximate formula for the conformal mapping of the perturbed half-plane onto the half-plane. The generalization concerns harmonic functions and their derivatives in locally perturbed half-spaces (Lipschitz epigraphs). For both formulas, we obtain remainder estimates involving the square of the norm of the perturbing function in the fractional homogeneous Sobolev space $\dot{H}^{1/2}$. By the Kashin-Besov-Kolyada inequality, these estimates imply pointwise stability bounds in terms of the Lebesgue measure. Moreover, we prove the joint analyticity of the above-named harmonic functions with respect to the perturbing parameter and the space variables and justify a result on the interpolation between L^1 and homogeneous Slobodetskii spaces which is essentially due to A. Cohen.

Keywords: harmonic function, Lavrentiev formula, perturbed domain, quantitative stability, remainder estimate.

Введение

Для целого $n \geqslant 2$ и финитной липшицевой функции $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ легко проверить существование и единственность классического решения задачи

$$(1)\qquad \begin{cases} u_\star(x) = x_n + o(|x|) & \text{при } x_n > \omega(x') \text{ и } x = (x', x_n) \to \infty, \\ \Delta u_\star \equiv \sum_{i=1}^n D_i^2 u_\star = 0 & \text{при } x_n > \omega(x'), \\ u_\star = 0 & \text{при } x_n = \omega(x'), \end{cases}$$

Parfenov, A.I., Error bound for a generalized M.A. Lavrentiev's formula via the norm in a fractional Sobolev space.

Работа поддержана Минобрнауки РФ (соглашение № 14.B37.21.0355).

Поступила 25 октября 2012 г., опубликована 14 апреля 2013 г.

которое обозначим через U_ω. При $n=2$ можно получить U_ω как мнимую часть конформного отображения

$$(2)\qquad w = w_\omega : \bigl\{\operatorname{Im} z > \omega(\operatorname{Re} z)\bigr\} \xrightarrow{\text{на}} \bigl\{\operatorname{Im} z > 0\bigr\}, \quad w(\infty)=\infty, \quad |w'(\infty)|=1,$$

см. раздел 1.1 ниже. Рассмотрим вопрос приближенного нахождения значения $U_\omega(x)$ и производных $D^\alpha U_\omega(x)$ в предположении малости функции ω, что подразумевает построение приближенной формулы и оценку её погрешности. Эта проблема важна для теории дифференциальных уравнений ввиду общей полезности приближенных методов. Более специальная мотивация исследования $D^\alpha U_\omega(x)$ приведена далее в п. 3а.

Изучение соответствия $\omega \mapsto U_\omega$ принадлежит теории дифференциальных уравнений в переменных областях. Переменность области чаще всего возникает в задачах оптимизации форм, иногда принимающих вид изопериметрических неравенств и в основном решаемых прямым вариационным или (в том числе численно) итерационными методами. К задачам оптимизации форм можно приводить обратные задачи и задачи со свободной границей. Переменность области появляется также при аппроксимации негладких областей гладкими, в асимптотическом анализе (теория сингулярных возмущений и усреднения дифференциальных уравнений) и при исследовании корректности по Адамару, краевых задач в нецилиндрических областях и эволюции разрывов решений. В связи с варьированием границы функционалы области, такие как интеграл по области или по границе от заданной функции, значения решений краевых задач и собственных функций в отдельных точках, собственные значения, ёмкость и другие функционалы от решений краевых задач (энергия, подъёмная сила и т.п.), изучаются на предмет непрерывности, дифференцируемости, аналитичности, выражений для производных, взаимоотношения между различными определениями производных, необходимых и достаточных условий экстремума. Исторически некоторое время после первых работ Рэлея, Пуанкаре и Адамара (см. обзор [66]) исследования велись в основном по регулярности граничных точек и устойчивости в задаче Дирихле [13], конформному отображению почти круговых областей [67, 68], вариационным задачам ТФКП (см. [8], [20, гл. 4] и [32]) и изопериметрическим неравенствам. Отдельные сведения по обсуждаемой теории содержатся в работах [2, 4, 15] крупных советских математиков и в книгах [10, § V.5 и § V.6], [11, VII.6.5], [17, VI.2.6], [18, IV.4.1 и VII.9.4], [52, разделы 3.2 и 3.3], [53, п. 249–253] и [63, § 3.6]. Впечатление о современных исследованиях можно составить по статье [51], сборнику [58] и монографиям [46] и [56].

Построение приближенных формул с привлечением терминов и методов соответствующего “исчисления бесконечно малых” является одним из центральных вопросов теории дифференциальных уравнений в переменных областях. Однако оценке погрешностей приближенных формул для конечных возмущений посвящены лишь отдельные работы. Будет удобнее сказать о них после описания наших главных результатов.

В целях нахождения вида приближенной формулы и верхней границы её погрешности применим нестрогий старый (см. [9]) приём с введением параметра [37, 1.2], называемый и методом продолжения по параметру, и гомотопическим методом возмущений (см. [1]). Для любых мультииндекса α и точки $x \in \mathbb{R}^n$, $x_n > 0$, функция

$$S_\omega(\varepsilon) = S_{\omega,\alpha,x}(\varepsilon) = D^\alpha U_{\varepsilon\omega}(x)$$

определена и аналитична в окрестности нуля, см. раздел 5.1. Приём подсказывает, для $x_n > \max\{0, \omega(x')\}$ и любого $m \in \mathbb{N}$, приближенную формулу

$$D^\alpha U_\omega(x) = S_\omega(1) \approx T_m^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i!} \frac{d^i S_\omega}{d\varepsilon^i}(0).$$

Оценивание погрешности

$$R_m^{(\alpha)}(x) = R_{m,\omega}^{(\alpha)}(x) = D^\alpha U_\omega(x) - T_m^{(\alpha)}(x)$$

этой формулы мы производим только на отдалении от возмущения, задаваемого функцией ω. Для $\Xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $r > 0$ и $A > 0$ положим

$$\mathfrak{t}_{\Xi,r,A}(\xi) = \max\bigl\{0, Ar - A|\xi - \Xi|\bigr\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-1},$$
$$\mathfrak{T}_{\Xi,r,A} = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \colon x_n > \mathfrak{t}_{\Xi,r,A}(x')\bigr\}.$$

Очевидно, что если для носителя функции ω имеем

$$\operatorname{supp}\omega \subset B(\Xi, r) \equiv \bigl\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} \colon |\xi - \Xi| \leqslant r\bigr\}, \tag{3}$$

а её постоянная Липшица

$$\|\omega\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{\xi \neq \eta} \frac{|\omega(\xi) - \omega(\eta)|}{|\xi - \eta|}$$

не превосходит A, то $|\omega| \leqslant \mathfrak{t}_{\Xi,r,A}$. Поэтому точки $x \in \mathfrak{T}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A}$ с $\mathfrak{a} > 1$ отдалены от возмущения. Оценку погрешности естественно искать в виде

$$|R_m^{(\alpha)}(x)| \leqslant C\|\omega\|_X^m \quad (\|\cdot\|_X \text{ — полунорма пространства } X \text{ в } \mathbb{R}^{n-1})$$

по двум причинам. Во-первых, погрешность $R_m^{(\alpha)}$ сродни величине $\frac{1}{m!} S_\omega^{(m)}(0)$, являющейся как первым отброшенным членом ряда Тейлора

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i S_\omega}{d\varepsilon^i}(0),$$

так и аналогом остатка $\frac{1}{m!} S_\omega^{(m)}(\theta)$, $0 < \theta < 1$, формулы Тейлора в форме Лагранжа. Во-вторых, в силу соотношения однородности

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ S_{t\omega}^{(m)}(0) = t^m S_\omega^{(m)}(0)$$

можно ожидать оценки $|S_\omega^{(m)}(0)| \leqslant C_0 \|\omega\|_X^m$ для некоторого X.

Рассмотрим действие вышеуказанных соображений при $m = 1$. Ясно, что

$$T_1^{(\alpha)}(x) = S_\omega(0) = D^\alpha U_0(x) = D^\alpha x_n.$$

Найдём $S'_\omega(0)$. Аналитичность отображения $(\varepsilon, x) \mapsto U_{\varepsilon\omega}(x)$ (см. раздел 5.1, особенно (76)) показывает, что $S_\omega^{(i)}(0) = D_x^\alpha S_{\omega,0,x}^{(i)}(0)$. Для вычисления $S'_{\omega,0,x}(0)$ можно применить либо классические методы к функции $U_{\varepsilon\omega}$, либо соотношения (1.6) из [35] — к функции $U_{\varepsilon\omega}(x) - x_n$, откуда

$$S'_{\omega,0,x}(0) = -2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega(\xi) D_n E\bigl(x - (\xi, 0)\bigr)\, d\xi,$$
$$S'_\omega(0) = -2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega(\xi) D^{\alpha + e_n} E\bigl(x - (\xi, 0)\bigr)\, d\xi, \tag{4}$$

где E — фундаментальное решение оператора Лапласа:

$$E(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln|y|, & n=2, \\ \frac{1}{(2-n)\mathrm{vol}\{\xi\in\mathbb{R}^n:\,|\xi|=1\}}|y|^{2-n}, & n\geqslant 3. \end{cases} \tag{5}$$

Вид функционала $S'_\omega(0)$ подсказывает выбор $X = L^1(\mathbb{R}^{n-1})$. Учтя еще, что функция $D^{\alpha+e_n}E$ однородна степени $1-n-|\alpha|$ и допускает выделение множителя y_n при чётном α_n, приходим к следующей формулировке:

Теорема 1. *Для любых $A>0$, $\mathfrak{a}>1$ и $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ существует такое*

$$C = C(n, A, \mathfrak{a}, \alpha) > 0,$$

что для любой функции ω с $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}}\leqslant A$ и носителем (3) для точек $x\in\mathfrak{T}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A}$ имеет место представление

$$D^\alpha U_\omega(x) = D^\alpha x_n + R_1^{(\alpha)}(x), \tag{6}$$

$$\left|R_1^{(\alpha)}(x)\right| \leqslant C d_\Xi(x)^{1-n-|\alpha|}\|\omega\|_{L^1}, \tag{7a}$$

где $d_\Xi(x) = |x-(\Xi,0)|$. Более того, для чётных α_n

$$\left|R_1^{(\alpha)}(x)\right| \leqslant C x_n d_\Xi(x)^{-n-|\alpha|}\|\omega\|_{L^1}. \tag{7b}$$

Рассмотрим теперь случай $m=2$. Нам уже известно, что

$$T_2^{(\alpha)}(x) = S_\omega(0) + S'_\omega(0) = D_x^\alpha\left[x_n - 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\omega(\xi)D_nE\big(x-(\xi,0)\big)\,d\xi\right].$$

Угадывание пространства X в оценке $\left|R_2^{(\alpha)}(x)\right| \leqslant C\|\omega\|_X^2$ путём вычисления $S''_\omega(0)$ довольно трудоёмко. Приведём довод в пользу однородного пространства Слободецкого $b_2^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ (см. раздел 1.2). Число $S''_\omega(0)$ — это вторая вариация $U_\vartheta(x)$ в направлении ω при $\vartheta\equiv 0$. К. Эпплер, М. Дамбрин, М. Пьер, Х. Харбрехт и др. доказывали коэрцитивность в пространстве $H^s(\partial\Omega)$ с полуцелым s, чаще всего с $s=1/2$, второй вариации функционалов, определяемых решением краевой задачи в переменной области Ω, см. [47] и библиографию в [56, 5.9.6]. Для любого $t>0$ задача (1) допускает замену

$$\omega\to t\omega(\cdot/t), \quad u_\star\to tu_\star(\cdot/t),$$

поэтому естественно рассмотреть однородные аналоги b_2^s пространств H^s. Находя зависимость $R^{(0)}_{2,t\omega(\cdot/t)}(tx)$ и $\|\omega(\cdot/t)\|_{b_2^s}$ от t, приходим к значению $s=1/2$. Сказанное подсказывает следующую формулировку:

Теорема 2. *Для любых $A>0$, $\mathfrak{a}>1$ и $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ существует такое*

$$C = C(n, A, \mathfrak{a}, \alpha) > 0,$$

что для любой функции ω с $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}}\leqslant A$ и носителем (3) для точек $x\in\mathfrak{T}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A}$ имеет место представление

$$D^\alpha U_\omega(x) = D_x^\alpha\left[x_n - 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\omega(\xi)D_nE\big(x-(\xi,0)\big)\,d\xi\right] + R_2^{(\alpha)}(x), \tag{8}$$

$$\left|R_2^{(\alpha)}(x)\right| \leqslant C d_\Xi(x)^{1-n-|\alpha|}\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}, \tag{9a}$$

причем для чётных α_n

$$\left|R_2^{(\alpha)}(x)\right| \leqslant C x_n d_\Xi(x)^{-n-|\alpha|} \|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}. \tag{9b}$$

Заметим, что теорема 2 даёт строгое обоснование формуле (4).

Теоремы 1 и 2 — наши главные результаты. Сравним их с существующей литературой. Формула (8) принадлежит широкому классу формул первого приближения. Ближе всего к ней формула М.А. Лаврентьева [20, п. 65]

$$w_\omega(z) \approx z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\xi)\,d\xi}{z-\xi} + c_0 \quad (c_0 \in \mathbb{R}). \tag{10}$$

Формуле (10) предшествовали формулы Адамара для первых вариаций функции Грина и простого собственного значения и формула Жюлиа [57, (13)] для первой вариации конформного отображения гладкой односвязной области на единичный круг. Отделяя в (10) мнимые части, получаем (8) для $n = 2$ и $\alpha = 0$, поэтому (8) можно назвать *обобщенной формулой Лаврентьева.*

Обсудим, не интересуясь сингулярными возмущениями областей и возмущениями негладких областей, второй аспект проблемы — оценки погрешностей. По мнению автора, теоремы 1 и 2 обнаруживают заметную связь с предшествующими исследованиями только в трёх отношениях.

1) Известен ряд оценок для решений краевых задач и для конформных отображений. Погрешность приближения нулевого порядка изучалась для конформных отображений почти круговых областей [67, 68] и для решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка [65]. Она, как правило, имеет вид $O(\delta)$ при δ-близости границ областей, понимаемой посредством метрики Хаусдорфа или её аналогов. Погрешность приближения первого порядка изучалась как для формулы (10) (оценка вида $O(\|\omega\|^2_{C^2})$, см. [20]) и её переносов на отображения областей, близких к кругу, полосе [20] и круговому кольцу [27], так и для задачи рассеяния в [42] (оценка вида $O(\|\omega\|^2_{C^{1,1}})$). Кроме того, в [19, (7′)] получена оценка вида $o(\|\omega\|_{C^1})$ для погрешности продифференцированной по z формулы (10).

2) Норма $\|\omega\|_{L^1}$ из теоремы 1 — это мера Лебега $|\Omega_0 \Delta \Omega|$ симметрической разности невозмущенной (в нашем случае полупространство) и возмущенной (надграфик функции ω) областей. Оценки устойчивости (погрешность "нулевого" приближения) собственных значений в терминах $|\Omega_0 \Delta \Omega|$ можно найти в обзоре [5] и работах [41, 59, 62] (см. также один близкий результат в [40]). Оценки устойчивости посредством меры множества $\Omega_0 \Delta \Omega$ есть и в [23].

3) Сверх приведённых в п. 1) работ, верхние границы $C\|\omega\|^2_X$ погрешностей или аналогичные им встречаются в литературе в различных контекстах.

3a. В работах [6, 60] приведены формулы, которые можно назвать "экспоненциальными асимптотическими формулами" (ЭАФ). Важными условиями справедливости этих ЭАФ являются некоторые квадратичные условия, выражающие конечность суммарной погрешности формулы первого приближения, накопленной на расстояниях порядков 2^{-j}, где $j \geqslant j_0$, от граничной точки. А именно, для ЭАФ (19.5) из [6] это квадратичное условие (19.4), основанное на полунорме $\|\nabla f\|_{L^2}$, а для ЭАФ (6) и (7) из [60] — основанное на полунорме $\|\nabla f\|_{L^\infty}$ квадратичное условие

$$\int_0^1 \Big[\sup\nolimits_{|\xi|<\rho} |\nabla\omega(\xi)|\Big]^2 \frac{d\rho}{\rho} < \infty.$$

Аналогично, в критерии существования положительной угловой производной [50, следствие V.5.8] фигурирует основанное на полунорме $\|\nabla f\|_{L^2}$ квадратичное условие

$$\int_0^1 \alpha_j'(\rho)^2 \rho\, d\rho < \infty, \quad j = 1, 2.$$

Настоящая статья вызвана желанием найти для ЭАФ (7) из [60] применительно к функции U_ω квадратичное условие, основанное на более слабой, чем $\|\nabla f\|_{L^\infty}$, полунорме $\|f\|_X$. С этой целью в теоремах 1 и 2 разбирается упрощенный случай одного масштаба длин r, а не серии 2^{-j} с $j \geqslant j_0$. При этом мы интересуемся производными $D^\alpha U_\omega$, так как в силу граничного условия поведение U_ω вблизи границы лучше всего описывается производной $\partial U_\omega / \partial x_n$. В итоге теорема 2 подсказывает такую проблему: для функции U_ω доказать ЭАФ (7) из [60] с квадратичным условием, основанным на полунорме $\|f\|_{b_2^{1/2}}$.

3b. Верхние и нижние границы $C\|\omega\|^2_{H^{1/2}}$ применяются в упомянутой выше серии работ по коэрцитивности вторых вариаций. Не исключено, что теорему 2 можно доказать на основе методов этих работ и формулы Тейлора

$$S_\omega(1) = S_\omega(0) + S_\omega'(0) + S_\omega''(\theta)/2, \quad 0 < \theta < 1.$$

В настоящей статье автор отдал предпочтение своим дискретным методам из [26], которые к тому же могут дать детальную локальную информацию о U_ω, полезную для решения проблемы из п. 3a.

3c. В [38, (12)] дана оценка погрешности формулы приближения первого порядка (формулы Рэлея) для первого собственного значения лапласиана в деформированном шаре. Правая часть этой оценки такова:

$$C\Big\{\|\omega\|_{L^2}\|\nabla_\xi \omega\|_{L^2} + \|\omega\|^2_{L^2} + \|\omega\|_{L^\infty}\|\nabla_\xi \omega\|^2_{L^2}\Big\},$$

где функция $\omega(\xi)$, $|\xi| = 1$, задаёт радиальную деформацию шара. Отметим в этой связи, что известное мультипликативное неравенство позволяет заменить $\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}$ в теореме 2 на $\|\omega\|_{L^2}\|\nabla\omega\|_{L^2}$.

Дадим еще некоторые библиографические комментарии. Краевые задачи в надграфике функции $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ встречаются в работах по гидродинамике и, особенно, по теории рассеяния. Настоящая статья имеет поверхностное сходство с работой [45], в которой используются почти круговые области, пространство $H^{1/2}$ и меры $|\Omega_0 \Delta \Omega|$. Метрика

$$d(\Omega_0, \Omega) = |\Omega_0 \Delta \Omega| = \|\chi_{\Omega_0} - \chi_\Omega\|_{L^1}$$

порождает хорошо известную в теории переменных областей сильную топологию [46, 56], а условие $|\Omega_0 \Delta \Omega| < \infty$ входит в теорему V.6.1 из [50] об угловой производной на $+\infty$ конформных отображений бесконечных полос.

Опишем вкратце способ доказательства теорем 1 и 2. Теорема 1 сводится к теореме 2 с помощью мультипликативного неравенства [14, следствие 3.3]

$$\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}} \leqslant c(d)\|\omega\|_{\mathrm{Lip}}\|\omega\|_{L^1}. \tag{11}$$

Теорема 2 сводится к своему частному случаю $\alpha = 0$ с помощью принципа отражения Шварца, тождества $R_2^{(\alpha)} = D^\alpha R_2^{(0)}$ и оценки для производных гармонической функции. При $\alpha = 0$ теорема 2 сводится к случаю малых значений $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}}$ посредством принципа максимума и следующих лемм:

Лемма 1. *Для любых $A > 0$ и $\mathfrak{a} > 1$ существует постоянная*

$$a = a(n, A) \in (0, A]$$

такая, что для любой функции ω с $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant a$ и носителем (3) *погрешность формулы* (8) *с $\alpha = 0$ допускает оценку вида* (9a)*:*

$$\left|R_2^{(0)}(x)\right| \leqslant C_0(n, A, \mathfrak{a}) d_\Xi(x)^{1-n} \|\omega\|^2_{b_2^{1/2}} \quad (x \in \mathfrak{T}_{\Xi, \mathfrak{a}r, A}).$$

Лемма 2. *Для $d \in \mathbb{N}$ и $0 < a \leqslant A$ существуют такие постоянные*

$$C_i = C_i(d, a, A) > 0 \quad (i = 1, 2),$$

что для каждой финитной липшицевой функции $\omega : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ с $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant A$ определена финитная липшицева функция

$$\Psi(\xi) = \sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \Big(\omega(\eta) - a|\xi - \eta|\Big), \tag{12}$$

причем $\|\Psi\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant a$, $\Psi(\xi) \geqslant \omega(\xi)$ и выполнены неравенства

$$\|\Psi - \omega\|_{L^1} \leqslant C_1 \|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}, \tag{13a}$$

$$\|\Psi - \omega\|^2_{b_2^{1/2}} \leqslant C_2 \|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}. \tag{13b}$$

Главную сложность представляет лемма 1. Она доказывается распрямлением границы, сведением дифференциального уравнения в полупространстве к сингулярному интегральному уравнению и исследованием получающегося уравнения с помощью ряда Неймана и C^μ-дискретизации сингулярного интеграла и интеграла со слабой особенностью. Мы называем C^μ-дискретизацией аналог L^p_w-дискретизации из [26] для пространства Гёльдера вместо весового пространства Лебега.

Структура работы такова. В § 1 определяются объекты U_ω, w_ω и $b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$, что придаёт чёткий смысл теоремам 1 и 2 и леммам 1 и 2. В § 2 теоремы 1, 2 и их аналоги для формулы Лаврентьева (10) выводятся из лемм 1 и 2. В § 3 мы записываем U_ω при малом $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}}$ через решение сингулярного интегрального уравнения, для чего получаем ряд оценок в локальных гёльдеровых нормах $\|f\|_I$. Леммы 1 и 2 доказываются в § 4. В заключительном § 5 содержится дополнительный материал, полезный для понимания основных результатов статьи, но не нужный для их доказательства, а именно: аналитичность $U_{\varepsilon\omega}(x)$ по (ε, x); сравнение пространства $b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ с гильбертовыми пространствами $\dot{B}^{1/2}_{2,2}(\mathbb{R}^d)$ и $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^d)$; усиление неравенства (11) в терминах пространства Зигмунда и теории интерполяции банаховых пространств.

Несколько слов о соглашениях. В § 1–4 функциональные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а в § 5 — только над $\mathbb{C}$. Для функции f и числа $k \in \mathbb{N}_0$ под $\nabla^k f$ понимается вектор-функция $\{D^\beta f\}_{|\beta|=k}$. Полунормой называется функция $\|\cdot\|$, удовлетворяющая аксиомам нормы за исключением невырожденности «$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$». Для $y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n$ пусть $\widetilde{y} = (y', -y_n)$.

1. Определения для U_ω, w_ω и $b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$

1.1. Функция U_ω и отображение w_ω. Для финитной липшицевой функции $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ положим

$$\Omega = \Omega_\omega = \bigl\{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \omega(x')\bigr\}.$$

Теорема 3. *Задача* (1) *имеет единственное решение* $u_\star \in C^2(\Omega) \cap C\bigl(\overline{\Omega}\bigr)$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Преобразование инверсии

$$x \mapsto x^* \equiv X + \frac{x - X}{|x - X|^2} \quad (x \neq X)$$

переводит Ω в ограниченную липшицеву область Ω^*. Вблизи точки X область Ω^* лежит над сферической частью $\varrho(x) = 0$ границы $S = \partial\Omega^*$, где

$$\varrho(x) = (x^*)_n |x - X|^2 = X_n |x - X|^2 + x_n - X_n.$$

Рассмотрим преобразование Кельвина функции x_n:

$$f(x) = \left(X_n + \frac{x_n - X_n}{|x - X|^2}\right) |x - X|^{2-n}.$$

Функция $f\big|_{S \setminus \{X\}}$ зануляется в некоторой окрестности точки X и потому допускает продолжение на S до липшицевой функции F. Отсюда по теореме 8.30, следствию 8.11 и лемме 6.18 из [7] существует гармоническая функция

$$v \in C^2(\Omega^*) \cap C\bigl(\overline{\Omega^*}\bigr)$$

с граничным значением $-F$ на S и свойством

$$v(x) = O\bigl(\operatorname{dist}(x, S)\bigr) = O\bigl(\varrho(x)\bigr) \quad \text{при } \Omega^* \ni x \to X.$$

Значит, функция

$$u_\star(x) = x_n + v(x^*) |x - X|^{2-n}$$

принадлежит $C^2(\Omega) \cap C\bigl(\overline{\Omega}\bigr)$ и (см. (5))

$$\begin{aligned} u_\star(x) - x_n &= O\bigl(\varrho(x^*) |x - X|^{2-n}\bigr) \\ &= O\bigl(x_n |x - X|^{-n}\bigr) = O\bigl(D_n E(x)\bigr) \quad \text{при } \Omega \ni x \to \infty, \end{aligned} \tag{14}$$

что даёт первое условие в (1). Второе же и третье условия в (1) следуют из [22, с. 254] и равенства $v\big|_S = -F$, поэтому функция $u_\star$ — искомая.

Допустим, что функции $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C\bigl(\overline{\Omega}\bigr)$ обе удовлетворяют условиям (1). Применяя к функциям $[u_1 - u_2](\cdot - \|\omega\|_{L^\infty} e_n)$ и $[u_2 - u_1](\cdot - \|\omega\|_{L^\infty} e_n)$ теорему А.А. Космодемьянского [21, теорема I.6.4], получаем $u_1 = u_2$. $\square$

Определение 1. *Через U_ω обозначим функцию $u_\star$ из теоремы 3.*

Теорема 4. *При $n = 2$ существует конформное отображение* (2)*. Оно определено с точностью до аддитивной вещественной постоянной, причем*

$$U_\omega(x) = \operatorname{Im} w_\omega(x_1 + \mathrm{i}x_2), \quad x \in \Omega.$$

Доказательство. Какое-нибудь конформное отображение

$$W : \Omega^{\mathbb{C}} = \bigl\{\operatorname{Im} z > \omega(\operatorname{Re} z)\bigr\} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{C}^+ = \bigl\{\operatorname{Im} z > 0\bigr\}$$

строится по теореме Римана. По теореме II.3.4′ из [8] существует предел $W(\infty)$, причем предположение $W(\infty) = \infty$ не умаляет общности. По теореме II.3.5 из [8] найдётся аналитическая в окрестности нуля функция f такая, что $f(0) = 0$,

$c := f'(0) \neq 0$ и $W(z) = 1/f(1/z)$ для всех $z \in \Omega^{\mathbb{C}}$ достаточно большого модуля. Отсюда $W'(z) = f'(1/z)[zf(1/z)]^{-2}$ и $W'(\infty) = 1/c$. Отображение $|c|W$ удовлетворяет свойствам (2). Утверждение о произволе, которым обладает отображение w_ω, следует из свойств дробно-линейных отображений $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$.

Непрерывность в $\overline{\Omega}$ функции

$$u_\star(x) \equiv \operatorname{Im}|c|W(x_1 + \mathrm{i}x_2)$$

и выполнение ею второго и третьего условий в (1) получаются с учетом принципа соответствия границ Каратеодори [8, теорема II.3.4]. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $|\zeta| < \varepsilon$ функции

$$g(\zeta) = \frac{c\zeta}{f(\zeta)}, \quad h(\zeta) = \frac{g(\zeta) - g(0)}{\zeta}$$

аналитичны (полагаем $g(0) = 1$ и $h(0) = g'(0)$), причем $W(1/\zeta) = 1/f(\zeta)$, если $1/\zeta \in \Omega^{\mathbb{C}}$. Следовательно,

$$|c|W(z) = \frac{|c|}{c}\Big\{z + h(1/z)\Big\}, \quad |z| > 1/\varepsilon. \tag{15}$$

Принцип соответствия границ и (15) для $\mathbb{R} \ni z \to \infty$ показывают, что $|c| = c$ и что коэффициенты Тейлора функции h в нуле вещественны. Поэтому для $|x| \geqslant 2/\varepsilon$ и $\zeta = \frac{1}{x_1 + \mathrm{i}x_2}$ имеем

$$u_\star(x) = x_2 + \operatorname{Im} h(\zeta),$$

$$|\operatorname{Im} h(\zeta)| \leqslant |\operatorname{Im}\zeta| \max_{|\theta| \leqslant \varepsilon/2} |h'(\theta)| = \frac{|x_2|}{|x|^2} \max_{|\theta| \leqslant \varepsilon/2} |h'(\theta)|.$$

Значит, функция $u_\star$ удовлетворяет и первому условию в (1), откуда $u_\star = U_\omega$ по определению 1. $\square$

1.2. Пространство $b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$. Пусть $d \in \mathbb{N}$. В литературе известно много определений и интерпретаций однородного пространства Слободецкого $b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$. Мы хотели бы сопоставить самые простые и классические из них, но затрудняемся указать источник, где это уже сделано. Отдельные сведения содержатся в [3, § 6.3], [30, гл. 5] и [49], книга [64] — библиографическая редкость, а определения из [36] и [55] не вполне стандартны. Ниже в этом разделе приводится материал, используемый в формулировке и доказательстве теорем 1 и 2. Дополнительные сведения "для расширения кругозора" даны в разделе 5.2.

Введём ряд понятий в порядке убывания их важности. Через $\mathcal{D}$ обозначается семейство всех двоичных кубов в $\mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_k,$$

$$\mathcal{D}_k = \big\{I \colon I = [0, 2^{-k})^d + 2^{-k}a \text{ для некоторого } a \in \mathbb{Z}^d\big\}.$$

При $I \in \mathcal{D}$ через l_I, $\mathfrak{c}_I$ и tI (где $t > 0$) обозначим ребро I, центр I и множество $\{\mathfrak{c}_I + t(\xi - \mathfrak{c}_I) \colon \xi \in I\}$ соответственно. Для $r \in (0, \infty]$, множества $E \subset \mathbb{R}^d$ с мерой $|E| \in (0, \infty)$ и функции $f \in L^r(E)$ положим

$$\operatorname{osc}_r^0 f(E) = |E|^{-1/r} \inf_{\gamma \in \mathbb{P}_0} \|f - \gamma\|_{L^r(E)},$$

где $\mathbb{P}_0$ — поле скаляров. Для $h, \xi \in \mathbb{R}^d$ и функции f на $\mathbb{R}^d$ пусть

$$\Delta_h f(\xi) = f(\xi + h) - f(\xi).$$

Лемма 3. *Для любой функции $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ равносильны следующие условия:*

(i) $(\forall h)$ $\Delta_h f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *и конечно выражение*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |h|^{-d-1} \|\Delta_h f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\, dh\right)^{1/2}; \tag{16a}$$

(ii) $(\forall h)$ $\Delta_h f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *и конечно выражение*

$$\left(\int_0^\infty t^{-2} \sup_{|h|\leqslant t} \|\Delta_h f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\, dt\right)^{1/2}; \tag{16b}$$

(iii) конечно выражение

$$\left(\sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{d-1} \operatorname{osc}_2^0 f(3I)^2\right)^{1/2}. \tag{16c}$$

Выражения (16a)–(16c) *сравнимы между собой с постоянными, зависящими только от d.*

Доказательство. Оценка (16a)$\leqslant C$(16b) и, следовательно, импликация (i)$\Leftarrow$(ii) получаются переходом к сферическим координатам. Оценка (16b)$\leqslant C$(16c) и импликация (ii)$\Leftarrow$(iii) вытекают из тождества

$$\Delta_h f \equiv \Delta_h[f-\gamma] \quad (\gamma \in \mathbb{P}_0),$$

см. доказательство теоремы 1.14 в [24]. Далее,

$$\operatorname{osc}_2^0 f(3I)^2 \leqslant c(d) l_I^{-2d} \int_{|h|<l_I} dh \int_{3I} |\Delta_h f(\xi)|^2\, d\xi$$

по теореме Уитни [55, теорема A.1]. Поэтому

$$\sum_{I\in\mathcal{D}_k} l_I^{d-1} \operatorname{osc}_2^0 f(3I)^2 \leqslant c3^d 2^{(d+1)k} \int_{|h|<2^{-k}} \|\Delta_h f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\, dh,$$

$$\begin{aligned}\sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{d-1} \operatorname{osc}_2^0 f(3I)^2 &\leqslant c3^d \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}:\ |h|<2^{-k}} 2^{(d+1)k}\right) \|\Delta_h f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\, dh \\ &\leqslant c'(d) \int_{\mathbb{R}^d} |h|^{-d-1} \|\Delta_h f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\, dh.\end{aligned}$$

Тем самым все утверждения леммы 3 установлены. □

Определение 2. *Пространство всех функций $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ со свойствами (i)–(iii) леммы 3 обозначим через $b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$. Полунормы* (16a) *и* (16c) *на нём обозначим через $|f|_{b_2^{1/2}}$ и $\|f\|_{b_2^{1/2}}$ соответственно.*

2. Вывод теорем 1 и 2 и их аналогов для первоначальной формулы Лаврентьева из лемм 1 и 2

Лемма 4. *Функция U_ω положительна в $\Omega = \Omega_\omega$. Если $\omega_0 \leqslant \omega$ и $\omega_1 \leqslant \omega$ — две финитные липшицевы функции и $U_{\omega_0} \leqslant U_{\omega_1}$ на $\partial\Omega$, то $U_{\omega_0} \leqslant U_{\omega_1}$ и в Ω. Для двух финитных липшицевых функций $\omega_0 \geqslant \omega_1$ имеем $U_{\omega_0} \leqslant U_{\omega_1}$ в Ω_{ω_0}.*

Доказательство. Ясно, что $U_\omega(x) \in \mathbb{R}$. Оценка (14) показывает, что $U_\omega(x) > 0$ при больших $|x|$. Ввиду принципа максимума это верно и для всех $x \in \Omega$.

Пусть точка X из доказательства теоремы 3 лежит вне $\overline{\Omega_{\omega_0}} \cup \overline{\Omega_{\omega_1}}$. Тогда преобразование Кельвина функции $U_{\omega_1} - U_{\omega_0}$ принадлежит $C\bigl(\overline{\Omega^*}\bigr)$ и неотрицательно на S. Поэтому оно неотрицательно и в Ω^*.

Для пары $\omega_0 \geqslant \omega_1$ положим $\omega = \omega_0$. По первому утверждению

$$U_{\omega_0} = 0 \leqslant U_{\omega_1} \quad \text{на } \partial\Omega.$$

По второму утверждению $U_{\omega_0} \leqslant U_{\omega_1}$ в $\Omega = \Omega_{\omega_0}$. □

Лемма 5. *Пусть для некоторых $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $\rho > 0$ в полушарии*

$$H = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \colon \bigl|x - (\zeta, 0)\bigr| \leqslant \rho \text{ и } x_n \geqslant 0\bigr\}$$

задана непрерывная функция U, зануляющаяся при $x_n = 0$ и гармоническая во внутренности H°. Тогда при $\bigl|x - (\zeta, 0)\bigr| \leqslant \rho/2$ и $x_n > 0$

$$\bigl|D^\alpha U(x)\bigr| \leqslant c(n, \alpha)\|U\|_{L^\infty(H)} \times \begin{cases} \rho^{-|\alpha|}, & \alpha_n \text{ нечётное}, \\ x_n \rho^{-1-|\alpha|}, & \alpha_n \text{ чётное}. \end{cases}$$

Доказательство. Для $\bigl|y - (\zeta, 0)\bigr| \leqslant \rho$ положим

$$V(y) = \begin{cases} U(y), & y_n \geqslant 0, \\ -U\bigl(\widetilde{y}\bigr), & y_n \leqslant 0. \end{cases}$$

По обратной теореме о среднем значении [16, п. IV.3.2] функция V гармонична во внутренности своей области определения, откуда ввиду [22, с. 237]

$$\max_{|x-(\zeta,0)| \leqslant \rho/2} \bigl|D^\beta V(x)\bigr| \leqslant c_0(n, \beta)\rho^{-|\beta|} \max_{|y-(\zeta,0)| \leqslant \rho} \bigl|V(y)\bigr|.$$

Для нечётного α_n мы полагаем $\beta = \alpha$, а для чётного — берём $\beta = \alpha + e_n$ и используем равенство $D^\alpha V\bigr|_{(x',0)} = 0$. □

Доказательство теоремы 2. Найдём постоянную

$$a = a(n, A) \in (0, A]$$

по лемме 1. Возьмём произвольную ω с $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant A$ и свойством (3).

Допустим, что

$$\|\omega\|_{L^\infty} \leqslant (\mathfrak{a}^{1/4} - 1)ar. \tag{17}$$

Построим функцию $\Psi \geqslant \omega$ по лемме 2. Очевидно, что

$$\|\Psi\|^2_{b_2^{1/2}} \leqslant \bigl(1 + \sqrt{C_2}\bigr)^2 \|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}, \tag{18a}$$

$$\operatorname{supp}\Psi \subset B(\Xi, \mathfrak{a}^{1/4}r). \tag{18b}$$

Применим лемму 1 к $(\mathfrak{a}^{1/4}, \Psi, \mathfrak{a}^{1/4}r)$ вместо $(\mathfrak{a}, \omega, r)$. Для точки

$$x \in \mathfrak{T}_{\Xi, \mathfrak{a}^{1/2}r, A} = \mathfrak{T}_{\Xi, \mathfrak{a}^{1/4}[\mathfrak{a}^{1/4}r], A}$$

с учетом леммы 4 получаем

$$U_\omega(x) \geqslant U_\Psi(x) = x_n - 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Psi(\xi) D_n E\bigl(x - (\xi, 0)\bigr)\, d\xi + R^{(0)}_{2,\Psi}(x),$$

$$\bigl|R^{(0)}_{2,\Psi}(x)\bigr| \leqslant C_0(n, A, \mathfrak{a}^{1/4}) d_\Xi(x)^{1-n} \|\Psi\|^2_{b_2^{1/2}}. \tag{18c}$$

Аналогично мажоранте $\Psi \geqslant \omega$ строится миноранта $\psi \leqslant \omega$, для которой

$$U_\omega(x) \leqslant U_\psi(x) = x_n - 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(\xi) D_n E\big(x - (\xi, 0)\big)\, d\xi + R^{(0)}_{2,\psi}(x).$$

Значит, погрешность $R^{(0)}_2(x) = R^{(0)}_{2,\omega}(x)$ заключена в границах

$$\varrho_\Psi = 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\omega(\xi) - \Psi(\xi)] D_n E\big(x - (\xi, 0)\big)\, d\xi + R^{(0)}_{2,\Psi}(x) \leqslant R^{(0)}_2(x)$$
$$\leqslant \varrho_\psi = 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\omega(\xi) - \psi(\xi)] D_n E\big(x - (\xi, 0)\big)\, d\xi + R^{(0)}_{2,\psi}(x).$$

В силу однородности $D_n E$ и соотношений (3), (13a) и (18) имеем

$$|\varrho_\Psi| \leqslant c_1(n, A, \mathfrak{a}) d_\Xi(x)^{1-n} \|\omega\|^2_{b^{1/2}_2}.$$

Ясно, что $|\varrho_\psi|$ допускает такую же оценку. Мы доказали, что

$$\big|R^{(0)}_2(x)\big| \leqslant c_1 d_\Xi(x)^{1-n} \|\omega\|^2_{b^{1/2}_2} \quad (x \in \mathfrak{T}_{\Xi, \mathfrak{a}^{1/2} r, A}). \tag{19}$$

Пусть теперь предположение (17) не выполнено. В силу (14)

$$\big|U_{\pm \mathfrak{t}_{\Xi, r, A}}(x) - x_n\big| \leqslant c_2 d_\Xi(x)^{1-n}, \quad x \in \mathfrak{T}_{\Xi, \mathfrak{a}^{1/2} r, A}.$$

Сдвиг и растяжение независимой переменной показывают, что постоянная c_2 имеет вид

$$c_2 = c_3(n, A, \mathfrak{a}) r^n.$$

Неравенство $|\omega| \leqslant \mathfrak{t}_{\Xi, r, A}$ и лемма 4 позволяют заключить, что

$$\big|U_\omega(x) - x_n\big| \leqslant c_3 r^n d_\Xi(x)^{1-n}, \quad x \in \mathfrak{T}_{\Xi, \mathfrak{a}^{1/2} r, A}.$$

Поэтому

$$\big|R^{(0)}_2(x)\big| \leqslant c_3 r^n d_\Xi(x)^{1-n} + 2\int_{B(\Xi, r)} |\omega(\xi)| \Big|D_n E\big(x - (\xi, 0)\big)\Big|\, d\xi \leqslant c_4 r^n d_\Xi(x)^{1-n}$$

для $c_4 = c_4(n, A, \mathfrak{a})$. Липшицевость ω и отрицание условия (17) дают, что

$$\|\omega\|^2_{b^{1/2}_2} \geqslant c_5(n, A, \mathfrak{a}) r^n.$$

Значит, верно (19) с $c_4 c_5^{-1}$ вместо c_1, так что

$$\big|R^{(0)}_2(x)\big| \leqslant \max\{c_1, c_4 c_5^{-1}\} d_\Xi(x)^{1-n} \|\omega\|^2_{b^{1/2}_2}, \quad x \in \mathfrak{T}_{\Xi, \mathfrak{a}^{1/2} r, A}, \tag{19$'$}$$

вне зависимости от справедливости (17).

Пусть $x \in \mathfrak{T}_{\Xi, \mathfrak{a} r, A}$. Очевидно существование столь малого $c_6(A, \mathfrak{a})$, что

$$\text{если } x_n \leqslant c_6 d_\Xi(x), \text{ то } |x' - \Xi| \geqslant \mathfrak{a}^{3/4} r \text{ и } 2x_n \leqslant \rho = (1 - \mathfrak{a}^{-1/4})|x' - \Xi|.$$

Таким образом, если $x_n \leqslant c_6 d_\Xi(x)$, то $d_\Xi(x) \leqslant c_7(A, \mathfrak{a})\rho$ и, при $\zeta = x'$,

$$d_\Xi \approx d_\Xi(x) \quad \text{на } H,$$
$$H \subset \overline{\mathfrak{T}_{\Xi, \mathfrak{a}^{1/2} r, A}}$$

для полушария H из леммы 5. Проверяя условия этой леммы для функции $U = R^{(0)}_2$ и используя (8) и (19$'$), получаем

$$\big|R^{(\alpha)}_2(x)\big| = \big|D^\alpha R^{(0)}_2(x)\big|$$

$$\leqslant c(n,\alpha)\|R_2^{(0)}\|_{L^\infty(H)}\begin{cases}\rho^{-|\alpha|}, & \alpha_n \text{ нечётное},\\ x_n\rho^{-1-|\alpha|}, & \alpha_n \text{ чётное};\end{cases}$$

$$\leqslant c_8(n,A,\mathfrak{a},\alpha)d_\Xi(x)^{1-n}\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}\begin{cases}d_\Xi(x)^{-|\alpha|}, & \alpha_n \text{ нечётное},\\ x_n d_\Xi(x)^{-1-|\alpha|}, & \alpha_n \text{ чётное};\end{cases}$$

$$=\begin{cases}c_8 d_\Xi(x)^{1-n-|\alpha|}\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}, & \alpha_n \text{ нечётное},\\ c_8 x_n d_\Xi(x)^{-n-|\alpha|}\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}, & \alpha_n \text{ чётное}.\end{cases}$$

Тем самым (9) доказано при $x_n \leqslant c_6 d_\Xi(x)$.

Если $x\in\mathfrak{T}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A}$ и $x_n > c_6 d_\Xi(x)$, то для достаточно малого $c_9(A,\mathfrak{a})\leqslant 1/2$ шар с центром x и радиусом $c_9 d_\Xi(x)$ целиком содержится в $\mathfrak{T}_{\Xi,\mathfrak{a}^{1/2}r,A}$. Применение (19′) и оценок для производных гармонической функции $R_2^{(0)}$ аналогично предыдущему доказывает (9) и в этом случае; при этом оценки (9a) и (9b) различать не надо, так как $c_6 d_\Xi(x) < x_n \leqslant d_\Xi(x)$. □

Доказательство теоремы 1. Если α_n чётно, то производная $D^{\alpha+e_n}E(y)$ нечётна по y_n, поэтому функция

$$F(y) = D^{\alpha+e_n}E(y)/y_n \quad (y_n\neq 0)$$

допускает продолжение до аналитической в $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ функции, однородной степени $-n-|\alpha|$. В силу соглашений (6) и (8) имеем

$$R_1^{(\alpha)}(x) = -2\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\omega(\xi)D^{\alpha+e_n}E\bigl(x-(\xi,0)\bigr)\,d\xi + R_2^{(\alpha)}(x). \tag{20}$$

Из однородности функции $D^{\alpha+e_n}E(y)$, равенства $D^{\alpha+e_n}E(y) = y_nF(y)$ при чётном α_n и из теоремы 2 получаем

$$\bigl|R_1^{(\alpha)}(x)\bigr| \leqslant c(n,A,\mathfrak{a},\alpha)\Bigl[\|\omega\|_{L^1}+\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}\Bigr]\begin{cases}d_\Xi(x)^{1-n-|\alpha|}, & \alpha_n \text{ нечётное},\\ x_n d_\Xi(x)^{-n-|\alpha|}, & \alpha_n \text{ чётное},\end{cases}$$

если $x\in\mathfrak{T}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A}$. Нам остаётся сослаться на оценку (11). Она суть частный случай следствия 3.3 из [14], как видно из (16b) и из доказательства теоремы 5 в [33, п. 4.2] об эквивалентности определений липшицевых функций условием $\|f\|_{\mathrm{Lip}}<\infty$ и условием $\nabla f\in L^\infty$. □

Замечание. В одномерном случае неравенство (11) на основе полунормы (16a) установили Б.С. Кашин и О.В. Бесов, см. [12].

Приведём аналоги теорем 1 и 2 для формулы (10). При $n=2$ положим

$$\mathfrak{T}^{\mathbb{C}}_{\Xi,r,A} = \bigl\{z\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > \mathfrak{t}_{\Xi,r,A}(\operatorname{Re} z)\bigr\}.$$

Теорема 5. *Для любой функции ω с $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}}\leqslant A$ и носителем* (3) *и для любого из отображений w_ω теоремы 4 существует единственное $c_0\in\mathbb{R}$ такое, что*

$$\mathcal{R}_1^{(0)}(z) \equiv w_\omega(z) - z - c_0 \to 0 \quad \text{при } z\to\infty. \tag{21}$$

Для погрешности $\mathcal{R}_1^{(k)}(z) = \bigl(\frac{d}{dz}\bigr)^k\mathcal{R}_1^{(0)}(z)$ $(k\in\mathbb{N}_0)$ приближенной формулы

$$w_\omega^{(k)}(z) = \mathcal{R}_1^{(k)}(z) + \begin{cases}z+c_0, & k=0,\\ 1, & k=1,\\ 0, & k\geqslant 2,\end{cases}$$

при любом $z \in \mathfrak{T}^{\mathbb{C}}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A}$ $(\mathfrak{a} > 1)$ *имеют место оценки*

$$\left|\mathcal{R}_1^{(k)}(z)\right| \leqslant C(A,\mathfrak{a},k)|z-\Xi|^{-1-k}\|\omega\|_{L^1}, \tag{22a}$$

$$\left|\operatorname{Im}\mathcal{R}_1^{(k)}(z)\right| \leqslant C'(A,\mathfrak{a},k)[\operatorname{Im} z]|z-\Xi|^{-2-k}\|\omega\|_{L^1}. \tag{22b}$$

Теорема 6. *Для любой функции* ω *с* $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant A$ *и носителем* (3) *и для любого из отображений* w_ω *теоремы 4 существует единственное* $c_0 \in \mathbb{R}$ *такое, что*

$$\mathcal{R}_2^{(0)}(z) \equiv w_\omega(z) - z - c_0 - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(\xi)\,d\xi}{z-\xi} \to 0 \quad \text{при } z \to \infty.$$

Для погрешности $\mathcal{R}_2^{(k)}(z) = \left(\frac{d}{dz}\right)^k \mathcal{R}_2^{(0)}(z)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ *приближенной формулы*

$$w_\omega^{(k)}(z) = \mathcal{R}_2^{(k)}(z) + \frac{(-1)^k k!}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(\xi)\,d\xi}{(z-\xi)^{k+1}} + \begin{cases} z + c_0, & k = 0,\\ 1, & k = 1,\\ 0, & k \geqslant 2,\end{cases}$$

при любом $z \in \mathfrak{T}^{\mathbb{C}}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A}$ $(\mathfrak{a} > 1)$ *имеют место оценки*

$$\left|\mathcal{R}_2^{(k)}(z)\right| \leqslant C(A,\mathfrak{a},k)|z-\Xi|^{-1-k}\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}},$$

$$\left|\operatorname{Im}\mathcal{R}_2^{(k)}(z)\right| \leqslant C'(A,\mathfrak{a},k)[\operatorname{Im} z]|z-\Xi|^{-2-k}\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}.$$

Доказательство теорем 5 и 6. Предложение под формулой (15) доказывает существование постоянной c_0 в обеих теоремах. Единственность c_0 очевидна.

Разложим

$$w_\omega(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z).$$

Для $z = x + \mathrm{i}y \in \mathfrak{T}^{\mathbb{C}}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A}$ в силу (21), условий Коши-Римана, теоремы 4 и (6)

$$\begin{aligned} u(z) &= x + c_0 + \int_y^{\infty}\frac{\partial v(x+\mathrm{i}t)}{\partial x}\,dt \\ &= x + c_0 + \int_y^{\infty} R_1^{(1,0)}\big|_{(x,t)}\,dt, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\mathcal{R}_1^{(0)}(z) &= v(z) - y = R_1^{(0,0)}(\hat z), && \hat z = (x,y) \in \mathbb{R}^2,\\ \mathcal{R}_1^{(0)}(z) &= \int_y^{\infty} R_1^{(1,0)}\big|_{(x,t)}\,dt + \mathrm{i}R_1^{(0,0)}(\hat z), &&\\ \mathcal{R}_1^{(1)}(z) &= -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{R}_1^{(0)}(z) = R_1^{(0,1)}(\hat z) + \mathrm{i}R_1^{(1,0)}(\hat z), &&\\ \mathcal{R}_1^{(k)}(z) &= R_1^{(k-1,1)}(\hat z) + \mathrm{i}R_1^{(k,0)}(\hat z), && k \geqslant 1,\\ \operatorname{Im}\mathcal{R}_1^{(k)}(z) &= R_1^{(k,0)}(\hat z), && k \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ввиду (7) отсюда следуют неравенства (22) за исключением (22a) с $k = 0$. В этом особом случае мы применяем (7a) для оценивания $R_1^{(0,0)}(\hat z)$ и

$$\left|\int_y^{\infty} R_1^{(1,0)}\big|_{(x,t)}\,dt\right| \leqslant c_1\|\omega\|_{L^1}\int_y^{\infty}\frac{dt}{|x-\Xi|^2+t^2} \leqslant c_2|z-\Xi|^{-1}\|\omega\|_{L^1},$$

с постоянными $c_1 = c_1(A,\mathfrak{a})$ и $c_2 = c_2(A,\mathfrak{a})$. Теорема 5 доказана.

Подставляя (20) в формулы (23) и $v(z)-y=R_1^{(0,0)}(\hat z)$, получаем

$$\begin{aligned} u(z)-x-c_0 &= \int_y^\infty \left\{-2\int_{\mathbb R}\omega(\xi)D_1D_2E\big|_{(x-\xi,t)}\,d\xi + R_2^{(1,0)}\big|_{(x,t)}\right\}dt \\ &= 2\int_{\mathbb R}\omega(\xi)D_1E\big|_{(x-\xi,y)}\,d\xi + \int_y^\infty R_2^{(1,0)}\big|_{(x,t)}\,dt, \\ v(z)-y &= -2\int_{\mathbb R}\omega(\xi)D_2E\big|_{(x-\xi,y)}\,d\xi + R_2^{(0,0)}(\hat z), \\ \mathcal R_2^{(0)}(z) &= \int_y^\infty R_2^{(1,0)}\big|_{(x,t)}\,dt + \mathrm{i}R_2^{(0,0)}(\hat z). \end{aligned}$$

Теперь доказательство теоремы 6 завершается по аналогии с доказательством теоремы 5, с использованием (9) вместо (7). □

3. Представление функции U_ω при малом $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}}$ через решение ζ сингулярного интегрального уравнения

3.1. Распрямление надграфика. Напомним, что

$$\Omega=\Omega_\omega=\bigl\{y=(y',y_n)\in\mathbb R^n\colon y_n>\omega(y')\bigr\}$$

для финитной липшицевой функции $\omega:\mathbb R^{n-1}\to\mathbb R$. Распрямляющий диффеоморфизм $\mathfrak g:\Omega\to\mathbb R^n_+\equiv\Omega_0$ обычно строится как обращение диффеоморфизма $g:\mathbb R^n_+\to\Omega$ вида

$$g(x',x_n)=\bigl(x',cx_n+G_\omega(x)\bigr),$$

где $c>0$ и $G_\omega(\xi,0+)=\omega(\xi)$ при $\xi\in\mathbb R^{n-1}$. За G_ω берут $G_\omega(x)=\omega(x')$, либо гармоническое продолжение функции ω, либо сходное с гармоническим "свёрточное" продолжение (см. [25, п. 2.5], [28, с. 243] и [60]), либо одну дискретную конструкцию из [25, п. 2.7]. Адаптируем её к геометрическому контексту леммы 1. За отправную точку примем следующее

Определение 3. *Для $0<\mathfrak q\leqslant\mathfrak q^*$ скажем, что семейство кубов $\{Q_I\}$ в $\mathbb R^{n-1}$ принадлежит $\mathcal Q(\mathfrak q,\mathfrak q^*)$, если для любого $I\in\mathcal D$ ($\mathcal D$ в размерности $d=n-1$)*

$$\text{ребро}(Q_I)\geqslant\mathfrak q l_I,\quad Q_I\subset\mathfrak q^*I. \tag{24}$$

Зафиксируем функции $\psi_I:\mathbb R^n_+\to[0,1]$, $I\in\mathcal D$, класса C^∞ такие, что

$$\begin{aligned} &\sum_{I\in\mathcal D}\psi_I(x)=1, && x_n>0,\\ &|D^\beta\psi_I(x)|\leqslant c(\beta)l_I^{-|\beta|}, && \beta\in\mathbb N_0^n,\\ &\operatorname{supp}\psi_I\subset D_I\equiv\left[\frac32 I\right]\times\left(\frac35 l_I,\frac{12}{5}l_I\right), && I\in\mathcal D. \end{aligned}$$

Пусть $\inf_\gamma$ в определении $\operatorname{osc}_2^0\omega(Q_I)$ достигается на числе γ_I. Аналогично [25, с. 169–170] проверяются соотношения

$$\begin{gathered} \text{если } x\in D_I \text{ и } \psi_J(x)\neq0,\\ \text{то } J\in\mathcal T(I)=\bigl\{K\in\mathcal D\colon l_K\in\{l_I/2,l_I,2l_I\} \text{ и } \overline I\cap\overline K\neq\varnothing\bigr\};\\ \text{если } J\in\mathcal T(I), \text{ то } \mathfrak q^*J\subset\mathfrak q^\star I \text{ для } \mathfrak q^\star=2\mathfrak q^*+3;\\ \text{если } J\in\mathcal T(I), \text{ то } |\gamma_I-\gamma_J|\leqslant c(n,\mathfrak q,\mathfrak q^*)\operatorname{osc}_2^0\omega(\mathfrak q^\star I), \end{gathered}$$

а также, с учетом теоремы 2.5 из [25], следующие леммы:

Лемма 6. *Для некоторого семейства* $\{Q_I\} \in \mathcal{Q}(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*)$ *положим*

$$G_\omega(x) = G_\omega^{\{Q_I\}}(x) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \gamma_I \psi_I(x), \quad x_n > 0.$$

Тогда $G_\omega(\cdot, 0+) \equiv \omega$, $G_\omega \in C^\infty$ *и для любого мультииндекса* $\beta \neq 0$

$$|D^\beta G_\omega(x)| \leqslant c_1(\beta, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*) l_I^{1-|\beta|} b_I \quad (x \in D_I), \tag{25}$$

где

$$b_I \equiv l_I^{-1} \operatorname{osc}_2^0 \omega(\mathfrak{q}^\star I) \leqslant c_2(n, \mathfrak{q}^*) \|\omega\|_{\mathrm{Lip}}. \tag{26}$$

Лемма 7. *В условиях леммы 6 положим*

$$g(x', x_n) = \big(x', x_n + G_\omega(x)\big), \quad x_n > 0.$$

Пусть выполнено условие

$$c_1(e_n, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*) c_2(n, \mathfrak{q}^*) \|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1/2. \tag{27}$$

Тогда g — *диффеоморфизм* $\mathbb{R}^n_+ \to \Omega$ *с обратным* $\mathfrak{g} = g^{-1}$ *вида*

$$\mathfrak{g}(y', y_n) = \big(y', \mathfrak{G}(y)\big)$$

и свойствами

$$\begin{gathered} g, \mathfrak{g}, \mathfrak{G} \text{ — класса } C^\infty \text{ и равномерно липшицевы}, \\ 1/2 \leqslant D_n g_n = 1 + D_n G_\omega \leqslant 3/2, \\ \frac{2}{3} \leqslant (D_n \mathfrak{G}) \circ g = \frac{1}{D_n g_n} \leqslant 2, \end{gathered}$$

$$\big|(D^\beta \mathfrak{G})\big(g(x)\big)\big| \leqslant c_3(\beta, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*) l_I^{1-|\beta|} b_I, \quad \text{если } \beta \notin \{0, e_n\} \text{ и } x \in D_I. \tag{28}$$

В условиях леммы 7 в $\mathbb{R}^n_+$ определены функции

$$\begin{aligned} K_1 &= (D_n \mathfrak{G}) \circ g - 1, \\ K_2 &= |(\nabla_y \mathfrak{G}) \circ g|^2 - 1, \\ L &= (\Delta_y \mathfrak{G}) \circ g, \\ M &= \Delta g_n = \Delta G_\omega. \end{aligned} \tag{29}$$

В силу лемм 6 и 7 имеем при $x \in D_I$ с постоянными $C_i = C_i(n, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*)$

$$|K_1(x)| \leqslant C_1 b_I, \tag{30a}$$

$$K_2 = 2K_1 + K_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} ((D_i \mathfrak{G}) \circ g)^2,$$

$$|K_2(x)| \leqslant C_2 b_I, \tag{30b}$$

$$|L(x)| \leqslant C_3 l_I^{-1} b_I, \tag{30c}$$

$$|M(x)| \leqslant C_4 l_I^{-1} b_I. \tag{30d}$$

Простым дифференцированием проверяется (см. [26, (29)]) следующая

Лемма 8. *Пусть в* Ω *задана гармоническая функция* $u_\star$. *Тогда функция*

$$u = u_\star \circ g$$

класса C^∞ удовлетворяет в $\mathbb{R}^n_+$ дифференциальному уравнению

$$\Delta u + K_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial y_i}(g)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_n} + L\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Для $u_\star(y) = y_n$ получаем $u = g_n$, так что с учетом (25), (28) и (30)

$$M + K_2\frac{\partial^2 G_\omega}{\partial x_n^2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial y_i}(g)\frac{\partial^2 G_\omega}{\partial x_i\partial x_n} + L + L\frac{\partial G_\omega}{\partial x_n} = 0, \tag{31a}$$

$$|L + M| \leqslant C_5(n, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*) l_I^{-1} b_I^2 \quad \text{на } D_I. \tag{31b}$$

3.2. Запись представления. Для E из (5) введём функцию Грина

$$G(x, y) = E(x - y) - E(x - \widetilde{y}) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n_+ \ \&\ x \neq y) \tag{32}$$

оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n_+$. Мы ищем U_ω в виде $u \circ \mathfrak{g}$ для

$$u(x) = x_n + \int_{y_n>0} G(x, y)\zeta(y)\,dy \tag{33}$$

с достаточно гладкой плотностью ζ. По лемме 8 она удовлетворяет уравнению

$$\zeta + \mathcal{N}_1\zeta + \mathcal{N}_2\zeta = -L, \tag{34}$$

$$\mathcal{N}_1\zeta = \left(K_2\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial y_i}(g)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_n}\right)\int_{y_n>0} G(\cdot, y)\zeta(y)\,dy, \tag{35}$$

$$\mathcal{N}_2\zeta = L\frac{\partial}{\partial x_n}\int_{y_n>0} G(\cdot, y)\zeta(y)\,dy. \tag{36}$$

Наша ближайшая цель состоит в построении банахова пространства, в котором оператор $\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2$ является сжимающим при малом $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}}$, потом в обосновании приведённого выше представления.

3.3. Локальные гёльдеровы нормы и их мультипликативное свойство. Искомое пространство будет подмножеством в

$$\mathcal{C} = C^\mu_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$$

— пространстве всех функций, гёльдеровых на компактах в $\mathbb{R}^n_+$ с фиксированным показателем $\mu \in (0, 1)$. Обозначим

$$|f|_{C^\mu(Y)} = \sup_{x,y\in Y:\ x\neq y}\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\mu}.$$

Для $I \in \mathcal{D}$ и вектор-функции $F = \{f_k\}$ с $f_k \in \mathcal{C}$ положим

$$I^{\boxdot} = \overline{I} \times [l_I, 2l_I],$$

$$\|F\|_I^* = \left\|\sqrt{\sum_k |f_k|^2}\right\|_{L^\infty(I^{\boxdot})},$$

$$\|F\|_I = \|F\|_I^* + l_I^\mu \max_k |f_k|_{C^\mu(I^{\boxdot})}.$$

Локальные нормы $\|F\|_I$ являются гёльдеровыми аналогами весовых лебеговых локальных норм $\|f\|_I$ из [26, с. 75].

Очевидно (см. также [7, (4.7)] или [16, с. 354]), что для $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$

$$\|f_1 f_2\|_I \leqslant \|f_1\|_I\|f_2\|_I.$$

Поэтому вид операторов $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ говорит о полезности усиления соотношений (28) (с $|\beta|=1$), (30b) и (30c) в терминах норм $\|\cdot\|_I$. С учетом неравенства

$$\|f\|_I \leqslant \|f\|_I^* + \sqrt{n}^{1-\mu} l_I \|\nabla f\|_I^* \quad (f \in C^1_{\mathrm{loc}}) \tag{37}$$

и построений раздела 3.1 получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(D_i\mathfrak{G})\circ g = \begin{cases} (D_jD_i\mathfrak{G})\circ g + \big((D_nD_i\mathfrak{G})\circ g\big)D_jG_\omega, & j<n,\\ \big((D_nD_i\mathfrak{G})\circ g\big)(1+D_nG_\omega), & j=n,\end{cases}$$

$$\begin{gathered}\|\nabla_x(D_i\mathfrak{G})\circ g\|_I^* \leqslant c_3'(n,\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*)l_I^{-1}b_I,\\ \|(D_i\mathfrak{G})\circ g\|_I \leqslant c_3''(n,\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*)b_I \quad (\text{если } i\neq n),\end{gathered} \tag{38}$$

$$D_jK_2 = 2\left\{(1+K_1)D_jK_1 + \sum_{i=1}^{n-1}((D_i\mathfrak{G})\circ g)\frac{\partial}{\partial x_j}(D_i\mathfrak{G})\circ g\right\},$$

$$D_jK_1 = \frac{\partial}{\partial x_j}(D_n\mathfrak{G})\circ g,$$

$$\begin{gathered}\|\nabla K_2\|_I^* \leqslant C_2'(n,\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*)l_I^{-1}b_I,\\ \|K_2\|_I \leqslant C_2''(n,\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*)b_I.\end{gathered} \tag{39}$$

Композиция $L=(\Delta_y\mathfrak{G})\circ g$ дифференцируется, как и $(D_i\mathfrak{G})\circ g$, откуда

$$\|L\|_I \leqslant C_3''(n,\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*)l_I^{-1}b_I. \tag{40}$$

В дальнейшем будет использовано и получаемое дифференцированием формулы (31a) и применением (37) следующее усиление оценки (31b):

$$\|L+M\|_I \leqslant C_5''(n,\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*)l_I^{-1}b_I^2. \tag{41}$$

3.4. C^μ-дискретизация сингулярного интеграла и интеграла со слабой особенностью. Чтобы продолжить анализировать операторы $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, нам понадобится оценка функции Грина (32):

$$|D_x^\beta G(x,y)| \leqslant C(\beta)y_n|x-y|^{1-n-|\beta|} \quad (\beta\in\mathbb{N}_0^n). \tag{42}$$

Для проверки заметим, что точки y и $\widetilde{y}$ можно соединить полуокружностью H со свойством

$$|x-Y| \geqslant |x-y| \quad \text{для любого } Y\in H.$$

Из соображений однородности получаем (даже при $(n,\beta)=(2,0)$)

$$|\nabla_Y D_x^\beta E(x-Y)| \leqslant c(\beta)|x-Y|^{1-n-|\beta|} \leqslant c|x-y|^{1-n-|\beta|}, \quad Y\in H,$$

откуда $|D_x^\beta G(x,y)| \leqslant c\pi y_n|x-y|^{1-n-|\beta|}$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Также потребуется лемма 4.4 из [7] — следующая

Лемма 9. *Для $R>0$ пусть функция f гёльдерова с показателем $\mu\in(0,1)$ на шаре $B_{2R}=\big\{|x|\leqslant 2R\big\}$ и равна нулю на $\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}$. Положим*

$$F = E*f$$

для E из (5). Тогда при $|\beta|=2$ производная $D^\beta F$ существует и гёльдерова на шаре $B_R=\big\{|x|\leqslant R\big\}$ с показателем μ, причем

$$\|D^\beta F\|_{L^\infty(B_R)} + R^\mu|D^\beta F|_{C^\mu(B_R)} \leqslant C(n,\mu)\big\{\|f\|_{L^\infty(B_{2R})} + R^\mu|f|_{C^\mu(B_{2R})}\big\}.$$

Позаимствуем в [26] обозначения

$$|\xi|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant d} |\xi_i|, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

$$[I,J] = \sup_{\xi,\eta\in I\cup J} |\xi-\eta|_\infty, \qquad I,J \in \mathcal{D},$$

$$\Gamma_{IJ}^{(\alpha,\beta)} = l_I^\alpha l_J^\beta [I,J]^{-\alpha-\beta}, \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Основной результат о дискретизации интегралов — это следующая

Теорема 7. *Для любой функции f класса*

$$\mathrm{VL} = \Big\{ f\in\mathcal{C}\colon \int_{y_n>0} y_n(1+|y|)^{-n}|f(y)|\,dy < \infty \Big\}$$

и любого $x\in\mathbb{R}^n_+$ интеграл

$$\Phi(x) = \int_{y_n>0} G(x,y)f(y)\,dy$$

абсолютно сходится. Функция Φ дважды непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}^n_+$, причем $\nabla^2\Phi\in\mathcal{C}$ (покомпонентно) и для любого $I\in\mathcal{D}$

$$\|\Phi\|_I \leqslant C_0(n,\mu) l_I \sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J \|f\|_J, \tag{43a}$$

$$\|\nabla\Phi\|_I \leqslant C_1(n,\mu) \sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J \|f\|_J, \tag{43b}$$

$$\|\nabla^2\Phi\|_I \leqslant C_2(n,\mu) \sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} \|f\|_J. \tag{43c}$$

Замечание 1. Обозначение VL произведено от немецкого Volumladung.

Замечание 2. О формуле (43c) можно говорить как о C^μ-дискретизации сингулярного интеграла, так как явная, не нужная нам формула для $\nabla^2\Phi$ содержит сингулярный интеграл.

Доказательство. Абсолютную сходимость интеграла $\Phi(x)$ даёт оценка

$$|G(x,y)| \leqslant c_1(n) x_n y_n |x-y|^{-n}, \tag{44}$$

которая при $|x-y|\leqslant 2x_n$ следует из (42) с $\beta=0$, а при $|x-y|>2x_n$ — из (42) с $\beta=e_n$, равенства $G\big((x',0+),y\big)=0$ и формулы Ньютона-Лейбница.

Следуя [26, с. 76], рассмотрим параллелепипед и открытый куб

$$\mathfrak{P}_I = \overline{\frac{5}{2}I} \times \left[\frac{5}{8}l_I, \frac{11}{4}l_I\right], \quad \mathfrak{P}_I^* = (3I)^\circ \times \left(\frac{1}{2}l_I, \frac{7}{2}l_I\right).$$

С помощью срезающей функции легко строятся такие разложения $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$ и $f=f_1+f_2$ с $f_1,f_2\in\mathrm{VL}$, что

$$\Phi_i(x) = \int_{y_n>0} G(x,y) f_i(y)\,dy,$$

$$\operatorname{supp} f_1 \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}\setminus\mathfrak{P}_I \quad \text{и} \quad \operatorname{supp} f_2\subset\mathfrak{P}_I^*,$$

$$|f_1|\leqslant|f|,$$

$$\|f_2\|_{L^\infty(\mathfrak{P}_I^*)} + l_I^\mu |f_2|_{C^\mu(\mathfrak{P}_I^*)} \leqslant \varrho = c_2(n,\mu) \sum_{J\in\mathcal{D}\colon \mathfrak{P}_I^*\cap J^\boxdot\neq\varnothing} \|f\|_J. \tag{45}$$

Ввиду (42) и теоремы о мажорированной сходимости получаем $\Phi_1 \in C^\infty$ в окрестности куба $I^\boxdot$. В [26, с. 77] показано, что если $x \in I^\boxdot$, $y \in J^\boxdot$ и $y \notin \mathfrak{P}_I$, то $[I,J] \leqslant 4|x-y|_\infty$. Из неравенств (44), $|f_1| \leqslant |f|$ и $\|f\|_J^* \leqslant \|f\|_J$ выводим

$$|\Phi_1(x)| \leqslant c_1 x_n \sum_{J\in\mathcal{D}} \int_{J^\boxdot \setminus \mathfrak{P}_I} y_n |x-y|^{-n} |f_1(y)|\,dy$$

$$\leqslant c_3(n) l_I \sum_{J\in\mathcal{D}} l_J^{n+1} [I,J]^{-n} \|f\|_J \quad \text{для любого } x \in I^\boxdot,$$

$$\|\Phi_1\|_I^* \leqslant c_3 l_I \sum_{J\in\mathcal{D}} l_J^{n+1} [I,J]^{-n} \|f\|_J. \tag{46}$$

Аналогично, для любого мультииндекса β в силу (42)

$$|D^\beta \Phi_1(x)| \leqslant C(\beta) \sum_{J\in\mathcal{D}} \int_{J^\boxdot \setminus \mathfrak{P}_I} y_n |x-y|^{1-n-|\beta|} |f_1(y)|\,dy$$

$$\leqslant c_4(\beta) \sum_{J\in\mathcal{D}} l_J^{n+1} [I,J]^{1-n-|\beta|} \|f\|_J,$$

$$\|\nabla^k \Phi_1\|_I^* \leqslant c_5(n,k) \sum_{J\in\mathcal{D}} l_J^{n+1} [I,J]^{1-n-k} \|f\|_J \quad (k \in \mathbb{N}_0). \tag{47}$$

(Заметим, что оценка (47) с $k=0$ слабее оценки (46).) Теперь неравенства (37), (46), (47) и $l_I \leqslant [I,J]$ показывают, что

$$\|\Phi_1\|_I \leqslant c_6(n) l_I \sum_{J\in\mathcal{D}} l_J^{n+1} [I,J]^{-n} \|f\|_J, \tag{46$'$}$$

$$\|\nabla^k \Phi_1\|_I \leqslant c_7(n,k) \sum_{J\in\mathcal{D}} l_J^{n+1} [I,J]^{1-n-k} \|f\|_J \quad (k \in \mathbb{N}_0). \tag{47$'$}$$

Из симметрии функции Грина, оценки (42) для $\beta = 0$, однородности функций $D_i E$ (см. (5)) и неравенств (45) и (37) имеем

$$\begin{gathered} |\nabla_x^k G(x,y)| \leqslant c_8(n) x_n^{1-k} |x-y|^{1-n} \quad (k=0,1), \\ \begin{aligned} \|\nabla^k \Phi_2\|_I^* &\leqslant c_8 [2l_I]^{1-k} \|f_2\|_{L^\infty(\mathfrak{P}_I^*)} \sup_{x\in I^\boxdot} \int_{\mathfrak{P}_I^*} |x-y|^{1-n}\,dy \\ &\leqslant c_9(n) l_I^{2-k} \varrho, \end{aligned} \\ \|\Phi_2\|_I \leqslant c_{10}(n) l_I^2 \varrho. \end{gathered} \tag{48}$$

Соединяя полученную оценку с (46$'$), приходим к (43a).

Продолжим f_2 нулём на полупространство $\{x_n \leqslant 0\}$. Найдём вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и $R \approx l_I$ такие, что $I^\boxdot \subset a + B_R$ и $\mathfrak{P}_I^* \subset a + B_{2R}$ в терминах леммы 9. По этой лемме и (45) имеем

$$\|\nabla^2 (E * f_2)\|_I \leqslant c_{11}(n,\mu)\varrho.$$

Аналогичная оценка с участием второй компоненты $E(x - \widetilde{y})$ функции Грина легко проверяется (ср. [26, с. 78]), так что вектор-функция $\nabla^2 \Phi_2$ μ-гёльдерова на кубе $I^\boxdot$ и

$$\|\nabla^2 \Phi_2\|_I^* \leqslant \|\nabla^2 \Phi_2\|_I \leqslant c_{12}(n,\mu)\varrho. \tag{49}$$

Следовательно, $\nabla^2 \Phi$ тоже μ-гёльдерова на кубе $I^\boxdot$ и $\nabla^2 \Phi \in \mathcal{C}$.

Теперь легко завершить доказательство. Из (37), оценки (48) с $k = 1$ и (49) вытекает, что $\|\nabla\Phi_2\|_I \leqslant c_{13}(n,\mu) l_I \varrho$, что в соединении с оценкой ($47'$) для $k = 1$ даёт (43b). Соединяя ($47'$) для $k = 2$ с (49), получаем (43c). □

3.5. Строгий вывод представления. Теорема 7 и [26, теорема 2(b)] наводят на мысль решать уравнение (34) в весовом пространстве Гёльдера $\mathcal{C}_\sigma[L]$.

Определение 4. *Для $\sigma \in \mathbb{R}$ положим*

$$\begin{aligned}\mathrm{VL}(\sigma) &= \left\{ f \in \mathcal{C} \colon (\exists I \in \mathcal{D}) \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)} l_J \|f\|_J < \infty \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{C} \colon (\forall I \in \mathcal{D}) \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)} l_J \|f\|_J < \infty \right\}.\end{aligned}$$

Для $F \in \mathrm{VL}(\sigma)$ пусть

$$\mathcal{C}_\sigma[F] = \left\{ f \in \mathcal{C} \colon (\exists c \geqslant 0)\ (\forall I \in \mathcal{D})\ l_I \|f\|_I \leqslant c \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)} l_J \|F\|_J \right\}$$

с нормой $\|f\|_{\mathcal{C}_\sigma[F]} = \min c$.

Замечание 1. Равенство двух множеств из определения $\mathrm{VL}(\sigma)$ следует из формулы (14) в [26]. Ясно, что пространство $\mathcal{C}_\sigma[F]$ банахово.

Замечание 2. Пространство Гёльдера с весом w обычно определяют либо через принадлежность wf невесовому пространству Гёльдера, либо неравенствами вида $|f(x) - f(y)| \leqslant cw(x,y)$, либо неравенствами вида

$$(\forall \delta > 0) \quad |f|_{C^\mu(\{x \in \Omega \colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\})} \leqslant cw(\delta),$$

либо как $B^\mu_{\infty,\infty}(w)$ при подходящем определении весового пространства Бесова $B^\mu_{p,q}(w)$. Наше задание $\mathcal{C}_\sigma[F]$ неравенствами вида $\|f\|_I \leqslant cw_I$ похоже на задание пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля в теореме 1.5 из [25] квазинормами "с локальными свойствами".

Приведём простейшие свойства пространств $\mathrm{VL}(\sigma)$ и $\mathcal{C}_\sigma[F]$.

1) Для класса VL из теоремы 7 имеем $\mathrm{VL}(0) \subset \mathrm{VL}$, так как

$$[I, J] \leqslant c(n)(1 + |y|), \quad \text{если } I = [0,1)^{n-1},\ J \in \mathcal{D} \text{ и } y \in J^{\boxdot},$$
$$\int_{y_n > 0} y_n (1 + |y|)^{-n} |f(y)|\, dy \leqslant 2c^n \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J \|f\|_J^*.$$

2) Если $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$, то $\mathrm{VL}(\sigma_1) \subset \mathrm{VL}(\sigma_2)$ по неравенству $\max\{l_I, l_J\} \leqslant [I, J]$.

3) Если $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$ и $F \in \mathrm{VL}(\sigma_1)$, то $\mathcal{C}_{\sigma_2}[F] \subset \mathcal{C}_{\sigma_1}[F]$ (очевидно).

4) Если $F \in \mathrm{VL}(\sigma)$, то $F \in \mathcal{C}_\sigma[F]$ и $\|F\|_{\mathcal{C}_\sigma[F]} \leqslant 1$ ввиду равенств $\Gamma_{II}^{(\alpha,\beta)} = 1$.

5) Если $0 < \sigma < 1$, $F \in \mathrm{VL}(\sigma)$ и $f \in \mathcal{C}_\sigma[F]$, то

$$\begin{aligned}\sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J \|f\|_J &\leqslant \|f\|_{\mathcal{C}_\sigma[F]} \sum_{K \in \mathcal{D}} l_K \|F\|_K \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} \Gamma_{JK}^{(-\sigma, n-\sigma)} \\ &\leqslant c(n,\sigma) \|f\|_{\mathcal{C}_\sigma[F]} \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)} l_J \|F\|_J\end{aligned}$$

для любого $I \in \mathcal{D}$ по теореме 2(b) из [26].

Пусть далее в этом параграфе дано семейство $\{Q_I\} \in \mathcal{Q}(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*)$. Напомним, что нормы $\|f\|_I$ и пространства $\mathcal{C}$, VL, $\mathrm{VL}(\sigma)$ и $\mathcal{C}_\sigma[F]$ зависят от числа $\mu \in (0,1)$.

Лемма 10. *Пусть для функции ω со свойством* (27) *проведены построения раздела 3.1. Тогда оператор $\mathcal{N}_1$ из* (35) *и оператор $\mathcal{N}_2$ из* (36) *корректно определены как операторы* $\mathrm{VL} \to \mathcal{C}$. *Для любых $f \in \mathrm{VL}$ и $I \in \mathcal{D}$ имеем*

$$l_I \|\mathcal{N}_i f\|_I \leqslant c(n, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*, \mu) b_I \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J \|f\|_J. \tag{50}$$

Если еще $\sigma \in (0,1)$, то выполнены теоретико-множественные вложения

$$\mathrm{VL}(\sigma) \subset \mathrm{VL}(0) \subset \mathrm{VL}, \tag{51a}$$

$$(\forall F \in \mathrm{VL}(\sigma)) \quad \mathcal{C}_\sigma[F] \subset \mathrm{VL}(0) \subset \mathrm{VL}, \tag{51b}$$

а для любых функции $f \in \mathcal{C}_\sigma[F]$ и куба $I \in \mathcal{D}$ — неравенства

$$l_I \|\mathcal{N}_i f\|_I \leqslant c'(n, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*, \mu, \sigma) \|f\|_{\mathcal{C}_\sigma[F]} b_I \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)} l_J \|F\|_J \quad (i = 1, 2). \tag{52}$$

Линеалы $\mathrm{VL}(\sigma)$ и $\mathcal{C}_\sigma[F]$ инвариантны относительно $\mathcal{N}_i$, причем на втором из них операторы $\mathcal{N}_i$ ограничены с оценкой нормы

$$\|\mathcal{N}_i\|_{\mathcal{C}_\sigma[F] \to \mathcal{C}_\sigma[F]} \leqslant c''(n, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*, \mu, \sigma) \|\omega\|_{\mathrm{Lip}}. \tag{53}$$

Доказательство. Заданность операторов $\mathcal{N}_i : \mathrm{VL} \to \mathcal{C}$ следует из соотношения $\nabla^2 \Phi \in \mathcal{C}$ теоремы 7 и гладкости множителей K_2, $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y_i}(g)$, L в (35) и (36).

При $f \in \mathrm{VL}$ ввиду (35), (39), (38) и (43c) получаем

$$l_I \|\mathcal{N}_1 f\|_I \leqslant c_1(n, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*, \mu) l_I b_I \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} \|f\|_J,$$

что с учетом неравенства $l_I \leqslant [I, J]$ даёт (50) при $i = 1$. Использование соотношений (36), (40) и (43b) напрямую даёт (50) при $i = 2$.

Вложения (51a) и второе вложение в (51b) получаются из свойств 1) и 2). Первое вложение в (51b) следует из свойства 5). Неравенства (52) следуют из неравенств (50) и свойства 5).

Для $F \in \mathrm{VL}(\sigma)$ в силу (50), (26) и [26, теорема 2(b)]

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)} l_J \|\mathcal{N}_i F\|_J &\leqslant c_2(n, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*, \mu) \|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \sum_{J, K \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)} \Gamma_{JK}^{(0,n)} l_K \|F\|_K \\ &\leqslant c_3(n, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*, \mu, \sigma) \|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)} l_J \|F\|_J < \infty, \end{aligned}$$

так что $\mathrm{VL}(\sigma)$ инвариантно относительно операторов $\mathcal{N}_i$. Инвариантность $\mathcal{C}_\sigma[F]$ и оценка (53) вытекают из (52) и (26). □

Приведём главный результат настоящего параграфа.

Теорема 8. *Пусть $\mu, \sigma \in (0,1)$.*

(i) Предположим, что функция ω удовлетворяет условию (27), *что*

$$G_\omega^{\{Q_I\}}(x) = 0 \text{ для достаточно больших } |x| \tag{54}$$

и что существует $F \in \mathcal{C}$ со свойствами

$$F(x) = 0 \text{ для достаточно больших } |x|, \tag{55a}$$

$$\sup_{I \in \mathcal{D}} l_I \|F\|_I < \infty, \tag{55b}$$

$$L \in \mathcal{C}_\sigma[F] \quad (\text{см. } (29)), \tag{55c}$$

$$\|\mathcal{N}\|_{\mathcal{C}_\sigma[F] \to \mathcal{C}_\sigma[F]} \leqslant 1/2 \quad \text{для } \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 \text{ (см. лемму 10).} \tag{55d}$$

Тогда единственное решение $\zeta \in \mathcal{C}_\sigma[F]$ *уравнения* (34) *принадлежит* VL, *а корректно определённая в силу теоремы 7 функция* (33) *такова, что*

$$U_\omega = u \circ \mathfrak{g}.$$

(ii) Существует такое положительное число

$$a = a(n, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*, \mu, \sigma),$$

что из $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant a$ *и* (54) *вытекают условия* (27) *и* (55) *(для* $F = L$*).*

Замечание. Пространство $\mathcal{C}_\sigma[F]$ из (55) имеет смысл, так как в силу (55a) найдётся компакт K в $\mathbb{R}^{n-1}$ со свойством «$\|F\|_J = 0$ при $J \not\subset K$», и в силу (55b)

$$\sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)} l_J \|F\|_J \leqslant l_I^{\sigma - n} \sup_{J \in \mathcal{D}} l_J \|F\|_J \sum_{J \subset K} l_J^{n-\sigma} < \infty \;\Rightarrow\; F \in \mathrm{VL}(\sigma).$$

Доказательство. (i) Включение $\zeta \in \mathrm{VL}$ следует из (51b).

Для функции $\Phi(x) = u(x) - x_n$ имеем $\nabla^2 \Phi \in \mathcal{C}$ по теореме 7, откуда

$$u \circ \mathfrak{g} \in C^2(\Omega).$$

Ввиду (43a), $\zeta \in \mathcal{C}_\sigma[F]$, свойства 5) и (55b) получаем

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_I &\leqslant C_0(n,\mu) l_I \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J \|\zeta\|_J \\ &\leqslant c_1(n,\mu,\sigma) \|\zeta\|_{\mathcal{C}_\sigma[F]} l_I \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)} l_J \|F\|_J \\ &\leqslant c_2(n,\mu,\sigma,\zeta,F) l_I \sum_{J \subset K} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)}. \end{aligned}$$

Если модуль $|x|$ достаточно велик и $x \in I^{\boxdot}$, то

$$[I, J] \geqslant c_3(n)|x| \quad \text{при } J \subset K,$$

$$|\Phi(x)| \leqslant \|\Phi\|_I \leqslant c_2 l_I \sum_{J \subset K} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)} \leqslant c_2 [c_3 |x|]^{1+\sigma-n} \sum_{J \subset K} l_J^{n-\sigma}.$$

Значит, $u(x) - x_n = \Phi(x) = o(|x|)$ при $\mathbb{R}^n_+ \ni x \to \infty$. Однако $\mathfrak{g}(y) = y$ для больших $|y|$ ввиду (54), поэтому функция $u \circ \mathfrak{g}$ удовлетворяет первому условию в (1).

Соотношения (32)–(36), $\zeta \in \mathrm{VL}$ и обращение вывода леммы 8 доказывают второе условие в (1) для $u \circ \mathfrak{g}$.

В силу [26, теорема 2(a)] имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_I &\leqslant c_2 l_I \sum_{J \subset K} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n-\sigma)} \\ &\leqslant c_2 l_I^{\frac{1-\sigma}{2}} \left[\sup_{J \subset K} [I, J]^{\frac{1+\sigma}{2}} \right] \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(\frac{1-\sigma}{2}, n-\sigma)} \\ &\leqslant c_2 c_4(n,\sigma) l_I^{\frac{1-\sigma}{2}} \sup_{J \subset K} [I, J]^{\frac{1+\sigma}{2}}, \end{aligned}$$

$$(\forall \xi) \qquad \lim_{x \to (\xi, 0)} \Phi(x) = 0.$$

Поэтому функция $u \circ \mathfrak{g}$ принадлежит $C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет третьему условию в (1). Следовательно, она совпадает с U_ω.

(ii) Для постоянных из (27) и (53) положим

$$a := \min\left\{\frac{1}{2c_1(e_n,\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*)c_2(n,\mathfrak{q}^*)}, \frac{1}{4c''(n,\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*,\mu,\sigma)}\right\}.$$

При $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant a$ сразу получаем (27) и (55d). Пусть $F = L$ и верно (54). Тогда (55a) следует из (29) и (54), (55b) — из (26) и (40), (55c) — из свойства 4). □

4. Доказательство лемм 1 и 2

Лемма 11. *Пусть* $\omega \in b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ *и* $\mathfrak{q}^\star > 0$. *Тогда для чисел* (26)

$$\sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{d+1} b_I^2 \leqslant c(d,\mathfrak{q}^\star)\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}.$$

Доказательство. Пусть N — наименьшее число из $\mathbb{N}_0$ со свойством $\mathfrak{q}^\star \leqslant 2^{1+N}$. Для $I \in \mathcal{D}$ через $I^{(N)}$ обозначим единственный куб из $\mathcal{D}$ со свойствами $I \subset I^{(N)}$ и $l_{I^{(N)}} = 2^N l_I$. Из включения $\mathfrak{c}_I \in I \subset I^{(N)}$ следует, что $\mathfrak{q}^\star I \subset 3I^{(N)}$, поэтому

$$b_I \leqslant c_1(d,\mathfrak{q}^\star) l_I^{-1} \operatorname{osc}_2^0 \omega(3I^{(N)}),$$

$$\sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{d+1} b_I^2 \leqslant c_1^2 \sum_{J\in\mathcal{D}} \operatorname{osc}_2^0 \omega(3J)^2 \sum_{I:\ I^{(N)}=J} l_I^{d-1} = c_1^2 2^N \|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}.$$

Лемма 11 доказана. □

Доказательство леммы 1. Положим

$$\mathfrak{q} = \frac{4}{A} + \frac{5}{2}\sqrt{n-1}, \quad \mathfrak{q}^* = 4\mathfrak{q}. \tag{56}$$

Пусть $\Xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $r > 0$. Если $I \in \mathcal{D}$ таково, что

$$|\mathfrak{c}_I - \Xi| > r - \mathfrak{q} l_I, \tag{57}$$

то существует точка $\xi_I \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus B(\Xi, r)$ со свойством $|\xi_I - \mathfrak{c}_I| < \mathfrak{q} l_I$. Значит, найдётся куб Q_I с ребром $\mathfrak{q} l_I$, одной из вершин ξ_I и свойством

$$Q_I \subset \mathbb{R}^{n-1} \setminus B(\Xi, r). \tag{58}$$

Ввиду соотношений $|\xi_I - \mathfrak{c}_I|_\infty \leqslant |\xi_I - \mathfrak{c}_I| < \mathfrak{q} l_I$ получаем, что $Q_I \subset \mathfrak{q}^* I$. Если же условие (57) нарушается, то мы берём куб Q_I со свойствами (24) произвольно. Тем самым задано семейство $\{Q_I\} \in \mathcal{Q}(\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*)$, зависящее от Ξ и r.

Возьмём $\mu \in (0,1)$ и $\sigma \in (0,1/2)$. Найдём $a = a(n,A,\mu,\sigma) > 0$ по теореме 8(ii). Без умаления общности считаем, что $a \leqslant A$.

Пусть ω обладает свойствами $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant a$ и (3). Для

$$x \in \mathfrak{T} \equiv \mathfrak{T}_{\Xi,r,A}$$

найдётся куб $I \in \mathcal{D}$ такой, что $x \in I^{\boxdot}$, откуда для любого $\eta \in \overline{I}$

$$r < \frac{1}{A}x_n + |x' - \Xi| \leqslant \frac{2}{A} l_I + \sqrt{n-1}\, l_I + |\eta - \Xi|.$$

Если $J \in \mathcal{T}(I)$, то $l_I \leqslant 2l_J$ и можно взять $\eta \in \overline{J}$, так что

$$|\mathfrak{c}_J - \Xi| \geqslant |\eta - \Xi| - \frac{\sqrt{n-1}}{2} l_J > r - \mathfrak{q} l_J.$$

Поэтому (см. раздел 3.1) $\gamma_J = 0$ в силу (3) и (58). Значит,

$$G_\omega \equiv G_\omega^{\{Q_I\}} = 0 \quad \text{на } \mathfrak{T}. \tag{59}$$

В частности, верно (54), поэтому теорема 8 даёт такие функции $\zeta \in \mathcal{C}_\sigma[L]$ и

$$u(x) = x_n + \int_{y_n>0} G(x,y)\zeta(y)\,dy,$$

что $\zeta + \mathcal{N}\zeta = -L$ и $U_\omega = u \circ \mathfrak{g}$.

Ввиду (59) имеем $g_n(x) = x_n$ и $\mathfrak{G}(y) = y_n$ при $x, y \in \mathfrak{T}$. Формулы раздела 3.1 и равенства (34)–(36) показывают, что

(60) функции $(D_i\mathfrak{G}) \circ g$ $(i < n)$, K_1, K_2, L, M и ζ зануляются на $\mathfrak{T}$.

Пусть $x \in \mathfrak{T}$. При $y \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \mathfrak{T}$ имеем $G(x,y) = O(y_n)$, $L(y) = O(y_n^{-1})$ и $M(y) = O(y_n^{-1})$ в силу (42), (30c) и (30d). Кроме того, $\zeta \in \mathrm{VL}$ ввиду (51b). Значит,

$$\begin{aligned} U_\omega(x) = u(x) = x_n &+ \int G(x,y)M(y)\,dy \\ &- \int G(x,y)[L(y)+M(y)]\,dy \\ &+ \int G(x,y)[\zeta(y)+L(y)]\,dy, \end{aligned} \tag{61}$$

где интегралы берутся по $\mathbb{R}^n_+$ или $\mathbb{R}^n_+ \setminus \mathfrak{T}$ и сходятся абсолютно.

Для малого $\varepsilon > 0$ построим гладкую область H такую, что

$$\mathbb{R}^n_+ \setminus \mathfrak{T} \subset H \subset \{y \in \mathbb{R}^n_+ \colon |x-y| > \varepsilon\}.$$

Тогда (59) и формальное применение формулы Грина дают

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_+\setminus\mathfrak{T}} G(x,y)M(y)\,dy &= \int_H \Big\{G(x,y)\Delta G_\omega(y) - G_\omega(y)\Delta_{(y)}G(x,y)\Big\}\,dy \\ &= \int_{y\in\partial H\colon\, y_n=0} \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_n} G_\omega(y)\,dS_y \\ &= -2\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega(\xi) D_n E\big(x-(\xi,0)\big)\,d\xi. \end{aligned}$$

Эту выкладку легко обосновать, аппроксимируя область H областями $H_i \subset H$, $H_i \Subset \mathbb{R}^n_+$, и используя оценку $G(x,y) = O(y_n)$ и липшицевость G_ω.

Напомним, что по условию леммы 1 дано $\mathfrak{a} > 1$. Очевидно, что

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n_+) \quad x_n \leqslant \frac{1}{2} d_\Xi(x) \;\Rightarrow\; d_\Xi(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}|x'-\Xi|,$$

и что существует столь малое $c_1 = c_1(A,\mathfrak{a}) \in (0,1/2]$, что

$$\text{если } x \in \mathfrak{T}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A} \text{ и } x_n \leqslant c_1 d_\Xi(x), \text{ то } |x'-\Xi| \geqslant \mathfrak{a}^{1/2} r.$$

Для $c \in (0, c_1/2]$, $\mathfrak{q}^\star = 2\mathfrak{q}^* + 3$, $x \in \mathfrak{T}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A} \cap I^{\boxdot}$ и $[I,J] \leqslant c d_\Xi(x)$ имеем

$$x_n \leqslant 2l_I \leqslant 2[I,J] \leqslant c_1 d_\Xi(x),$$

$$\begin{aligned} |\mathfrak{c}_J - \Xi| - \frac{\sqrt{n-1}}{2}\mathfrak{q}^\star l_J &\geqslant |x'-\Xi| - |x'-\mathfrak{c}_J| - \frac{\sqrt{n-1}}{2}\mathfrak{q}^\star[I,J] \\ &> |x'-\Xi| - (1+\mathfrak{q}^\star/2)\sqrt{n-1}[I,J] \\ &\geqslant |x'-\Xi| \left\{1 - \left(1+\frac{\mathfrak{q}^\star}{2}\right)\frac{2c\sqrt{n-1}}{\sqrt{3}}\right\} \\ &\geqslant \mathfrak{a}^{1/2}\left\{1 - \left(1+\frac{\mathfrak{q}^\star}{2}\right)\frac{2c\sqrt{n-1}}{\sqrt{3}}\right\} r. \end{aligned}$$

Поэтому при

$$c = c(n, A, \mathfrak{a}) = \min\left\{\frac{c_1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{n-1}}\frac{1-\mathfrak{a}^{-1/2}}{1+\mathfrak{q}^\star/2}\right\}$$

выполнено $|\mathfrak{c}_J - \Xi| - \frac{\sqrt{n-1}}{2}\mathfrak{q}^\star l_J > r$ и, следовательно,

$$\mathfrak{q}^\star J \subset \mathbb{R}^{n-1} \setminus B(\Xi, r).$$

В силу (3) для чисел (26) имеем

$$\text{если } x \in \mathfrak{T}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A} \cap I^{\boxdot} \text{ и } b_J \neq 0, \text{ то } [I, J] > c d_\Xi(x). \tag{62}$$

Для $x \in \mathfrak{T}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A} \cap I^{\boxdot}$ на основании (43a), (41), (62) и леммы 11 получаем

$$\begin{aligned}\left|\int_{y_n>0} G(x,y)[L(y)+M(y)]\,dy\right| &\leqslant C_0(n,\mu) l_I \sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} l_J \|L+M\|_J \\ &\leqslant c_2(n,A,\mu) l_I \sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} b_J^2 \\ &\leqslant c_2 c^{-n} x_n d_\Xi(x)^{-n} \sum_{J\in\mathcal{D}} l_J^n b_J^2 \\ &\leqslant c_3(n,A,\mathfrak{a},\mu) x_n d_\Xi(x)^{-n} \|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}.\end{aligned}$$

Свойство 4) раздела 3.5, (55d) и ряд Неймана дают, что $\|\zeta\|_{\mathcal{C}_\sigma[L]} \leqslant 2$. В силу (52), (40), (43a) и (62)

$$l_I\|\zeta + L\|_I = l_I\|\mathcal{N}\zeta\|_I \leqslant c_4(n,A,\mu,\sigma) b_I \sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma,n-\sigma)} b_J,$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{y_n>0} G(x,y)[\zeta(y)+L(y)]\,dy\right| &\leqslant C_0(n,\mu) c_4 l_I \sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} b_J \sum_{K\in\mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(-\sigma,n-\sigma)} b_K \\ &\leqslant \frac{C_0 c_4 l_I^2}{c d_\Xi(x)} \sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-1,n)} b_J \sum_{K\in\mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(-\sigma,n-\sigma)} b_K,\end{aligned}$$

где $x \in \mathfrak{T}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A} \cap I^{\boxdot}$. Введём вспомогательный параметр

$$\sigma' = \frac{1}{2} - \sigma > 0.$$

По неравенству Коши и теореме 2 из [26]

$$\begin{aligned}\left(\sum_{K\in\mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(-\sigma,n-\sigma)} b_K\right)^2 &= \left(\sum_{K\in\mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(\frac{\sigma'}{2},\frac{n-1+\sigma'}{2})} \Gamma_{JK}^{(\frac{-1+\sigma'}{2},\frac{n+\sigma'}{2})} b_K\right)^2 \\ &\leqslant \left(\sum_{K\in\mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(\sigma',n-1+\sigma')}\right) \sum_{K\in\mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(-1+\sigma',n+\sigma')} b_K^2 \\ &\leqslant c_5(n,\sigma) \sum_{K\in\mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(-1+\sigma',n+\sigma')} b_K^2,\end{aligned}$$

$$\sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-1,n)} b_J \sum_{K\in\mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(-\sigma,n-\sigma)} b_K \leqslant \left(\sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-1,n)} b_J^2\right)^{1/2} \varrho^{1/2},$$

$$\begin{aligned}\varrho &= \sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-1,n)} \left(\sum_{K\in\mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(-\sigma,n-\sigma)} b_K\right)^2 \\ &\leqslant c_5 \sum_{K\in\mathcal{D}} b_K^2 \sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-1,n)} \Gamma_{JK}^{(-1+\sigma',n+\sigma')} \\ &\leqslant c_6(n,\sigma) \sum_{K\in\mathcal{D}} \Gamma_{IK}^{(-1,n)} b_K^2.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (62) и леммы 11

$$\begin{aligned}\left|\int_{y_n>0} G(x,y)[\zeta(y)+L(y)]\,dy\right| &\leqslant \frac{C_0 c_4 c_6^{1/2} l_I^2}{c d_\Xi(x)} \sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(-1,n)} b_J^2 \\ &\leqslant C_0 c_4 c_6^{1/2} c^{-n} x_n d_\Xi(x)^{-n} \sum_{J\in\mathcal{D}} l_J^n b_J^2 \\ &\leqslant c_7(n,A,\mathfrak{a},\mu,\sigma) x_n d_\Xi(x)^{-n} \|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}.\end{aligned}$$

Сопоставляя результаты последних трех абзацев с (61), получаем представление (8) с оценкой остатка вида (9b):

$$\left|R_2^{(0)}(x)\right| \leqslant c_8(n,A,\mathfrak{a},\mu,\sigma) x_n d_\Xi(x)^{-n} \|\omega\|^2_{b_2^{1/2}} \quad (x\in\mathfrak{T}_{\Xi,\mathfrak{a}r,A}).$$

Фиксация параметров $\mu = 1/2$, $\sigma = 1/4$ и неравенство $x_n \leqslant d_\Xi(x)$ завершают доказательство леммы 1. □

Лемма 12. *Пусть задано такое семейство шаров положительного радиуса*

$$B_\xi = B(\xi, r_\xi), \quad \xi\in E\subset\mathbb{R}^d,$$

что $\sup_{\xi\in E} r_\xi < \infty$. *Тогда найдётся подмножество* E_0 *в* E *со свойствами*

$$E \subset \bigcup_{\xi\in E_0} B_\xi, \tag{63a}$$

$$\text{шары } \frac{1}{5}B_\xi = B\left(\xi, \frac{r_\xi}{5}\right),\ \xi\in E_0,\ \text{попарно не пересекаются.} \tag{63b}$$

Для любого такого E_0 *зададим при* $\xi\in E_0$ *куб* $I_\xi\in\mathcal{D}$ *условиями*

$$\xi \in I_\xi, \tag{64a}$$

$$\frac{l_{I_\xi}}{2} \leqslant \frac{r_\xi}{5\sqrt{d}} < l_{I_\xi}. \tag{64b}$$

Тогда для любой липшицевой в $\mathbb{R}^d$ *функции* f *со свойствами*

$$\{\xi\in\mathbb{R}^d\colon f(\xi)\neq 0\} = E, \tag{65a}$$

$$\min_{B_\xi} |f| \leqslant C\|f\|_{\mathrm{Lip}} r_\xi, \quad \xi\in E, \tag{65b}$$

выполнена оценка

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}}\|f\|_{L^1} + \|f\|^2_{b_2^{1/2}} \leqslant c_0(d,C)\|f\|^2_{\mathrm{Lip}} \sum_{I\in\mathcal{D}\colon (\exists\xi\in E_0)\ I_\xi = I} l_I^{d+1}. \tag{66}$$

Подразумевается, что если ряд в (66) *сходится, то* $f\in L^1(\mathbb{R}^d)\cap b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Существование E_0 со свойствами (63) вытекает из теоремы Витали [33, теорема 1.5/1]. При $\xi \in E_0$ ввиду (64)

$$|\mathfrak{c}_{I_\xi} - \xi| \leqslant \sqrt{d} l_{I_\xi}/2 \leqslant r_\xi/5,$$

так что $\mathfrak{c}_{I_\xi} \in \frac{1}{5} B_\xi$. В силу (63b) для любого $I \in \mathcal{D}$ существует не более одного $\xi \in E_0$ со свойством $I_\xi = I$, поэтому

$$\sum_{\xi \in E_0} l_{I_\xi}^{d+1} = \sum_{I \in \mathcal{D}\colon (\exists \xi \in E_0)\ I_\xi = I} l_I^{d+1}. \tag{67}$$

Теперь L^1-часть оценки (66) тривиально следует из (63a), (64b), (65) и (67):

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1(E)} &\leqslant \sum_{\xi \in E_0} \|f\|_{L^1(B_\xi)} \leqslant c_1(d) \sum_{\xi \in E_0} \Big\{ C\|f\|_{\mathrm{Lip}} r_\xi + 2\|f\|_{\mathrm{Lip}} r_\xi \Big\} r_\xi^d \\ &\leqslant c_2(d, C)\|f\|_{\mathrm{Lip}} \sum_{\xi \in E_0} l_{I_\xi}^{d+1} = c_2 \|f\|_{\mathrm{Lip}} \sum_{I \in \mathcal{D}\colon (\exists \xi \in E_0)\ I_\xi = I} l_I^{d+1}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\mathcal{E} = \Big\{ I \in \mathcal{D}\colon (\exists \xi \in E_0)\ I \subset 5\sqrt{d} B_\xi \Big\}.$$

Ввиду соотношений

$$\operatorname{osc}_2^0 f(3I) \leqslant \operatorname{osc}_\infty^0 f(3I) \leqslant \frac{3\sqrt{d}}{2} \|f\|_{\mathrm{Lip}} l_I$$

и (64b) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathcal{E}} l_I^{d-1} \operatorname{osc}_2^0 f(3I)^2 &\leqslant \left(\frac{3\sqrt{d}}{2} \|f\|_{\mathrm{Lip}} \right)^2 \sum_{\xi \in E_0} \sum_{I\colon I \subset 5\sqrt{d} B_\xi} l_I^{d+1} \\ &\leqslant c_3(d) \|f\|_{\mathrm{Lip}}^2 \sum_{\xi \in E_0} l_{I_\xi}^{d+1}. \end{aligned} \tag{68}$$

Для $I \in \mathcal{D}$ в силу (63a), (64b) и (65b)

$$\begin{aligned} \operatorname{osc}_2^0 f(3I)^2 \leqslant (3l_I)^{-d} \|f\|_{L^2(3I)}^2 &\leqslant (3l_I)^{-d} \sum_{\xi \in E_0} \|f\|_{L^2((3I) \cap B_\xi)}^2 \\ &\leqslant c_4(d, C) \|f\|_{\mathrm{Lip}}^2 l_I^{-d} \sum_{\xi \in E_0\colon (3I) \cap B_\xi \neq \varnothing} l_{I_\xi}^{2+d}. \end{aligned}$$

Если $(3I) \cap B_\xi \neq \varnothing$, то для любого $\eta \in I$

$$|\eta - \xi| \leqslant \sqrt{d} |\eta - \zeta|_\infty + |\zeta - \xi| \leqslant 2\sqrt{d} l_I + r_\xi, \quad \zeta \in (3I) \cap B_\xi.$$

Поэтому при $I \notin \mathcal{E}$ получаем $2r_\xi < l_I$ (от противного) и $B_\xi \subset 5I$, откуда

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{E}} l_I^{d-1} \operatorname{osc}_2^0 f(3I)^2 &\leqslant c_4 \|f\|_{\mathrm{Lip}}^2 \sum_{\xi \in E_0} l_{I_\xi}^{2+d} \sum_{I \in \mathcal{D}\colon B_\xi \subset 5I} l_I^{-1} \\ &\leqslant c_5(d, C) \|f\|_{\mathrm{Lip}}^2 \sum_{\xi \in E_0} l_{I_\xi}^{d+1}. \end{aligned}$$

С учетом (67) и (68) мы доказали и $b_2^{1/2}$-часть оценки (66). □

Замечание. Доказанная лемма позволяет довольно просто вывести оценку (11). Пусть функция f липшицева, принадлежит $L^1(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}$ и не обязательно финитна. Тогда $\|f\|_{\mathrm{Lip}}>0$ и $\|f\|_{L^\infty}<\infty$ ввиду условия $f\in L^1$. Воспользуемся (65a) как определением для E и положим

$$r_\xi=\frac{5|f(\xi)|}{2\|f\|_{\mathrm{Lip}}}.$$

Имеем $\sup_{\xi\in E} r_\xi<\infty$, а (65b) выполняется с $C=2/5$. При этом

$$\min_{\frac{1}{5}B_\xi}|f|\geqslant\frac{|f(\xi)|}{2}=\frac{\|f\|_{\mathrm{Lip}}}{5}r_\xi\geqslant\frac{\sqrt{d}\|f\|_{\mathrm{Lip}}}{2}l_{I_\xi}\quad(\xi\in E_0),$$

$$\sum_{I\in\mathcal{D}\colon(\exists\xi\in E_0)\ I_\xi=I}l_I^{d+1}\leqslant\sum_{\xi\in E_0}l_{I_\xi}^{d+1}\leqslant c(d)\|f\|_{\mathrm{Lip}}^{-1}\sum_{\xi\in E_0}\|f\|_{L^1(\frac{1}{5}B_\xi)}\leqslant c\|f\|_{\mathrm{Lip}}^{-1}\|f\|_{L^1}.$$

Теперь (66) влечёт (11) для f вместо ω.

Доказательство леммы 2. Если выполнено (3), то

$$|\omega|\leqslant \mathfrak{t}_{\Xi,r,A},$$

$$\Psi(\xi)\leqslant F(\xi)\equiv\sup_\eta\Big(\mathfrak{t}_{\Xi,r,A}(\eta)-a|\xi-\eta|\Big)=\mathfrak{t}_{\Xi,a^{-1}Ar,a}(\xi).$$

Поэтому $\Psi(\xi)\in\mathbb{R}$. Ясно, что $\Psi(\xi)\geqslant\omega(\xi)$. Финитность Ψ следует из неравенств $\omega\leqslant\Psi\leqslant F$. Супремум в (12) достигается на (не обязательно единственном) $\eta=\xi^*$, так как $\omega(\eta)-a|\xi-\eta|\to-\infty$ при $\eta\to\infty$. Для любых $\xi,\zeta\in\mathbb{R}^d$

$$\Psi(\xi)=\omega(\xi^*)-a|\xi-\xi^*|\leqslant\omega(\xi^*)-a|\zeta-\xi^*|+a|\xi-\zeta|\leqslant\Psi(\zeta)+a|\xi-\zeta|,$$

откуда $\|\Psi\|_{\mathrm{Lip}}\leqslant a$.

В лемме 12 положим $f=\Psi-\omega$, (65a) и $r_\xi=5\sqrt{d}|\xi-\xi^*|$. Из оценок

$$\begin{aligned}\Psi(\xi^*)=\omega(\xi^{**})-a|\xi^*-\xi^{**}|&\leqslant\Psi(\xi)+a|\xi-\xi^{**}|-a|\xi^*-\xi^{**}|\\&\leqslant\Psi(\xi)+a|\xi-\xi^*|=\omega(\xi^*)\end{aligned}$$

следует, что $\Psi(\xi^*)=\omega(\xi^*)$, поэтому ввиду $\xi^*\in B_\xi$ условие (65b) выполнено с $C=0$. В силу (64) имеем $|\xi-\xi^*|<l_{I_\xi}$ и $\xi^*\in 3I_\xi$. На основе неравенств

$$\omega(\xi)<\Psi(\xi)=\omega(\xi^*)-a|\xi-\xi^*|\leqslant\omega(\xi^*)-al_{I_\xi}/2$$

и $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}}\leqslant A$ заключаем, что

$$\operatorname{osc}_2^0\omega(3I_\xi)\geqslant c(d,a,A)l_{I_\xi},\quad \xi\in E_0.$$

Поэтому в силу (66) имеем

$$\|\Psi-\omega\|_{\mathrm{Lip}}\|\Psi-\omega\|_{L^1}+\|\Psi-\omega\|^2_{b_2^{1/2}}\leqslant c_0(d,0)c^{-2}\|\Psi-\omega\|^2_{\mathrm{Lip}}\sum_{I\in\mathcal{D}}l_I^{d-1}\operatorname{osc}_2^0\omega(3I)^2.$$

С учетом оценки $\|\Psi-\omega\|_{\mathrm{Lip}}\leqslant a+A$ получаем неравенства (13). $\square$

5. Аналитичность $U_{\varepsilon\omega}(x)$, пространства $\dot{B}^{\mu}_{p,p}(\mathbb{R}^d)$ и $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ и двойное усиление неравенства (11) по А. Коэну

5.1. Аналитичность $U_{\varepsilon\omega}(x)$ по (ε, x). В литературе (см. [66, § 3]) известно, что функция Грина переменной области $\Omega(\varepsilon)$, получаемой из исходной $\Omega(0)$ диффеоморфизмом $x \mapsto x + \varepsilon S(x)$ (S — векторное поле), аналитична по ε при $\varepsilon = 0$. Суть в том, что "распрямление" области $\Omega(\varepsilon)$ обратным диффеоморфизмом приводит к дифференциальному уравнению в $\Omega(0)$ с аналитическими по ε коэффициентами. Мы применим эту идею к представлению $U_{\varepsilon\omega}$ через ζ. Об аналитической зависимости решений краевых задач и конформных отображений от возмущений (в том числе возмущений границы) см. также [1, 10, 39, 61].

Пусть $L(X, Y)$ — пространство всех линейных ограниченных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y.

Лемма 13. *Пусть $\{Q_I\} \in \mathcal{Q}(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*)$, $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ — финитная липшицева функция со свойством* (27), *$\mu, \sigma \in (0, 1)$ и $F \in \mathrm{VL}(\sigma)$. Для $\varepsilon \in (-1, 1)$ обозначим через $L_{(\varepsilon)}$ и $\mathcal{N}_{i(\varepsilon)}$ соответственно функцию из* (29) *и операторы из леммы 10, отвечающие функции $\varepsilon\omega$ вместо ω (функция $\varepsilon\omega$ удовлетворяет условию* (27)*). Тогда получающиеся отображения*

$$\varepsilon \mapsto L_{(\varepsilon)}, \quad \varepsilon \mapsto \mathcal{N}_{i(\varepsilon)}$$

можно продолжить до голоморфных отображений круга $D = \{\varepsilon \in \mathbb{C} : |\varepsilon| < 1\}$ в пространства $\mathcal{C}$ и $L(\mathcal{C}_\sigma[F], \mathcal{C}_\sigma[F])$ соответственно. Имеют место оценки

$$\sup_{|\varepsilon|<1} \|L_{(\varepsilon)}\|_I \leqslant C_1(n, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*) l_I^{-1} b_I, \qquad I \in \mathcal{D}, \tag{69a}$$

$$\sup_{|\varepsilon|<1} \|\mathcal{N}_{i(\varepsilon)}\|_{\mathcal{C}_\sigma[F]\to\mathcal{C}_\sigma[F]} \leqslant C_2(n, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*, \mu, \sigma) \|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \qquad (i = 1, 2). \tag{69b}$$

Замечание. О голоморфности вектор-функций см. [11, 34]. Голоморфность $L_{(\varepsilon)}$ понимается как голоморфность функций $\varepsilon \mapsto L_{(\varepsilon)}\big|_{I^{\boxdot}} \in C^{\mu}(I^{\boxdot})$ для всех I.

Доказательство. Согласно разделу 3.1 функции $\varepsilon\omega$ можно сопоставить диффеоморфизм $g_{(\varepsilon)} : \mathbb{R}^n_+ \to \Omega_{\varepsilon\omega}$, ему обратный

$$\mathfrak{g}_{(\varepsilon)}(y', y_n) = g^{-1}_{(\varepsilon)}(y', y_n) = \big(y', \mathfrak{G}_{(\varepsilon)}(y)\big)$$

и функции $K_{2(\varepsilon)}$ и $L_{(\varepsilon)}$. Числа γ_I из раздела 3.1 можно находить с помощью ортогонального проектирования в $L^2(Q_I)$, поэтому они линейно зависят от ω и, в частности,

$$G_{\varepsilon\omega} = \varepsilon G_\omega,$$
$$Z \equiv 1 + D_n G_{\varepsilon\omega} = 1 + \varepsilon D_n G_\omega.$$

В силу формул (47) и (48) из [25] видно, что для любого $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ функция

$$f_\beta : (-1, 1) \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R},$$
$$f_\beta(\varepsilon, x) = (D^\beta \mathfrak{G}_{(\varepsilon)})\big(g_{(\varepsilon)}(x)\big),$$

допускает продолжение класса $C^\infty(D \times \mathbb{R}^n_+)$, голоморфное по ε. Продолжение с такими же свойствами допускают, следовательно, и функции

$$f_{e_i}(\varepsilon, x) = (D_i \mathfrak{G}_{(\varepsilon)})\big(g_{(\varepsilon)}(x)\big),$$
$$-1 + \sum_{i=1}^n \big(f_{e_i}(\varepsilon, x)\big)^2 = K_{2(\varepsilon)}(x),$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2e_i}(\varepsilon, x) = L_{(\varepsilon)}(x).$$

Отсюда и из условий Коши-Римана получаем голоморфность отображений

$$\varepsilon \mapsto (D_i \mathfrak{G}_{(\varepsilon)}) \circ g_{(\varepsilon)} \in \mathcal{C}, \quad \varepsilon \mapsto K_{2(\varepsilon)} \in \mathcal{C}, \quad \varepsilon \mapsto L_{(\varepsilon)} \in \mathcal{C}. \tag{70}$$

Вывод формулы [25, (50)] даёт, что выполнен вариант оценки (28):

$$\sup_{|\varepsilon|<1} |f_\beta(\varepsilon, x)| \leqslant C(\beta, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*) l_I^{1-|\beta|} b_I, \quad \text{если } \beta \notin \{0, e_n\} \text{ и } x \in D_I.$$

Изучение доказательства оценок (38), (39) и (40) показывает, что они позволяют аналогичный перенос на отображения (70) (зависимость от ε не играет существенной роли). В частности, верно (69a). Оценка (69b) для оператора

$$\mathcal{N}_{2(\varepsilon)} f = L_{(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_n} \int_{y_n>0} G(\cdot, y) f(y)\, dy$$

проверяется аналогично (53), с использованием (69a) вместо (40). Точно так же проверяется (69b) для оператора $\mathcal{N}_{1(\varepsilon)}$.

Нам осталось убедиться в голоморфности отображений

$$D \ni \varepsilon \mapsto \mathcal{N}_{i(\varepsilon)} \in L(\mathcal{C}_\sigma[F], \mathcal{C}_\sigma[F]).$$

В силу (69a) и неравенств Коши в $C^\mu(I^{\boxdot})$ имеем

$$\begin{gathered} L_{(\varepsilon)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon^k \quad (c_k \in \mathcal{C}), \\ \|c_k\|_I \leqslant C_1 l_I^{-1} b_I, \\ \mathcal{N}_{2(\varepsilon)} f = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k c_k(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_n} \int_{y_n>0} G(\cdot, y) f(y)\, dy \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k T_k f. \end{gathered} \tag{71}$$

Оценка (71) аналогична (40), поэтому имеет место аналог неравенства (53) для операторов T_k вместо $\mathcal{N}_2$. Значит, при $|\varepsilon| < 1$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k T_k$ абсолютно сходится в $L(\mathcal{C}_\sigma[F], \mathcal{C}_\sigma[F])$, что означает голоморфность $\mathcal{N}_{2(\varepsilon)}$. Голоморфность $\mathcal{N}_{1(\varepsilon)}$ проверяется таким же образом. $\square$

Лемма 14. *Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ и $x \neq y$. Тогда (см. (32)) функцию*

$$f(z) = G(x+z, y), \quad z \in \mathbb{R}^n \text{ и } |z| \text{ мал},$$

можно голоморфным образом продолжить в поликруг

$$D = \bigl\{ z \in \mathbb{C}^n : |z_k| < |x-y|/3\sqrt{n} \bigr\}.$$

При этом выполнено неравенство

$$\sup_{z \in D} |f(z)| \leqslant c(n) y_n |x-y|^{1-n}. \tag{72}$$

Доказательство. Пусть $Y \in \mathbb{R}^n$ и $|x-Y| \geqslant |x-y|$. Для $z \in D$

$$\varrho(Y, z) := \sum_{k=1}^{n} (x+z-Y)_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \Bigl\{ (x_k + \operatorname{Re} z_k - Y_k)^2 - (\operatorname{Im} z_k)^2 \Bigr\} + \mathrm{i}\, \underbrace{c(Y, z)}_{\in \mathbb{R}},$$

$$|x + \operatorname{Re} z - Y| \geqslant |x-Y| - \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2} \geqslant \frac{2}{3} |x-Y|,$$

$$\operatorname{Re}\varrho(Y,z) \geqslant \left(\frac{2}{3}|x-Y|\right)^2 - \left(\frac{1}{3}|x-y|\right)^2 \geqslant \frac{|x-Y|^2}{3} > 0.$$

Поэтому искомое продолжение можно задать формулой

$$f(z) := \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\Big\{\ln\varrho(y,z) - \ln\varrho(\widetilde{y},z)\Big\}, & n=2, \\ \frac{1}{(2-n)\operatorname{vol}\{\xi\in\mathbb{R}^n\colon |\xi|=1\}}\Big\{\varrho(y,z)^{\frac{2-n}{2}} - \varrho(\widetilde{y},z)^{\frac{2-n}{2}}\Big\}, & n\geqslant 3, \end{cases}$$

пользуясь главной ветвью логарифма или степени.

Имеют место неравенства

$$|\partial\varrho(Y,z)/\partial Y_k| = 2|x_k+z_k-Y_k| \leqslant 2\left\{1+\frac{1}{3\sqrt{n}}\right\}|x-Y|,$$
$$|\varrho(Y,z)| \geqslant |\operatorname{Re}\varrho(Y,z)| \geqslant |x-Y|^2/3.$$

С их помощью оценка (72) доказывается так же, как (42). □

Теорема 9. *Для любых финитной липшицевой функции $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ и точки $x \in \mathbb{R}^n_+$ существует $\delta > 0$ такое, что функция*

$$(\varepsilon, z) \mapsto U_{\varepsilon\omega}(x+z)$$

определена для $\varepsilon, z_k \in (-\delta,\delta)$ $(k=\overline{1,n})$ и допускает голоморфное продолжение в поликруг

$$D = \big\{(\varepsilon,z) \in \mathbb{C}^{n+1}\colon |\varepsilon|<\delta \text{ и } |z_k|<\delta\big\}.$$

Доказательство. Найдём Ξ и r такие, что выполнено (3), после чего выберем $A>0$ столь малым, что

$$x \in \mathfrak{T} \equiv \mathfrak{T}_{\Xi,r,A}.$$

Зададим $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q}^*$ формулами (56) и построим семейство $\{Q_I\} \in \mathcal{Q}(\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*)$ так же, как в доказательстве леммы 1. Тогда для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$G_{\varepsilon\omega} = 0 \quad \text{на } \mathfrak{T}. \tag{73}$$

Положим $\mu=\sigma=1/2$ и найдём постоянные C_1 и C_2 из леммы 13. Отбрасывая тривиальный случай $\omega\equiv 0$, обозначим

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{1}{2c_1(e_n,\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*)c_2(n,\mathfrak{q}^*)\|\omega\|_{\mathrm{Lip}}}, \frac{1}{4C_2\|\omega\|_{\mathrm{Lip}}}\right\} \quad (\text{см. } (27)).$$

Применим лемму 13 к функции $\varepsilon_0\omega$, сохраняя обозначения $L_{(\varepsilon)}$ и $\mathcal{N}_{i(\varepsilon)}$ для отображений, отвечающих $\varepsilon\omega$ (а не $\varepsilon\varepsilon_0\omega$), и их голоморфных продолжений. С учетом (26) получаем

$$\sup_{|\varepsilon|<\varepsilon_0}\sup_{I\in\mathcal{D}} l_I\|L_{(\varepsilon)}\|_I < \infty, \tag{74a}$$

$$\sup_{|\varepsilon|<\varepsilon_0}\|\mathcal{N}_{i(\varepsilon)}\|_{\mathcal{C}_\sigma[F]\to\mathcal{C}_\sigma[F]} \leqslant 1/4 \quad (i=1,2). \tag{74b}$$

Для $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ зададим $F\in\mathcal{C}$ формулой

$$F(X) = \varphi(X)/X_n.$$

Ввиду (29) и (73) имеем $L_{(\varepsilon)}=0$ на $\mathfrak{T}$ при $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ и, следовательно, при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, поэтому с учетом (74a) найдётся φ, не зависящее от ε, со свойством $\|L_{(\varepsilon)}\|_I \leqslant \|F\|_I$ для всех I. Значит, $L_{(\varepsilon)}\in\mathcal{C}_\sigma[F]$ и $\|L_{(\varepsilon)}\|_{\mathcal{C}_\sigma[F]}\leqslant 1$, причем из $\mathcal{C}$-голоморфности функции $L_{(\varepsilon)}$ следует её $\mathcal{C}_\sigma[F]$-голоморфность.

Пусть $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Мы только что проверили условие (55c) теоремы 8(i) применительно к $\varepsilon\omega$. Остальные условия выполняются в силу (73) и (74b). По этой теореме с учетом (73) получаем

$$\mathfrak{T} = g_{(\varepsilon)}(\mathfrak{T}) \subset g_{(\varepsilon)}(\mathbb{R}^n_+) = \Omega_{\varepsilon\omega},$$

$$U_{\varepsilon\omega}(X) = X_n + \int_{y_n>0} G(X,y)\zeta_{(\varepsilon)}(y)\,dy, \quad X \in \mathfrak{T},$$

$$\zeta_{(\varepsilon)} = -\big(\mathrm{id}_{\mathcal{C}_\sigma[F]} + \mathcal{N}_{(\varepsilon)}\big)^{-1} L_{(\varepsilon)}. \tag{75}$$

Аналогично (60) имеем $\zeta_{(\varepsilon)}\big|_{\mathfrak{T}} = 0$. Поэтому

$$U_{\varepsilon\omega}(x+z) = x_n + z_n + \int_{\mathbb{R}^n_+\setminus\mathfrak{T}} G(x+z,y)\zeta_{(\varepsilon)}(y)\,dy,$$

если $\varepsilon \in (-\delta,\delta)$ и $z_k \in (-\delta,\delta)$ $(k=\overline{1,n})$, где

$$\delta := \min\big\{\varepsilon_0, \mathrm{dist}(x,\partial\mathfrak{T})/3\sqrt{n}\big\}.$$

Ввиду (74b) и [11, I.4.5] формула (75) задаёт $\mathcal{C}_\sigma[F]$-голоморфное продолжение $\zeta_{(\varepsilon)}$ в круг $|\varepsilon| < \delta$, причем

$$\sup_{|\varepsilon|<\delta} \|\zeta_{(\varepsilon)}\|_{\mathcal{C}_\sigma[F]} \leqslant 2 \sup_{|\varepsilon|<\delta} \|L_{(\varepsilon)}\|_{\mathcal{C}_\sigma[F]} \leqslant 2.$$

Пусть $y \in (\mathbb{R}^n_+ \setminus \mathfrak{T}) \cap I^{\boxdot}$. Из определения функции F ясно, что $[I,J] \leqslant a_1(\mathfrak{T},\varphi)$ при $\|F\|_J \neq 0$. С учетом теоремы 2(a) из [26] получаем

$$\begin{aligned}
y_n|\zeta_{(\varepsilon)}(y)| \leqslant 2l_I\|\zeta_{(\varepsilon)}\|_I &\leqslant 4\sum_{J\in\mathcal{D}} \left(\frac{l_I}{[I,J]}\right)^{-3/4} \Gamma_{IJ}^{(1/4,n-1/2)} l_J\|F\|_J \\
&\leqslant a_2(\mathfrak{T},\varphi) l_I^{-3/4} \sum_{J\in\mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(1/4,n-1/2)} \leqslant a_3(\mathfrak{T},\varphi) y_n^{-3/4}.
\end{aligned}$$

Для голоморфного продолжения из леммы 14 имеем

$$\sup_{|z_k|<\delta} |G(x+z,y)| \leqslant a_4\big(n, \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n_+\setminus\mathfrak{T})\big) y_n.$$

Поэтому при $y \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \mathfrak{T}$, $|\varepsilon| < \delta$ и $|z_k| < \delta$ с учетом неравенств Коши

$$G(x+z,y)\zeta_{(\varepsilon)}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(y)\varepsilon^k \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^n} c_\beta(y) z^\beta,$$

$$|c_k(y)c_\beta(y)| \leqslant a_3 y_n^{-7/4}\delta^{-k} a_4 y_n \delta^{-|\beta|} = a_3a_4 y_n^{-3/4}\delta^{-k-|\beta|}.$$

Следовательно, формула

$$D \ni (\varepsilon, z) \mapsto x_n + z_n + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^n} \varepsilon^k z^\beta \int_{\mathbb{R}^n_+\setminus\mathfrak{T}} c_k(y)c_\beta(y)\,dy \tag{76}$$

задаёт искомое голоморфное продолжение функции $U_{\varepsilon\omega}(x+z)$. □

5.2. Пространства $\dot{B}^{\mu}_{p,p}(\mathbb{R}^d)$ и $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^d)$. Пусть $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$ — пространства Шварца быстро убывающих функций в $\mathbb{R}^d$ и умеренных распределений в $\mathbb{R}^d$ соответственно. Для определённости наделим $\mathscr{S}'$ слабой топологией $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$. Преобразование Фурье в $\mathscr{S}$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\,dx$$

обычным образом переносится на $\mathscr{S}'$. Факторпространство $\mathscr{S}'/\mathscr{P}$ пространства $\mathscr{S}'$ по подпространству $\mathscr{P}$ всех многочленов снабжается фактортопологией [34]. Действие канонического отображения $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}'/\mathscr{P}$ обозначим как

$$F^{\textcircled{P}} = F + \mathscr{P}, \quad F \in \mathscr{S}'.$$

Существует φ такое, что

$$\text{(77a)} \qquad \varphi \in \mathscr{S},$$

$$\text{(77b)} \qquad \operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \colon 1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2\},$$

$$\text{(77c)} \qquad |\hat{\varphi}(\xi)| \geqslant c > 0 \quad \text{при } 3/5 \leqslant |\xi| \leqslant 5/3.$$

Определение 5. *Пусть $\mu \in \mathbb{R}$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для $f \in \mathscr{S}'/\mathscr{P}$ положим*

$$\|f\|_{\dot{B}^{\mu}_{p,p}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\mu p}\|\varphi_k * f\|^p_{L^p}\right)^{1/p},$$

где $\varphi_k(x) = 2^{kd}\varphi(2^k x)$ (с обычной модификацией при $p = \infty$). Обозначим

$$\dot{B}^{\mu}_{p,p}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathscr{S}'/\mathscr{P} \colon \|f\|_{\dot{B}^{\mu}_{p,p}} < \infty\}.$$

Ввиду (77b) свёртка $\varphi_k * f$ корректно задана формулой $\varphi_k * f := \varphi_k * F$, где $f = F^{\textcircled{P}}$. В [48] отмечено, что определение 5 (и даже более общее определение) не зависит от выбора функции (77) с точностью до эквивалентности норм. В силу [30, гл. 5] пространство $\dot{B}^{\mu}_{p,p}(\mathbb{R}^d)$ банахово и непрерывно вложено в $\mathscr{S}'/\mathscr{P}$ (даже при наделении $\mathscr{S}'$ сильной топологией $\beta(\mathscr{S}', \mathscr{S})$).

Положим $T = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Очевидно, что для $f \in \mathscr{S}'/\mathscr{P}$ определение

$$\hat{f}\big|_T := \hat{F}\big|_T, \quad f = F^{\textcircled{P}},$$

корректно. По (77c) и равенству Парсеваля для любого $f \in \mathscr{S}'/\mathscr{P}$

$$\text{(78a)} \quad f \in \dot{B}^{\mu}_{2,2}(\mathbb{R}^d) \;\Leftrightarrow\; \hat{f}\big|_T \in L^2_{\mathrm{loc}}(T) \text{ и } |f|_{\dot{B}^{\mu}_{2,2}} := \left(\int_T |\xi|^{2\mu}\big|\hat{f}(\xi)\big|^2\,d\xi\right)^{1/2} < \infty;$$

$$\text{(78b)} \qquad \text{нормы } \|\cdot\|_{\dot{B}^{\mu}_{2,2}} \text{ и } |\cdot|_{\dot{B}^{\mu}_{2,2}} \text{ на } \dot{B}^{\mu}_{2,2}(\mathbb{R}^d) \text{ эквивалентны.}$$

Из (78) и полноты $\dot{B}^{\mu}_{p,p}(\mathbb{R}^d)$ следует, что пространство $\dot{B}^{\mu}_{2,2}(\mathbb{R}^d)$ гильбертово относительно скалярного произведения

$$\text{(79)} \qquad (f, g) = \int_T |\xi|^{2\mu}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi.$$

Норма $|\cdot|_{\dot{B}^{\mu}_{2,2}}$ показывает, что при $\mu > -d/2$ имеет место плотное вложение $\mathscr{S}^{\textcircled{P}} \subset \dot{B}^{\mu}_{2,2}(\mathbb{R}^d)$. Из плотности $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ в $\mathscr{S}$ следует, что

$$\text{(80)} \qquad \text{при } \mu > -d/2 \text{ выполнено плотное вложение } C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{P}} \subset \dot{B}^{\mu}_{2,2}(\mathbb{R}^d).$$

При $R > 0$ положим $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| \leqslant R\}$. Для $F \in b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$

$$\text{(81)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{osc}_2^0 F(B_R) &\leqslant |B_R|^{-1/2}\left(\int_{B_R}\left|F(x) - |B_R|^{-1}\int_{B_R} F(y)\,dy\right|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leqslant |B_R|^{-1}\left(\int_{B_R}\int_{B_R} |F(x) - F(y)|^2\,dxdy\right)^{1/2} \\ &\leqslant 2^{\frac{d+1}{2}}|B_1|^{-1}R^{\frac{1-d}{2}}|F|_{b_2^{1/2}}. \end{aligned}$$

Поэтому из фундаментальной последовательности $\{F_k\} \subset b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ можно извлечь подпоследовательность $\{F_{k_m}\}$ такую, что $F_{k_m} + \gamma_{k_m} \to F \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ в $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ при $m \to \infty$ для некоторых $\gamma_{k_m} \in \mathbb{C}$. Переход к сходящейся п.в. подпоследовательности и теорема Фату показывают, что $F \in b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ и $F_k \to F$ в $b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ при $k \to \infty$. Итак, пространство $b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ полно.

Рассмотрим (гильбертово) пространство Соболева

$$\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^d) := b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)/\mathbb{C},$$
$$(F+\mathbb{C}, G+\mathbb{C})_{\dot H^{1/2}} := \int_{\mathbb{R}^d} |h|^{-d-1}(\Delta_h F, \Delta_h G)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\, dh, \quad F, G \in b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d).$$

Зададим отображение $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'/\mathscr{P}$ формулой

$$(F+\mathbb{C})^{\textcircled{D}} := F^{\textcircled{D}}.$$

Оно является, с точностью до положительного множителя, изометрическим изоморфизмом из $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ на $\dot B^{1/2}_{2,2}(\mathbb{R}^d)$ (со скалярным произведением (79)). В самом деле, с учетом (78a) аналогично [31, с. 289] проверяется, что

$$\text{если } F \in b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d), \text{ то } F^{\textcircled{D}} \in \dot B^{1/2}_{2,2}(\mathbb{R}^d) \text{ и } |F^{\textcircled{D}}|_{\dot B^{1/2}_{2,2}} = c(d)|F|_{b_2^{1/2}}, \tag{82}$$

откуда следует изометричность. Описание же образа обсуждаемого отображения получается следующим способом. Для $f \in \dot B^{1/2}_{2,2}(\mathbb{R}^d)$ в силу (80) найдутся такие $\{F_k\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, что $F_k^{\textcircled{D}} \to f$ в $\dot B^{1/2}_{2,2}(\mathbb{R}^d)$ при $k \to \infty$. С учетом (82) и полноты $b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ в $b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ существует предел $F = \lim F_k$. Применение (82) к функциям $F - F_k$ даёт, что $(F+\mathbb{C})^{\textcircled{D}} = F^{\textcircled{D}} = f$.

Для $f = F_0^{\textcircled{D}}$, $F_0 \in b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$, вышеуказанная аппроксимационная процедура доставляет $F = \lim F_k \in b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ такое, что $F^{\textcircled{D}} = f = F_0^{\textcircled{D}}$. На основе (82) заключаем, что $F + \mathbb{C} = F_0 + \mathbb{C}$. Это значит, что пространство $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ можно определить и как пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ по норме $|\cdot|_{b_2^{1/2}}$.

5.3. О двойном усилении неравенства Кашина-Бесова-Коляды. Для непрерывной функции $\omega : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ полунорма Зигмунда задаётся формулой

$$\|\omega\|_{\Lambda_*} := \sup_{\xi \neq \eta} |\xi - \eta|^{-1} \left|\omega(\xi) - 2\omega\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) + \omega(\eta)\right|.$$

Ясно, что $\|\omega\|_{\Lambda_*} \leqslant \|\omega\|_{\mathrm{Lip}}$, поэтому неравенство

$$\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}} \leqslant c(d)\|\omega\|_{\Lambda_*}\|\omega\|_{L^1} \tag{83}$$

является усилением неравенства (11). Это усиление интересно не только само по себе, но и как намёк на возможность ослабить предположение $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant A$ в теоремах 1 и 2 до предположения $\|\omega\|_{\Lambda_*} \leqslant A$. Отметим в этой связи, что условие $\|\omega\|_{\Lambda_*} \leqslant A$ на "граничную функцию" встречалось в теории дифференциальных уравнений и прежде, см. для примера разделы 4.1 и 5.1 в [26].

Мы выведем (83) из интерполяционного соотношения

$$\left(L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{D}}, \dot B^1_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d)\right)_{1/2,2} = \dot B^{1/2}_{2,2}(\mathbb{R}^d). \tag{84}$$

Здесь большие круглые скобки обозначают метод вещественной интерполяции (см. раздел 5.4), а пространство $L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{P}}$ нормировано равенством

$$\|F^{\textcircled{P}}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{P}}} := \|F\|_{L^1}, \quad F \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Доказательство (84) будет состоять в развёртывании и модификации эскизных построений из [43] путём замены в них разложения по всплескам на φ-преобразование Фрейзера и Яверта, а неоднородных пространств Слободецкого — на однородные. Отметим, что близкие к [43] результаты получены в [44] для однородного и неоднородного пространств функций ограниченной вариации вместо $L^1(\mathbb{R}^d)$.

5.4. Подготовительные сведения. Пара $\{A_0, A_1\}$ банаховых пространств, непрерывно вложенных в отделимое линейное топологическое пространство $\mathscr{A}$, называется интерполяционной парой. Например, для

$$A_0 = L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{P}}, \quad A_1 = \dot{B}^{\mu}_{p,p}(\mathbb{R}^d) \tag{85}$$

можно за $\mathscr{A}$ взять пространство $\mathscr{S}'/\mathscr{P}$, отделимое ввиду замкнутости $\mathscr{P}$ в $\mathscr{S}'$, см. [34, с. 93]. Линеал $A_0 + A_1 = \{a \in \mathscr{A} : a = a_0 + a_1$ для некоторых $a_i \in A_i\}$ превращается в банахово пространство любой из норм $K(t, \cdot)$ $(t > 0)$, где

$$K(t, a) = K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{a = a_0 + a_1 :\, a_i \in A_i} \big\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}\big\}.$$

Определение 6. *Для $\theta \in (0, 1)$, $q \in [1, \infty)$ и интерполяционной пары $\{A_0, A_1\}$ через $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ обозначим множество всех $a \in A_0 + A_1$ таких, что*

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} := \left(\int_0^{\infty} [t^{-\theta} K(t, a)]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty.$$

Замечание. Пространство $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ банахово, см. [29].

Следующая лемма формализует метод ретрактов, ср. [29, 1.2.4].

Лемма 15. *Пусть для интерполяционных пар $\{A_0, A_1\}$ и $\{B_0, B_1\}$ даны такие операторы $S \in L(A_0 + A_1, B_0 + B_1)$ и $T \in L(B_0 + B_1, A_0 + A_1)$, что $TS = E$ (тождественный оператор на $A_0 + A_1$), $S\big|_{A_i} \in L(A_i, B_i)$ и $T\big|_{B_i} \in L(B_i, A_i)$ для $i = 0, 1$. Тогда для $a \in A_0 + A_1$ условия $a \in (A_0, A_1)_{\theta,q}$ и $Sa \in (B_0, B_1)_{\theta,q}$ равносильны, а нормы $\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}$ и $\|Sa\|_{(B_0,B_1)_{\theta,q}}$ на $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ эквивалентны.*

Доказательство элементарно проводится на основе интерполяционного свойства линейных операторов, см. [29, с. 25]. □

Конкретное применение леммы 15 будет опираться на следующий результат:

Лемма 16. *Пусть φ — функция со свойствами (77), $\mu \in \mathbb{R}$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

i) Для $I_0 = [0, 1)^d$ и $I \in \mathcal{D}$ зададим $\varphi_I \in \mathscr{S}$ формулой

$$\varphi_I(x) = \varphi\left(\frac{x - \mathfrak{c}_I}{l_I} + \mathfrak{c}_{I_0}\right).$$

Для $f \in \mathscr{S}'/\mathscr{P}$ положим $(S_\varphi f)_I := f(\varphi_I) := F(\varphi_I)$ при $f = F^{\textcircled{P}}$. Тогда

$$S_\varphi \in L\left(\dot{B}^{\mu}_{p,p}(\mathbb{R}^d), \dot{b}^{\mu}_{p,p}\right),$$

где $\dot{b}^{\mu}_{p,p}$ *— банахово пространство всех числовых семейств* $s = (s_I)_{I\in\mathcal{D}}$ *со свойством (обычная модификация при* $p = \infty$*)*

$$\|s\|_{\dot{b}^{\mu}_{p,p}} := \left(\sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{d-(d+\mu)p}|s_I|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

ii) Пусть (77) *выполняется для* ψ *вместо* φ*. Положим*

$$\psi_I(x) = l_I^{-d}\psi\left(\frac{x-\mathfrak{c}_I}{l_I} + \mathfrak{c}_{I_0}\right).$$

Тогда для любого $s \in \dot{b}^{\mu}_{p,p}$ *ряд*

$$T_\psi s = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{I\in\mathcal{D}_k} s_I\psi_I^{\textcircled{p}}$$

сходится в $\mathscr{S}'/\mathscr{P}$*, причем* $\|T_\psi s\|_{\dot{B}^{\mu}_{p,p}} \leqslant c(\psi,\mu,p)\|s\|_{\dot{b}^{\mu}_{p,p}}$.

iii) Функцию ψ *из ii) можно выбрать с дополнительным свойством*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(-2^k\xi)\hat{\psi}(2^k\xi) = 1, \quad \xi \neq 0.$$

Для любой такой ψ *ряд* $T_\psi s$ *сходится в* $\mathscr{S}'/\mathscr{P}$ *для всех семейств* $s = S_\varphi f$, $f \in \mathscr{S}'/\mathscr{P}$*, причем* $T_\psi S_\varphi f = f$.

Замечание. Из леммы 16 непосредственно вытекает, что для $f \in \mathscr{S}'/\mathscr{P}$ условия $f \in \dot{B}^{\mu}_{p,p}(\mathbb{R}^d)$ и $S_\varphi f \in \dot{b}^{\mu}_{p,p}$ равносильны, а нормы $\|f\|_{\dot{B}^{\mu}_{p,p}}$ и $\|S_\varphi f\|_{\dot{b}^{\mu}_{p,p}}$ на $\dot{B}^{\mu}_{p,p}(\mathbb{R}^d)$ эквивалентны.

Доказательство. Утверждение i) проверено в доказательстве теоремы 2.6 из [48]. Утверждение ii) следует из теоремы 3.1 и замечания 3.2 в [48]. Существование ψ в iii) доказано в лемме (6.9) из [49]. Остальная часть утверждения iii) следует из леммы 2.1 в [48]. □

5.5. Вывод соотношений (83) **и** (84)**.** При $0 < \mu < \infty$, $1 < p \leqslant \infty$ и $0 < \theta < 1$ имеем

(86a) $$\nu := \theta\mu \in (0,\mu),$$

(86b) $$q := \frac{1}{1-\theta+\frac{\theta}{p}} \in (1,p),$$

$$\gamma := 1 + \frac{p}{p-1}\frac{\mu}{d} > 1.$$

Определение 7. *Через* ℓ^{γ}_{q} *обозначим банахово пространство всех числовых семейств* $s = (s_I)_{I\in\mathcal{D}}$ *со свойством*

$$\|s\|_{\ell^{\gamma}_{q}} := \left(\sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{(1-q)d\gamma}|s_I|^q\right)^{1/q} < \infty.$$

Через ℓ^{γ}_{∞} *обозначим банахово пространство всех* s *таких, что*

$$\|s\|_{\ell^{\gamma}_{\infty}} := \sup_{I\in\mathcal{D}} l_I^{-d\gamma}|s_I| < \infty.$$

Легко проверить, что $\dot b^{\mu}_{p,p} = \ell^{\gamma}_p$ и $\dot b^{\nu}_{q,q} = \ell^{\gamma}_q$.

Пусть S_φ и T_ψ — операторы из леммы 16iii), а $\mathscr{B}$ — линеал всех числовых семейств над $\mathcal{D}$. Из равенства $T_\psi S_\varphi f = f$ следует, что линеал

$$\mathcal{X} := S_\varphi L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{D}} \subset \mathscr{B}$$

можно нормировать выражением $\|S_\varphi f\|_{\mathcal{X}} := \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{D}}}$, и тогда

$$S_\varphi\big|_{L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{D}}} : L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{D}} \to \mathcal{X}, \quad T_\psi\big|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{D}}$$

— взаимно обратные изометрии. Очевидно, что вложение $\mathcal{X} \subset \mathscr{B}$ непрерывно, если $\mathscr{B}$ снабдить топологией простой сходимости. Применяя к интерполяционным парам (85), $\{\mathcal{X}, \ell^{\gamma}_p\}$ и операторам S_φ и T_ψ лемму 15, получаем

$$\mathcal{Y} \equiv \Big(L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{D}}, \dot B^{\mu}_{p,p}(\mathbb{R}^d)\Big)_{\theta,q} = \Big\{f \in L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{D}} + \dot B^{\mu}_{p,p}(\mathbb{R}^d)\colon S_\varphi f \in (\mathcal{X}, \ell^{\gamma}_p)_{\theta,q}\Big\},$$

$$\text{нормы } \|f\|_{\mathcal{Y}} \text{ и } \|S_\varphi f\|_{(\mathcal{X},\ell^{\gamma}_p)_{\theta,q}} \text{ на } \mathcal{Y} \text{ эквивалентны.} \tag{87}$$

Для $\sigma \in \mathbb{R}$ зададим изоморфизм $M_\sigma : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ формулой

$$(M_\sigma s)_I = l_I^{d\sigma} s_I.$$

При $f \in \dot B^{\nu}_{q,q}(\mathbb{R}^d)$ имеем $s := S_\varphi f \in \dot b^{\nu}_{q,q} = \ell^{\gamma}_q$, поэтому $M_{-\gamma} s$ принадлежит пространству Лебега $L^q(\mathcal{D}; m_\gamma)$, построенному над множеством $\mathcal{D}$ с мерой

$$m_\gamma(E) = \sum_{I \in E} l_I^{d\gamma}.$$

По теореме 5.2.1 из [3]

$$L^q(\mathcal{D}; m_\gamma) = \big(L^1(\mathcal{D}; m_\gamma), L^p(\mathcal{D}; m_\gamma)\big)_{\theta,q},$$

$$s \in \ell^{\gamma}_q = M_\gamma L^q(\mathcal{D}; m_\gamma) = \big(M_\gamma L^1(\mathcal{D}; m_\gamma), M_\gamma L^p(\mathcal{D}; m_\gamma)\big)_{\theta,q} = (\ell^{\gamma}_1, \ell^{\gamma}_p)_{\theta,q}.$$

Если $a_0 \in \ell^{\gamma}_1$, $a_1 \in \ell^{\gamma}_p$ и $s = a_0 + a_1$, то

$$s = S_\varphi[T_\psi S_\varphi f] = S_\varphi T_\psi a_0 + S_\varphi T_\psi a_1,$$

$$\|S_\varphi T_\psi a_0\|_{\mathcal{X}} = \|T_\psi a_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{D}}} \leqslant c_1(\psi) \sum_{I \in \mathcal{D}} |a_{0I}| = c_1 \|a_0\|_{\ell^{\gamma}_1}, \tag{88}$$

$$\begin{aligned} \|S_\varphi T_\psi a_1\|_{\ell^{\gamma}_p} = \|S_\varphi T_\psi a_1\|_{\dot b^{\mu}_{p,p}} &\leqslant c_2(\varphi, \mu, p) \|T_\psi a_1\|_{\dot B^{\mu}_{p,p}} \\ &\leqslant c_3(\varphi, \psi, \mu, p) \|a_1\|_{\dot b^{\mu}_{p,p}} = c_3 \|a_1\|_{\ell^{\gamma}_p}, \end{aligned}$$

$$K(t, s; \mathcal{X}, \ell^{\gamma}_p) \leqslant \max\{c_1, c_3\} K(t, s; \ell^{\gamma}_1, \ell^{\gamma}_p),$$

$$\|s\|_{(\mathcal{X},\ell^{\gamma}_p)_{\theta,q}} \leqslant c_4(\varphi, \psi, \mu, p, \theta) \|s\|_{\ell^{\gamma}_q} \leqslant c_5(\varphi, \psi, \mu, p, \theta) \|f\|_{\dot B^{\nu}_{q,q}}.$$

В (88) применено то, что $\|\psi_I\|_{L^1} = \|\psi\|_{L^1}$. Отсюда с учетом включения

$$f = T_\psi s \in T_\psi\big[\mathcal{X} + \ell^{\gamma}_p\big] \subset L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{D}} + \dot B^{\mu}_{p,p}(\mathbb{R}^d)$$

и утверждения (87) выводим непрерывное вложение $\dot B^{\nu}_{q,q}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{Y}$.

Допустим, что для любых $s \in \mathcal{X}$ и $\varepsilon > 0$ установлена оценка

$$\sum_{I \in \lambda} l_I^{d\gamma} \leqslant c_6(\varphi, \gamma) \varepsilon^{-1} \|s\|_{\mathcal{X}}, \tag{89}$$

где $\lambda = \{I\colon |s_I| \geqslant \varepsilon l_I^{d\gamma}\}$. В обозначениях из [3, с. 17] она означает, что

$$\|s\|_{M_\gamma L_{1\infty}(\mathcal{D}; m_\gamma)} = \|M_{-\gamma} s\|_{L_{1\infty}(\mathcal{D}; m_\gamma)} \leqslant c_6 \|s\|_{\mathcal{X}}.$$

По теореме 5.3.1 из [3]

$$L^q(\mathcal{D}; m_\gamma) = \big(L_{1\infty}(\mathcal{D}; m_\gamma), L^p(\mathcal{D}; m_\gamma)\big)_{\theta,q},$$

$$(\mathcal{X}, \ell_p^\gamma)_{\theta,q} \subset \big(M_\gamma L_{1\infty}(\mathcal{D}; m_\gamma), M_\gamma L^p(\mathcal{D}; m_\gamma)\big)_{\theta,q} = M_\gamma L^q(\mathcal{D}; m_\gamma) = \ell_q^\gamma.$$

На основе (87) и замечания к лемме 16 получаем непрерывные вложения

$$\mathcal{Y} \subset \Big\{ f \in L^1(\mathbb{R}^d)^{\circledR} + \dot{B}^\mu_{p,p}(\mathbb{R}^d) \colon S_\varphi f \in \ell_q^\gamma = \dot{b}^\nu_{q,q} \Big\} \subset \dot{B}^\nu_{q,q}(\mathbb{R}^d).$$

Докажем (89). Для $H, I \in \mathcal{D}$ скажем, что $H \odot I$, если $l_H = l_I$ и $\overline{H} \cap \overline{I} \neq \varnothing$, и что H *выбивает* I (пишем $H \searrow I$), если либо $H \odot I$, либо $l_H > l_I$ и $5H \supset 5I$.

Пусть $l_H \geqslant l_I$ и $(2H) \cap (2I) \neq \varnothing$. Если $l_H = l_I$, то очевидно, что $H \odot I$. Если $l_H = 2l_I$, то легко проверяется, что $|\mathfrak{c}_H - \mathfrak{c}_I|_\infty \leqslant \frac{5}{4} l_H$. Если же $l_H \geqslant 4l_I$, то

$$|\mathfrak{c}_H - \mathfrak{c}_I|_\infty \leqslant l_H + l_I \leqslant \frac{5}{4} l_H.$$

Значит, при $l_H \geqslant 2l_I$ имеем

$$|\mathfrak{c}_H - \mathfrak{c}_I|_\infty + \frac{5}{2} l_I \leqslant \frac{5}{4} l_H + \frac{5}{4} l_H = \frac{5}{2} l_H,$$

откуда $5H \supset 5I$. Мы доказали, что

$$\text{если } l_H \geqslant l_I \text{ и } (2H) \cap (2I) \neq \varnothing, \text{ то } H \searrow I. \tag{90}$$

Пусть $s = S_\varphi f$, $f = F^{\circledR}$ и $F \in L^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$. Тогда

$$|s_I| \leqslant \beta_I = c_7(\varphi, N) \int \left(1 + \frac{|x - \mathfrak{c}_I|_\infty}{l_I}\right)^{-N} |F(x)|\, dx$$

для любого $N > 0$. Элементы множества

$$\Lambda = \big\{ I \in \mathcal{D} \colon \beta_I \geqslant \varepsilon l_I^{d\gamma} \big\}$$

можно расположить в последовательность $\{I_k\}$ в порядке невозрастания рёбер l_{I_k}. Вычеркнем по индукции в последовательности $\{I_k\}$ всякий куб, выбиваемый каким-либо предшествующим невычеркнутым кубом. Невычеркнутые кубы образуют множество $\mathcal{H} \subset \Lambda$. Ввиду соотношения $I \searrow I$ получаем, что для любого I_k найдётся $H \in \mathcal{H}$, $H \searrow I_k$. Поэтому

$$\sum_{I \in \lambda} l_I^{d\gamma} \leqslant \sum_{I \in \Lambda} l_I^{d\gamma} \leqslant \sum_{H \in \mathcal{H}} \sum_{I \in \mathcal{D} \colon 3I \subset 5H} l_I^{d\gamma} \leqslant c_8(d, \gamma) \sum_{H \in \mathcal{H}} l_H^{d\gamma} \leqslant c_8 \varepsilon^{-1} \sum_{H \in \mathcal{H}} \beta_H.$$

Рассмотрим $I \in \mathcal{H}$. Предположим, что

$$\beta_I > 2c_7 \int_{2I} \left(1 + \frac{|x - \mathfrak{c}_I|_\infty}{l_I}\right)^{-N} |F(x)|\, dx. \tag{91}$$

Зададим куб $I' \in \mathcal{D}$ условиями $I \subset I'$ и $l_{I'} = 2l_I$. При $x \in \mathbb{R}^d \setminus (2I)$ имеем

$$1 + \frac{|x - \mathfrak{c}_{I'}|_\infty}{l_{I'}} \leqslant 1 + \frac{|x - \mathfrak{c}_I|_\infty + \frac{1}{2} l_I}{2l_I} \leqslant \frac{7}{8} + \frac{3}{8} + \frac{|x - \mathfrak{c}_I|_\infty}{2l_I} \leqslant \frac{7}{8}\left(1 + \frac{|x - \mathfrak{c}_I|_\infty}{l_I}\right),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon l_{I'}^{d\gamma} = 2^{d\gamma} \varepsilon l_I^{d\gamma} \leqslant 2^{d\gamma} \beta_I \leqslant 2^{d\gamma+1} c_7 \int_{\mathbb{R}^d \setminus (2I)} \left(1 + \frac{|x - \mathfrak{c}_I|_\infty}{l_I}\right)^{-N} |F(x)|\, dx \\ \leqslant 2^{d\gamma+1} \left(\frac{7}{8}\right)^N \beta_{I'}. \end{aligned}$$

Далее фиксируем настолько большое N, что $2^{d\gamma+1}\left(\frac{7}{8}\right)^N \leqslant 1$. Тогда $I' \in \Lambda$. Однако $I' \searrow I \in \mathcal{H}$, так что $I' \notin \mathcal{H}$. Поэтому существует $H \in \mathcal{H}$, $H \searrow I'$. Если $l_H = l_{I'}$, то $H \odot I'$ и $5H \supset 3I' \supset 5I$. Если же $l_H > l_{I'}$, то тривиальным образом $5H \supset 5I' \supset 5I$. Итак, $H \in \mathcal{H}$, $l_H > l_I$ и $H \searrow I$, что противоречит условию $I \in \mathcal{H}$. Значит, (91) нарушается при $I \in \mathcal{H}$.

Из (90) следует, что кубы $2H$ $(H \in \mathcal{H})$ попарно не пересекаются. Отсюда

$$\sum_{I\in\lambda} l_I^{d\gamma} \leqslant c_8\varepsilon^{-1} \sum_{H\in\mathcal{H}} \beta_H \leqslant 2c_7c_8\varepsilon^{-1} \sum_{H\in\mathcal{H}} \int_{2H} \left(1 + \frac{|x-\mathfrak{c}_H|_\infty}{l_H}\right)^{-N} |F(x)|\,dx$$
$$\leqslant 2c_7c_8\varepsilon^{-1}\|F\|_{L^1} = 2c_7c_8\varepsilon^{-1}\|s\|_{\mathcal{X}}.$$

Тем самым оценка (89) и вложения $\dot{B}^\nu_{q,q}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{Y} \subset \dot{B}^\nu_{q,q}(\mathbb{R}^d)$ обоснованы.

Итак, доказана следующая

Теорема 10. *Для* $0 < \mu < \infty$, $1 < p \leqslant \infty$, $0 < \theta < 1$ *и параметров* (86) *имеем*

$$\left(L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{D}}, \dot{B}^\mu_{p,p}(\mathbb{R}^d)\right)_{\theta,q} = \dot{B}^\nu_{q,q}(\mathbb{R}^d)$$

с эквивалентностью норм.

Отсюда при $\mu = 1$, $p = \infty$ и $\theta = 1/2$ получаем (84).

Установим (83). Пусть функция $\omega \in L^1(\mathbb{R}^d)$ непрерывна и $\|\omega\|_{\Lambda_*} < \infty$. Ввиду [30, теорема 5.2.3/2] имеем $\|\omega^{\textcircled{D}}\|_{\dot{B}^1_{\infty,\infty}} \leqslant c(\varphi)\|\omega\|_{\Lambda_*}$. Поэтому

$$|\omega^{\textcircled{D}}|^2_{\dot{B}^{1/2}_{2,2}} \leqslant c'(\varphi)\|\omega^{\textcircled{D}}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)^{\textcircled{D}}}\|\omega^{\textcircled{D}}\|_{\dot{B}^1_{\infty,\infty}} \leqslant cc'\|\omega\|_{\Lambda_*}\|\omega\|_{L^1}$$

на основе (84) и теоремы 1.3.3(g) в [29]. Обсуждение пространства $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ в разделе 5.2 показывает, что $\omega^{\textcircled{D}} = F^{\textcircled{D}}$ для некоторого $F \in b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$, так что разность $\gamma = \omega - F$ является многочленом. С учетом (81)

$$\operatorname{osc}^0_1 \gamma(B_R) \leqslant |B_R|^{-1}\|\omega\|_{L^1} + \operatorname{osc}^0_2 F(B_R) \leqslant \text{const}, \quad R \geqslant 1,$$

откуда $\gamma \in \mathbb{C}$ и, значит, $\omega \in b_2^{1/2}(\mathbb{R}^d)$. Теперь (82) доказывает (83).

Замечание. Из (78), лемм 15 и 16 и аналога рассуждений предыдущего абзаца легко вывести хорошо известные соотношения

$$\left(\dot{B}^0_{2,2}(\mathbb{R}^d), \dot{B}^1_{2,2}(\mathbb{R}^d)\right)_{1/2,2} = \dot{B}^{1/2}_{2,2}(\mathbb{R}^d),$$
$$\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}} \leqslant c(d)\|\omega\|_{L^2}\|\nabla\omega\|_{L^2}.$$

Второе из них подразумевалось во введении, п. 3c. Вообще, в связи с мультипликативными неравенствами сошлемся на работу [54].

Список литературы

[1] И.В. Андрианов, В.В. Данишевский, А.О. Иванков, *Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин*, Приднепр. гос. акад. строительства и архитектуры, Днепропетровск, 2010.

[2] В.И. Арнольд, *Моды и квазимоды*, Функц. анализ и его прил., **6** (1972), 12–20. Zbl 0251.70012

[3] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, Москва, 1980.

[4] М.Ш. Бирман, *Возмущения непрерывного спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий*, Вестник Ленингр. ун-та. Сер. мат. мех. астр., **17** (1962), 22–55. MR0138874

[5] В.И. Буренков, П.Д. Ламберти, М. Ланца де Кристофорис, *Спектральная устойчивость неотрицательных самосопряженных операторов*, Совр. мат. Фунд. напр., **15** (2006), 76–111. MR2336430

[6] С.Е. Варшавский, *Конформное отображение бесконечных полос*, “Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей”, ИИЛ, Москва, **2** (1958), 67–116.

[7] Д. Гилбарг, М. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, Москва, 1989. MR1063848

[8] Г.М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1966. MR0219714

[9] Л.В. Канторович, *О конформном отображении*, Мат. сборник, **40** (1933), 294–325. Zbl 0008.07402

[10] Л.В. Канторович, В.И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1950. Zbl 0040.21503

[11] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, Москва, 1972. MR0353020

[12] Б.С. Кашин, *Замечания об оценке функций Лебега ортонормированных систем*, Мат. сборник, **106** (1978), 380–385. Zbl 0417.42014

[13] М.В. Келдыш, *О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле*, УМН, **8** (1941), 171–231. Zbl 0179.43901

[14] В.И. Коляда, *Неравенства типа Гальярдо-Ниренберга и оценки модулей непрерывности*, УМН, **60** (2005), 139–156. MR2215758

[15] С.Г. Крейн, *Поведение решений эллиптических задач при вариации области*, Studia Math., **31** (1968), 411–424. MR0235276

[16] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва, 1964. MR0180738

[17] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики, т. 1*, ОНТИ, Москва-Ленинград, 1933.

[18] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики, т. 2*, ГИТТЛ, Москва, 1945.

[19] М. Лаврентьев, *О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй*, Мат. сборник, **4** (1938), 391–458. Zbl 0022.36203

[20] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.

[21] Е.М. Ландис, *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов*, Наука, Москва, 1971. MR0320507

[22] В.П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, Москва, 1976. MR0481380

[23] С.Р. Насыров, *Вариации емкостей Робена и их приложения*, Сиб. мат. журнал, **49** (2008), 1128–1146. MR2469059

[24] А.И. Парфенов, *Критерии распрямляемости липшицевой поверхности по Лизоркину-Трибелю. I*, Мат. труды, **12** (2009), 144–204. MR2569651

[25] А.И. Парфенов, *Критерии распрямляемости липшицевой поверхности по Лизоркину-Трибелю. III*, Мат. труды, **13** (2010), 139–178. MR2789959

[26] А.И. Парфенов, *Весовая априорная оценка в распрямляемых областях локального типа Ляпунова-Дини*, Сиб. электрон. матем. изв., **9** (2012), 65–150. MR2954700

[27] Г.В. Сирык, *К вопросу о вариационных принципах М.А. Лаврентьева*, “Исследования по теории функций комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред”, Наукова думка, Киев (1986), 128–146. MR0873274

[28] С.Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1950. MR0052039

[29] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, Москва, 1980. MR2284819

[30] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств*, Мир, Москва, 1986. MR0839650

[31] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1*, Мир, Москва, 1986. MR0862624

[32] М. Шиффер, Д.К. Спенсер, *Функционалы на конечных римановых поверхностях*, ИИЛ, Москва, 1957.

[33] Л.К. Эванс, Р.Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций*, Научная книга (ИДМИ), Новосибирск, 2002.

[34] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, Москва, 1969. Zbl 0189.12103

[35] C. Amrouche, Š. Nečasová, J. Sokołowski, *Shape sensitivity analysis of the Dirichlet Laplacian in a half-space*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., **52** (2004), 365–380. MR2128273
[36] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, R. Danchin, *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin / Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **343** (2011). MR2768550
[37] R. Bellman, *Perturbation Techniques in Mathematics, Physics, and Engineering*, Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1966.
[38] M. van den Berg, *On Rayleigh's formula for the first Dirichlet eigenvalue of a radial perturbation of a ball*, J. Geom. Anal. (2012), 14p. DOI 10.1007/s12220-012-9293-5.
[39] O.P. Bruno, F. Reitich, *High-order boundary perturbation methods*, "Mathematical Modeling in Optical Science", SIAM, Philadelphia / Frontiers Appl. Math., **22** (2001), 71–109. MR1831330
[40] D. Bucur, *Regularity of optimal convex shapes*, J. Convex Anal., **10** (2003), 501–516. MR2044433
[41] V.I. Burenkov, P.D. Lamberti, *Sharp spectral stability estimates via the Lebesgue measure of domains for higher order elliptic operators*, Revista Mat. Complut., **25** (2012), 435–457. MR2931420
[42] S.N. Chandler-Wilde, R. Potthast, *The domain derivative in rough-surface scattering and rigorous estimates for first-order perturbation theory*, Proc. R. Soc. Lond. A, **458** (2002), 2967–3001. MR1987522
[43] A. Cohen, *Ondelettes, espaces d'interpolation et applications*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, Éc. Polytech., Cent. Math., Palaiseau 1999-2000, Exp. No. I (2000), 12p. MR1812764
[44] A. Cohen, W. Dahmen, I. Daubechies, R. DeVore, *Harmonic analysis of the space BV*, Rev. Mat. Iberoamericana, **19** (2003), 235–263. MR1993422
[45] M. Dambrine, D. Kateb, *A remark on precomposition on* $\mathrm{H}^{1/2}(S^1)$ *and ε-identifiability of disks in tomography*, J. Math. Anal. Appl., **337** (2008), 594–616. MR2356096
[46] M.C. Delfour, J.-P. Zolésio, *Shapes and Geometries. Analysis, Differential Calculus, and Optimization*, SIAM, Philadelphia / Adv. Design Control, **4** (2001). MR1855817
[47] K. Eppler, H. Harbrecht, R. Schneider, *On convergence in elliptic shape optimization*, SIAM J. Control Optim., **46** (2007), 61–83. MR2299620
[48] M. Frazier, B. Jawerth, *Decompositions of Besov spaces*, Indiana Univ. Math. J., **34** (1985), 777–799. MR0808825
[49] M. Frazier, B. Jawerth, G. Weiss, *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*, AMS, Providence / CBMS Regional Conf. Ser. Math., **79** (1991). MR1107300
[50] J.B. Garnett, D.E. Marshall, *Harmonic Measure*, Cambridge Univ. Press, Cambridge / New Math. Monogr., **2** (2005). MR2150803
[51] P. Grinfeld, *Hadamard's formula inside and out*, J. Optim. Theory Appl., **146** (2010), 654–690. MR2720607
[52] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Publishing Inc., Boston-London-Melbourne / Monogr. and Stud. in Math., **24** (1985). MR0775683
[53] J. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations. T. I*, A. Hermann et Fils, Paris, 1910. JFM 41.0432.02
[54] H. Hajaiej, L. Molinet, T. Ozawa, B. Wang, *Necessary and sufficient conditions for the fractional Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to Navier-Stokes and generalized Boson equations*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **26** (2011), 159–175. MR2883850
[55] L.I. Hedberg, Yu. Netrusov, *An Axiomatic Approach to Function Spaces, Spectral Synthesis, and Luzin Approximation*, Mem. Amer. Math. Soc., **188** (2007). MR2326315
[56] A. Henrot, M. Pierre, *Variation et optimisation de formes. Une analyse géométrique*, Springer, Berlin / Mathématiques & Applications, **48** (2005). MR2512810
[57] G. Julia, *Sur une équation aux dérivées fonctionnelles liée à la représentation conforme*, Ann. Sci. de l'É.N.S. 3$^{\mathrm{e}}$ série, **39** (1922), 1–28. MR1509240
[58] B. Kawohl, O. Pironneau, L. Tartar, J.-P. Zolésio, *Optimal Shape Design*, A. Cellina (ed.), Lectures given at the joint CIM/CIME summer school, Tróia, Portugal, June 1–6, 1998, Springer, Berlin / Lect. Notes Math., **1740** (2000). MR1804683
[59] V. Kozlov, *Domain dependence of eigenvalues of elliptic type operators*, препринт, 2012.
[60] V. Kozlov, V. Maz'ya, *Asymptotic formula for solutions to elliptic equations near the Lipschitz boundary*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **184** (2005), 185–213. MR2149092

[61] M. Lanza de Cristoforis, *A functional decomposition theorem for the conformal representation*, J. Math. Soc. Japan, **49** (1997), 759–780. Zbl 0970.47047

[62] A. Lemenant, E. Milakis, *Quantitative stability for the first Dirichlet eigenvalue in Reifenberg flat domains in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl., **364** (2010), 522–533. MR2576203

[63] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Paris; Academia, Prague, 1967. MR0227584

[64] J. Peetre, *New Thoughts on Besov Spaces*, Duke University, Durham, 1976. MR0461123

[65] G. Savaré, G. Schimperna, *Domain perturbations and estimates for the solutions of second order elliptic equations*, J. Math. Pures Appl., **81** (2002), 1071–1112. MR1949174

[66] M. Schiffer, *Variation of domain functionals*, Bull. Amer. Math. Soc., **60** (1954), 303–328. MR0064149

[67] S.E. Warschawski, *On conformal mapping of nearly circular regions*, Proc. Amer. Math. Soc., **1** (1950), 562–574. MR0036837

[68] H. Yoshikawa, *On the conformal mapping of nearly circular domains*, J. Math. Soc. Japan, **12** (1960), 174–186. MR0124474

Антон Игоревич Парфёнов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: parfenov@math.nsc.ru