S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 378–392 (2013) УДК 517.95
MSC 35Q93

О ЗАДАЧЕ МАСКИРОВКИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

А.В. ЛОБАНОВ, Р.В. ЗУБРЕВ

Abstract. Control problems for 2-D Helmholtz equation in a bounded domain with mixed boundary conditions are considered. The boundary impedance entering into impedance boundary condition for the field plays the role of control. The solvability of both the direct problem and the control problem is proved. The uniqueness and stability of optimal solutions with respect to small perturbations of both the cost functional and a given function are established.

Keywords: Helmholtz equation, mixed boundary value problem, impedance, control problem, boundary control, solvability, stability estimates

1. Введение. Формулировка краевой задачи

Пусть Ω обозначает ограниченную область в плоскости $\mathbb{R}^2$ с липшицевой границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_I. Рассмотрим в области Ω двумерное уравнение Гельмгольца

$$\triangle u + k^2 u = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

описывающее поведение акустического или электромагнитного поля в области Ω при смешанных граничных условиях

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_D, \;\; \frac{\partial u}{\partial \nu} + ik\lambda u = g \text{ на } \Gamma_I. \tag{2}$$

Lobanov, A.V., Zubrev, R.V., One the masking problem for the two-dimensional Helmholtz equation.

Работа поддержана РФФИ (грант № 12-01-31288 мол_а), проектом № 12-1-П17-03 ДВО РАН, тематика которого соответствует Программе 17 фундаментальных исследований Президиума РАН и грантом Министерства образования и науки (соглашение № 14.A18.21.0353).

Поступила 1 февраля 2013 г., опубликована 14 апреля 2013 г.

Здесь λ – поверхностный импеданс на части Γ_I границы Γ, k – положительное волновое число, g – заданная на Γ_I функция, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ – производная по внешней нормали к границе Γ области Ω. Хорошо известно, что задача (1), (2) при определенных предположениях описывает поведение волнового поля в бесконечном цилиндре с поперечным сечением Ω. Напомним, что в акустике граничное условие на Γ_I означает, что нормальная составляющая скорости пропорциональна акустическому давлению [1]. В электромагнетизме граничные условия (2) физически соответствуют ситуации, когда часть Γ_I идеально проводящей границы Γ покрывается тонким слоем сильно поглощающего материала [2], например, для целей маскировки рассматриваемого обьекта.

Прямая задача (1), (2) была сформулирована и изучена в [3], где доказана ее однозначная разрешимость в случае, когда $\lambda = \mathrm{const} > 0$. Ряд работ посвящен исследованию коэффициентных обратных задач определения поверхностного импеданса λ (или нахождения поверхностной проводимости) по измерениям поля в дальней зоне (см., например, [4, 5, 6, 7] и ссылки там). В [8, 9] были сформулированы и изучены с использованием методов нелинейной оптимизации задачи граничного управления для трехмерной системы Максвелла, рассматриваемой в ограниченной области при импедансном граничном условии для электрического поля. Мы также упомянем статьи [10, 11, 12], посвящённые глобально сходящимся численным методам для многомерных коэффициентных обратных задач для волнового уравнения.

Наша основная цель – доказать разрешимость задачи управления для модели (1), (2) и установить достаточные условия на исходные данные, которые обеспечивают единственность и устойчивость решений относительно малых возмущений функционала качества и заданной граничной функции g. Сначала мы покажем, что при соответствующих предположениях слабое решение прямой задачи (1), (2) существует, единственно и зависит непрерывно от исходных данных (т.е. от граничной функции g). Затем мы докажем существование решения рассматриваемой задачи управления и выведем систему оптимальности, описывающую необходимые условия экстремума. На основе ее анализа мы докажем единственность решений для конкретных задач управления и выведем оценки устойчивости оптимальных решений.

2. Разрешимость краевой задачи

В этом разделе мы докажем кратко корректную разрешимость задачи (1), (2). Для краткости будем ссылаться на нее как на задачу 1. Будем использовать обычное пространство Соболева $H^1(\Omega)$, состоящее из комплекснозначных или вещественнозначных скалярных функций, заданных в области Ω, и пространства следов $H^{1/2}(\partial\Omega)$ и $H^{1/2}(\Gamma_0)$, где Γ_0 – часть $\partial\Omega$. Наряду с $H^{1/2}(\Gamma_0)$, будем использовать его подпространство $H_0^{1/2}(\Gamma_0)$, состоящее из тех и только тех функций $v \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, для которых продолжение $\tilde{v}$ нулем на всю границу $\partial\Omega$ принадлежит $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Обозначим через $H^{-1/2}(\Gamma_0) = H_0^{1/2}(\Gamma_0)^*$ сопряженное пространство к $H_0^{1/2}(\Gamma_0)$ с $L^2(\Gamma_0)$ в качестве поворотного пространства. Через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Gamma_0}$ обозначим отношение двойственности между $H^{1/2}(\Gamma_0)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_0)$. Нормы в пространствах $H^1(\Omega)$ и $H^{1/2}(\Gamma_0)$ обозначаются через $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ и $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_0}$. Скалярные произведения и нормы в $L^2(Q)$ обозначаются через $(\cdot,\cdot)_Q$ и $\|\cdot\|_Q$. Если $Q = \Omega$, то мы полагаем $\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)_\Omega = (\cdot,\cdot)$. Скалярные произведения и нормы в $L^2(\Gamma_0)$ обозначим через $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_0}$ и $\|\cdot\|_{\Gamma_0}$. В частности, полагаем

$$(3)\quad (u,v)=\int_\Omega u(x)\overline{v}(x)dx,\ (u,v)_Q=\int_Q u(x)\overline{v}(x)dx,\ (u,v)_{\Gamma_I}=\int_{\Gamma_I} u(x)\overline{v}(x)d\sigma.$$

Здесь и ниже $\overline{v}$ обозначает комплексно-сопряженную функцию к v.

Определим следующие подпространства в $H^1(\Omega)$: $X=\{v\in H^1(\Omega):v|_{\Gamma_D}=0\}$ и $H^1(\Delta,\Omega)=\{v:v\in X,\ \Delta v\in L^2(\Omega)\}$, наделенные нормами

$$||v||_X:=\|v\|_{1,\Omega},\ \|v\|^2_{H^1(\Delta,\Omega)}=\|v\|^2_{1,\Omega}+\|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Отметим, что для пространства X норма $\|v\|_X$ эквивалентна полунорме $\|\nabla v\|$ в силу неравенства Фридрихса-Пуанкаré $\|\nabla v\|^2\geq\delta_0\|v\|^2_X$ для всех $v\in X$, где $\delta_0=\mathrm{const}>0$. Известно (см. [13, с. 34]), что для любой функции $u\in H^1(\Delta,\Omega)$ существует первый след $\gamma_1 u=\partial u/\partial n|_{\partial\Omega}\in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ и справедлива следующая формула Грина:

$$(4)\qquad (\Delta u,v)_\Omega=-(\nabla u,\nabla v)+\langle\partial u/\partial n,v\rangle_{\partial\Omega}\ \ \forall v\in H^1(\Omega).$$

Пусть $g\in L^2(\Gamma_I)$. Умножим уравнение (1) на функцию $\overline{v}$, где $v\in X$, проинтегрируем по Ω и применим формулу Грина (4). Получим

$$(5)\qquad \int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla\overline{v}-k^2u\overline{v})dx=\langle\frac{\partial u}{\partial\nu},v\rangle_{\Gamma_I}\ \forall v\in X.$$

Используя второе граничное условие в (2), имеем

$$(6)\qquad \langle\frac{\partial u}{\partial\nu},v\rangle_{\Gamma_I}=-ik\langle\lambda u,v\rangle_{\Gamma_I}+(g,v)_{\Gamma_I}.$$

Учитывая (6) и обозначение (3), перепишем (5) в виде

$$(7)\qquad a_\lambda(u,v)=\langle f,v\rangle\ \ \forall v\in X,\quad \langle f,v\rangle\equiv(g,v)_{\Gamma_I}.$$

Здесь $a_\lambda:X\times X\to\mathbb{C}$ – полуторалинейная форма, определяемая формулами

$$(8)\qquad a_\lambda(u,v)=a_0(u,v)+ik(\lambda u,v)_{\Gamma_I},\ a_0(u,v)=(\nabla u,\nabla v)-k^2(u,v).$$

Назовем решение $u\in X$ задачи (7) слабым решением задачи 1.

Докажем однозначную разрешимость задачи (7). Сначала мы отметим, что единственность решения (7) может быть доказана как в [3]. Для того, чтобы доказать разрешимость, мы изучим некоторые свойства полуторалинейной формы a_λ и правой части $\langle f,v\rangle$ в (7). Используя теоремы вложения, теорему о следах и неравенство Гельдера, имеем

$$(9)\qquad |\langle f,v\rangle|=|(g,v)_{\Gamma_I}|\leq C_1\|g\|_{\Gamma_I}\|v\|_{\Gamma_I}\ \forall v\in X,$$

$$(10)\qquad |k(\lambda u,v)_{\Gamma_I}|\leq C_2\|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma_I)}\|u\|_X\|v\|_X\ \forall u\in X,\ v\in X,$$

$$(11)\qquad |a_0(u,v)|\leq(1+k^2)\|u\|_X\|v\|_X\leq C_3\|u\|_X\|v\|_X\ \forall u\in X,\ \forall v\in X.$$

Здесь и ниже C_1, C_2, C_3,... – некоторые константы, зависящие от Ω и, быть может, от k. Из (9)–(11) следует, что формы a_λ и f непрерывны на X и

$$\|a_\lambda\|_{L(X,X^*)}\leq C(1+\|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma_I)}),\ \ \|f\|_{X^*}\leq C\|g\|_{\Gamma_I},C=\max(C_1,C_2,C_3),$$

где X^* – сопряженное пространство к X.

Отметим, что полуторалинейная форма a_λ определяет линейный оператор $A_\lambda:X\to X^*$ формулой

$$(12)\qquad \langle A_\lambda u,v\rangle=a_\lambda(u,v)\ \ \forall u\in X,\ v\in X,$$

а вариационная задача (7) для $u \in X$ эквивалентна операторному уравнению

$$A_\lambda u = f, \; f \in X^*. \tag{13}$$

В дополнение к оператору A_λ в (12) введем линейные операторы A'_λ, $A'' : X \to X^*$ формулами

$$\langle A'_\lambda u, v\rangle = a'_\lambda(u,v) = (\nabla u, \nabla v) + ik(\lambda u, v)_{\Gamma_I}, \; \langle A'' u, v\rangle := -k^2(u,v). \tag{14}$$

Используя свойства формы a_λ и неравенство Фридрикса-Пуанкаре́, имеем

$$|a'_\lambda(u,v)| \le C_4(1 + \|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma_I)})\|u\|_X\|v\|_X, \; \mathrm{Re}a'_\lambda(u,u) \ge \delta_0\|u\|^2_X \; \forall (u,v) \in X^2. \tag{15}$$

Теорема 1. *Пусть $\lambda \in L^\infty_{\lambda_0}(\Gamma_I)$, $\lambda_0 > 0$. Тогда:*

(1) оператор $A_\lambda : X \to X^*$, определенный в (12), – изоморфизм;

(2) для любой функции $g \in L^2(\Gamma_I)$ задача (7) имеет единственное решение $u \in X$, для которого справедлива оценка

$$\|u\|_X \le C_\lambda \|g\|_{\Gamma_I}, \tag{16}$$

где константа C_λ зависит от Ω, k^2 и λ.

Доказательство. Из (15) следует, что для любой функции $\lambda \in L^\infty_{\lambda_0}(\Gamma_I)$ форма a'_λ непрерывна и коэрцитивна на X с константой δ_0. Тогда из теоремы Лакса-Мильграма следует, что оператор $A'_\lambda : X \to X^*$ – изоморфизм. Ясно также, что оператор $A'' : X \to X^*$, определенный в (14), компактный (благодаря компактности вложения пространства X в $L^2(\Omega)$). Это означает, что оператор $A_\lambda = (A'_\lambda + A'') : X \to X^*$ фредгольмов. Из теоремы единственности для задачи (7) следует, что оператор A_λ обратим и, следовательно, A_λ сюрьективен. Из теоремы Банаха об обратном отображении тогда следует, что для каждого элемента $\lambda \in L^\infty_{\lambda_0}(\Gamma_I)$, $\lambda_0 > 0$ оператор $A_\lambda : X \to X^*$ – изоморфизм. Это означает, что решение u задачи (7) существует и единственно. Положим $C_\lambda = \|A^{-1}_\lambda\|$, где $A^{-1}_\lambda : X^* \to X$ – обратный к A_λ оператор. Тогда из (9) следует, что решение u задачи (7) удовлетворяет оценке (16) при $C_\lambda = \tilde{C}_\lambda C$. $\square$

Ниже, наряду с уравнением (13), будем рассматривать уравнение

$$A^*_\lambda p = \hat{f}, \quad \hat{f} \in X^*, \tag{17}$$

соответствующее оператору $A^*_\lambda : X \to X^*$, который сопряжен к оператору $A_\lambda : X \to X^*$. Он действует по формуле $\langle A^*_\lambda p, v\rangle = \overline{a_\lambda(v,p)} = \overline{\langle A_\lambda v, p\rangle}$ для всех $p \in X$, $v \in X$. Следующий результат вытекает из свойств сопряженных операторов и теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть $\lambda \in L^\infty_{\lambda_0}(\Gamma_I)$, $\lambda_0 > 0$. Тогда для любого элемента $\hat{f} \in X^*$ существует единственное решение $p \in X$ уравнения (17) и справедлива оценка $\|p\|_X \le \tilde{C}_\lambda \|\hat{f}\|_{X^*}$.*

Замечание 1. Ниже мы будем рассматривать случай, когда функция λ может изменяться в некотором ограниченном множестве $K \subset L^\infty_{\lambda_0}(\Gamma_I)$. Рассуждая, как в [8], можно доказать, что в этом случае для решений задач (7) и (17) справедливы следующие более грубые оценки:

$$\|u\|_X \le C_0\|g\|_{\Gamma_I}, \;\; \|p\|_X \le \tilde{C}_0\|\hat{f}\|_{X^*}, \; \tilde{C}_0 = \sup_{\lambda\in K} \tilde{C}_\lambda, C_0 = \tilde{C}_0 C. \tag{18}$$

Здесь константы C_0 и $\tilde{C}_0$ не зависят от конкретного элемента $\lambda \in K$, но зависят от самого множества K.

3. Формулировка и разрешимость задачи управления

Рассматриваемая в этой статье задача управления состоит в минимизации определенного функционала качества, зависящего от состояния (полного поля u) и неизвестной функции (управления), удовлетворяющих уравнениям состояния (1), (2). В качестве функционала качества мы выберем один из следующих:

$$I_1(u) = \int_Q |u - u_d|^2 dx, \quad I_2(u) = \int_{\Gamma_r} |u - u_d|^2 d\sigma. \tag{19}$$

Здесь функция $u_d \in L^2(Q)$ (или $u_d \in L^2(\Gamma_r)$) моделирует акустическое или электромагнитное поле, измеренное в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$ или на границе Γ_r диска $B_r \subset \Omega$ радиуса r. Мы отметим, что функционалы I_1 и I_2 используются для решения обратных задач для уравнения Гельмгольца с использованием методов нелинейной оптимизации [8]. В качестве управления мы выберем поверхностный импеданс λ. Предполагая, что $\lambda \in H^s(\Gamma_I)$, введем следующий функционал качества:

$$J(u,\lambda) = \frac{\alpha_0}{2} I_j(u) + \frac{\alpha_1}{2} \|\lambda\|^2_{H^s(\Gamma_I)}, \quad j = 1, 2. \tag{20}$$

Здесь α_0 и α_1 – неотрицательные параметры, которые служат для регулирования относительной важности каждого из слагаемых в (20). Другая цель введения α_1 заключается в обеспечении единственности и устойчивости решений рассматриваемых задач управления (см. ниже).

Будем считать, что управление λ изменяется в некотором множестве K. Более точно, предположим, что выполняются следующие условия:

(j) $\Gamma_I \in C^{1,1}$; $\alpha_0 > 0$; $K \subset H^s_{\lambda_0}(\Gamma_I) \equiv \{\lambda \in H^s(\Gamma_I) : \lambda(x) \geq \lambda_0\}$ – непустое выпуклое замкнутое множество, где $s > 1/2$, $\lambda_0 > 0$.

Отметим, что имеет место непрерывное компактное вложение $H^s(\Gamma_I) \subset L^\infty(\Gamma_I)$ при $s > 1/2$ (если $\Gamma_I \in C^{1,1}$), так что с константой C_s, зависящей от s и Ω, имеет место следующая оценка:

$$\|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma_I)} \leq C_s \|\lambda\|_{s,\Gamma_I} \ \ \forall \lambda \in H^s(\Gamma_I), \ \|\lambda\|_{s,\Gamma_I} \equiv \|\lambda\|_{H^s(\Gamma_I)}. \tag{21}$$

Определим оператор $H : X \times K \times L^2(\Gamma_I) \to X^*$ формулой

$$\langle H(u,\lambda,g), v\rangle = a_0(u,v) + ik(\lambda u, v)_{\Gamma_I} - \langle f, v\rangle$$

и перепишем слабую формулировку (7) задачи 1 в форме операторного уравнения $H(u,\lambda,g) = 0$. Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$J(u,\lambda) = \frac{\alpha_0}{2} I(u) + \frac{\alpha_1}{2} \|\lambda\|^2_{s,\Gamma_I} \to \inf, \ \ H(u,\lambda,g) = 0, \ (u,\lambda) \in X \times K. \tag{22}$$

Здесь $I : X \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывный снизу функционал качества. Обозначим через $Z_{ad} = \{(u,\lambda) \in X \times K : H(u,\lambda,g) = 0, J(u,\lambda) < \infty\}$ множество допустимых пар для задачи (22).

Теорема 2. *Пусть при выполнении условий (j) $\alpha_1 \geq 0$ и K – ограниченное множество либо $\alpha_1 > 0$ и функционал I ограничен снизу. Пусть далее $I : X \to \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу функционал качества и Z_{ad} – не пустое множество. Тогда задача (22) имеет по крайней мере одно решение $(u,\lambda) \in X \times K$.*

Доказательство. Пусть $(u_m, \lambda_m) \in Z_{ad}$ – минимизирующая последовательность, для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(u_m, \lambda_m) = \inf_{(u,\lambda)\in Z_{ad}} J(u, \lambda) = J^*, \;\; H(u_m, \lambda_m, g) = 0. \tag{23}$$

По определению Z_{ad} пара (u_m, λ_m) удовлетворяет тождеству

$$a_0(u_m, v) + ik(\lambda_m u_m, v)_{\Gamma_I} = \langle f, v\rangle \; \forall v \in X, \; m \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Из первого соотношения в (23), условия (j) и теоремы 1 вытекают следующие оценки: $\|\lambda_m\|_{s,\Gamma_I} \le c_1$, $\|u_m\|_X \le c_2 \;\; \forall m \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$. Здесь c_1 и c_2 – некоторые константы, не зависящие от m. Из этих оценок следует, что существуют слабые пределы $\lambda^* \in K \subset H^s_{\lambda_0}(\Gamma_I)$, $u^* \in X$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\lambda_m\}$, $\{u_m\}$. Используя этот факт и компактность вложения $H^s(\Gamma_I) \subset L^\infty(\Gamma_I)$ при $s{>}1$, заключаем (переходя, если необходимо, к подпоследовательностям), что $u_m \rightharpoonup u^* \in X$ в $H^1(\Omega)$ и

$$u_m|_{\Gamma_I} \to u^*|_{\Gamma_I} \text{ сильно } \text{ в } L^2(\Gamma_I), \; \lambda_m \to \lambda^* \in H^s(\Gamma_I) \text{ сильно в } L^\infty(\Gamma_I). \tag{25}$$

Покажем, что для пары (u^*, λ^*) справедливо тождество:

$$a_0(u^*, v) + ik(\lambda^* u^*, v)_{\Gamma_I} = \langle f, v\rangle \; \forall v \in X. \tag{26}$$

Перейдем к пределу при $m \to \infty$ в (24). Линейный член $a_0(u_m, v)$ в (24) переходит в член $a_0(u^*, v)$ в (26), тогда как для разности $i(\lambda_m u_m, v)_{\Gamma_I} - i(\lambda^* u^*, v)_{\Gamma_I}$ имеем

$$|i(\lambda_m u_m, v)_{\Gamma_I} - i(\lambda^* u^*, v)_{\Gamma_I}| \le |(u_m - u^*, \lambda^* v)_{\Gamma_I}| + |((\lambda_m - \lambda^*)u_m, v)_{\Gamma_I}|.$$

Поскольку $\lambda^* v|_{\Gamma_I} \in L^2(\Gamma_I)$, из (25) следует, что $|(u_m - u^*, \lambda^* v)_{\Gamma_I}| \to 0$ для всех $v \in X$ при $m \to \infty$. Кроме того, используя (25) и неравенство Гёльдера, имеем

$$|(\lambda_m - \lambda^*)u_m, v)_{\Gamma_I}| \le \|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Gamma_I)} \|u_m\|_{\Gamma_I} \|v\|_{\Gamma_I} \to 0 \; \forall v \in X \text{ при } m \to \infty.$$

Таким образом, переходя в (24) к пределу при $m{\to}\infty$, приходим к (26). Это означает, что $H(u^*, \lambda^*, g){=}0$. Поскольку J слабо полунепрерывен снизу на $X \times K$, то получаем, что $J(u^*, \lambda^*) = J^*$. Это доказывает теорему.

Отметим, что утверждение теоремы 2 справедливо для обоих функционалов I_1 и I_2, поскольку они неотрицательны и слабо полунепрерывны снизу. Кроме того, Z_{ad} не пусто для каждого из них в силу условия (j) и теоремы 1. Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 3. *Пусть при выполнении условий (j), $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0$ или $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \ge 0$ и K – ограниченное множество. Тогда задача управления (22) имеет по крайней мере одно решение $(u, \lambda) \in X \times K$ для $I = I_k$, $k = 1, 2$.*

4. Вывод системы оптимальности

Следующий этап изучения задачи управления (22) состоит в установлении единственности и устойчивости решений задачи (22). Мы используем подход, разработанный в [13]. Он основан на выводе и анализе системы оптимальности, которая описывает необходимые условия экстремума первого порядка для задачи (22). Однако, так как задача (22) была сформулирована для комплекснозначных функций, то предварительно необходимо выполнить ее декомплексификацию. С этой целью мы сведем ее к эквивалентной задаче в классе вещественных функций. Обозначим через u_l, v_l, g_l и f_l, $l = 1, 2$, вещественную и мнимую части комплекснозначных функций u, v, g и f, полагая

$$u = u_1 + iu_2,\ v = v_1 + iv_2,\ g = g_1 + ig_2,\ f = f_1 + if_2. \tag{27}$$

Наряду с "комплексными" пространствами X, X^* и $L^2(\Gamma_I)$, состоящими из комплекснозначных функций, будем рассматривать ниже их вещественные аналоги X_r, X_r^* и $L_r^2(\Gamma_I)$, состоящие из вещественнозначных функций из соответствующих пространств. Будем считать, что $U = (u_1, u_2) \in X_r^2 = X_r \times X_r$, если и только если $u = u_1 + iu_2 \in X$. Будем считать таким же образом, что $G = (g_1, g_2) \in L_r^2(\Gamma_I)^2$ или $F = (f_1, f_2) \in (X_r^*)^2$ если и только если $g = g_1 + ig_2 \in L^2_{\Gamma_I}$ или $f = f_1 + if_2 \in X^*$. Учитывая, что

$$\langle f, v\rangle = \langle f_1 + if_2, v_1 + iv_2\rangle = \langle f_1, v_1\rangle + \langle f_2, v_2\rangle + i[\langle f_2, v_1\rangle - \langle f_1, v_2\rangle],$$

$$a_0(u, v) = a_0(u_1, v_1) + a_0(u_2, v_2) + i[a_0(u_2, v_1) - a_0(u_1, v_2)],$$

$$i(\lambda u, v)_{\Gamma_I} = (\lambda u_1, v_2)_{\Gamma_I} - (\lambda u_2, v_1)_{\Gamma_I} + i[(\lambda u_1, v_1)_{\Gamma_I} + (\lambda u_2, v_2)_{\Gamma_I}], \tag{28}$$

перепишем задачу (7) в виде

$$a_\lambda(u, v) = a_1^\lambda(u_1, u_2; v_1, v_2) + ia_2^\lambda(u_1, u_2; v_1, v_2) =$$

$$= F_1(v_1, v_2) + iF_2(v_1, v_2)\ \forall (v_1, v_2) \in X^2. \tag{29}$$

Здесь билинейная и линейная формы $a_1^\lambda, a_2^\lambda : X_r^2 \times X_r^2 \to \mathbb{R}$ и $F_1, F_2 : X_r^2 \to \mathbb{R}$ определяются формулами

$$a_1^\lambda(u_1, u_2; v_1, v_2) = a_0(u_1, v_1) + a_0(u_2, v_2) + k(\lambda u_1, v_2)_{\Gamma_I} - k(\lambda u_2, v_1)_{\Gamma_I},$$

$$a_2^\lambda(u_1, u_2; v_1, v_2) = a_0(u_2, v_1) - a_0(u_1, v_2) + k(\lambda u_1, v_1)_{\Gamma_I} + k(\lambda u_2, v_2)_{\Gamma_I}, \tag{30}$$

$$F_1(v_1, v_2) = \langle f_1, v_1\rangle + \langle f_2, v_2\rangle,\ F_2(v_1, v_2) = \langle f_2, v_1\rangle - \langle f_1, v_2\rangle. \tag{31}$$

В силу (29) задача (7) эквивалентна задаче нахождения пары вещественных функций $U = (u_1, u_2) \in X_r^2$ из соотношений

$$a_1^\lambda(u_1, u_2; v_1, v_2) = F_1(v_1, v_2)\ \ \forall (v_1, v_2) \in X_r^2, \tag{32}$$

$$a_2^\lambda(u_1, u_2; v_1, v_2) = F_2(v_1, v_2)\ \ \forall (v_1, v_2) \in X_r^2. \tag{33}$$

Пусть $(u_1, u_2) \in X_r^2$ является решением задачи (32), (33). Полагая $v_2 = 0$ в (32) и $v_2 = 0$, $v_1 = v_2$ в (33), заключаем, что пара (u_1, u_2) удовлетворяет тождествам

$$a_1^\lambda(u_1, u_2; v_1, 0) = a_0(u_1, v_1) - k(\lambda u_2, v_1)_{\Gamma_I} = F_1(v_1, 0) = \langle f_1, v_1\rangle\ \forall v_1 \in X_r, \tag{34}$$

$$a_2^\lambda(u_1, u_2; v_2, 0) = a_0(u_2, v_2) + k(\lambda u_1, v_2)_{\Gamma_I} = F_2(v_2, 0) = \langle f_2, v_2\rangle\ \forall v_2 \in X_r. \tag{35}$$

Предположим теперь, что пара $U = (u_1, u_2) \in X_r^2$ – решение задачи (34), (35). Полагая $v_1 = v_2$ в (34) и $v_2 = v_1$ в (35), будем иметь

$$a_1^\lambda(u_1, u_2; v_2, 0) = a_0(u_1, v_2) - k(\lambda u_2, v_2)_{\Gamma_I} = F_1(v_2, 0)\ \forall v_2 \in X_r, \tag{36}$$

$$a_2^\lambda(u_1, u_2; v_1, 0) = a_0(u_2, v_1) + k(\lambda u_1, v_1)_{\Gamma_I} = F_2(v_1, 0)\ \forall v_1 \in X_r. \tag{37}$$

Складывая сначала (34) и (35), а затем вычитая (36) из (37), заключаем с учетом (30), (31), что пара $U = (u_1, u_2)$ является решением задачи (32), (33), эквивалентной задаче (7). Это означает, что задачи (7) и (34), (35) эквивалентны. Как следствие этого факта, мы получаем следующий результат относительно оператора $A^\lambda = (A_1^\lambda, A_2)$, где оператор $A_l^\lambda : X_r^2 \to X_r^*$ определяется формулой

$$\langle A_l^\lambda U, v_l\rangle = a_l^\lambda(u_1, u_2; v_l, 0)\ \ \forall v_l \in X_r,\ l = 1, 2\ \ (U \equiv (u_1, u_2)). \tag{38}$$

Лемма 1. *Пусть $\lambda \in L^{\infty}_{\lambda_0}(\Gamma_I)$, $\lambda_0 > 0$. Тогда оператор $A^{\lambda} = (A_1^{\lambda}, A_2^{\lambda})$, где A_1^{λ} и A_2^{λ} определены в (38), – изоморфизм пространства X_r^2 на $(X_r^*)^2$.*

Положим $S = (S_1^{\lambda}, S_2^{\lambda})$, где $S_1^{\lambda}, S_2^{\lambda} : X_r^2 \times K \times L^2_r(\Gamma_I)^2 \to X_r^*$ – операторы, определяемые формулами

$$\langle S_1^{\lambda}(U,\lambda,G), v_1\rangle = \langle A_1^{\lambda}U, v_1\rangle - F_1(v_1,0) = a_0(u_1,v_1) - k(\lambda u_2, v_1) - \langle f_1, v_1\rangle,$$

$$(39)\quad \langle S_2^{\lambda}(U,\lambda,G), v_2\rangle = \langle A_2^{\lambda}U, v_2\rangle - F_2(v_2,0) = a_0(u_2,v_2) + k(\lambda u_1, v_2) - \langle f_2, v_2\rangle.$$

Тогда задача (34), (35) может быть переписана в эквивалентной форме $S(U,\lambda,G) = 0$, где $G \equiv (g_1, g_2) \in L^2(\Gamma_I)$. Аналогичным образом задача (22) может быть переписана в следующем виде:

$$(40)\qquad J(U,\lambda) = \frac{\alpha_0}{2}I(U) + \frac{\alpha_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Gamma_I} \to \inf,\ S(U,\lambda,G) = 0,\ (U,\lambda) \in X_r^2 \times K.$$

Выведем необходимые условия оптимальности для задачи (40). Для этой цели мы применим подход, разработанный в [14, 15] для уравнений магнитной гидродинамики. Он основан на экстремальном принципе в гладко-выпуклых экстремальных задачах [16]. Предварительно отметим, что производная Фреше S'_U по U от оператора S в каждой точке $(\hat{U}, \hat{\lambda}, G) \in X_r^2 \times K \times L^2_r(\Gamma_I)^2$ есть линейный непрерывный оператор

$$(41)\qquad S'_U(\hat{U}, \hat{\lambda}, G) = (\hat{A}_1, \hat{A}_2) : X_r^2 \to (X_r^*)^2,$$

где операторы $\hat{A}_1 = A_1^{\hat{\lambda}}$ и $\hat{A}_2 = A_2^{\hat{\lambda}} : X_r^2 \to X_r^*$ определены в (38). Определим множитель Лагранжа $P = (p_1, p_2) \in (X_r^*)^2$ и лагранжиан L формулой

$$(42)\qquad L(U,\lambda,P,G) = J(U,\lambda) + \langle S_1^{\lambda}(U,\lambda,G), p_1\rangle + \langle S_2^{\lambda}(U,\lambda,G), p_2\rangle.$$

Лемма 2. *Пусть при выполнении условий (j) элемент $(\hat{U}, \hat{\lambda}) = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{\lambda}) \in X_r^2 \times K$ является решением задачи (40) и пусть функционал $I(U)$ непрерывно дифференцируем по Фреше по U в точке $\hat{U}$. Тогда существует единственный ненулевой множитель Лагранжа $P = (p_1, p_2) \in (X_r^*)^2$, который удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа*

$$(43)\qquad \langle S'_U(\hat{U}, \hat{\lambda}, G)V, P\rangle = -(\alpha_0/2)\langle I'_U(\hat{U}), v\rangle \ \ \forall V = (v_1, v_2) \in X_r^2$$

и справедлив следующий принцип минимума:

$$(44)\qquad L(\hat{U}, \hat{\lambda}, P, G) \le L(\hat{U}, \lambda, P, G) \ \ \forall \lambda \in K.$$

Доказательство. Простой анализ показывает, что при условии (j) множество $S(U,K,G) = \{S(U,\lambda,G) : \lambda \in K\}$ – выпуклое подмножество пространства $(X_r^*)^2$ для любой пары $U \in X_r^2$, $G \in L^2_r(\Gamma_I)^2$. Кроме того, в силу леммы 1 и (41) оператор $S'_U(\hat{U}, \hat{\lambda}, G)$ – изоморфизм из пространства X_r^2 в $(X_r^*)^2$. Тогда утверждение теоремы следует из [16].

Из (41), (38), (39), (34) и (35) следует, что

$$\langle S'_U(\hat{U}, \hat{\lambda}, G)V, P\rangle = \langle \hat{A}_1(v_1,v_2), p_1\rangle + \langle \hat{A}_2(v_1,v_2), p_2\rangle =$$

$$(45)\quad = a_0(v_1,p_1) - k(\hat{\lambda}v_2, p_1)_{\Gamma_I} + a_0(v_2,p_2) + k(\hat{\lambda}v_1, p_2)_{\Gamma_I}\ \forall V = (v_1,v_2) \in X_r^2.$$

Кроме того,

$$(46)\qquad \langle I'_U(\hat{U}), V\rangle := \langle I'_{u_1}(\hat{U}), v_1\rangle + \langle I'_{u_2}(\hat{U}), v_2\rangle \ \ \forall V = (v_1,v_2) \in X_r^2.$$

Полагая в (43) сначала $v_2 = 0$, затем $v_1 = 0$, мы приходим с учетом (45), (46) к следующим тождествам для $p_1 \in X_r$ и $p_2 \in X_r$:

$$a_0(v_1, p_1) + k(\hat{\lambda} v_1, p_2)_{\Gamma_I} = -(\alpha_0/2)\langle I'_{u_1}(\hat{U}), v_1\rangle \ \ \forall v_1 \in X_r, \tag{47}$$

$$a_0(v_2, p_2) - k(\hat{\lambda} v_2, p_1)_{\Gamma_I} = -(\alpha_0/2)\langle I'_{u_2}(\hat{U}), v_2\rangle \ \ \forall v_2 \in X_r. \tag{48}$$

Отметим, что лагранжиан L – непрерывно дифференцируемая функция от λ. Кроме того, производная Гато $L'_\lambda(\hat{U}, \hat{\lambda}, P, G)$ по λ в точке $(\hat{U}, \hat{\lambda}, P, G)$ определяется формулой $\langle L'_\lambda(\hat{U}, \hat{\lambda}, P, G), \lambda\rangle = \alpha_1(\hat{\lambda}, \lambda - \hat{\lambda})_{s,\Gamma_I} + (\lambda u_1, p_2)_{\Gamma_I} - (\lambda u_2, p_1)_{\Gamma_I}$ для всех $\lambda \in K$. Так как $K \subset H^s_{\lambda_0}(\Gamma_I)$ – выпуклое замкнутое множество, то необходимо выполняется следующее условие (см., например, [17]) в точке $(\hat{U}, \hat{\lambda}, P, G)$:

$$\begin{aligned}&\langle L'_\lambda(\hat{U}, \hat{\lambda}, P, G), \lambda - \hat{\lambda}\rangle = \alpha_1(\hat{\lambda}, \lambda - \hat{\lambda})_{s,\Gamma_I} + \\ &+k((\lambda - \hat{\lambda})u_1, p_2)_{\Gamma_I} - k((\lambda - \hat{\lambda})u_2, p_1)_{\Gamma_I} \geq 0 \quad \forall \lambda \in K_1.\end{aligned} \tag{49}$$

Теорема 4. *Пусть при выполнении условий (j) элемент $(\hat{u}, \hat{\lambda}) \in X \times K$ является решением задачи (22) и пусть $I(u)$ – непрерывно дифференцируемый по Фреше функционал относительно состояния u в точке $\hat{u}$. Тогда существует единственный ненулевой множитель Лагранжа $P \in X$, который удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа*

$$a_0(v, P) + ik(\hat{\lambda} v, P)_{\Gamma_I} = -(\alpha_0/2)\overline{\langle I'_u(\hat{u}), v\rangle} \ \forall v \in X. \tag{50}$$

Кроме того, справедливо следующее вариационное неравенство:

$$\alpha_1(\hat{\lambda}, \lambda - \hat{\lambda})_{s,\Gamma_I} + k\mathrm{Re}[i((\lambda - \hat{\lambda})\hat{u}, p)_{\Gamma_I}] \geq 0 \ \ \forall \lambda \in K. \tag{51}$$

Доказательство. Перепишем соотношения (47)–(49) в комплексных переменных с использованием обозначений (27). Пусть пара $(p_1, p_2) \in X^2$ является решением задачи (47), (48). Полагая $v_1 = v_2$ в (47), $v_2 = v_1$ в (48), будем иметь

$$a_0(v_2, p_1) + k(\hat{\lambda} v_2, p_2)_{\Gamma_I} = -(\alpha_0/2)\langle I'_{u_1}(\hat{U}), v_2\rangle \ \ \forall v_2 \in X_r, \tag{52}$$

$$a_0(v_1, p_2) - k(\hat{\lambda} v_1, p_1)_{\Gamma_I} = -(\alpha_0/2)\langle I'_{u_2}(\hat{U}), v_1\rangle \ \ \forall v_1 \in X_r. \tag{53}$$

Складывая (47) и (48), а затем вычитая (53) из (52), заключаем, что пара (p_1, p_2) удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}&a_0(v_1, p_1) + a_0(v_2, p_2) + k(\hat{\lambda} v_1, p_2)_{\Gamma_I} - k(\hat{\lambda} v_2, p_1)_{\Gamma_I} = \\ &= -(\alpha_0/2)(\langle I'_{u_1}(\hat{U}), v_1\rangle + \langle I'_{u_2}(\hat{U}), v_2\rangle) \ \ \forall (v_1, v_2) \in X_r^2.\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}&a_0(v_2, p_1) - a_0(v_1, p_2) + k(\hat{\lambda} v_1, p_1)_{\Gamma_I} + k(\hat{\lambda} v_2, p_2)_{\Gamma_I} = \\ &=-(\alpha_0/2)(\langle I'_{u_1}(\hat{U}), v_2\rangle - \langle I'_{u_2}(\hat{U}), v_1\rangle) \ \forall (v_1, v_2) \in X_r^2.\end{aligned} \tag{55}$$

Умножим (55) на мнимую часть i и сложим с (54). Полагая в дополнение к (27) $v = v_1 + iv_2, p = p_1 + ip_2,\ \hat{u} = \hat{u}_1 + i\hat{u}_2$,

$$\langle I'_u(\hat{u}), v\rangle = \langle I'_{u_1}(\hat{U}), v_1\rangle + \langle I'_{u_2}(\hat{U}), v_2\rangle + i\langle I'_{u_1}(\hat{U}), v_2\rangle - i\langle I'_{u_2}(\hat{U}), v_1\rangle \tag{56}$$

и используя (28) приходим к (комплексному) уравнению Эйлера-Лагранжа (50). Аналогичным образом можно показать, что (49) в комплексной записи эквивалентно вариационному неравенству (51). $\square$

Тождество (50) вместе с вариационным неравенством (51) и операторным уравнением $H(u,\lambda,u^{inc})=0$ составляют систему оптимальности для задачи управления (22). Она описывает необходимые условия экстремума для задачи (22). В частном случае, когда $I=I_1$, переписав функционал $I_1(u)$ в форме $I_1(u)=\|u_1-u_1^d\|_Q^2+\|u_2-u_2^d\|_Q^2$, получаем, что

$$(57)\quad \langle I'_{u_l}(\hat{u}),v_m\rangle = 2(\hat{u}_l-u_l^d,v_m)_Q = 2\int_Q(\hat{u}_l-u_l^d)\cdot v_m dx \ \ \forall v_m\in X_r,\ l,m=1,2.$$

В силу (57) и (56) комплексное уравнение Эйлера-Лагранжа (50) принимает вид

$$(58)\qquad a_0(v,p)+ik(\hat{\lambda}v,p)_{\Gamma_I} = -\alpha_0(v,\hat{u}-u_d)_Q\ \forall v\in X.$$

5. Единственность и устойчивость решений задач управления

В этом разделе будут установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений конкретных задач управления для системы (1). Будем предполагать, что функция g, входящая в постановку задачи управления (22), может изменяться в некотором ограниченном множестве $G_{ad}\subset L^2(\Gamma_I)$. Обозначим через $(u^1,\lambda^1)\in X\times K$ решение задачи (22), соответствующее заданной функции $g=g^1\in G_{ad}$. Через $(u^2,\lambda^2)\in X\times K$ обозначим решение задачи

$$(59)\qquad \tilde{J}(u,\lambda)=\frac{\alpha_0}{2}\tilde{I}(u)+\frac{\alpha_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Gamma_I}\to\inf,\ H(u,\lambda,\tilde{g})=0,\ (u,\lambda)\in X\times K.$$

Оно получается из (22) заменой функционала I возмущенным функционалом $\tilde{I}$, а функции g – возмущенной функцией $\tilde{g}=g^2\in G_{ad}$. Отметим, что в силу замечания 1 справедливы следующие оценки для $u^l,\ l=1,2$:

$$(60)\qquad \|u^l\|_X\le M_u=C_0\sup_{g\in G_{ad}}\|g\|_{\Gamma_I}.$$

Здесь C_0 – константа, зависящая от Ω,k и величины $\lambda_K=\sup_{\lambda\in K}\|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma_I)}$. Предполагая, что множество K ограничено, выведем одно важное неравенство для разности решений задач (22) и (59). Обозначим через $p^l\in X,\ l=1,2$ множители Лагранжа, соответствующие решениям (u^1,λ^1) и (u^2,λ^2). В силу теоремы 4 p^1 и p^2 удовлетворяют тождествам

$$(61)\qquad a_0(v,p^1)+ik(\lambda^1 v,p^1)_{\Gamma_I}=-(\alpha_0/2)\overline{\langle I'_u(u^1),v\rangle}\ \forall v\in X,$$

$$(62)\qquad a_0(v,p^2)+ik(\lambda^2 v,p^2)_{\Gamma_I}=-(\alpha_0/2)\overline{\langle \tilde{I}'_u(u^2),v\rangle}\ \forall v\in X.$$

Положим

$$(63)\quad \delta\lambda=\lambda^1-\lambda^2,\ \delta u=u^1-u^2,\ \delta p=p^1-p^2,\ \delta g=g^1-g^2,\ \delta f=f^1-f^2.$$

Теорема 5. *Пусть в дополнение к условиям (j), K и $G_{ad}\subset L^2(\Gamma_I)$ – ограниченные множества, и пусть пары (u^1,λ^1) и (u^2,λ^2) являются решениями задач (22) при $g=g^1\in G_{ad}$ и (59) при $\tilde{g}=g^2\in G_{ad}$, соответственно, где функционалы I и $\tilde{I}$ непрерывно дифференцируемы по u. Пусть $p^l\in X$, l=1,2 – множители Лагранжа, отвечающие решениям (u^l,λ^l). Тогда справедливы следующие неравенство и оценка для разностей (63):*

(64)
$$(\alpha_0/2)\mathrm{Re}[\langle I'_u(u^1)-\tilde{I}'_u(u^2),\delta u\rangle]\leq -\mathrm{Re}[ik(\delta\lambda\delta u,p^1+p^2)_{\Gamma_I}+\langle\delta f,\delta p\rangle]-\alpha_1\|\delta\lambda\|^2_{s,\Gamma_I},$$

$$\|\delta u\|_X\leq C_0(C_sM_u\|\delta\lambda\|_{s,\Gamma_I}+\|\delta g\|_{\Gamma_I}), \tag{65}$$

Здесь константы C_0, C_s определены в (8) и (21).

Доказательство. Вычтем тождество (7), записанное для u^2,λ^2,g^2, из этого же тождества для u^1,λ^1,g^1. Мы получим

$$a_0(\delta u,v)+ik(\lambda^2\delta u,\,v)_{\Gamma_I}=-ik(\delta\lambda u^1,v)_{\Gamma_I}+\langle\delta f,v\rangle\ \ \forall v\in X. \tag{66}$$

Тогда справедливость оценки (65) вытекает из замечания 1, примененного к задаче (66) относительно δu, и из (9), (10), (60) и (21).

Положим $\lambda=\lambda^1$ в неравенстве (51), записанном при $\hat\lambda=\lambda^2$, $\hat u=u^2$, $p=p^2$, а затем положим $\lambda=\lambda^2$ в (51), записанном при $\hat\lambda=\lambda^1$, $\hat u=u^1$, $p=p^1$. Используя обозначения (63), получим неравенства

$$\alpha_1(\lambda^2,\delta\lambda)_{s,\Gamma_I}+\mathrm{Re}[ik(\delta\lambda\,u^2,p^2)_{\Gamma_I}]\geq 0, -\alpha_1(\lambda^1,\delta\lambda)_{s,\Gamma_I}-\mathrm{Re}[ik(\delta\lambda\,u^1,p^1)_{\Gamma_I}]\geq 0.$$

Складывая их, приходим к следующему соотношению для разностей $\delta\lambda,\delta u$ и δp:

$$\mathrm{Re}[ik(\delta\lambda\,\delta u,p^1)_{\Gamma_I}+ik(\delta\lambda\,u^2,\delta p)_{\Gamma_I}]\leq-\alpha_1\|\delta\lambda\|^2_{s,\Gamma_I}. \tag{67}$$

Вычтем (62) из (61). Учитывая, что

$$(\lambda^1v,p^1)_{\Gamma_I}-(\lambda^2v,p^2)_{\Gamma_I}=(\lambda^2v,\delta p)_{\Gamma_I}+(\delta\lambda v,p^1)_{\Gamma_I},$$

используя (63) и полагая $v=\delta u$, получаем, что

$$a_0(\delta u,\delta p)+ik[(\lambda^2\delta u,\delta p)_{\Gamma_I}+(\delta\lambda\delta u,p^1)_{\Gamma_I}]=-(\alpha_0/2)\overline{\langle I'_u(u^1)-\tilde{I}'_u(u^2),\delta u\rangle}. \tag{68}$$

Положим $v=\delta p$ в (66) и вычтем из (68). Будем иметь

$$ik[(\delta\lambda\delta u,p^1)_{\Gamma_I}-(\delta\lambda u^1,\delta p)_{\Gamma_I}]+\langle\delta f,\delta p\rangle=-(\alpha_0/2)\overline{\langle I'_E(u^1)-\tilde{I}'_E(u^2),\delta u\rangle}. \tag{69}$$

Наконец, сложим вещественую часть равенства (69) с (67). Учитывая, что

$$(\delta\lambda\delta u,p^1)_{\Gamma_I}-(\delta\lambda u^1,\delta p)_{\Gamma_I}+(\delta\lambda u^2,\delta p)_{\Gamma_I}+(\delta\lambda\delta u,p^1)_{\Gamma_I}=2(\delta\lambda\delta u,p^1)_{\Gamma_I}-$$
$$-(\delta\lambda\delta u,\delta p)_{\Gamma_I}=(\delta\lambda\delta u,p^1+p^2)_{\Gamma_I},$$

приходим к (64). $\square$

На основании теоремы 5 и метода, разработанного в [18], изучим единственность и устойчивость решений конкретных задач управления для системы (1). Мы начнем со следующей задачи управления, отвечающей функционалу $I_1(u)=\|u-u_d\|^2_Q$:

$$J(u,\lambda)=\frac{\alpha_0}{2}\|u-u_d\|^2_Q+\frac{\alpha_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Gamma_I}\to\inf,\ H(u,\lambda,g)=0,\ (u,\lambda)\in X\times K. \tag{70}$$

Пусть константа M_u^0 и функция $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ определяются формулами

$$M_u^0=M_u+\max(\|u_d^{(1)}\|_Q,\|u_d^{(2)}\|_Q), \tag{71}$$

$$\varphi(\|g\|_{\Gamma_I})=\big(a\|g\|_{\Gamma_I}+b\|g\|^2_{\Gamma_I}\big)^{1/2},\ a=2C_0M_u^0,\ b=C_0^2M_u^0M_u^{-1}. \tag{72}$$

Предположим, что выполняется следующее условие:

$$\alpha_1(1-\varepsilon)>3\alpha_0bC_s^2M_u^2=3\alpha_0C_0^2C_s^2M_u^0M_u, \tag{73}$$

где $\varepsilon \in (0,1)$ – произвольная постоянная. Обозначим через (u^1, λ^1) решение задачи (70), отвечающее заданным функциям $u_d = u_d^{(1)} \in L^2(Q)$ и $g = g^1 \in G_{ad} \subset L^2(\Gamma_I)$. Через (u^2, λ^2) обозначим решение задачи (70), соответствующее возмущенным функциям $\tilde{u}_d = u_d^{(2)} \in L^2(Q)$ и $\tilde{g} = g^2 \in G_{ad}$.

Лемма 3. *Пусть в дополнение к условиям (j), K_1 и $G_{ad} \subset L^2(\Gamma_I)$ – ограниченные множества и пусть пара $(u^l, \lambda^l) \in X \times K$ является решением задачи (70), отвечающим заданным функциям $u_d^{(l)} \in L^2(Q)$ и $g^l \in G_{ad}$, l=1,2, где $Q \subset \Omega$ – произвольное открытое подмножество. Предположим, что выполняются условия (73). Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\|u^1 - u^2\|_Q \le \|u_d^{(1)} - u_d^{(2)}\|_Q + \varphi(\|g^1 - g^2\|_{\Gamma_I}). \tag{74}$$

Доказательство. Полагая $\delta u_d = u_d^{(1)} - u_d^{(2)}$ в дополнение к (63), мы имеем в силу (57), что

$$\langle I_1'(u^l), v)\rangle = 2(u^l - u_d^{(l)}, v)_Q,\ \langle I_1'(u^1) - \tilde{I}_1'(u^2), \delta u)\rangle = 2(\|\delta u\|_Q^2 - (\delta u_d, \delta u)_Q). \tag{75}$$

В силу (75) и (57) тождества (61), (62) для множителей Лагранжа $p^l \in X$ и неравенство (64) для разностей (63) принимают вид

$$a_0(v, p^l) + ik(\lambda^l v,\, p^l)_{\Gamma_I} = -\alpha_0(v, u^l - u_d^{(l)})_Q\ \forall v \in X,\ l = 1,2, \tag{76}$$

$$\alpha_0(\|\delta u\|_Q^2 - \mathrm{Re}(\delta u, \delta u_d)_Q) \le -\mathrm{Re}[ik(\delta\lambda\delta u, p^1 + p^2)_{\Gamma_I} + \langle \delta f, \delta p\rangle] - \alpha_1\|\delta\lambda\|_{s,\Gamma_I}^2. \tag{77}$$

Используя (76), оценим параметры p^1, p^2 и выражение $\langle \delta f, \delta p\rangle$, входящие в (77). Задача (76) эквивалентна следующему операторному уравнению для p^l:

$$A_{\lambda^l}^* p^l = \alpha_0 F_l \in X^*,\ \ \langle F_l, v\rangle = -(u^l - u_d^{(l)}, v)_Q,\ \ l = 1,2.$$

Здесь $A_{\lambda^l}^*$ - сопряженный к A_{λ^l} (его определение см. в разделе 2). Ясно, что $|(u^l - u_d^{(l)}, v)_Q| \le [\|u^l\|_X + \max(\|u_d^{(1)}\|_Q, \|u_d^{(2)}\|_Q)]\|v\|_X$. Поэтому мы выводим, используя замечание 1 и (60), что

$$\|p^l\|_X \le \tilde{C}_0\alpha_0\|F_l\|_{X^*} \le \tilde{C}_0\alpha_0 M_u^0,\ M_u^0 = M_u + \max(\|u_d^{(1)}\|_Q, \|u_d^{(2)}\|_Q). \tag{78}$$

Учитывая (6), (63) и (78), получаем далее, что

$$|\langle \delta f, \delta p\rangle| \le C\|\delta g\|_{\Gamma_I}\|\delta p\|_X \le 2\tilde{C}_0 C\alpha_0 M_u^0\|\delta g\|_{\Gamma_I} = a\|\delta g\|_X, a = 2C_0 M_u^0. \tag{79}$$

Используя оценки (10) (65), (78), (21) и неравенство Янга

$$2cd \le \epsilon c^2 + (1/\epsilon)d^2\ \forall c \ge 0, d \ge 0,\ \varepsilon > 0, \tag{80}$$

при $\epsilon = 1$, имеем

$$|k(\delta\lambda\delta u,\, p^1 + p^2)_{\Gamma_I}| \le C_3\|\delta\lambda\|_{L^\infty(\Gamma_I)}\|\delta u\|_X\|p^1 + p^2\|_X \le 2CC_s\|\delta\lambda\|_{s,\Gamma_I} C_0(C_s M_u\|\delta\lambda\|_{s,\Gamma_I}$$

$$+\|\delta g\|_{\Gamma_I})\tilde{C}_0\alpha_0 M_u^0 \le \alpha_0 C_0^2 M_u^0 M_u^{-1}(3C_s^2 M_u^2\|\delta\lambda\|_{s,\Gamma_I}^2 + \|\delta g\|_{\Gamma_I}^2). \tag{81}$$

Учитывая (73), из (81) приходим к неравенству

$$|\mathrm{Re} ik(\delta\lambda\delta u, p^1 + p^2)_{\Gamma_I}| \le \alpha_1(1 - \varepsilon)\|\delta\lambda\|_{s,\Gamma_I}^2 + \alpha_0 b\|\delta g\|_{\Gamma_I}^2. \tag{82}$$

Используя (79), (82), из (77) получаем, что

$$\alpha_0(\|\delta u\|_Q^2 - \mathrm{Re}(\delta u, \delta u_d)_Q) \le -\varepsilon\alpha_1\|\delta\lambda\|_{s,\Gamma_I}^2 + \alpha_0(a\|\delta g\|_{\Gamma_I} + b\|\delta g\|_{\Gamma_I}^2). \tag{83}$$

Из (83) следует, что

$$\alpha_0\|\delta u\|_Q^2 \le \alpha_0 \mathrm{Re}(\delta u, \delta u_d)_Q - \varepsilon\alpha_1\|\delta\lambda\|_{s,\Gamma_I}^2 + \alpha_0(a\|\delta g\|_{\Gamma_I} + b\|\delta g\|_{\Gamma_I}^2). \tag{84}$$

Отбрасывая неположительный член $-\varepsilon\alpha_1\|\delta\lambda\|_{s,\Gamma_I}^2$ в правой части (84), получаем, что

$$\|\delta u\|_Q^2 \le \|\delta u\|_Q\|\delta u_d\|_Q + a\|\delta g\|_{\Gamma_I} + b\|\delta g\|_{\Gamma_I}^2. \tag{85}$$

Это – квадратичное неравенство для $\|\delta u\|_Q$. Решив его относительно $\|\delta u\|_Q$, приходим к оценке

$$\|\delta u\|_Q \le \|\delta u_d\|_Q + \varphi(\|\delta g\|_{\Gamma_I}). \tag{86}$$

Здесь функция $\varphi(\cdot)$ определяется формулой (72). Ясно в силу (63), что (86) эквивалентно оценке (74). $\square$

В частном случае, когда $Q = \Omega$, оценка (74) имеет смысл оценки устойчивости в $L^2(\Omega)$ нормы компоненты $\hat{u}$ решения $(\hat{u}, \hat{\lambda})$ задачи (70) относительно малых возмущений функций $u_d \in L^2(D)$ и $g \in L^2(\Gamma_I)$. Если $g^1 = g^2$, то оценка (74) превращается в простую априорную оценку

$$\|u^1 - u^2\|_Q \le \|u_d^{(1)} - u_d^{(2)}\|_Q, \tag{87}$$

которая справедлива при выполнении условий (73). Если, кроме того, $u_d^{(1)} = u_d^{(2)}$, из (87) следует, что $u^1 = u^2$ в Q. Это дает вместе с (84) при $\alpha_1 > 0$, что $\delta\lambda = 0$. Тогда из (65) при $\delta g = 0$ и $\delta\lambda = 0$ следует, что $\delta u = 0$, т.е. что $u^1 = u^2$ в Ω. Последнее означает единственность решения задачи (70).

Важно, что единственность и устойчивость решения задачи (70) при условии (73) имеет место и в случае, когда $Q \subset \Omega$, т.е. Q – лишь часть Ω. Чтобы показать это, снова рассмотрим неравенство (84). Используя неравенство $\|\delta u\|_Q\|\delta u_d\|_Q \le \|\delta u\|_Q^2 + (1/4)\|\delta u_d\|_Q^2$, которое следует из (80) при $\epsilon = 2$, $c = \|\delta u\|_Q$, $d = \|\delta u_d\|_Q$, из (84) выводим, что

$$\begin{aligned}\varepsilon\alpha_1\|\delta\lambda\|_{s,\Gamma_I}^2 &\le -\alpha_0\|\delta u\|_Q^2 + \alpha_0\|\delta u_d\|_Q\|\delta u\|_Q + \alpha_0(a\|\delta g\|_{\Gamma_I} + b\|\delta g\|_{\Gamma_I}^2) \le \\ &\le (\alpha_0/4)\|\delta u_d\|_Q^2 + \alpha_0(a\|\delta g\|_{\Gamma_I} + b\|\delta g\|_{\Gamma_I}^2) \le \alpha_0[(1/2)\|\delta u_d\|_Q + \varphi(\|\delta g\|_{\Gamma_I})]^2.\end{aligned} \tag{88}$$

Из (88) вытекает следующая оценка:

$$\|\lambda^1 - \lambda^2\|_{s,\Gamma_I} \le \sqrt{\alpha_0/\varepsilon\alpha_1}\,\Delta, \tag{89}$$

где

$$\Delta = (1/2)\|u_d^{(1)} - u_d^{(2)}\|_Q + \varphi(\|g^1 - g^2\|_{\Gamma_I}). \tag{90}$$

Из (89) и (65) мы получаем следующую оценку для разности $u^1 - u^2$:

$$\|u^1 - u^2\|_X \le C_0(C_s M_u\sqrt{\alpha_0/\varepsilon\alpha_1}\,\Delta + \|g^1 - g^2\|_{\Gamma_I}). \tag{91}$$

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *В условиях теоремы 5 справедливы оценки устойчивости (89), (91), где $\triangle$ определено в (90).*

Аналогичное утверждение справедливо и для задачи управления

$$J(u,\lambda) = \frac{\alpha_0}{2}\int_{\Gamma_r}|u - u_d|^2 d\sigma + \frac{\alpha_1}{2}\|\lambda\|_{s,\Gamma_I}^2 \to \inf,\ H(u,\lambda,g) = 0,\ \ (u,\lambda) \in X \times K, \tag{92}$$

отвечающей функционалу качества $I_2(u)$. Здесь r таково, что $\Gamma_r \subset \Omega$.

Теорема 7. *Пусть в дополнение к условиям (j), K и $G_{ad} \subset L^2(\Gamma_I)$ – ограниченные множества, и пусть пара $(u^l, \lambda^l) \in X \times K$ является решением задачи (92), соответствующим заданным функциям $u_d^{(l)} \in L^2(\Gamma_r)$ и $g^l \in G_{ad}$, $l = 1, 2$, где Γ_r – граница диска $B_r \subset \Omega$. Предположим, что выполняются условия (73). Тогда $\|u^1 - u^2\|_Q \leq \Delta$ и справедливы оценки устойчивости (89), (91), где*

$$\Delta = (1/2)\|u_d^{(1)} - u_d^{(2)}\|_{\Gamma_r} + \varphi(\|g^1 - g^2\|_{\Gamma_I}).$$

Подчеркнем, что единственность и устойчивость решений задач (70) и (92) как при $Q = \Omega$, так и в случае, когда $Q \subset \Omega$, доказаны при условии, что параметр α_1, входящий в (70) или в (92), положителен и удовлетворяет (73). Это означает, что член $(\alpha_1/2)\|\lambda\|^2_{s,\Gamma_I}$ в выражении для минимизируемого функционала в (70) или в (92) вносит регуляризующий эффект на рассматриваемую задачу управления.

Отметим также, что системы оптимальности, построенные в статье, могут быть использованы для разработки эффективных численных алгоритмов решения задач управления для модели (1), (2). Авторы планируют посвятить специальную статью рассмотрению этой проблемы.

Список литературы

[1] Г.В. Алексеев, *Метод нормальных волн в подводной акустике*, Дальнаука, Владивосток, 2006.

[2] T.S. Angell, A. Kirsch, *The conductive boundary condition for the Maxwell's equations*, SIAM. Journal on Applied Mathematics, **52**:6 (1992), 1597–1610. MR1191352

[3] F. Cakoni, D. Colton, P. Monk, *The direct and inverse scattering problems for partially coated obstacles*, Inverse problems, **17**:6 (2001), 1997–2015. MR1872933

[4] F. Cakoni, D. Colton, *The determination of the surface impedance of a partially coated obstacle from far field data*, SIAM, Journal on Applied Mathematics, **64**:2 (2004), 709–723. MR2049670

[5] G. Nakamura, M. Sini, *Obstacle and boundaty determination from scattering data*, SIAM, Journal on Mathematical Analysis, **39**:3 (2007), 819–837. MR2349867

[6] J.J. Liu, G. Nakamura, M. Sini, *Reconstruction of the shape and surface impedance from acoustic scattering data for an arbitrary cylinder*, SIAM, Journal on Applied Mathematics, **67**:4 (2007), 1124–1146. MR2314199

[7] F. Cakoni, G. Nakamura, M. Sini, N. Zeev. *The identification of a partially coated dielectric medium from far field measurements*, Applicable Analysis, **89**:1 (2010), 29–47. MR2604280

[8] Г.В. Алексеев, Р.В. Бризицкий, *Теоретический анализ экстремальных задач граничного управления для уравнений Максвелла*, Сибирский Журнал Индустриальной Математики, **5**:1 (2011), 3–16. MR2951439

[9] Г.В. Алексеев, Р.В.Бризицкий, В.Г. Романов, *Оценки устойчивости решений задач граничного управления для уравнений Максвела при смешанных граничных условиях*, Доклады Академии Наук, **59** (2012), 7–12.

[10] L. Beilina, M.V. Klibanov, *The philosophy of the approximate global convergence for multidimensional coefficient inverse problems*, Complex Variables and Elliptic equations, **57**, no.2–4 (2012), 277–299. MR2886742

[11] L. Beilina, M.V. Klibanov, *A new approximate mathematical model for global convergence for a coefficient inverse problem with backscattering data*, Journal Inverse and Ill-Posed Problems, **20**:4 (2012), 513–565.

[12] L. Beilina, M.V. Klibanov, *Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems*, Springer, New York, 2012. Zbl 1255.65168

[13] Г.В. Алексеев, *Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики*, Научный Мир, Москва, 2010.

[14] Г.В. Алексеев, *Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики*, Доклады Российской Академии Наук, **395**:3 (2004), 322–325. MR2114796
[15] Г.В. Алексеев, *Разрешимость задач управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости*, Сибирский математический журнал, **45**:2 (2004), 243–262. MR2061408
[16] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, Москва, 1974. MR0410502
[17] Ж. Сеа, *Оптимизация. Теория и алгоритмы*, Дунод, Париж, 1971.
[18] Г.В. Алексеев, И.С. Вахитов, О.В. Соболева *Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диффузии-реакции*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **52**:12 (2012), 2190–2205.

Алексей Викторович Лобанов
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: AleksLobanov1@mail.ru

Роман Владимирович Зубрев
ФГОБУ ВПО Дальрыбвтуз,
ул. Луговая, 52б
690087, Владивосток, Россия
E-mail address: zubrev@list.ru