S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 38–40 (2013)

УДК 510.67
MSC 03C45

О СВОЙСТВЕ НЕЗАВИСИМОСТИ И АТОМНЫХ ФОРМУЛАХ

К.Ж. КУДАЙБЕРГЕНОВ

Abstract. It is proved that there exists a theory with the independence property the atomic formulas of which do not have the independence property.

Keywords: the independence property.

1. Введение

Свойство независимости было введено Шелахом [1], [2] еще в 1971 году и с тех пор оставалось в поле зрения специалистов по теории моделей, а в последнее время (в основном благодаря работам Шелаха) оно привлекает все большее внимание. Поэтому вполне естественно появление статьи [3], посвящен-ной изложению классических результатов о теориях без свойства независимости (называемых также, следуя Шелаху, зависимыми теориями). Но в [3, Corollary 10] утверждается, что если теория T такова, что никакая атомная формула вида $\varphi(x;\bar{y})$ не имеет свойства независимости, то и теория T не имеет свойства независимости. В данной заметке будет показано, что в общем случае это неверно.

2. Предварительные сведения

Мы будем использовать более или менее стандартные обозначения. Элементы моделей будем обозначать через a, b, c (возможно, с индексами), кортежи элементов – через $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, переменные – через x, y, z, а кортежи переменных – через $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Для простоты символ языка и его интерпретацию в модели будем обозначать одной и той же буквой. Точка с запятой в записи формулы будет указывать, что параметры, удостоверяющие свойство независимости, подстав-ляются вместо переменных, записанных справа от точки с запятой.

Kudaibergenov, K.Zh., On the independence property and atomic formulas.

Поступила 18 апреля 2012 г., опубликована 21 января 2013 г.

Определение. *(1) Формула $\varphi(\bar{x};\bar{y})$ теории T имеет свойство независимости, если для любого $n<\omega$ в некоторой модели этой теории существуют кортежи $\bar{a}_i$, $i<n$, такие, что для любого $s\subseteq n$ множество*

$$\{\varphi(\bar{x};\bar{a}_i) : i\in s\}\cup\{\neg\varphi(\bar{x};\bar{a}_i) : i\in n-s\}$$

совместно.

(2) Теория T имеет свойство независимости, если некоторая формула вида $\varphi(x;\bar{y})$ этой теории имеет свойство независимости.

Шелах [1] доказал, что если некоторая формула теории T имеет свойство независимости, то и теория T имеет свойство независимости.

Пуаза [4] заметил, что свойство независимости симметрично относительно переменных. А именно, имеет место следующая

Лемма. *Обозначим через $\varphi^*(\bar{y};\bar{x})$ формулу $\varphi(\bar{x};\bar{y})$. Тогда формула $\varphi^*(\bar{y};\bar{x})$ имеет свойство независимости, если и только если формула $\varphi(\bar{x};\bar{y})$ имеет свойство независимости.*

3. Результат

Теорема. *Существует имеющая свойство независимости теория T, атомные формулы которой не имеют свойства независимости.*

Доказательство. Язык теории T содержит тернарный R и унарные A, B, C предикатные символы. Пусть $\exists!$ означает "существует единственный". Теория T имеет следующие аксиомы:

(1) A, B, C образуют разбиение универсума;

(2) $R\subseteq A\times B\times C$;

(3) $(\forall\, z\in C)(\exists!\, y)(\exists!\, x)R(x,y,z)$;

(4) для каждого $n<\omega$

$$(\forall\, x_0,x_1,\ldots,x_n\in A)(\exists!\, y)[(\bigwedge_{i\le n}\exists zR(x_i,y,z))\wedge$$

$$(\forall\, t)((\bigwedge_{i\le n} t\ne x_i)\to\neg\exists uR(t,y,u))];$$

(5) $(\forall\, y\in B)(\exists\, x,z)R(x,y,z)$.

Понятно, что теория T имеет модель (и потому непротиворечива). Тем не менее, приведем детали. Модель построим следующим образом. В качестве интерпретации символа A возьмем произвольное бесконечное множество; скажем $\{a_i : i<\omega\}$. Элементы множеств B и C определим индукцией по i. Пусть S_i, $i<\omega$ – перечисление (без повторений) всех конечных подмножеств в A, где $S_i=\{a_{i(k)} : k<n_i\}$. Берем новый элемент b_i и для всех $k<n_i$ новые (различные) элементы $c_{i(k)}$ и полагаем $R(a_{i(k)},b_i,c_{i(k)})$. Полагаем $B=\{b_i : i<\omega\}$ и $C=\{c_{i(k)} : k<n_i,\ i<\omega\}$. Для всех $a,b,c\in A\cup B\cup C$, для которых приведенная конструкция не определила истинностное значение символа R на (a,b,c), полагаем $\neg R(a,b,c)$. Тем самым построена модель теории T.

Обозначим через $\varphi(x;y)$ формулу $\exists zR(x,y,z)$. Тогда в силу (4) и леммы формула $\varphi(x;y)$ имеет свойство независимости и потому теория T имеет свойство независимости.

Осталось доказать, что атомные формулы теории T не имеют свойства независимости. Это очевидно для формулы $x = y$. Любая другая совместная атомная формула имеет вид $\psi(x, y, z)$, это одна из следующих формул: $R(x, y, z)$, $R(x, z, y)$, $R(y, x, z)$, $R(y, z, x)$, $R(z, x, y)$, $R(z, y, x)$.

Допустим, что $\psi(x, y, z)$ есть либо $R(x, y, z)$, либо $R(x, z, y)$, либо $R(y, x, z)$, либо $R(z, x, y)$. Если a, a' – произвольные элементы любой модели теории T и $a \neq a'$, то в силу (3) множество $\{\psi(a, y, z),\ \psi(a', y, z)\}$ несовместно. Тогда по лемме формула $\psi(x; y, z)$ не имеет свойства независимости.

Пусть теперь $\psi(x, y, z)$ есть либо $R(y, z, x)$, либо $R(z, y, x)$. Если a, a', a'', a''' – произвольные элементы любой модели теории T и $(a, a') \neq (a'', a''')$, то в силу (3) множество $\{\psi(x, a, a'),\ \psi(x, a'', a''')\}$ несовместно. Следовательно, формула $\psi(x; y, z)$ не имеет свойства независимости.

Отсюда и из леммы следует, что никакая атомная формула теории T не имеет свойства независимости. □

Список литературы

[1] S. Shelah, *Stability, the f.c.p., and superstability*, Annals of Mathematical Logic, **3** (1971), 271–362. MR0317926

[2] S. Shelah, *Classification theory and the number of nonisomorphic models*, North-Holland, Amsterdam, 1978. MR0513226

[3] H. Adler, *Introduction to theories without the independence property*, preprint, http://www.logic.univie.ac.at/∼adler/Publications.html.

[4] B. Poizat, *Théories instables*, Journal of Symbolic Logic, **46** (1981), 513–522. MR0627903

Канат Жанзакович Кудайбергенов
Department of General Education, KIMEP,
пр. Абая 4,
050010, Алматы, Казахстан
E-mail address: kanat@kimep.kz