S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 393–407 (2013) УДК 514.133, 514.17

MSC 51F10, 52B99

АНАЛОГИ ФОРМУЛЫ ЛОБАЧЕВСКОГО ДЛЯ УГЛА ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Л.Н. РОМАКИНА

Abstract. It is shown that on hyperbolic plane $\widehat{H}$ of positive curvature exists fifteen types of angles, angles of six types are measurable, angles of three types have the real measures. For quasiangles of parallelism, angles of quasiparallelism and angles of parallelism of the plane $\widehat{H}$ analogs of a formula of Lobachevsky are received.

Keywords: hyperbolic plane $\widehat{H}$ of positive curvature; quasiangle of parallelism; angle of quasiparallelism; angle of parallelism; analogs of a formula of Lobachevsky for angle of parallelism.

1. Введение

На плоскости Лобачевского Λ^2, являющейся гиперболической плоскостью отрицательной кривизны, существует зависимость между величиной $\Pi(x)$ угла параллельности в точке относительно прямой и расстоянием x от данной точки до заданной прямой. Эта зависимость, установленная Н. И. Лобачевским, может быть выражена формулой

$$\Pi(x) = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{x}{q}},$$

где q — положительная величина. Функция $\Pi(x)$ на $\mathbb{R}_+$ непрерывна, монотонно убывает и принимает все значения из промежутка $(0; \pi/2)$. (см., например, [1])

Проективной моделью Кэли – Клейна плоскости Λ^2 является внутренняя относительно овальной линии γ область проективной плоскости P_2. На идеальной области плоскости Лобачевского, внешней относительно линии γ, может быть реализована гиперболическая плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны [2].

Romakina, L.N., Analogs of a formula of Lobachevsky for angle of parallelism on the hyperbolic plane of positive curvature.

Поступила 21 июля 2012 г., опубликована 17 апреля 2013 г.

Овальную линию γ называют *абсолютом* плоскостей Λ^2 и $\widehat{H}$. Группа G проективных автоморфизмов линии γ является общей фундаментальной группой плоскостей Λ^2 и $\widehat{H}$.

Гиперболическая плоскость $\widehat{H}$ кривизны $1/\rho^2$, $\rho \in \mathbb{R}_+$, может быть также реализована в псевдоевклидовом пространстве R_1^3 на сфере радиуса ρ с отождествленными диаметрально противоположными точками. Число ρ называют *радиусом кривизны* плоскости $\widehat{H}$.

Отличительной особенностью плоскости $\widehat{H}$ от классических плоскостей постоянной кривизны (евклидовой, эллиптической и Лобачевского) является существование на ней прямых трех топологических типов.

Прямые, имеющие с абсолютом две общие мнимо сопряженные точки, называют *эллиптическими* прямыми плоскости $\widehat{H}$, собственные для плоскости $\widehat{H}$ части прямых, имеющих две общие действительные точки с абсолютом, — *гиперболическими*, а касательные к абсолюту прямые — *параболическими* прямыми плоскости $\widehat{H}$ [2], [3].

В связи с развитием теории разбиений плоскости $\widehat{H}$ [4]–[7] и исследованием различных объектов на $\widehat{H}$ (см., например, [8]–[10]), а также учитывая интерес к данной плоскости, как к проективной модели двумерного пространства де Ситтера, необходимо построить элементарную геометрию плоскости $\widehat{H}$.

Наличие на $\widehat{H}$ параллельных прямых и измеримых объектов (отрезков и углов) позволяет поставить задачу вывода аналогов формулы Лобачевского для угла параллельности. Этой задаче посвящена представленная работа.

Показано, что в зависимости от типов прямых и типа содержащего эти прямые пучка пара прямых может определять на плоскости $\widehat{H}$ пятнадцать различных объектов, пятнадцать углов различных типов, шесть из которых измеримы, причем углы трех типов имеют действительные меры. В отличие от плоскости Лобачевского на плоскости $\widehat{H}$ тип угла параллельности в точке относительно прямой не единственный и зависит от взаимного расположения данных точки и прямой. В разделе 5 введены понятия квазиугла параллельности, угла квазипараллельности и угла параллельности в точке относительно гиперболической прямой. Получены формулы (см. (15), (16))

$$\alpha(x) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2\rho}\right) + i\frac{\pi}{2}, \qquad \widetilde{\alpha}(x) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2\rho}\right),$$

выражающие зависимости величин $\alpha(x)$ квазиугла параллельности и $\widetilde{\alpha}(x)$ угла квазипараллельности в точке относительно прямой от расстояния x данной точки до заданной прямой, и формула (см. (19))

$$\beta(x) = \ln \operatorname{cth}\frac{x}{2\rho},$$

выражающая зависимость величины $\beta(x)$ угла параллельности в точке относительно прямой от расстояния x данной точки до полюса заданной прямой относительно абсолюта.

В теоремах 1, 2 доказаны следующие утверждения.

Величина $\widetilde{\alpha}(x)$ угла квазипараллельности, равная действительной части величины $\alpha(x)$ квазиугла параллельности в точке K относительно прямой a при удалении точки K от прямой a по одной из полувалиан этой прямой растет, принимая все действительные положительные значения.

Величина $\beta(x)$ угла параллельности в точке K относительно прямой a при удалении точки K от полюса A прямой a относительно абсолюта по одной из полуковалиан точки A убывает, принимая все действительные положительные значения.

Автор выражает благодарность руководителям семинара «Инварианты трехмерных многообразий» А. Ю. Веснину и А. Д. Медных за полезную дискуссию по результатам работы, в рамках которой А. Д. Медных обратил внимание на тот факт, что функция $\widetilde{\alpha}(x)$ (16) угла квазипараллельности является обратной к функции Гудермана.

2. Измерение отрезков плоскости $\widehat{H}$

На эллиптической прямой, являющейся замкнутой, пара точек определяет два смежных отрезка, на гиперболической (параболической) прямой пара собственных для $\widehat{H}$ точек определяет отрезок и пару лучей [11], [12]. Отрезки непараболических прямых являются измеримыми на $\widehat{H}$. В силу наличия двух абсолютных точек гиперболические прямые плоскости $\widehat{H}$, как и прямые плоскости Лобачевского, являются направленными.

Если собственные для $\widehat{H}$ точки A, B принадлежат гиперболической (эллиптической) прямой, то прямая AB содержит две действительные (мнимо сопряженные) точки абсолютной линии γ, обозначим их K_1, K_2. Сложное отношение (ABK_1K_2) четверки точек прямой является инвариантом группы G. Пусть для гиперболической (эллиптической) прямой AB плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$,

$$\sigma = \frac{\rho}{2\tau}\ln(ABK_1K_2), \quad \tau^2 = 1 \quad \left(\tau^2 = -1\right),$$

где $\ln(ABK_1K_2)$ — главное значение логарифмической функции $w = Lnz$ комплексного переменного $z = (ABK_1K_2)$:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \quad -\pi < \arg z \le \pi. \tag{1}$$

Рассмотрим отдельно два возможных варианта.

1. Если прямая AB является гиперболической, то $(ABK_1K_2) \in \mathbb{R}$. Причем для собственных точек A, B гиперболической прямой $(ABK_1K_2) > 0$. Следовательно, $\sigma \in \mathbb{R}$. Число $|\sigma|$ назовем *расстоянием* между точками A, B и *длиной* отрезка AB.

Если одна из точек A, B гиперболической прямой является несобственной для $\widehat{H}$, но не принадлежит абсолюту, то пара точек A, B на содержащей их прямой образует два квазиотрезка (см. [11], [12]), и $(ABK_1K_2) < 0$. В данном случае $\sigma \in \mathbb{C}$, $\Im(\sigma) = \pi\rho/2$. Числа $[i\pi\rho \pm \rho\ln|(ABK_1K_2)|]/2$ назовем *длинами* квазиотрезков между точками A, B.

2. Если прямая AB является эллиптической, то $(ABK_1K_2) \in \mathbb{C}$. В силу сопряженности точек K_1, K_2 $|(ABK_1K_2)| = 1$. Следовательно, $|\sigma| \in [0; \pi\rho/2]$. Число $|\sigma|$ назовем *расстоянием* между точками A, B.

Точки A, B, гармонически разделяющие на эллиптической прямой пару точек K_1, K_2, разбивают прямую на два смежных конгруэнтных отрезка. В этом случае $(ABK_1K_2) = -1$, и, следовательно, $\sigma = \pi\rho/2$. Таким образом, полной эллиптической прямой можно поставить в соответствие число $\pi\rho$, которое назовем *длиной* эллиптической прямой.

Для любых действительных точек A, B эллиптической прямой числа $|\sigma|$, $\pi\rho - |\sigma|$ назовем *длинами* отрезков, образованных точками A, B.

При выводе метрических формул на плоскости $\widehat{H}$ используем канонический репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ второго типа, вершины A_1, A_2 и единичная точка E которого принадлежат абсолюту, а вершина A_3 является полярой прямой A_1A_2 относительно абсолюта. Семейство U_3 всех канонических реперов второго типа зависит от трех параметров. Уравнение абсолютной линии γ в реперах семейства U_3 имеет вид

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0.$$

Для координат $(a_1 : a_2 : a_3)$ собственной (несобственной) для $\widehat{H}$ точки A выполняется неравенство

$$a_1a_2 - a_3^2 < 0 \qquad \left(a_1a_2 - a_3^2 > 0\right). \tag{2}$$

Если точки A, B гиперболической (эллиптической) прямой в репере R заданы координатами $A\,(a_1 : a_2 : a_3)$, $B\,(b_1 : b_2 : b_3)$, то расстояние $\delta = |AB|$ между ними можно вычислить по формуле

$$\operatorname{ch}\frac{\delta}{\rho} = \frac{\pm(a_1b_2 + a_2b_1 - 2a_3b_3)}{2\sqrt{a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{b_1b_2 - b_3^2}} \qquad \left(\cos\frac{\delta}{\rho} = \frac{\pm(a_1b_2 + a_2b_1 - 2a_3b_3)}{2\sqrt{a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{b_1b_2 - b_3^2}}\right). \tag{3}$$

3. Типы углов плоскости $\widehat{H}$

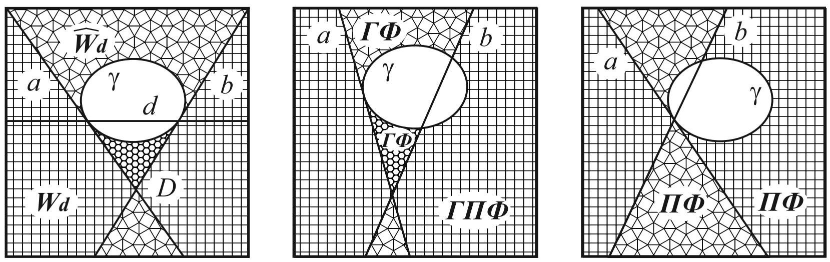
На плоскости $\widehat{H}$, как и на плоскости Лобачевского, существует три типа пучков прямых. Пучок прямых плоскости $\widehat{H}$ назовем *гиперболическим* (*эллиптическим*), если его центр — внешняя (внутренняя) относительно абсолюта точка. *Параболическим* пучком назовем пучок с центром на абсолюте. Прямые, принадлежащие гиперболическому (эллиптическому) пучку, назовем *пересекающимися* (*расходящимися*) на $\widehat{H}$. Прямые параболического пучка назовем *параллельными*.

Параболический, эллиптический и гиперболический тип прямой (пучка) условимся обозначать соответственно: П, Э, Г (п, э, г). Для неупорядоченной пары прямых, каждая из которых принадлежит одному из трех топологических типов, существует шесть различных наборов: ПП, ПГ, ПЭ, ГГ, ГЭ, ЭЭ. Не учитывая возможность реализации пары прямых на плоскости $\widehat{H}$, получим восемнадцать различных наборов, характеризующих принадлежность пары пучку одного из трех типов. Но на плоскости $\widehat{H}$ параболические прямые не принадлежат эллиптическому пучку, а пара параболических прямых, как и любая содержащая эллиптическую прямую пара, может принадлежать только гиперболическому пучку. Поэтому на плоскости $\widehat{H}$ для пары прямых могут быть реализованы лишь девять наборов:

ППг, ПГг, ПГп, ПЭг, ГГэ, ГГг, ГГп, ГЭг, ЭЭг.

Рассмотрим объекты, порожденные парой прямых, в каждом из девяти возможных случаев расположения пары по отношению к абсолюту.

1. (ППг) Пусть параболические прямые a, b пересекаются в точке D, и d — поляра точки D относительно абсолюта. Один из углов между прямыми a, b, рассматриваемых на проективной плоскости P_2, $\widehat{H} \subset P_2$, содержит абсолютную линию γ (рис. 1, a). Собственную для $\widehat{H}$ часть этого угла назовем *ковалианой* *точки* D (или *ковалианой прямой* d) и обозначим $\widehat{W}_D$ $\left(\widehat{W}_d\right)$. Дополнение ковалианы точки D до плоскости $\widehat{H}$ назовем *валианой точки* D (или *валианой прямой* d) и обозначим W_D (W_d). [6]



а *б* *в*

Рис. 1. Валиана (W_d) и ковалиана $\left(\widehat{W}_d\right)$ (*а*); вертикальные гиперболические флаги (ГФ) и гиперболический псевдофлаг (ГПФ) (*б*); смежные параболические флаги (ПФ) (*в*)

Ковалиана точки (прямой) на $\widehat{H}$ состоит из двух симметричных относительно данной точки (прямой) связных компонент, каждую из которых назовем *полуковалианой* данной точки (прямой) [6]. Валиана точки (прямой) является связным множеством на $\widehat{H}$. Прямая d разделяет валиану W_D на две симметричные относительно точки D и прямой d части, назовем их *полувалианами* точки D (прямой d).

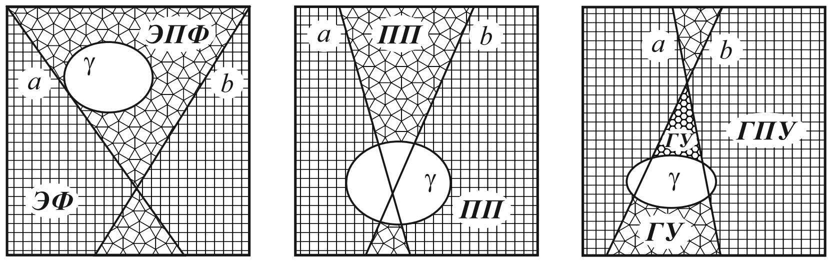
2, 3. (ПГг), (ПГп) Параболическая a и гиперболическая b прямые могут принадлежать либо гиперболическому (рис. 1, *б*), либо параболическому (рис. 1, *в*) пучку. В первом случае абсолютная линия разбивает один из углов между прямыми a, b на плоскости P_2 на три связные части, две из которых принадлежат плоскости $\widehat{H}$. Назовем каждую из этих частей *гиперболическим флагом* между прямыми a, b. По отношению друг к другу два гиперболических флага, образованных прямыми a, b, назовем *вертикальными*.

Дополнение пары вертикальных гиперболических флагов до плоскости $\widehat{H}$, связное на $\widehat{H}$ множество, вместе с прямыми a, b назовем *гиперболическим псевдофлагом* между прямыми a, b.

Во втором случае прямые a, b образуют две симметричные относительно прямой b связные области, назовем их *параболическими флагами*, *смежными* по отношению друг к другу.

4. (ПЭг) Параболическая a и эллиптическая b прямые могут принадлежать только гиперболическому пучку (рис. 2, *а*). Тот угол между прямыми a, b, который не содержит (полностью содержит) абсолют, назовем *эллиптическим флагом* (*эллиптическим псевдофлагом*).

5. (ГГэ) Две гиперболические расходящиеся прямые a и b (рис. 2, *б*) разбивают плоскость $\widehat{H}$ на две связные части. Назовем эти части *полуплоскостями* плоскости $\widehat{H}$ между прямыми a и b, *смежными* по отношению друг к другу.

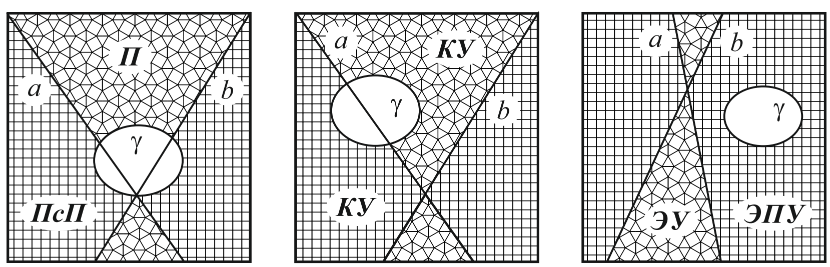


а *б* *в*

Рис. 2. Эллиптический флаг (ЭФ) и эллиптический псевдофлаг (ЭПФ) (*а*); смежные полуплоскости (ПП) (*б*); вертикальные гиперболические углы (ГУ) и гиперболический псевдоугол (ГПУ) (*в*)

6. (ГГг) Две гиперболические пересекающиеся прямые a и b разбивают плоскость $\widehat{H}$ на два *вертикальных гиперболических угла*, симметричных относительно общей точки прямых a, b, и *смежный* с каждым из этих углов *гиперболический псевдоугол* (рис. 2, *в*).

7. (ГГп) Параллельные гиперболические прямые a и b определяют две связные области на $\widehat{H}$ (рис. 3, *а*). Ту область, которая не содержит (содержит) поляру общей точки прямых a и b относительно абсолюта назовем *полосой* (*псевдополосой*) плоскости $\widehat{H}$ между прямыми a и b.



а *б* *в*

Рис. 3. Полоса (П) и псевдополоса (ПсП) (*а*); смежные квазиуглы (КУ) (*б*); эллиптический угол (ЭУ) и эллиптический псевдоугол (ЭПУ) (*в*)

8. (ГЭг) Гиперболическая a и эллиптическая b прямые (рис. 3, *б*) разбивают плоскость $\widehat{H}$ на две связные части. Каждую из них назовем *квазиуглом* между прямыми a, b.

9. (ЭЭг) Две эллиптические прямые a, b разбивают плоскость $\widehat{H}$ на две связные части (рис. 3, *в*). Тот угол плоскости P_2 между прямыми a, b, который не содержит (полностью содержит) линию γ, назовем *эллиптическим углом* (*эллиптическим псевдоуглом*) плоскости $\widehat{H}$ между прямыми a и b.

Итак, две прямые плоскости $\widehat{H}$ в зависимости от их типов и типа содержащего эти прямые пучка могут определять пятнадцать различных объектов (см.

табл.). Доказательства существования введенных объектов следуют по принципу двойственности проективной плоскости из доказательств существования лучей, отрезков и квазиотрезков на проективных, эллиптических, гиперболических и параболических прямых (см., например, [11], [12]).

Таблица. Типы углов плоскости $\widehat{H}$

	тип угла	мера υ $(\tilde{\upsilon})$ угла $\widehat{ab}$	тип пучка	тип a	тип b
1	валиана	—	г	П	П
2	ковалиана	—			
3	гиперболический флаг	—	г	П	Г
4	гиперболический псевдофлаг	—			
5	параболический флаг	—	п		
6	эллиптический флаг	—	г	П	Э
7	эллиптический псевдофлаг	—			
8	полуплоскость	$\upsilon \in [0;\pi]$	э	Г	Г
9	гиперболический угол	$\upsilon \in \mathbb{R}_+$	г		
10	гиперболический псевдоугол	$\tilde{\upsilon} = \pi i - \upsilon, \upsilon \in \mathbb{R}_+$			
11	полоса	—	п		
12	псевдополоса	—			
13	квазиугол	$\tilde{\upsilon} = \upsilon + \pi i/2, \upsilon \in \mathbb{R}$	г	Г	Э
14	эллиптический угол	$\upsilon \in \mathbb{R}_+$	г	Э	Э
15	эллиптический псевдоугол	$\tilde{\upsilon} = \pi i - \upsilon, \upsilon \in \mathbb{R}_+$			

Замечание 1. *Классическим вопросом в основаниях геометрии является вопрос о существовании и количестве прямых, проходящих через данную точку параллельно заданной прямой, не содержащей данную точку. Для плоскости $\widehat{H}$ в модели Кэли – Клейна очевидны утверждения, которые могут быть приняты аксиомами параллельности данной плоскости. Сформулируем их.*

1. *На плоскости $\widehat{H}$ не существует прямых, параллельных эллиптической прямой.*

2. *Через каждую точку плоскости $\widehat{H}$, не лежащую на параболической прямой a, проходит и притом единственная гиперболическая прямая, параллельная прямой a.*

3. *Через каждую точку плоскости $\widehat{H}$, не лежащую на гиперболической прямой a, проходит единственная (параболическая или гиперболическая) прямая, параллельная прямой a в заданном на ней направлении.*

4. Измерение в пучках прямых

I. Пусть a и b — непараболические прямые эллиптического (гиперболического) пучка с центром в точке $K = a \cap b$. Через точку K проходят две мнимо сопряженные (действительные) абсолютные касательные k_1, k_2. С помощью числа (abk_1k_2), сложного отношения четырех прямых пучка с центром в точке K, инвариантного во всех преобразованиях группы G, на $\widehat{H}$ можно ввести измерение в непараболических пучках для непараболических прямых. Таким образом, измеримыми на $\widehat{H}$ являются: полуплоскости, квазиуглы, гиперболические углы и псевдоуглы, эллиптические углы и псевдоуглы. Определим меры данных объектов.

1. Мера полуплоскости. Пусть расходящиеся гиперболичекие прямые a, b образуют смежные полуплоскости ν_1, ν_2. Абсолютные касательные k_1, k_2, проходящие через внутреннюю относительно абсолюта точку K, мнимо сопряженные. Следовательно, $(abk_1k_2) \in \mathbb{C}$, $|(abk_1k_2)| = 1$. Тогда для функции $\ln z$, определенной равенством (1),

$$\upsilon = \left| \frac{1}{2i} \ln(abk_1k_2) \right| \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Число υ ($\pi - \upsilon$) назовем *мерой*, или *величиной*, полуплоскости ν_1 (ν_2). Всю плоскость $\widehat{H}$ можно рассматривать как *развернутую* полуплоскость мерой π.

2. Мера квазиугла. Пусть гиперболическая a и эллиптическая b прямые образуют смежные квазиуглы ν_1, ν_2. Пара прямых a, b в пучке с центром во внешней относительно абсолюта точке K разделяет пару действительных абсолютных касательных k_1, k_2. Следовательно, $(abk_1k_2) \in \mathbb{R}$, $(abk_1k_2) < 0$. Тогда для функции $\ln z$ (1)

$$\ln(abk_1k_2) = \pi i + \ln|(abk_1k_2)|, \quad \ln(bak_1k_2) = \pi i - \ln|(abk_1k_2)|.$$

Числа $[\pi i \pm \ln|(abk_1k_2)|]/2$, где $\ln|(abk_1k_2)| \in \mathbb{R}$, назовем *мерой*, или *величиной*, квазиуглов ν_1, ν_2.

Если прямые a, b гармонически разделяют пару k_1, k_2, т.е. $(abk_1k_2) = -1$, то мера квазиугла между ними равна $\pi i/2$. Прямые a, b в этом случае назовем *ортогональными*.

3. Мера гиперболического угла (псевдоугла). Пусть пересекающиеся гиперболические прямые a, b образуют вертикальные гиперболические углы ν_1, ν_2 и смежный с каждым из этих углов гиперболический псевдоугол ψ. Пара прямых a, b в пучке с центром в собственной для $\widehat{H}$ точке K не разделяет пару абсолютных касательных k_1, k_2, т.е. $(abk_1k_2) \in \mathbb{R}_+$.

Число

$$\upsilon = \frac{1}{2}\left|\ln(abk_1k_2)\right|, \ \upsilon \in \mathbb{R}_+,$$

назовем *мерой*, или *величиной*, гиперболического угла ν_1 (ν_2).

Пусть a' — ортогональная к a эллиптическая прямая, проходящая через точку K. Два равных смежных квазиугла между прямыми a и a' величиной $\pi i/2$ образуют *развернутый* гиперболический псевдоугол величиной πi. Этот псевдоугол состоит из гиперболического угла ν_1 и гиперболического псевдоугла ψ. Следовательно, величина гиперболического псевдоугла ψ, смежного с гиперболическим углом величиной υ, равна $\pi i - \upsilon$.

4. Мера эллиптического угла (псевдоугла). Пусть эллиптические прямые a, b образуют эллиптический угол ν и смежный с ним эллиптический псвдоугол ψ. В гиперболическом пучке с центром K пара a, b не разделяет пару абсолютных касательных k_1, k_2, т.е. $(abk_1k_2) \in \mathbb{R}_+$.

Число

$$\upsilon = \frac{1}{2}\left|\ln(abk_1k_2)\right|, \ \upsilon \in \mathbb{R}_+,$$

назовем *мерой*, или *величиной*, эллиптического угла ν.

Пусть a' — ортогональная к a гиперболическая прямая, проходящая через точку K. Два равных смежных квазиугла между прямыми a и a' величиной $\pi i/2$ образуют *развернутый* эллиптический псевдоугол величиной πi, который состоит из эллиптического угла ν и эллиптического псевдоугла ψ. Следовательно, величина эллиптического псевдоугла, смежного с эллиптическим углом ν величиной υ, равна $\pi i - \upsilon$.

II. Если хотя бы одна из прямых a, b параболическая, она совпадает с одной из абсолютных касательных k_1, k_2. Число (abk_1k_2) в этом случае не определено. Следовательно, объекты, образованные содержащими параболическую прямую парами прямых гиперболических (эллиптических) пучков, неизмеримы на $\widehat{H}$.

III. Если непараболические прямые a, b принадлежат параболическому пучку, то абсолютные касательные пучка с центром K совпадают: $k_1 = k_2$. В этом случае $(abk_1k_2) = 1$, $\ln(abk_1k_2) = 0$. Следовательно, вычисленная формально мера полосы (псевдополосы), определенной параллельными гиперболическими прямыми, равна нулю.

Итак, на $\widehat{H}$ измеримы углы шести типов, и углы трех типов имеют действительные положительные меры (см. табл.).

В тангенциальных координатах $(X_1 : X_2 : X_3)$ текущей касательной абсолютную линию γ в реперах семейства U_3 можно задать уравнением

$$4X_1X_2 - X_3^2 = 0.$$

Квадратичная форма $\Phi = 4X_1X_2 - X_3^2$ определяет метрику в пучках прямых. Координаты $(a_1 : a_2 : a_3)$ эллиптической (гиперболической) прямой a в репере R удовлетворяют неравенству

$$4a_1a_2 - a_3^2 > 0 \qquad \left(4a_1a_2 - a_3^2 < 0\right). \tag{4}$$

Если неизотропные пересекающиеся (расходящиеся) прямые a, b имеют координаты (a_i), (b_i), $i = 1, 2, 3$, то меру $\widehat{ab}$ угла между ними в репере R можно выразить формулой

$$\operatorname{ch} \widehat{ab} = \frac{\pm(2a_1b_2 + 2a_2b_1 - a_3b_3)}{\sqrt{4a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{4b_1b_2 - b_3^2}} \qquad \left(\cos \widehat{ab} = \frac{\pm(2a_1b_2 + 2a_2b_1 - a_3b_3)}{\sqrt{4a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{4b_1b_2 - b_3^2}}\right). \tag{5}$$

5. Вывод аналогов формулы Лобачевского

Пусть B, C — точки пересечения гиперболической прямой a с абсолютом, A — полюс прямой a относительно абсолюта.

Если точка K совпадает с точкой A, то *углом параллельности* в точке K относительно направленной прямой BC (CB) назовем каждый параболический флаг между прямыми AC (AB) и a. Если точка K плоскости $\widehat{H}$, не лежащая на прямой a, принадлежит параболической прямой AB, то *углом параллельности* в точке K относительно направленной прямой BC (CB) назовем полосу между прямыми KC и a (каждый параболический флаг между прямыми AB и a). Полосы и параболические флаги неизмеримы на $\widehat{H}$, поэтому рассмотренные варианты расположения точки K не приводят к получению метрических зависимостей на плоскости $\widehat{H}$.

Две полувалианы (полуковалианы) прямой a симметричны относительно этой прямой. Поэтому для положения точки K, не принадлежащей прямым a, AB, AC, остаются два принципиально различных варианта: K принадлежит полувалиане прямой a, K принадлежит полуковалиане прямой a. Рассмотрим эти варианты.

I. Пусть K принадлежит полувалиане W_a^1 прямой a (на рисунках 4, *а* и 4, *б* одни и те же объекты изображены в различных ракурсах, граница ABC полувалианы W_a^1, состоящая из собственной части BC прямой a и лучей AB, AC параболических прямых, выделена жирной линией). Согласно определению валиана прямой не содержит точек абсолюта, следовательно, каждая прямая пучка с центром в точке A, принадлежащая W_a, в частности, прямая AK, является эллиптической. Непараболические прямые a и AK различных типов, следовательно, образуют квазиугол. Каждая прямая, проходящая через точку A, в частности, прямая AK, ортогональна прямой a, т. е. величина квазиугла между прямыми a и AK равна $\pi i/2$. Точку $H = a \cap AK$ назовем *ортогональной проекцией* точки K на прямую a, или *основанием перпендикуляра*, проведенного из точки K к прямой a.

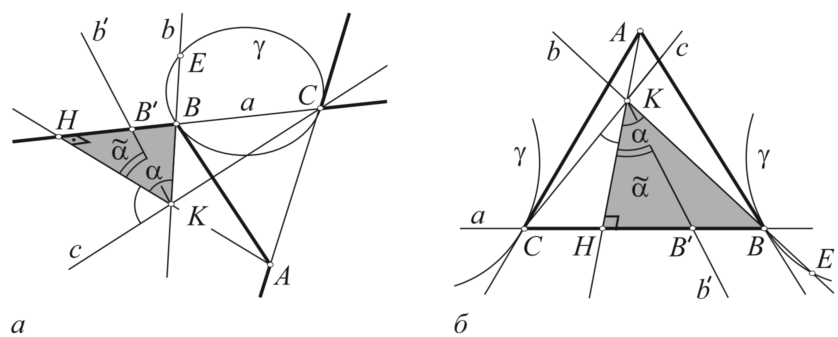


Рис. 4. Угол квазипараллельности $\widetilde{\alpha}$ и квазиугол параллельности α в точке K относительно прямой a

Точка B (C) определяет единственную прямую b (c), проходящую через точку K параллельно направленной прямой CB (BC). Прямая b (c) является гиперболической, так как единственной параболической прямой, проходящей через точку B (C), является прямая AB (AC). Следовательно, прямые AK и b (c) образуют два квазиугла. Прямая a разбивает каждый из этих квазиуглов на две части, одна из полученных четырех частей полностью лежит в полувалиане W_a^1. Назовем эту часть *квазиуглом параллельности* в точке K относительно направленной прямой CB (BC).

Прямая a в силу ее ортогональности с AK симметрична относительно этой прямой. Поэтому симметричны относительно AK и квазиуглы параллельности в точке K относительно прямой a по различным ее направлениям. Следовательно, меры квазиуглов параллельности в данной точке относительно данной прямой по ее различным направлениям равны.

Величину квазиугла параллельности в точке K относительно прямой CB обозначим α.

Точки K, H принадлежат эллиптической прямой AK, следовательно, разбивают эту прямую на два отрезка. Будем рассматривать тот из отрезков между точками K, H, который принадлежит полувалиане W_a^1, его длину обозначим x. Точка H лежит на прямой a, поляре точки A относительно абсолюта, следовательно, длина каждого отрезка между точками A, H равна половине длины эллиптической прямой: $|AH| = \pi\rho/2$. Рассматриваемый отрезок KH принадлежит одному из отрезков AH, причем $K \neq A$, $K \neq H$, поэтому

$$x \in \left(0; \frac{\pi\rho}{2}\right). \tag{6}$$

Покажем, что величина α однозначно определена значением x.

Введем канонический репер $R = \{C, B, A, E\}$, где $E = b \cap \gamma$. В репере R точки C, B, A, E и прямые a, b имеют координаты:

$$C\,(1:0:0),\ B\,(0:1:0),\ A\,(0:0:1),\ E\,(1:1:1),\ a\,(0:0:1),\ b\,(1:0:-1). \tag{7}$$

Точку K, учитывая ее принадлежность прямой b, зададим в репере R координатами $(1:k:1)$, $k \in \mathbb{R}$. Прямая AK эллиптическая, поэтому ее координаты $(k:-1:0)$ удовлетворяют первому условию из (4), следовательно, $k < 0$. Точка H имеет в R координаты $(1:k:0)$. По формуле (3) при условии (6) находим

$$\cos\frac{x}{\rho} = \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{1-k}}. \tag{8}$$

Построим прямую b', проходящую через точку K ортогонально прямой b. Ортогональные прямые, пересекающиеся в собственной для $\widehat{H}$ точке, принадлежат различным типам, значит, прямая b' является эллиптической и образует с прямой b квазиугол величиной $\pi i/2$. В репере R b' имеет координаты $(2-k:1:-2)$ и пересекает прямую a в точке $B'\,(1:k-2:0)$. При $k < 0$ число $(B'BHC) = 2/(2-k)$ больше нуля, т.е. точки в четверке B', B, H, C попарно различны, и пара точек B', B не разделяет на прямой a пару точек H, C. Следовательно, точка B' принадлежит лучу HB, причем $B' \neq H$. Это означает, что отрезок KB', полностью принадлежащий полувалиане W_a^1, разбивает квазиугол параллельности в точке K относительно прямой CB на две части, одна из которых принадлежит эллиптическому углу HKB', другая — квазиуглу $B'KB$.

Часть квазиугла параллельности в точке K относительно прямой CB, принадлежащую эллиптическому углу HKB' назовем *углом квазипараллельности* в точке K относительно прямой CB.

Величина эллиптического угла HKB' — действительное положительное число, обозначим его $\widetilde{\alpha}$. По построению

$$\alpha = \widetilde{\alpha} + i\frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Таким образом, $\Re(\alpha) = \widetilde{\alpha}$, $\Im(\alpha) = \pi/2$.

Величина α квазиугла между прямыми $b\,(1:0:-1)$ и $AK\,(k:-1:0)$ согласно формуле (5) удовлетворяет равенству

$$\operatorname{ch}^2\alpha = \frac{1}{k}. \tag{10}$$

Исключая из равенств (8), (10) параметр k, находим

$$\cos\frac{x}{\rho} = \frac{\epsilon}{i\operatorname{sh}\alpha}, \quad \epsilon = \pm 1. \tag{11}$$

Определим значение ϵ.

Применяя условие (9), преобразуем выражение $i\operatorname{sh}\alpha$:

$$i\operatorname{sh}\alpha = \sin(i\alpha) = \sin\left(i\,\widetilde{\alpha} - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ch}\widetilde{\alpha}.$$

Поскольку $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{ch}\widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, $i \operatorname{sh}\alpha \in \mathbb{R}$, $i \operatorname{sh}\alpha < 0$. При условии (6) $\cos\frac{x}{\rho} > 0$. Поэтому в силу равенства (11) $\epsilon = -1$, и

$$\operatorname{sh}\alpha = \frac{i}{\cos\frac{x}{\rho}}. \tag{12}$$

Следовательно,

$$\operatorname{ch}\alpha = i\delta \operatorname{tg}\frac{x}{\rho}, \qquad \delta = \pm 1. \tag{13}$$

Используя условие (9), приведем равенство (13) к виду $\operatorname{sh}\widetilde{\alpha} = \delta \operatorname{tg}\frac{x}{\rho}$. Откуда при условии (6) для $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}_+$ находим: $\delta = 1$. Согласно равенствам (12), (13) при $\delta = 1$

$$e^{\alpha} = \frac{i}{\cos\frac{x}{\rho}}\left(1 + \sin\frac{x}{\rho}\right),$$

или

$$e^{\alpha} = i \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2\rho}\right). \tag{14}$$

Из равенств (14), (9) при условии (6) получаем:

$$\alpha(x) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2\rho}\right) + i\frac{\pi}{2}, \tag{15}$$

$$\widetilde{\alpha}(x) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2\rho}\right). \tag{16}$$

Функцию $\alpha(x)$ ($\widetilde{\alpha}(x)$) назовем функцией *квазиугла параллельности* (*угла квазипараллельности*) на плоскости $\widehat{H}$.

Функция $\widetilde{\alpha}(x)$ угла квазипараллельности на интервале $(0; \pi\rho/2)$ непрерывна, монотонно возрастает и принимает все значения из $\mathbb{R}_+$.

Из выражений (15), (16) находим

$$x = \rho \arcsin \operatorname{cth}\alpha(x), \qquad x = \rho \arcsin \operatorname{th}\widetilde{\alpha}(x).$$

На основании проведенных рассуждений справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *На гиперболической плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, величина $\widetilde{\alpha}(x)$ угла квазипараллельности, равная действительной части величины $\alpha(x)$ квазиугла параллельности в точке K относительно прямой a, может быть выражена через расстояние x от точки K до прямой a по формуле* (16) *и при удалении точки K от прямой a по одной из полувалиан этой прямой растет, принимая все действительные положительные значения.*

II. Пусть K принадлежит полуковалиане $\widehat{W}_a^1$ прямой a (на рисунке 5 лучи AB, AC, ограничивающие полуковалиану $\widehat{W}_a^1$, выделены жирной линией), и $K \notin AB$, $K \notin AC$. Ковалиана прямой a не содержит собственных для $\widehat{H}$ точек прямой a, следовательно, AK пересекает прямую a в несобственной точке H и является гиперболической прямой. Квазиотрезок AH имеет длину $i\pi\rho/2$. Как прямая, проходящая через полюс прямой a, AK ортогональна a. Прямую AK назовем *перпендикуляром* к прямой a, проходящим через точку K. Расходящиеся прямые a и AK образуют две смежные конгруэнтные полуплоскости величиной $\pi/2$.

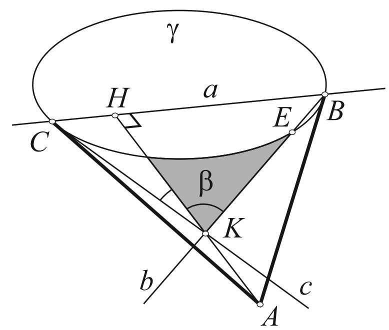


Рис. 5. Угол параллельности β в точке K относительно прямой a

Точка B (C) пересечения прямой a с абсолютом определяет единственную гиперболическую прямую b (c), параллельную направленной прямой CB (BC) и проходящую через точку K. Прямые b и c образуют с прямой AK в силу симметричности прямой a относительно AK равные гиперболические углы. Гиперболический угол между прямыми b (c) и AK, полностью принадлежащий полуковалиане $\widehat{W}_a^1$, назовем *углом параллельности* в точке K относительно направленной прямой CB (BC).

Величину угла параллельности в точке K относительно прямой CB обозначим β и найдем зависимость β от длины x, $x \in \mathbb{R}_+$, отрезка AK гиперболической прямой.

Введем аналогично случаю **I** канонический репер $R = \{C, B, A, E\}$, где $E = b \cap \gamma$. В репере R точки C, B, A, E и прямые a, b имеют координаты (7). Точку K прямой b в репере R зададим координатами $(1 : k : 1)$. Точка K собственная для плоскости $\widehat{H}$, следовательно, по условию (2) $k < 1$. Прямая AK гиперболическая, следовательно, ее координаты $(k : -1 : 0)$ удовлетворяют второму условию из (4), т.е. $k > 0$. Таким образом, $k \in (0; 1)$.

По формуле (3) расстояние x между точками $A\,(0 : 0 : 1)$, $K\,(1 : k : 1)$ удовлетворяет равенству

$$\operatorname{ch}\frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{1-k}}. \tag{17}$$

Для величины β гиперболического угла между прямыми $AK\,(k : -1 : 0)$, $b\,(1 : 0 : -1)$ согласно формуле (5) справедливо равенство

$$\operatorname{ch}\beta = \frac{1}{\sqrt{k}}. \tag{18}$$

Для $\beta \in \mathbb{R}_+$ и $x \in \mathbb{R}_+$ из равенств (17), (18) находим:

$$\operatorname{ch}\beta = \operatorname{cth}\frac{x}{\rho}, \qquad \operatorname{sh}\beta = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{x}{\rho}}.$$

Откуда

$$e^{\beta} = \operatorname{cth}\frac{x}{2\rho},$$

и, следовательно,

$$\beta(x) = \ln\operatorname{cth}\frac{x}{2\rho}. \tag{19}$$

Функцию $\beta(x)$ назовем функцией *угла параллельности* на плоскости $\widehat{H}$.

На $\mathbb{R}_+$ функция $\beta(x)$ угла параллельности непрерывна, монотонно убывает и принимает все значения из $\mathbb{R}_+$.

На основании тождества

$$y = \ln \operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}\ln \operatorname{cth}\frac{y}{2}\right), \quad y \in \mathbb{R}_+,$$

из равенства (19) получаем

$$x = \rho \ln \operatorname{cth}\frac{\beta(x)}{2}.$$

В силу проведенных рассуждений справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *На гиперболической плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, величина $\beta(x)$ угла параллельности в точке K относительно прямой a может быть выражена через расстояние x от точки K до полюса A прямой a относительно абсолюта по формуле* (19) *и при удалении точки K от A по одной из полуковалиан точки A убывает, принимая все действительные положительные значения.*

Список литературы

[1] Н. В. Ефимов *Высшая геометрия* М. Наука, 1971.

[2] Б. А. Розенфельд *Неевклидовы пространства* М. Наука, 1969.

[3] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский *Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства* М. МЦНМО, 2003. MR2070039

[4] Л. Н. Ромакина *Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные правильным n-контуром* Теория относительности, гравитация и геометрия, Межд. конф. «Petrov 2010 Anniversary Sympozium on General Relativity and Gravitation» Труды (Казань, 1–6 ноября 2010 г.). Казань, Казан. ун-т, 2010, 227–232.

[5] Л. Н. Ромакина *Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные h-ломаной* Современные проблемы математики и механики, Т. VI Математика, вып. 3. М. Изд-во МГУ, 2011, 131–138.

[6] Л. Н. Ромакина *Аналог мозаики на гиперболической плоскости положительной кривизны* Сб. науч. тр. Механика. Математика, Саратов, Изд-во Сарат. ун-та, 2010, 69–72.

[7] Л. Н. Ромакина *Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны* Матем. сб., **203**:9 (2012), 83–116. MR3024832

[8] Л. Н. Ромакина *Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости* Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 3, 2010, 14–26.

[9] Л. Н. Ромакина *Конечные замкнутые 5-контуры расширенной гиперболической плоскости* Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 1, 2011, 38–49.

[10] Л. Н. Ромакина *Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны* Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **12**:3 (2012), 37–44.

[11] Л. Н. Ромакина *Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей* Саратов, ООО Изд-во «Научная книга», 2008.

[12] Л. Н. Ромакина *Определение лучей, отрезков и квазиотрезков различного типа прямых при построении классических неевклидовых геометрий на моделях Кэли – Клейна* Междун. конференция «62-е Герценовские чтения»: Сб. науч. тр., Санкт-Петербург. Изд-во РГПУ им.А.И. Герцена, 2009, 103–109.

Людмила Николаевна Ромакина
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
ул. Астраханская 83,
410012, Саратов, Россия
E-mail address: romakinaln@mail.ru