S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 408–413 (2013) УДК 512.54
MSC 13A99

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ГРУППЫ СУДЗУКИ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АБЕЛЕВЫ 2-ГРУППЫ

А.А. ДУЖ

Abstract. It is proved that a periodic groups saturated by the set of groups $\mathfrak{M} = \{P \times V_n \mid n \in N\}$, where V_n is an elementary abelian 2-group of order 2^n, and $P = Sz(q)$, where $q = 2^{2m+1}$, m is a fixed natural number, is isomorphic to $P \times V$, where V is an elementary abelian 2-group.

Keywords: periodic group, saturation.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — непустое множество групп. Говорят, что группа G *насыщена* группами из $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$ [11].

Напомним, что группа G называется *группой Шункова*, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [12].

В работе [9] К.А. Филипповым доказана локальная конечность периодической группы Шункова, насыщенной группами из множества $\Re = \{L_2(q) \times Z_2\}$. В работе [2] доказывалась локальная конечность периодической группы Шункова, насыщенной прямыми произведениями простой группы $L_2(q)$, где $q = 2^k$ — фиксированное число, и бесконечной группы периода 2. Однако, обобщить эти результаты на произвольные периодические группы без дополнительных ограничений не удается.

Duzh, A.A., Periodic groups saturated by direct products of the Suzuki's group for elementary abelian 2-groups.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00717-а).

Поступила 24 января 2013 г., опубликована 23 апреля 2013 г.

Так, в работе [7] Д.В. Лыткиной и К.А. Филипповым доказано, что либо периодическая группа, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_2(q) \times Z_2\}$, локально конечна, либо существует не локально конечная счетная периодическая дважды транзитивная группа подстановок счетного множества Ω, обладающая рядом необычных свойств. Вопрос о существовании такой группы до сих пор открыт.

В работах [3, 4] Д.В. Лыткиной доказывалась локальная конечность периодической группы G, насыщенной прямыми произведениями элементарной абелевой 2-группы фиксированного порядка и простой группы $L_2(q)$ при условии, что G содержит элемент порядка 4 или подгруппу, изоморфную A_4. Там же выделен класс простых периодических не локально конечных групп определенного вида - Λ-групп. Пусть P — локально конечное поле. Группой типа $\Lambda(P)$ назовём содержащую инволюцию простую периодическую группу, в которой все инволюции сопряжены и централизатор каждой из них изоморфен прямому произведению группы порядка 2 на группу, изоморфную $L_2(P)$. Вопрос существования групп типа $\Lambda(P)$ в настоящее время открыт.

Таким образом, актуальной является задача о выделении в классе периодических групп, насыщенных прямыми произведениями элементарных абелевых 2-групп на конечные простые неабелевые группы, групп являющихся (или не являющихся) локально конечными.

В настоящей работе мы продолжаем исследования в рамках упомянутой выше задачи.

2. Основной результат

Пусть $\mathfrak{M} = \{P \times V_n \mid n \in N\}$, где V_n — элементарная абелева 2-группа порядка 2^n, и $P = Sz(q)$, где $q = 2^{2m+1}$ и m — фиксированное натуральное число. Доказана следующая

Теорема. *Если G — периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{M}$, то $G \simeq P \times V$, где V — элементарная абелева 2-группа.*

3. Используемые результаты

Предложение 1. [1] *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы $P = Sz(q)$.*

Тогда (а) S — двуступенно нильпотентная группа порядка q^2 и периода 4. Все инволюции из S лежат в $Z(S)$, $Z(S)$ — элементарная абелева подгруппа порядка q и $[S, S] = Z(S)$.

(б) $N_P(S) = SR$ — группа Фробениуса с ядром S и дополнением R, где R - циклическая группа порядка $q-1$, действующая при сопряжении транзитивно на множестве инволюций групп $Z(S)$ и $S/Z(S)$.

(в) Если t — инволюция из S, то $C_P(t) = S$.

(г) $N_P(R) = R\langle u\rangle$, где u — инволюция, инвертирующая R при сопряжении, и $P = \langle S, u\rangle$.

Предложение 2. *Группа $\langle a, b, c \mid 1 = a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^4 = (ac)^4 = (bc)^4 = ((ab)^2c)^4 = ((bc)^2a)^4 = ((ca)^2b)^4 = (ab^c)^4 = (bc^a)^4 = (ca^b)^4\rangle$ является конечной 2-группой.*

Доказательство. Смотри доказательство леммы 2.1 в [6].

Предложение 3. (Теорема Шункова, [12]**)** *Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна.*

Предложение 4. (Теорема Санова, [5, 8]**)** *Произвольная группа периода не более 4 локально конечна.*

4. Доказательство теоремы

Если R — конечная подгруппа из G, то через $\mathfrak{M}(R)$ обозначим множество подгрупп из G, которые содержат R и изоморфны элементам из $\mathfrak{M}$.

Лемма 1. *Если T — 2-подгруппа из G, то T — двуступенно нильпотентная группа периода 4 и все инволюции из T лежат в центре T.*

Доказательство. Из условия теоремы и предложения 1 вытекает, что T периода 4. По результату Санова (предложение 4) T локально конечна и если x, y, $z \in T$, то $\langle x, y, z\rangle$ — конечная 2-группа. Из условия теоремы и предложения 1 вытекает, что $[[x, y], z] = 1$, т.е. T двуступенно нильпотентна. Если t — инволюция из T и $x \in T$, то снова $\langle x, t\rangle$ конечна и $[x, t] = 1$.

Лемма 2. *Пусть s — элемент порядка 4 из G. Тогда $C = C_G(s^2)$ — 2-группа.*

Доказательство. Положим $t = s^2$. Пусть $x, y, z \in G$ такие, что $x^2 = y^2 = z^2 = t$. Пусть a, b, c — образы x, y, z в $C/\langle t\rangle$. Тогда a,b,c удовлетворяют соотношениям из предложения 2 и поэтому $\langle a, b, c\rangle$ — конечная 2-группа, а вместе с ней конечной 2-группой является и $\langle x, y, z\rangle$. По лемме 1 $[[x, y], z] = 1$.

Пусть теперь $A = \left\langle x \in G \mid x^2 = t\right\rangle$. Предыдущий абзац показывает, что коммутаторы порождающих элементов группы A лежат в центре A, поэтому A — двуступенно нильпотентная 2-группа. Очевидно, $A \lhd C$. Если предположить, что C не является 2-группой, то пусть $1 \neq r$ — элемент нечетного порядка из C, а x — один из порождающих элементов A. Тогда $R = \langle r, x\rangle$ — конечная подгруппа, которая не может содержаться ни в каком элементе из $\mathfrak{M}(R)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если s — элемент порядка 4 из G, то s^2 содержится в единственной силовской 2-подгруппе S группы G и $S = C_G(s^2)$.*

Доказательство. Если S — силовская 2-подгруппа из G, содержащая s^2, то $S \leq C_G(s^2)$ по лемме 1. С другой стороны, по лемме 2 $C_G(s^2)$ является 2-группой. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть x и y — элементы порядка 4 из G, S и T — силовские 2-подгруппы из G, содержащие x^2 и y^2, соответственно. Тогда x^2 и y^2, а также S и T сопряжены в G.*

Доказательство. По предыдущей лемме достаточно доказать сопряженность x^2 и y^2. Пусть $L \in \mathfrak{M}(\left\langle x^2, y^2\right\rangle)$. Можно считать, что x^2 и y^2 лежат в одной силовской 2-подгруппе S_L из L. Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая S_L. По лемме 3 $x, y \in S$ и, следовательно, $\langle x, y\rangle$ — конечная 2-группа. Пусть теперь $M \in \mathfrak{M}(\langle x, y\rangle)$. Тогда x^2, y^2 лежат в одной силовской 2-подгруппе из $[M, M] \simeq Sz(q)$ и по предложению 1 сопряжены в $[M, M]$. Лемма доказана.

До конца доказательства S означает некоторую фиксированную силовскую 2-подгруппу группы G, содержащую некоторый элемент x порядка 4. Если S конечна, то по лемме 3 и теореме Шункова [6] G локально конечна и для нее утверждение теоремы очевидно. Поэтому дальше будем предполагать, что S бесконечна.

Лемма 5. *(а) Любые две инволюции из S, сопряженные в G, сопряжены в $N_G(S)$.*

(б) $N_G(S) = SR$, где R — циклическая группа порядка $q-1$, действующая при сопряжении транзитивно на множестве $\{x^2 \mid x$ — элемент порядка 4 из $S\}$.

(в) $S = S_0 \times V$, где $S_0 = [S, R]$ изоморфна силовской 2-подгруппе из $Sz(q)$, а $V = C_S(R)$ — элементарная абелева группа.

(г) $C_G(V) = N_G(V) = V \times P$, где $P \simeq Sz(q)$.

Доказательство. *(а)* Пусть $u = v^g$, где u, v — инволюции из S. Тогда $u \in S \cap S^g$ и по лемме 1 $\langle S, S^g\rangle \le C_G(u)$. Пусть $s = x^2$. Тогда $\langle s, s^g\rangle$ — конечная подгруппа из $C_G(u)$ и поэтому существует элемент c из $C_G(u)$ такой, что $\langle s, s^{gc}\rangle$ — 2-группа. По лемме 3 $s^{gc} \in S$, что по той же лемме означает, что $S^{gc} = S$, т.е. $gc \in N_G(S)$. Теперь $u = u^c = v^{gc}$, т.е. u и v сопряжены в $N_G(S)$.

(б) Пусть P — подгруппа из G, изоморфная $Sz(q)$, S_0 — ее силовская 2-подгруппа, a - элемент порядка 4 из S_0. По лемме 4 x^2 и a^2 сопряжены в G и по лемме 3 S_0 сопряжена с подгруппой из S. Не нарушая общности, можно считать, что $S_0 \le S$. По предложению 1 $N_P(S_0)$ содержит циклическую подгруппу R порядка $q-1$, транзитивно переставляющую инволюции из S_0. По лемме 3 $R \le N_G(S)$.

Покажем, что $C_S(R) \times S_0 = S$ и $C_S(R)$ — элементарная абелева 2-группа. Поскольку S локально конечна, SR также локально конечна. Пусть $v \in S \setminus S_0$. Тогда $H = \langle v, S_0, R\rangle$ — конечная подгруппа, содержащаяся в элементе из $\mathfrak{M}(H)$, который по условию изоморфен $V_0 \times P_1$, где V_0 — нетривиальная элементарная абелева 2-подгруппа, а $P_1 \simeq P$. Поскольку все элементы нечетного порядка из $V_0 \times P_1$ содержатся в P_1, то R содержится в P_1. Так как $[R, S_0] = S_0$ и $[R, V_0 \times P_1] \le P_1$, то $S_0 \le P_1$ и, следовательно, S_0 — силовская 2-подгруппа в P_1. Таким образом, смежный класс vS_0 содержит инволюцию, которую R централизует. Это означает, что $S = S_0 \cdot C_S(R)$. Более точно, $S = S_0 \times C_S(R)$ (поскольку $C_{S_0}(R) = 1$), $C_S(R)$ порождается инволюциями и поэтому элементарная абелева.

Отсюда, в частности, следует, что все инволюции вида a^2, где $a \in S$, содержатся в S_0 и их число равно $q-1$.

Пусть y — элемент нечетного порядка из $N_G(S)$. Тогда y нормализует $[S_0, S_0] = [S, S]$. Пусть v — инволюция из $[S_0, S_0]$. Тогда в R найдется элемент r для которого $v^y = v^r$, и $v^{yr^{-1}} = v$. Так как $C_G(v) = S$, то $y \in Sr$ и *(б)* доказано. Попутно мы доказали *(в)*.

(г) Сохраним обозначения, введенные при доказательстве пункта *(б)*. Заметим вначале, что $N_G(R)/R$ — элементарная абелева 2-группа. Действительно, пусть $y \in N_G(R)$. По условию $\langle y, R\rangle \le N_L(R)$, где $L \simeq Sz(q) \times T$, а T — элементарная абелева 2-группа. По предложению 1 $y^2 \in R$. Поскольку $V \le C_G(R)$ и $N_G(R)/R$ — элементарна, $N_G(R) \le C_G(V)$. Отсюда и из предложения 1 вытекает, что $C_G(V) \ge P$. То, что $C_G(V) = N_G(V)$, следует из пунктов *(а)* и *(б)*.

Пусть K - конечная подгруппа из $C_G(V)$, тогда $K \le L \simeq Sz(q) \times V_0$. Можно считать, что $L \cap S = S_0$. Поскольку $N_G(S_0) = SR = S_0R \times V$, то $R \le Sz(q)$.

Теперь $N_L(R) \le N_G(R) \le C_G(V)$ и $Sz(q) \le C_G(V)$. Т.о. $C_G(V)/V$ насыщена $Sz(q)$. По результату Шлепкина-Рубашкина [10], $C_G(V)/V \simeq Sz(q)$ и лемма доказана.

До конца доказательства сохраним обозначения леммы 5.

Лемма 6. $C_G(R) = R \times V$.

Доказательство. Покажем вначале, что все 2-элементы из $C_G(R)$ порождают элементарную абелеву 2-подгруппу. Пусть a – 2-элемент из $C_G(R)$. Если a — не инволюция, то a — элемент порядка 4 и $1 \ne a^2$ — инволюция, централизующая R. Это противоречит лемме 2. Поэтому все 2-элементы из $C_G(R)$ — инволюции. Предположим, что не все они перестановочны. Пусть a и b — неперестановочные инволюции из $C_G(R)$. По предложению 1 в $\langle a, b\rangle$ есть нетривиальный элемент нечетного порядка, который инвертируется элементами a и b. Это противоречит строению подгрупп из $\mathfrak{M}(\langle R, a, b\rangle)$. Итак, все 2-элементы из $C_G(R)$ порождают элементарную абелеву подгруппу W. Поскольку $V \le C_G(R)$, то $V \le W$ и $W \le C_G(V) = V \times P$ (по лемме 5). Теперь понятно, что $W = V$. Поскольку $W \trianglelefteq C_G(R)$, то $C_G(R) \le N_G(V)$. По лемме 5 пункт *(г)* $N_G(V) = C_G(V)$, откуда вытекает заключение леммы.

Лемма 7. *Если H — подгруппа из G, изоморфная $Sz(q)$, то H сопряжена с P.*

Доказательство. В силу леммы 4 можно считать, что $P \cap H$ содержит инволюцию из S. По леммам 5, 3 и 1 $H \cap S = S_0$ — силовская 2-подгруппа в H. По лемме 5 $N_H(S_0) \le C_G(V) = P \times V$, поэтому, можно считать, что $R \le H$. По предложению 1 существуют инволюции $a \in P$ и $b \in H$, инвертирующие R. Их произведение ab содержится по лемме 6 в $C_G(R) = R \times V$. По лемме 1 $H = \langle S_0, b\rangle$ и по лемме 5 $H \le C_G(V)$. Но тогда $H = P$. Лемма доказана.

Лемма 8. *$C_G(V)$ содержит все инволюции из G.*

Доказательство. Предположим, что $C_G(V)$ содержит не все инволюции из G. Тогда найдутся инволюции $v \in V$ и $u \in G$, для которых $K = \langle u, v\rangle$ содержит нетривиальный элемент нечётного порядка. По условию и лемме 7 K содержится в подгруппе $W \times P^g$, где W - элементарная абелева 2-группа. Поэтому $K^{g^{-1}} \le W^{g^{-1}} \times P$. По лемме 3 $W^{g^{-1}} \le S$ и, следовательно, $K^{g^{-1}} \le C_G(V)$. Пусть $v^{g^{-1}} = sw$, где $w \in V$, а $s \in P$. Поскольку sw инвертирует нетривиальную погруппу нечетного порядка из $K^{s^{-1}}$, $s \ne 1$. Не нарушая общности, можно считать, что $s \in S$. Но тогда sw и v сопряжены в $N_G(S)$, что невозможно по лемме 5.

Лемма 9. $C_G(V) = G$.

Доказательство. По предыдущей лемме и лемме 5 *(г)* $C_G(V) = \left\langle x \in G \mid x^2 = 1\right\rangle$. Поэтому $C_G(V) \triangleleft G$, откуда $G = N_G(V) = C_G(V)$. Лемма доказана.

Теперь по лемме 5 *(г)* $G = V \times P$, и теорема доказана.

Список литературы

[1] M. Suzuki, *A new type of simple groups of finite order*, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A., 46 (1960), 868–870. MR0120283

[2] А. А. Дуж, А. А. Шлепкин, *О периодической группе Шункова, насыщенной прямыми произведениями конечных элементарных абелевых 2-групп и* $L_2(2^n)$,Труды ИММ УрО РАН, **17**:4 (2011), 83–87.

[3] Д. В. Лыткина, *Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп*, Сиб. мат. журнал, **52**:2 (2011), 340–349. MR2841553

[4] Д. В. Лыткина, *Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп II*, Сиб. мат. журнал, **52**:5 (2011), 1096–1112. MR2908130

[5] Д. В. Лыткина, *Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4*, Матем. сист., Красноярск: КрасГАУ, №4 (2005), 602–617.

[6] Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, *О группах с заданными свойствами конечных подгрупп, порожденных парами 2-элементов*, Сиб. матем. журн., **54**:1 (2013).

[7] Д. В. Лыткина, К. А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных* $L_2(q)$ *и ее центральными расширениями*, Матем. сист., Красноярск: КрасГАУ, №5 (2006), 35–45.

[8] И. Н. Санов, *Решения проблем Бернсайда для периода 4*, Учен. записки ЛГУ. Сер. матем., №10 (1940), 166–170. MR0003397

[9] К. А. Филиппов, *Группы, насыщенные конечными неабелевыми группами и их расширениями*: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Красноярск, 2006.

[10] А. К. Шлепкин, А. Г. Рубашкин, *О группах, насыщенных конечным множеством групп*, Сиб. матем. журн., **45**:6 (2004), 1397–1400. MR2123302

[11] А. К. Шлепкин, *Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы*, Сб. тез. 3-ймеждунар. конф. по алгебре, Красноярск, (1993), 363.

[12] В. П. Шунков, *О периодических группах с почти регулярной инволюцией*, Алгебра и логика, **11**:4 (1972), 470–494. Zbl 0275.20074

Анна Александровна Дуж
Красноярский государственный аграрный университет,
пр. Мира 50,
660049, Красноярск, Россия
E-mail address: anyaduzh@yandex.ru