S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

*Том 10, стр. 41–55 (2013)* УДК 517.927.2
MSC 34K

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Т. С. АЛЕРОЕВ

Abstract. In this paper we consider boundary value problems for differential equations of fractional order. In particular, there are allocated areas in the complex plane, where the problems under consideration have their eigenvalues.

**Keywords:** function of Mittag-Leffler type, spectrum, eigenvalue, fractional derivative.

## 1. Основные понятия.

Пусть $f(x) \in L_1(0,1)$. Тогда, функция

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \in L_1(0,1)$$

называется дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ с началом в точке $x = 0$, и функция

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(1-x)^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^1 (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt \in L_1(0,1)$$

называется дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ с концом в точке $x = 1$ [11]. Здесь $\Gamma(\alpha)$ является гамма-функцией Эйлера. Как известно (см. [11]), функция $g(x) \in L_1(0,1)$ называется дробной производной функции $f(x) \in L_1(0,1)$ порядка $\alpha > 0$ с началом в точке $x = 0$, если

$$f(x) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} g(x).$$

Aleroev, T.S., Boundary value problems for differential equations of fractional order.

© 2013 Aleroev, T.S.

*Поступила 10 декабря 2012 г., опубликована 22 января 2013 г.*

Тогда под символом

$$g(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x),$$

в будущем, мы будем подразумевать

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha},$$

дробный интеграл при $\alpha < 0$ и дробную производную при $\alpha > 0$. Дробная производная

$$\frac{d^\alpha}{d(1-x)^\alpha}$$

порядка $\alpha > 0$ функции $f(x) \in L_1(0,1)$ с концом в точке $x = 1$, обозначается так же.

Пусть $\{\gamma_k\}_0^n$ - некоторое множество действительных чисел, удовлетворяющих условию $0 < \gamma_j \leq 1$, $(0 \leq j \leq n)$. Обозначим

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j - 1; \quad \mu_k = \sigma_k + 1 = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j \ \ (0 \leq k \leq n),$$

и предположим, что

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j - 1 = \sigma_n = \mu_n - 1 > 0.$$

Следуя М. М. Джрбащяну [11], рассмотрим интегро-дифференциальные операторы

$$D^{(\sigma_0)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}} f(x),$$

$$D^{(\sigma_1)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x),$$

$$D^{(\sigma_2)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_2)}}{dx^{-(1-\gamma_2)}} \frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^{(\sigma_n)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \frac{d^{\gamma_{n-1}}}{dx^{\gamma_{n-1}}} \cdots \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x).$$

При этом отметим, что если $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 1$, то, очевидно, что

$$D^{(\sigma_k)} f(x) = f^{(k)}(x) \ \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Целью нашего исследования являются краевые задачи для следующих уравнений

$$D^{(\sigma_n)} u - \big[\lambda + q(x)\big] u = 0, \quad 0 < \sigma_n < \infty, \tag{1.1}$$

$$u'' + \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} u + q(x) u = \lambda u, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1.2}$$

с различными краевыми условиями.

Уравнение (1.1) является одним из базовых уравнений математической модели случайного блуждения точечной частицы, которая начинает двигаться от начала координат в момент $t = 0$ по самоподобному фрактальному множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$. Уравнение (1.2) описывает движение осциллятора под действием упругой силы, характерной для вязкоупругих сред (см. [24] ).

Мы будем рассматривать различные варианты уравнения (1.1).

Начнем с уравнения

$$D^{(\sigma_2)}u + [\lambda^{-1} + q(x)]u(x) = 0, \tag{1.3}$$

где

$$D^{(\sigma_2)}u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^\gamma}dt,$$

$$0 < \gamma < 1.$$

Уравнение (1.3) впервые было исследовано в качестве модельного уравнения дробного порядка $1 < \sigma < 2$ в [5]. В частности, в [5] было установлено, что двухточечная задача Дирихле

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \tag{1.4}$$

для уравнения (1.3), при $q(x) = 0$, эквивалентна интегральному уравнению

$$\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\left[\int_0^x (x-t)^{1-\gamma}u(t)dt - \int_0^1 x^{1-\gamma}(1-t)^{1-\gamma}u(t)dt\right] = \lambda u.$$

Мы также будем рассматривать уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^x \frac{u''(t)}{(x-t)^\gamma}dt + [\lambda^{-1} + q(x)]u(x) = 0, \tag{1.5}$$

которое называется дробным осцилляционным уравнением [20]. Двухточечная задача Дирихле

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

для этого уравнения, как показано в [6], эквивалентна уравнению

$$\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\left[\int_0^x (x-t)^{1-\gamma}u(t)dt - \int_0^x x(1-t)^{1-\gamma}u(t)dt\right] = \lambda u,$$

(в этой статье мы покажем, что оператор, порожденный выражением (1.3) и граничными условиями типа Штурма-Лиувилля, имеет осцилляционные свойства). Таким образом, уравнение (1.3), а не уравнение (1.5), естественно назвать дробным осцилляционным уравнением. Отметим также, что для уравнения

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^\gamma}\,dt - [\lambda + q(x)]u(x) = 0$$

в [12] изучена задача

$$u(0) = 0,\ \ D^{(\sigma_1)}u|_{x=0}, ...,\ \ D^{(\sigma_{n-2})}u|_{x=0} = 0,\ \ u(1) = 0.$$

## 2. Области регулярности.

**Теорема 2.1** Все собственные значения задачи (1.3)–(1.4), при $q(x) \equiv 0$, лежат в угле $|\arg z| < \frac{\pi(1-\gamma)}{2}$, $0 < \gamma < 1$.

**Доказательство.** Рассмотрим выражение $(-D^{(\sigma_2)}f, f)$. Очевидно, что

$$(-D^{\sigma_2}f, f) = -(\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\gamma}dt, f(x)) =$$

$$= (\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int\limits_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\gamma}dt, f'(x)) = (J_\alpha f', f'),$$

где $\alpha = 1-\gamma$ и $J_\alpha$ – оператор дробного интегрирования порядка $\alpha$:

$$(J_\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds.$$

По известной теореме Мацаева-Паланта [17] (стр. 482), значения формы $(J_\alpha f', f')$ лежат в угле $|\arg z| < \frac{\pi\alpha}{2}$. Это доказывает теорему 2.1.

Так как [5] число $\lambda$ является собственным значением задачи (1.3)–(1.4) тогда и только тогда, когда $\lambda$ является нулем функции $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$ (где $\mu = 1+\gamma$, а

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})}$$

- известная функция типа Миттаг-Леффлера [28]), то имеет место:

**Теорема 2.2** Все нули функции $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$ так же лежат в угле $|\arg z| < \frac{\pi(1-\gamma)}{2}$, $0 < \gamma < 1$. Здесь $\mu = 1+\gamma$.

В [3] были изучены операторы вида

$$A_\gamma^{[\alpha,\beta]}u(x) = c_\alpha \int\limits_0^x (x-t)^{\frac{1}{\alpha}-1}u(t)\,dt + c_{\beta,\gamma}\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{\beta}-1}(1-t)^{\frac{1}{\gamma}-1}u(t)\,dt,$$

порождаемые краевыми задачами для дифференциальных уравнений дробного порядка. В частности, оператор

$$Bu = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\int\limits_0^x (x-\xi)^{1-\alpha}u(\xi)d\xi - x\int\limits_0^1 (1-\xi)^{1-\alpha}u(\xi)d\xi\right],$$

сопутствующий задаче

$$u'' + \lambda\,\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\,u = 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Заметим, что в [31] было показано, что этот оператор не имеет собственных значений внутри круга радиуса $\Gamma(2-\alpha)$, или, что тоже самое, функция $E_{\frac{1}{2-\alpha}}(-\lambda, 2)$ не имеет нулей внутри круга радиуса $\Gamma(2-\alpha)$ и с центром в начале координат.

Отметим, что такой же результат но другими методами, получен в [13] для $0<\alpha<1$ (для нашей методике такие ограничения не требуются).

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ оператор, который изучался в работах [4] и [5]

$$A_\rho(u) = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int\limits_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)dt - \int\limits_0^1 x^{\frac{1}{\rho}-1}(1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)\,dt\right],$$

где $0<\rho<2$. Пусть $\{\lambda_n^\rho\}_1^\infty$ - последовательность всех собственных значений оператора $A_\rho$, пронумерованные в порядке неубывания их модулей, и пусть $U_\rho$ – ограниченная область со спрямляемой границей $\partial U_\rho$ такая, что

$$\lambda_n^\rho \in U_\rho$$

и

$$(\sigma(A_\rho)\backslash\lambda_n^\rho)\cap\overline{U_\rho} = \varnothing.$$

Пусть

$$P_{\lambda_n^\rho}(A_\rho) = -\frac{1}{2*\pi*i}\int\limits_{\partial U_\rho} R_\lambda(A_\rho)d\lambda$$

- риссовский проектор оператора $A_\rho$, отвечающий собственному числу $\lambda_n^\rho$.

**Теорема 2.3.** Риссовский проектор $P_{\lambda_n^\rho}$ непрерывно зависит от параметра $\rho$, $(0<\rho<\frac{1}{2})$.

**Доказательство.** Операторы $A_\rho$ являются суммой специального одномерного оператора и оператора дробного интегрирования.

Известно [18], что операторы дробного интегрирования $I^\alpha$ образуют в $L_p(0,1)$, $(p\geq 1)$ полугруппу, непрерывную в равномерной (операторной) топологии для всех $\alpha>0$ и сильно непрерывную для всех $\alpha\geq 0$ (теорема Хилле). Поэтому $\lim\limits_{\rho\to\rho_0}||A_\rho - A_{\rho_0}|| = 0$ для всех $0<\rho<1/2$, что доказывает теорему 2.3 [7, стр. 270].

**Следствие 2.1.** Пусть $0<\rho<\frac{1}{2}$, тогда

$$\dim P_{\lambda_n^\rho}(A_\rho)L_2(0,1) = 1.$$

**Доказательство.** Так как $\lim\limits_{\rho\to\rho_0}||A_\rho - A_{\rho_0}|| = 0$, то для достаточно близких $\rho$ и $\rho_0$

$$||P_{\lambda_n^\rho}(A_\rho) - P_{\lambda_n^{\rho_0}}(A_{\rho_0})|| < 1.$$

Поэтому из теоремы Б. С. Надя [16, стр. 29] следует, что
$P_{\lambda_n^\rho}(A_\rho)L_2(0,1)$ и $P_{\lambda_n^{\rho_0}}(A_{\rho_0})L_p(0,1)$ имеют равные размерности.
Т.к.

$$\dim P_{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}(A_{\frac{1}{2}})L_2(0,1) = 1,$$

то для всех $\rho \in (0,2)$ функция $\dim P_{\lambda_n^\rho}(A_\rho)L_2(0,1) = 1$.

**Теорема 2.4** Все нули функции $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$ простые.

**Доказательство.** Во-первых отметим, что задача (1.3)–(1.4) при $q(x) = 0$, эквивалентна уравнению (см. [5])

$$u(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(1+\gamma)}\left[\int_0^x (x-t)^\gamma u(t)\,dt - x^\gamma \int_0^1 (1-t)^\gamma u(t)\,dt\right] = 0, \tag{2.1}$$

и что число $\lambda$ является собственным значением задачи (1.3)–(1.4) при $q(x) = 0$, тогда и только тогда, когда $\lambda$ является нулём функции $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$.
Перепишем уравнение (2.1) как

$$u(x) + \lambda A u = 0, \tag{2.2}$$

где $A = A_0 - A_1$,

$$A_0 u = \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)}\int_0^x (x-t)^\gamma u(t)\,dt$$

и

$$A_1 u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^1 x^\gamma (1-t)^\gamma u(t)\,dt.$$

Ясно, что $A_0$ и $A_1$ являются ядерными операторами. Таким образом, имеет смысл определитель

$$det(I - \lambda A) = \prod (1 - \lambda\lambda_j(A)),$$

который называется характеристическим определителем оператора $A$, и обозначается через $D_A(\lambda)$. Выше (следствие 2.1), было доказано, что геометрическая кратность собственных значений задачи (1.3)–(1.4) равна 1.

Теперь покажем, что и алгебраическая кратность этих собственных значений равна 1, или, что тоже самое, все нули функции $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$ простые. Так как $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$ является функцией рода ноль, то мы можем ее представить как

$$E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu) = C \cdot \prod (1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}),$$

где $\lambda_j$– нули функции $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$. Предположим, что $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$ имеет кратные нули. Для определенности, и не теряя общности, пусть $\lambda_1$ будет нулем кратности 2, а все остальные нули будут простыми. Тогда мы имеем

$$E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu) = C \cdot (1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}) D_A(\lambda),$$

где $C = \frac{1}{\Gamma(\mu)}$. Или, что то же самое,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(\mu + k\mu)} = C \cdot (1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}) \cdot \sum a_n \lambda^n, \tag{2.3}$$

($a_0 = 1$) где коэффициенты $a_n$ получаются из рекуррентных соотношений (см. [25])

$$(n+1)a_{n+1} + \sum_{s=1}^{n} a_n \chi_{n+1-s} = -\chi_{n+1} = sp(A^{n+1}).$$

В частности,

$$a_1 = -\chi_1 = spA = sp(A_0) + sp(A_1).$$

Т.к. $sp(A_0) = 0$, то $sp(A) = sp(A_1) = \frac{1}{\Gamma(2\mu)}$, то отсюда $a_1 = -\chi_1 = -\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)}$. Для выполнения выражения (2.3), нужно чтобы

$$a_1 - \frac{1}{\lambda_1} a_0 = -\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)}$$

или

$$-\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)} - \frac{1}{\lambda_1} a_0 = -\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)}.$$

Последнее равенство показывает, что предположение, что $\lambda_1$ имеет кратность, равную 2, неправильно. Это доказывает теорему 2.4.

**Теорема 2.5.** Задача (1.3) – (1.4), при $q(x) \equiv 0$, не имеет собственных значений внутри круга радиуса $\frac{\Gamma(4-2\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)}$ с центром в начале координат.

**Доказательство.** Известно, что [5] задача (1.3)-(1.4), при $q(x) \equiv 0$, эквивалентна интегральному уравнению

$$(2.4) \qquad u(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(2-\gamma)} \left[ \int_0^x (x-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi - x^{1-\gamma} \int_0^1 (1-\xi)^{1-\gamma} u(\xi)\, d\xi \right] = 0$$

и, что число $\lambda$ является собственным числом задачи (1.3)-(1.4) тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $E_{\frac{1}{2-\gamma}}(-\lambda, 2-\gamma)$.

Перепишем оператор

$$Au = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \left[ \int_0^x (x-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi - x^{1-\gamma} \int_0^1 (1-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi \right]$$

в виде

$$Au = A_0 u - A_1 u,$$

где

$$A_0 u = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^x (x-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi,$$

и

$$A_1 u = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^1 x^{1-\gamma} (1-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi.$$

Ясно, что при $0 < \gamma < 1$, операторы $A_0$ и $A_1$ ядерные [16]. Поэтому,

$$spA = sp(A_0 - A_1) = sp(A_0) - sp(A_1).$$

Более того, ясно, что $sp(A_0) = 0$, поэтому

$$sp(A) = -sp(A_1).$$

Так как оператор $A_1$ одномерный, то легко можно найти его след. Для этого рассмотрим уравнение

$$u(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^1 x^{1-\gamma}(1-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi = 0.$$

Его соответствующий определитель Фредгольма

$$d(\lambda) = |1 - \lambda K_{11}|,$$

где

$$K_{11} = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^1 \xi^{1-\gamma}(1-\xi)^{1-\gamma} d\xi = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)}.$$

Отсюда, $sp(-A) = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)}$. Таким образом, $\lambda_1 + \sum\limits_{i=2}^{\infty} \lambda_i = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)}$. Так как ядро нашего оператора неотрицательно, то $\lambda_1$ является положительным числом. Далее, из теоремы 2.1 следует что, $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \lambda_i$ также является положительным числом. Поэтому, $\lambda_1 < \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)}$, что и доказывает теорему 2.5. Или что тоже самое, функция $E_{\frac{1}{2-\gamma}}(-\lambda, 2-\gamma)$ не имеет нулей внутри круга с радиусом $\frac{\Gamma(4-2\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)}$ и с центром в начале координат.

В этом пункте, и везде, мы будем иметь ввиду $1/\rho = \alpha > 2$.

В [3] было заявлено, что многие из результатов, представленных в работе [19], могут быть распространены на операторы вида $A_\gamma^{[\alpha,\beta]}$. В самом деле, пусть $K$ - конус неотрицательных функций в $L^2(0,1)$. Оператор $A$ называется $u_0$-положительным, если существует ненулевой элемент $u_0 \in K$, такой, что для всякого ненулевого $x \in K$, можно указать числа $\alpha(x), \beta(x) > 0$ при которых

$$\alpha(x) u_0 \le Ax \le \beta(x) u_0.$$

Оператор $A$ называется $u_0$-ограниченным сверху, если каждому ненулевому $x \in K$ соответствует такое $\beta(x) \ge 0$, что

$$Ax \le \beta(x) u_0.$$

В [9] было показано, что оператор $A$ $u_0$-ограничен и что за $u_0(t)$ в этом случае можно взять функцию

$$u_0(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [t^{\alpha-1}(1-s) - (t-s)^{\alpha-1}] ds +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} ds = \frac{t^{\alpha-1}(1-t)}{\alpha\Gamma(\alpha)}$$

В [19] было показано, что если ядро оператора удовлетворяет неравенствам

$$u_0(t)b_1(s) \leq K(t,s) \leq u_0(t)b_2(s), \tag{2.5}$$

то за $\alpha(u_0)$ и $\beta(u_0)$, мы можем взять

$$\alpha(u_0) = \int_0^1 b_1(t)u_0(t)dt,$$

$$\beta(u_0) = \int_0^1 b_2(t)u_0(t)dt.$$

Ядро оператора $K(t,s)$ обладает многими полезными свойствами. В частности, как показал наш аспирант С. В. Ерохин [26], $K(t,s) = K(1-s, 1-t)$. С помощью этого, довольно очевидного свойства, можно показать [9], [27] что за $b_1$ мы можем взять

$$b_1(s) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} s(1-s)^{\alpha-1}.$$

а за $b_2(s)$ можем взять $\alpha(\alpha-1)$.

**Теорема 2.6. (частичная проблема собственных значений).** Для первого собственного значения $\lambda_1$ оператора

$$Au = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[-\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)dt + \int_0^1 x^{\frac{1}{\rho}-1}(1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)\,dt\right],\ (1/\rho = \alpha > 2),$$

справедливы неравенства

$$\frac{\alpha^2}{\Gamma(2+2\alpha)} \leq \lambda_1 \leq \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}B(2;\alpha),$$

где $B$ – бета-функция Эйлера.

**Доказательство.** Вычислим $\alpha(u_0)$ и $\beta(u_0)$ :

$$\alpha(u_0) = \int_0^1 \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} s(1-s)^{\alpha-1}\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}s^{\alpha-1}(1-s)ds$$

$$= \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^2}\int_0^1 s^{\alpha}(1-s)^{\alpha} = \frac{\alpha^2}{\Gamma(2+2\alpha)},$$

$$\beta(u_0) = \int_0^1 \alpha(\alpha-1)\frac{s^{\alpha-1}(1-s)}{\alpha\Gamma(\alpha)}ds = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}B(2;\alpha).$$

Теорема 2.6 доказана.

**Следствие 2.2.** Пусть $1/\rho = \alpha > 2$, тогда для первого нуля $\lambda_1$ функции $E_\rho(\lambda; \frac{1}{\rho})$ справедливы двусторонние оценки

$$\frac{\alpha^2}{\Gamma(2+2\alpha)} \leq \lambda_1 \leq \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}B(2;\alpha).$$

Утверждение следствия 2.2 следует из теоремы 2.6 и из того факта, что число $\lambda$ - собственное значение оператора $A$ тогда и только тогда, когда $\lambda$ является нулем функции $E_\rho(\lambda; \frac{1}{\rho})$.

## 3. О собственных функциях краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными.

Рассмотрим задачу

$$D^{\sigma_2}u - \{\lambda + q(x)\}u = 0, \tag{3.1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{3.2}$$

М.М. Джрбащян пишет в работе [11], что "вопрос полноты собственных функций задачи (3.1) – (3.2) или более тонкий вопрос о том, составляют ли эти системы базис в $L^2(0,1)$, имеет безусловный интерес, но их решение, повидимому, сопряжено со значительными аналитическими трудностями".

Вопросы полноты систем собственных и присоединенных функций для подобных задач исследованы в [1], [2]. Особо следует отметить фундаментальные результаты в этом направлении, полученные в работах М. М. Маламуда и Л. Л. Оридороги [21], [22], [23]. В [5] (см. также [6]), было установлено, что система собственных функций этой задачи полна в $L^2(0,1)$.

Из теоремы 2.4 следует, что оператор $A$ не порождает присоединенных функций. То, что система собственных функций $\chi_n(x) = x^{\frac{1}{\rho}-1}E_\rho(\lambda_n x^{\frac{1}{\rho}}; \frac{1}{\rho})$ оператора $A$ является полной, но не ортогональной, установлено в [5]. Поэтому, выписываем собственные функции

$$\chi_n^*(x) = (1-x)^{\frac{1}{\rho}-1}E_\rho(\lambda_n(1-x)^{\frac{1}{\rho}}; \frac{1}{\rho})$$

сопряженного оператора

$$A^*u = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int_x^1 (t-x)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)dt - \int_0^1 t^{\frac{1}{\rho}-1}(1-x)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)dt\right].$$

Так как $\{\chi_n\}$ и $\{\chi_n^*\}$ биортогональны, то имеют место формулы

$$G(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_n(x)\chi_n^*(t)}{\lambda_n}, \tag{3.3}$$

$$R_\lambda v = \sum \frac{(v,\chi_n)\chi_n^*}{\lambda - \lambda_n}, \tag{3.4}$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} t^{\frac{1}{\rho}-1}(1-s)^{\frac{1}{\rho}-1} - (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1}, & 0 \le s \le t \le 1 \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\frac{1}{\rho}-1}, & 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}$$

ядро оператора $A$, а $R_\lambda$ соответствующая резольвента. Более того, равенство вида

$$f = \sum_{k=0}^{\infty}(f,\chi_k)\chi_k^*$$

понимается в том смысле, что

$$\lim_{m\to\infty} ||f-\sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k^*||_{L^2(0,1)}=0.$$

Известно, что для того, чтобы система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образовала базис в гильбертовом пространстве $H$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям

(1) $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $H$;
(2) $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ минимальна;
(3) существует константа $M>0$, такая, что для всех $x\in H$

$$\|\sum_{i=1}^{N}(x,\psi_i)\psi_i\|\le M||x||,$$

для всех $N\in\mathbb{N}$, где $\{\psi_i\}$-система, биортогональная к системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нами установлено, что система собственных функций полна и минимальна (так как известно, что система функций минимальна тогда и только тогда, когда для нее существует биортогональная система). Проверка условия 3 будет проведена в отдельной работе.

Рассмотрим уравнение

$$u''+\alpha D_{0x}^{\alpha}u-\lambda u=f(x),\ 0<\alpha<1.$$

В статье [5], был проведен спектральный анализ оператора Штурма-Лиувилля для этого уравнения. Он описывает различные физические процессы [15], в частности движение осциллятора под действием упругих сил, характерных для вязкоупругих сред. В работе [15], Гачаев исследовал различные задачи для этого уравнения. Отметим также, что первая краевая задача для уравнения колебания струны с регуляризованной дробной производной по времени (с учетом трения в среде с фрактальной геометрией), также сводится к задаче Штурма-Лиувилля для этого уравнения.

Для более ясного представления результатов, в начале, рассмотрим следующую задачу.

Найти в классе $C^2(0,1)\bigcap C([0,1])$ решение уравнения

$$u''+\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}u+\lambda u=0,\ \ 0<\alpha<1, \tag{3.8}$$

удовлетворяющее условию

$$u(0)=0,\quad u'(0)=1. \tag{3.9}$$

Задача (3.8) – (3.9) эквивалентна уравнению [5]

$$u(x)=-\int_0^x\left[\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\lambda(x-t)\right]dt+x.$$

Положим

$$K(x,t)=\begin{cases}\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\lambda(x-t), & 0\le t<x<1,\\ 0, \quad x<t\le 1.\end{cases}$$

Как и в [6], последовательность ядер $\{K_n(x,t)\}_1^\infty$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$K_{n+1}(x,t) = \int\limits_t^x K_n(x,t_1)K_1(t_1,t)dt_1.$$

Индукцией по $n$, получим

$$K_n(x,t,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k \lambda^{n-k}}{\Gamma(2n-k\alpha)}(x-t)^{2n-1-k\alpha}.$$

Таким образом, резольвента нашего интегрального уравнения имеет вид

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^n \frac{C_n^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n-m\alpha)}(x-t)^{2n-1-m\alpha}.$$

После чего, соответствующее решение уравнения можно записать в виде

$$u(x) = x + \int\limits_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^n \frac{C_n^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n-m\alpha)}(x-t)^{2n-1-m\alpha}\right] t\,dt. \tag{2.10}$$

**Теорема 3.1.** Число $\lambda$ является собственным значением задачи $(A)$:

$$u'' + \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}u + \lambda u = 0$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

тогда и только тогда, когда $\lambda$ является нулем функции

$$\omega(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^n \frac{C_n^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n-m\alpha+2)}. \tag{3.11}$$

Собственные функции $(A)$ имеют вид

$$\chi_i(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^n \frac{C_n^m \lambda_i^{n-m}}{\Gamma(2n-m\alpha+2)}x^{2n-m\alpha+1}, \tag{3.12}$$

где $\lambda_i$ нули функции $\omega(\lambda)$.

Доказательство этой теоремы следует из (3.10).

Ранее, нами было установлено, что система функций задачи (A) полна [30]. Но эта система не является ортогональной. Поэтому, мы должны, вместе с задачей $A$, рассмотреть сопряженную задачу. Сопряженная задача $(A^*)$ формулируется следующим образом: найти решение уравнения

$$u'' + \frac{d^\alpha}{d(1-x)^\alpha}u + \lambda u = 0, \tag{3.14}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{3.15}$$

Для того, чтобы описать собственные функции задачи $(A^*)$, рассмотрим в классе $C^2(0,1)\bigcap C([0,1])$ следующую задачу Коши: найти решение уравнения

$$u'' + \frac{d^\alpha}{d(1-x)^\alpha}u + \lambda u = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(1) = 0, \quad u'(1) = -1. \tag{3.16}$$

Мы можем показать, что эта задача эквивалентна уравнению

$$u(x) = -\int_x^1 K(x,t)u(t)dt + (1-x),$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} 0, \quad 0 < t < x < 1, \\ \frac{(t-x)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \lambda(t-x), \quad 0 < x < t < 1. \end{cases}$$

Как и выше, мы определим последовательность итерированных ядер через рекуррентные соотношения

$$K_{n+1}(x,t) = \int_x^t K_n(x,\tau)K_1(\tau,t)d\tau.$$

Ясно, что

$$K_n(x,t,\lambda) = \sum_{m=0}^{n} \frac{C_n^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n-m\alpha)}(t-x)^{2n-1-m\alpha}$$

и резольвента

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^n \frac{C_n^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n-m\alpha)}(t-x)^{2n-1-m\alpha}.$$

**Теорема 3.3.** Число $\lambda$ является собственным значением задачи $(A^*)$

$$u'' + \frac{d^\alpha}{d(1-x)^\alpha}u + \lambda u = 0,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

тогда и только тогда, когда $\lambda$ является нулём $\omega(\lambda)$ (3.11). Собственные функции задачи $(A^*)$ имеют вид

$$\overline{\chi_i}(x) = 1 - x + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n+1}\frac{C_n^m \lambda_i^{n-m}}{\Gamma(2n-m\alpha)}(1-x)^{2n-m\alpha},$$

где $\lambda_i$ – нули функции $\omega(\lambda)$.

**Доказательство.** Решение задачи (3.14) - (3.16) имеет вид

$$\overline{\chi}(x) = 1 - x - \int_x^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n+1}\frac{C_n^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n-m\alpha)}(t-x)^{2n-1-m\alpha}\right](1-t)dt. \tag{3.17}$$

Из (3.17) следует, что система собственных функций $\overline{\chi}_i(x)$ задачи $(A^*)$ имеет вид

$$\overline{\chi}_i(x) = 1 - x - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n+1}\frac{C_n^m\lambda_i^{n-m}}{\Gamma(2n-m\alpha+2)}(1-x)^{2n-m\alpha+1}.$$

Теорема 3.3 доказана.

## Список литературы


[1] А.В. Агибалова, *О полноте системы собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов порядков (2-ε) и (1-ε)*, Укр. Мат. Вест. **7**, № 2 (2010), 139–153. MR2768149

[2] А.В. Агибалова, *О полноте систем корневых функций дифференциального оператора дробного порядка с матричными коэффициентами*, Математические заметки, **88**, № 2 (2010), 317–320. MR2867057

[3] Т.С. Алероев, *Об одном классе операторов, связанных с дифференциальными уравнениями дробного порядка*, Сиб. мат. журнал. **46**, № 6 (2005), 1201–1207. MR2195024

[4] Т.С. Алероев, *Задача Штурма-Лиувилля для дифференциальных уравнений дробного порядка с дробными производными в младших членах*, Диф. уравнения **18**, № 2 (1982), 341–342. MR0649679

[5] Т.С. Алероев, *О собственных значениях одной краевой задачи для дифференциального уравнения дробного порядка*, Дифференц. уравнения, **36**, № 10 (2000), 1422–1423. MR1838493

[6] Т.С. Алероев, *Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными*, Дисс. доктора физ.-мат. наук, МГУ 2000.

[7] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М.: «Мир», 1972.

[8] Т.С. Алероев, *Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка*, Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. АН, **1**, № 1 (1994), 6–7.

[9] Алероев А.И., Алероев Т.С. *Об одном классе положительных операторов, порождённых дифференциальными выражениями дробного порядка и краевыми условиями Штурма-Лиувилля.* Известия ЧГПИ, **1** (2009), 184–188.

[10] T.S. Aleroev, H.T. Aleroeva, Ning-Ming Nie, and Yi-Fa Tang. *Boundary Value Problems for Differential Equations of Fractional Order.* Mem. Differential Equations Math. Phys. **49** (2010), 21–82. MR2648170

[11] М.М. Джрбащян, *Краевая задача для дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля дробного порядка.* Изв. Акад. наук Армянской ССР, серия "Математика" **5** (1970), 71–96.

[12] T.S. Aleroev and H. T. Aleroeva, *A problem on the zeros of the Mittag-Leffler function and the spectrum of a fractional-order differential operator.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **25** (2009), 1–18. MR2501413

[13] А.Ю. Попов, *О количестве вещественных собственных значений краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной*, Фундаментальная и прикладная математика, **12** (2006), 137–155. MR2314136

[14] М.М. Джрбащян, А.Б. Нерсесян *Дробные производные и задача Коши для диффренециальных уравнений дробного порядка.* Изв. Акад. наук Армянской ССР, серия «Математика», **3**, № 1 (1968), 3–29.

[15] А.М. Гачаев, *Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка,* Диссертация кандидата физ.-мат. наук, Нальчик, 2005.

[16] И.К. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М: Наука, 1965. MR0220070

[17] И.К. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и их приложения.* М: Наука, 1967. MR0218923

[18] С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* М.: Наука и техника, 1987. MR0915556

[19] М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкий, В.Я. Стеценко, *Приближенные решения операторных уравнений.* М.: Наука (1969). MR0259635

[20] F. Mainardi, *Fractional Relaxation-Oscillation and fractional Diffusion-wave Phenomena*, Chaos, Solitons and Fractals, **7** No. 9 (1996), 1461–1477. MR1409912

[21] М.М. Маламуд, Л.Л. Оридорога, *Аналог теоремы Биркгофа и полнота результатов для дифференциальных уравнений дробного порядка*, Росс. журнал. мат. физ., **8**, № 3 (2001), 287–308.

[22] М.М. Маламуд, Л.Л. Оридорога, *О некоторых вопросах спектральной теории обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка.* Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki **9** (1998), 39–47. Journal of Mathematical Sciences, **174**, No. 4 (2011). MR1704850

[23] M.M. Malamud, *Similarity of Volterra operators and related questions of the theory of differential equations of fractional order*, Trans. Moscow Math. Soc., **55** (1994), 57–122. MR1468456

[24] N.M. Nie, Y.M. Zhao, S. Jimenez, M. Li, Y.F. Tang and L. Vazquez, *Solving two-point boundary value problems of fractional differential equations with Riemann-Liouville derivatives*, J. Syst. Simul. **22**, No. 1 (2010), 1–14, http://www.cc.ac.cn/2009researchreport/0902.pdf.

[25] P. Morse, H. Feshbach, *Methods of theoretical physics.* 2, New-York, 1953. MR0059774

[26] С. В. Ерохин. *Об одном классе осцилляционных матриц*, «Математика, информатика, естествознание в экономике и в обществе». Москва, МФЮА, 2007, 13–16.

[27] Yuan Chengjun, *Multiple positive solutions for (n-1, 1)-type semipositone conjugate boundary value problems of nonlinear fractional differential equations.* E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., **36** (2010), 1–12. Zbl 1210.34008

[28] М.М. Джрбащян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости*, М.: Наука, 1966.

[29] Т.С. Алероев, *О полноте собственных функций одного дифференциального оператора дробного порядка.* Дифференц. уравнения, **36**, № 6 (2000), 829–830. MR1819468

[30] Т.С. Алероев, Б.И. Алероев, *О собственных функциях одного несамосопряженного оператора*, Дифференц. уравнения. **25**, № 11 (1989), 1996–1997.

[31] Т.С. Алероев, *К проблеме о нулях функции Миттаг-Леффлера и спектре одного дифференциального оператора дробного порядка*, Дифференц. уравнения, **36**, № 9 (2000), 1411–1415. MR1838594

Темирхан Султанович Алероев
Московская государственная академия
коммунального хозяйства и строительства,
Средняя Калитниковская ул., 30,
109029, Москва, Россия
*E-mail address*: aleroev@mail.ru