S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 418–435 (2013) УДК 517.95
MSC 35L05, 35N10

КЛАССЫ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. I

М.В. НЕЩАДИМ

Abstract. Proved that formula Smirnov-Sobolev give all real-valued functional invariant solutions of wave equation in space arbitrary dimension. Proved that solution with many phase functions are essential complex-valued. Considered problem finding of amplitude of generalized functional invariant solution for given phase.

Keywords: wave equation, generalized functional invariant solutions.

Введение. Относительно неискажающимися волнами называются [1] решения волнового уравнения с тремя пространственными переменными

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{c^2} u_{tt}, \quad c = \text{const} > 0, \tag{1}$$

вида

$$u = gf(\theta), \tag{2}$$

где функции $\theta = \theta(x, y, z, t)$ и $g = g(x, y, z, t)$ — соответственно фаза и амплитуда — фиксированы, а форма волны f — произвольная функция одного переменного. Н. П. Еругин [2] называет решения такого вида обобщенными функционально-инвариантными решениями (ОФИР). Данное определение, очевидно, переносится на случай любого числа $n \geq 1$ пространственных переменных и, более того, определение ОФИР может быть дано для любой системы дифференциальных уравнений.

Neshchadim M.V., Classes of generalized functional invariant solutions of wave equation. I.

Работа выполнена при финансовой поддержке Математического отделения РАН (проект 1.3.1 – 2012), Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (проект 44 – 2012).

Поступила 19 апреля 2013 г., опубликована 21 мая 2013 г.

Классические примеры явных решений вида (2) — это плоские и сферические волны

$$u = f(z - ct) \text{ и } u = \frac{f(R - ct)}{R}, \;\; R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3}$$

с $\theta = z - ct$, $g = 1$ и $\theta = R - ct$, $g = \dfrac{1}{R}$ соответственно; они восходят к д'Аламберу и Эйлеру [1].

Если амплитуда постоянна ($g = 1$), то получаем определение функционально-инвариантного решения (ФИР). Так, например, в работе С. Л. Соболева [3] доказано, что все ФИР уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy},$$

даются формулой Смирнова-Соболева [4, 5]

$$t\sqrt{a^2(u) + b^2(u)} + xa(u) + yb(u) = c(u),$$

где a, b, c — произвольные функции переменной u. Нетрудно проверить, что для случая n пространственных переменных аналогичная формула

$$t\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2(u)} + \sum_{k=1}^{n} x_k a_k(u) = a_0(u),$$

где $a_k(u)$ — произвольные функции от u, $k = 0, ..., n$, дает ФИР волнового уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} u_{x_k x_k} = u_{tt}.$$

Но в размерности $n \geq 3$ есть ФИР, которые не описываются этой формулой [2, 6–10].

Несмотря на то, что формула Смирнова-Соболева дает только некоторый класс решений волнового уравнения, в этот класс входят решения, имеющие важное физическое значение, и, пользуясь этим классом решений, можно доводить до конца в виде, удобном для вычисления, многие задачи, связанные с отражением и дифракцией волн. Пользуясь принципом наложения, можно из ФИР Смирнова-Соболева составить решения волнового уравнения в пространстве трех и более измерений. В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым [4, 5] были детально изучены комплексные ФИР и, как оказалось, эти решения имеют обширные применения в задачах распространения колебаний (акустических, электромагнитных), связанных с волновым уравнением, а также и в более сложных задачах распространения упругих колебаний.

Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах Н. П. Еругина, М. М. Смирнова, Л. М. Галонен, О. Ф. Меньших, М. С. Шнеерсона [2, 7–19].

В связи с построением частицеподобных решений уравнения (1) в работе [20] возник интерес к решению Бейтмена [21], в котором

$$\theta = z - t + \frac{x^2 + y^2}{z + ct}, \;\; g = \frac{1}{z + ct} \tag{4}$$

(точнее к его комплексифицированным версиям, простейшая из которых получается заменой $z + ct \longmapsto z + ct - i\varepsilon$, $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$). Для решений (3), (4) фаза не определяет амплитуду единственным образом. В плоской волне можно умножить g на произвольную гармоническую функцию от x и y [22], а в сферической — на любую функцию гармоническую на сфере. Аналогичное утверждение для решений Бейтмена приведено в [23].

Менее известно классическое решение вида (2), описывающее цилиндрические волны, найденное впервые Пуассоном [21] и переоткрытое Вольтерра [24],

$$u = \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sqrt{r}} f(r - ct), \tag{5}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arccos(x/r)$. Здесь

$$\theta = r - ct, \;\; g = \frac{\sqrt{x + iy}}{r}. \tag{6}$$

Отметим, что выбор в (5) в качестве f дельта-функции дает решение двумерного волнового уравнения, не обладающее диффузией. Это не противоречит принципу Гюйгенса [1], поскольку (5) как функция x и y имеет начало координат точкой ветвления.

В работе А. П. Киселева [25] обсуждается вопрос построения двухфазных решений, т.е. решений вида $gF(\theta, \varphi)$, где $g = g(x, y, z, t)$ — амплитуда, $\theta = \theta(x, y, z, t)$, $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ — фазы, $F = F(\theta, \varphi)$ — произвольная функция двух аргументов. Функция $F(\theta, \varphi)$ также называется фазой. В связи с задачей построения классов ОФИР приведем некоторые утверждения из работ [25–28].

Теорема A. Выражение

$$u = (A + Bz)\frac{1}{\sqrt{r}} \exp(i\varphi/2) f(r - ct)$$

является решением уравнения (1). Здесь A, B — произвольные константы, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arccos(x/r)$, $f(\xi)$ — произвольная функция одного аргумента.

Следствие. Выражение

$$u = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[(A + Bz)\exp(i\varphi/2) + (C + Dz)\exp(-i\varphi/2)\right] \tag{7}$$

является амплитудой, соответствующей фазе $r - ct$. Здесь A, B, C, D — произвольные константы, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arccos(x/r)$.

Теорема B. Для любой функции $F = F(p, q)$ двух переменных функция

$$\theta = F(x + iy, z + t)$$

является фазой, которой отвечает амплитуда $g = C$, $C = \mathrm{const}$. Данная амплитуда не единственна. Например, для однородной функции F,

$$\theta = \frac{x + iy}{z + t},$$

амплитудой будет и $g = C_0 + C_1(x^2 + y^2 - z^2 + c^2t^2) + \dfrac{C_2}{z + t}$, где C_j — константы, а для квадратичной,

$$\theta = (x + iy)(z + t),$$

среди возможных амплитуд имеется $g = C + \dfrac{C_1}{x^2 + y^2 - z^2 + c^2t^2}$.

Теорема C. Для любой функции $F = F(p, q)$ двух переменных функция

$$\theta = F\left(\frac{x+iy}{z+t}, z - ct + \frac{x^2+y^2}{z+t}\right)$$

является фазой, которой отвечает амплитуда $g = \dfrac{C}{z+t}\left(\dfrac{x+iy}{z+t}\right)^{\mu}$, где μ — произвольная постоянная.

Теорема D. Пусть

$$\theta = x_m - ct + \sum_{j=1}^{m-1} x_j^2(\beta - E_j)^{-1},$$

где $\beta = x_m + ct$, а E_j, $j = 1, ..., m-1$, — произвольные комплексные постоянные. Тогда функция $u = gf(\theta)$, где

$$g = \prod_{j=1}^{m-1} x_j^2(\beta - E_j)^{-1/2},$$

и $f(z)$ — произвольная функция, является решением волнового уравнения

$$u_{x_1x_1} + ... + u_{x_mx_m} = \frac{1}{c^2}u_{tt}, \ \ c = \text{const} > 0.$$

Причем ветви корней можно фиксировать произвольным образом.

Вопросы, связанные с описанием и классификацией фаз и отвечающих им амплитуд, по-видимому, тесно связаны с геометрией. Так, например, Ф. Г. Фридлендер [22] показал, что для фаз вида $\theta = t - h(x, y, z)$, где h вещественно, линии уровня функции $h(x, y, z)$ являются алгебраическими поверхностями 4-го порядка, известными как циклиды Дюпена, и их вырожденными формами.

В работах Н. П. Еругина и М. М. Смирнова [2, 6–10, 13, 14] рассматривается задача, поставленная Р. Курантом: найти все линейные гиперболические уравнения второго порядка, для которых существуют семейства решений относительно неискажающихся волн. В двумерном случае найдены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, при которых существуют ФИР и ОФИР. Для случая $n > 2$ известны отдельные классы таких уравнений, а в общем случае эта задача остается нерешенной. Отметим, что в этом направлении получены некоторые результаты в работах О. Ф. Меньших [15–18] и М. В. Нещадима [29, 30].

В работах Ю. Е. Аниконова и М. В. Нещадима [31–34] построены классы уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, допускающие ОФИР и получены некоторые применения данных результатов к обратным задачам.

В данной работе доказывается, что формула Смирнова-Соболева дает полное описание вещественнозначных ФИР волнового уравнения в пространстве произвольной размерности. Доказывается, что многофазные решения являются существенно комплекснозначными. Рассматривается задача полного описания амплитуд для фазовых функций приведенных в вышеуказанных работах.

И, кроме того, исследуется некоторые переопределенные системы связанные с задачей построения ОФИР.

Все функции в работе предполагаются достаточно гладкими.

§1. Вещественные функционально инвариантные решения волнового уравнения. В данном параграфе доказывается, что формула Смирнова-Соболева дает полное описание вещественнозначных ФИР волнового уравнения в пространстве произвольной размерности и, кроме того, доказывается, что многофазные решения являются существенно комплекснозначными.

Система уравнений, связывающая амплитуду $G = G(x,t)$ и фазы $\Phi^1(x,t)$,...,$\Phi^m(x,t)$, $x=(x_1,...,x_n)$, обобщенного функционально-инвариантного решения $u=G(x,t)F(\Phi^1,...,\Phi^m)$, $m\geq 1$ волнового уравнения

$$\Delta u = u_{tt} \tag{8}$$

(функция $F(p^1,...,p^m)$ является произвольной) имеет вид

$$\begin{gathered}\Delta G = G_{tt},\\ 2<\nabla G,\nabla\Phi^j> + G\Delta\Phi^j = 2G_t{\Phi^j}_t + G{\Phi^j}_{tt},\ \ j=1,...,m,\\ <\nabla\Phi^i,\nabla\Phi^j> = {\Phi^i}_t{\Phi^j}_t,\ \ i,j=1,...,m.\end{gathered} \tag{9}$$

В частности, при $m=1$ получаем систему из трех уравнений

$$\begin{gathered}\Delta G = G_{tt},\\ 2<\nabla G,\nabla\Phi> + G\Delta\Phi = 2G_t\Phi_t + G\Phi_{tt},\\ |\nabla\Phi|^2 = \Phi_t^2,\end{gathered} \tag{10}$$

а при $m=2$ получаем систему из шести уравнений

$$\begin{gathered}\Delta G = G_{tt},\\ 2<\nabla G,\nabla\Phi^j> + G\Delta\Phi^j = 2G_t{\Phi^j}_t + G{\Phi^j}_{tt},\ \ j=1,2,\\ <\nabla\Phi^i,\nabla\Phi^j> = {\Phi^i}_t{\Phi^j}_t,\ \ i,j=1,2.\end{gathered} \tag{11}$$

Из (9) при $G=1$ получаем систему

$$|\nabla\Phi|^2 = \Phi_t^2,\ \ \Delta\Phi = \Phi_{tt}$$

для функционально-инвариантных решений волнового уравнения (8).

Теорема 1. (Формула Смирнова-Соболева в пространстве произвольной размерности.) Все вещественнозначные решения $u(x,t)$, $x=(x_1,...,x_n)$, системы уравнений

$$|\nabla u|^2 = u_t^2,\ \ \Delta u = u_{tt} \tag{12}$$

находятся по формуле Смирнова-Соболева

$$t\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2(u)} + \sum_{k=1}^{n} x_k a_k(u) = a_0(u),$$

где $a_k(u)$ — произвольные функции от u, $k=0,...,n$.

Доказательство. Сделаем замену переменных

$$t = \varphi(x,u). \tag{13}$$

Дифференцируя равенство (13) по переменным $t, x_1, ..., x_n$, найдем производные функции u первого и второго порядка

$$u_t = \frac{1}{\varphi_u}, \;\; u_{x_k} = -\frac{\varphi_{x_k}}{\varphi_u}, \;\; k = 1, ..., n, \tag{14}$$

$$u_{tt} = -\frac{\varphi_{uu}}{\varphi_u^3}, \;\; u_{x_k x_k} = -\frac{\varphi_{x_k x_k}}{\varphi_u} + 2\frac{\varphi_{u x_k}\varphi_{x_k}}{\varphi_u^2} - \frac{\varphi_{uu}\varphi_{x_k}^2}{\varphi_u^3}, \;\; k = 1, ..., n. \tag{15}$$

Подставляем (14) в первое уравнение (12). Получаем

$$|\nabla_x \varphi|^2 = 1. \tag{16}$$

Подставляем (15) во второе уравнение (12). Получаем

$$-\frac{\Delta_x \varphi}{\varphi_u} + 2\frac{1}{\varphi_u^2}\sum_{k=1}^{n} \varphi_{u x_k}\varphi_{x_k} - \frac{\varphi_{uu}}{\varphi_u^3}|\nabla_x \varphi|^2 = -\frac{\varphi_{uu}}{\varphi_u^3}.$$

В силу (16) сокращаются последнее слагаемое в левой части и правая часть. Оставшееся равенство можно записать в виде

$$-\frac{\Delta_x \varphi}{\varphi_u} + \frac{1}{\varphi_u^2}\left(|\nabla_x \varphi|^2\right)_u = 0.$$

Снова в силу (16) получаем

$$\Delta_x \varphi = 0. \tag{17}$$

Далее воспользуемся следующим, хорошо известным утверждением, которое мы приводим с доказательством для замкнутости изложения.

Предложение 1. Пусть функция $u = u(x_1, ..., x_n)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\Delta u = 0, \;\; |\nabla u|^2 = \mathrm{const}.$$

Тогда u — линейная функция.

Доказательство. Воспользуемся следующим равенством

$$\Delta(p \cdot q) = \Delta p \cdot q + p \cdot \Delta q + 2 < \nabla p, \nabla q >,$$

которое справедливо для произвольных функций p, q.

Имеем

$$0 = \Delta|\nabla u|^2 = 2\sum_{k=1}^{n}\left(u_{x_k}\Delta u_{x_k} + |\nabla u_{x_k}|^2\right) = 2\sum_{k=1}^{n}|\nabla u_{x_k}|^2.$$

Отсюда следует, что u — линейная функция.

Предложение доказана.

Применительно к функции φ получаем

$$\varphi + \sum_{k=1}^{n} x_k b_k(u) = b_0(u),$$

где «константы» b_k зависят от u. В силу (16) есть дополнительное условие на b_k

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2(u) = 1.$$

Так как $\varphi = t$, то

$$t + \sum_{k=1}^{n} x_k b_k(u) = b_0(u),$$

или, что то же самое,

$$t\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2(u)} + \sum_{k=1}^{n} x_k a_k(u) = a_0(u),$$

уже для произвольных функций $a_k(u)$, $k = 0, ..., n$.

Теорема доказана.

Далее установим комплекснозначность многофазных ОФИР. Имеет место

Теорема 2. Если вещественные функции $\Phi^1(x,t)$,...,$\Phi^m(x,t)$, $x = (x_1, ..., x_n)$, удовлетворяют системе уравнений

$$< \nabla\Phi^i, \nabla\Phi^j >= {\Phi^i}_t {\Phi^j}_t, \;\; i, j = 1, ..., m, \;\; m \geq 2,$$

то они функционально зависимы.

Доказательство. Достаточно рассмотреть две функции $\Phi(x,t)$, $\Psi(x,t)$ такие, что

$$|\nabla\Phi|^2 = {\Phi_t}^2, \;\; |\nabla\Psi|^2 = {\Psi_t}^2, \;\; < \nabla\Phi, \nabla\Psi >= \Phi_t\Psi_t.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского векторы $\nabla\Phi$, $\nabla\Psi$ пропорциональны, т.е. $\nabla\Psi = \lambda\nabla\Phi$, для некоторой функции $\lambda = \lambda(x,t)$. Система принимает вид

$$|\nabla\Phi|^2 = {\Phi_t}^2, \;\; \lambda^2|\nabla\Phi|^2 = {\Psi_t}^2, \;\; \lambda|\nabla\Phi|^2 = \Phi_t\Psi_t.$$

Отсюда $\Psi_t = \lambda\Phi_t$. Итак,

$$\nabla\Psi = \lambda\nabla\Phi, \;\; \Psi_t = \lambda\Phi_t.$$

Составляя условия совместности $\Psi_{x_i x_j} = \Psi_{x_j x_i}$ и $\Psi_{x_i t} = \Psi_{t x_i}$, получаем, что функции λ и Φ функционально-зависимы, т.е. $\lambda = \lambda(\Phi)$. Но тогда

$$\Psi = \Lambda(\Phi), \;\; \text{где} \;\; \Lambda'(\Phi) = \lambda(\Phi).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Если система

$$< \nabla\Phi^i, \nabla\Phi^j >= {\Phi^i}_t {\Phi^j}_t, \;\; i, j = 1, ..., m, \;\; m \geq 2,$$

допускает функционально независимые решения, то они существенно комплекснозначные.

§2. Построение амплитуд для конкретных фаз. В следующей теореме устанавливается общий вид амплитуд для некоторых фазовых функций приведенных во введении для уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}. \tag{14}$$

Некоторые из полученных формул, очевидно, обобщаются на случай пространства произвольной размерности ≥ 3.

Теорема 3. 1) Если функция $\theta = F(z-t)$ является фазой для решения

$$u = g(x,y,z,t)F(z-t)$$

уравнения (14), то амплитуда g имеет представление

$$g = G(x,y,z-t),$$

где $G(x,y,p)$ — произвольная функция трех переменных, гармоническая по x, y.

2) Если функция $\theta = F(x+iy, z-t)$ является фазой для решения

$$u = g(x,y,z,t)F(x+iy,z-t)$$

уравнения (14), то амплитуда g имеет представление

$$g = G(x-iy, z+t),$$

где $G(p,q)$ — произвольная функция двух переменных.

3) Если функция $\theta = F\left(\dfrac{x+iy}{z+t}\right)$ является фазой для решения

$$u = g(x,y,z,t)F\left(\frac{x+iy}{z+t}\right)$$

уравнения (14), то амплитуда g имеет представление

$$g = G_1(x-iy, z+t) + G_2(x-iy, z-t),$$

где $G_1(\cdot,\cdot)$, $G_2(\cdot,\cdot)$ — произвольные функции двух переменных.

4) Если функция $\theta = F\left(z-t+\dfrac{x^2+y^2}{z+t}\right)$ является фазой для решения

$$u = g(x,y,z,t)F\left(z-t+\frac{x^2+y^2}{z+t}\right)$$

уравнения (14), то амплитуда g имеет представление

$$g = \frac{1}{x}G\left(p,q,\theta\right),$$

где $p = \dfrac{y}{x}$, $q = \dfrac{x+y}{z+t}$ и $G(p,q,\theta)$ — произвольное решение уравнения

$$((1+p^2)G)_{pp} + \frac{2q}{1+p}((1-p)G)_{pq} + \frac{2q^2}{(1+p)^2}G_{qq} = 0.$$

5) Если функция $\theta = F\left(\dfrac{x+iy}{z+t}, z-t+\dfrac{x^2+y^2}{z+t}\right)$ является фазой для решения

$$u = g(x,y,z,t)F\left(\frac{x+iy}{z+t}, z-t+\frac{x^2+y^2}{z+t}\right)$$

уравнения (14), то амплитуда g имеет представление

$$g = \frac{1}{x-iy}H\left(\frac{x+iy}{z+t}\right),$$

где $H(p)$ — произвольная функция одной переменной.

Доказательство.

1) Соотношения (10) принимают вид

$$g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = g_{tt}, \;\; g_z + g_t = 0.$$

Отсюда

$$g_{xx}+g_{yy}=0,\;\; g_z+g_t=0.$$

Следовательно,

$$g=G(x,y,z-t),$$

где $G(x,y,p)$ — произвольная функция трех переменных, гармоническая по x, y.

2) Соотношения (11) принимают вид

$$g_{xx}+g_{yy}+g_{zz}=g_{tt},\;\; g_x+ig_y=0,\;\; g_z-g_t=0,$$

что равносильно

$$g_x+ig_y=0,\;\; g_z-g_t=0.$$

Следовательно,

$$g=G(x-iy,z+t),$$

где $G(p,q)$ — произвольная функция двух переменных.

3) Соотношения (10) принимают вид

$$g_{xx}+g_{yy}+g_{zz}=g_{tt},\;\; g_x+ig_y=0.$$

Отсюда

$$g=G_1(x-iy,z+t)+G_2(x-iy,z-t),$$

где $G_1(\cdot,\cdot)$, $G_2(\cdot,\cdot)$ — произвольные функции двух переменных.

4) Соотношения (10) принимают вид

$$g_{xx}+g_{yy}+g_{zz}=g_{tt},$$

$$\frac{2xg_x+2yg_y}{z+t}+\left(1-\frac{x^2+y^2}{(z+t)^2}\right)g_z+\left(1+\frac{x^2+y^2}{(z+t)^2}\right)g_t=-\frac{2g}{z+t}.$$

Первыми интегралами для второго уравнения являются $p=\dfrac{y}{x}$, $q=\dfrac{x+y}{z+t}$, gx, θ. Поэтому его общее решение можно записать в виде

$$g=\frac{1}{x}G\left(p,q,\theta\right).$$

Подставляя это представление в первое уравнение получим соотношение на функцию $G(p,q,\theta)$:

$$((1+p^2)G)_{pp}+\frac{2q}{1+p}((1-p)G)_{pq}+\frac{2q^2}{(1+p)^2}G_{qq}=0.$$

5) Соотношения (11) принимают вид

$$g_{xx}+g_{yy}+g_{zz}-g_{tt}=0, \tag{15}$$

$$\frac{g_x+ig_y}{x+iy}-\frac{g_z}{z+t}+\frac{g_t}{z+t}=0, \tag{16}$$

$$2(xg_x+iyg_y)(z+t)+2g(z+t)+g_z\left((z+t)^2-(x^2+y^2)\right)+$$
$$+g_t\left((z+t)^2+(x^2+y^2)\right)=0. \tag{17}$$

Первые интегралы (16): g, $\alpha = x - iy$, $\beta = z + t$, $s = (x + iy)\exp\left(-\dfrac{2t}{z+t}\right)$. Поэтому его общее решение имеет вид

$$g = G\left(x - iy, z + t, (x + iy)\exp\left(-\frac{2t}{z+t}\right)\right).$$

Отсюда

$$g_x = G_\alpha + \exp\left(-\frac{2t}{z+t}\right)G_s,$$

$$g_y = -iG_\alpha + i\exp\left(-\frac{2t}{z+t}\right)G_s,$$

$$g_z = G_\beta + (x + iy)\frac{2t}{(z+t)^2}\exp\left(-\frac{2t}{z+t}\right)G_s,$$

$$g_t = G_\beta + (x + iy)\left(-\frac{2}{(z+t)^2} + \frac{2t}{(z+t)^2}\right)\exp\left(-\frac{2t}{z+t}\right)G_s.$$

Подставляя в уравнение (17), получаем

$$\alpha G_\alpha + \beta G_\beta + sG_s + sG_s\left(\frac{t-z}{\beta} - \frac{x^2+y^2}{\beta^2}\right) + G = 0.$$

Так как

$$\frac{t-z}{\beta} - \frac{x^2+y^2}{\beta^2} = \frac{t-z}{\beta} - \frac{\alpha s}{\beta^2}\exp\left(-\frac{2t}{z+t}\right) =$$

$$= \frac{t-z}{\beta} - \frac{\alpha s}{\beta^2}\exp\left(-\frac{2t}{\beta}\right) = 2\frac{t}{\beta} - 1 - \frac{\alpha s}{\beta^2}\exp\left(-\frac{2t}{\beta}\right),$$

то уравнение принимает вид

$$\alpha G_\alpha + \beta G_\beta + sG_s\left(\frac{2t}{\beta} - \frac{\alpha s}{\beta^2}\exp\left(-\frac{2t}{\beta}\right)\right) + G = 0.$$

Так как переменные α, β, s, t независимы, то $G_s = 0$. Итак,

$$\alpha G_\alpha + \beta G_\beta + G = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$G = \frac{1}{\alpha}H\left(\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

где $H(\cdot)$ — произвольная функция одной переменной. Соотношение (15) выполняется тождественно.

Теорема доказана.

§3. Построение амплитуд для фазы, которая является ФИР. В параграфе рассматривается следующая задача. Найти амплитуды ОФИР, если соответствущая фаза является функционально-инвариантными решением?

Подробнее. Пусть $\theta = \theta(x, t)$ — функционально-инвариантное решение волнового уравнения (8), т.е. функция θ является решением системы уравнений

$$\Delta\theta = \theta_{tt}, \ \ |\nabla\theta|^2 = \theta_t^2.$$

Тогда амплитуда $g(x,t)$ ОФИР $u = g(x,t)f(\theta)$ должна быть решением системы уравнений
$$\Delta g = g_{tt}, \ < \nabla g, \nabla\theta >= g_t\theta_t.$$
Итак, задача состоит в интегрировании этой системы уравнений. Возможно, что функция θ не является произвольным функционально-инвариантным решением волнового уравнения.

В размерности один справедлива следующая

Теорема 4. Все обобщенные функционально-инвариантные решения волнового уравнения
$$u_{tt} = A^2u_{xx}, \quad A = A(x,t)$$
являются функционально-инвариантными.

Доказательство. Пусть $\theta = \theta(x,t)$ — функционально-инвариантное решение, т.е.
$$\theta_{tt} = A^2\theta_{xx}, \ \theta_t^2 = A^2\theta_x^2.$$
Для амплитуды $g(x,t)$ решения $u = g(x,t)f(\theta)$ имеем два уравнения
$$g_{tt} = A^2g_{xx}, \ g_t\theta_t = A^2g_x\theta_x.$$
Так как вектор $(\theta_t, -A^2\theta_x) \neq 0$, то из соотношений
$$g_t\theta_t = A^2g_x\theta_x, \ \theta_t^2 = A^2\theta_x^2$$
получаем
$$g_t\theta_x - g_x\theta_t = 0.$$
Следовательно, $g = \varphi(\theta)$ для некоторой функции $\varphi(z)$ одной переменной.

Теорема доказана.

В размерности два имеет место

Теорема 5. Волновое уравнение
$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$$
имеет решения вида
$$u = g(t,x,y)f(\theta),$$
где

1) амплитуда $g(t,x,y)$ — не постоянная функция, т.е. $\nabla g \neq 0$;

2) фаза $\theta(t,x,y)$ — функционально-инвариантное решение волнового уравнения;

3) $f(z)$ — произвольная функция одного переменного;

тогда и только тогда, когда амплитуда $g(t,x,y)$ и фаза $\theta(t,x,y)$ определены следующими формулами:
$$g = -\frac{\beta(\theta)}{x - \theta y + \theta a(\theta) - (1+\theta^2)a'(\theta)} + \gamma(\theta)$$
и $\theta(t,x,y)$ — неявное решение уравнения Смирнова-Соболева
$$t\sqrt{1+\theta^2} + x\theta + y = a(\theta),$$
где $a(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ — произвольные функции одного аргумента.

Доказательство. Амплитуда $g(t,x,y)$ и фаза $\theta(t,x,y)$ определяются из следующей системы уравнений

$$g_{tt} = g_{xx} + g_{yy}, \tag{18}$$

$$g_t\theta_t = g_x\theta_x + g_y\theta_y, \tag{19}$$

$$\theta_{tt} = \theta_{xx} + \theta_{yy}, \tag{20}$$

$$\theta_t^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2. \tag{21}$$

Лемма 1. Система (20), (21) равносильна системе

$$\theta_t = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}, \tag{22}$$

$$\theta_{xx} = 2\frac{\theta_x}{\theta_y}\theta_{xy} - \left(\frac{\theta_x}{\theta_y}\right)^2 \theta_{yy}. \tag{23}$$

Доказательство. Достаточно преобразовать уравнение (20). Из (22) получаем

$$\theta_{tt} = \frac{\theta_x\theta_{tx} + \theta_y\theta_{ty}}{\sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}}, \tag{24}$$

$$\theta_{tx} = \frac{\theta_x\theta_{xx} + \theta_y\theta_{xy}}{\sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}}, \tag{25}$$

$$\theta_{ty} = \frac{\theta_x\theta_{xy} + \theta_y\theta_{yy}}{\sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}}. \tag{26}$$

Подставим (25), (26) в (24)

$$\theta_{tt} = \frac{\theta_x^2\theta_{xx} + 2\theta_x\theta_y\theta_{xy} + \theta_y^2\theta_{yy}}{\sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}}. \tag{27}$$

Подставив (27) в (20), получим (23).

Лемма доказана.

Замечание 1. В работе [30] доказано, что система (22), (23) находится в инволюции [35–37], т.е. условие совместности $(\theta_t)_{xx} = (\theta_{xx})_t$ выполняется тождественно в силу самой системы (22), (23).

Замечание 2. Соотношение (23) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\theta_x}{\theta_y}\right)_x - \frac{\theta_x}{\theta_y}\left(\frac{\theta_x}{\theta_y}\right)_y = 0. \tag{28}$$

Если ввести обозначение

$$H = \frac{\theta_x}{\theta_y}, \tag{29}$$

то для функции H получаем

$$H_x - HH_y = 0 \tag{30}$$

— уравнение Хопфа.

Лемма 2. Функция H удовлетворяет уравнению

$$H_t - \sqrt{1+H^2}H_y = 0. \tag{31}$$

Доказательство. Имеем

$$H_t = \left(\frac{\theta_x}{\theta_y}\right)_t = \frac{\theta_{tx}\theta_y - \theta_x\theta_{ty}}{\theta_y^2} =$$

в силу (25), (26)

$$= \frac{\theta_x\theta_y\theta_{xx} + \theta_y^2\theta_{xy} - \theta_x^2\theta_{xy} - \theta_x\theta_y\theta_{yy}}{\theta_y^2\sqrt{\theta_x^2+\theta_y^2}} =$$

в силу (23)

$$= \frac{1}{\theta_y^2\sqrt{\theta_x^2+\theta_y^2}}\left(2\theta_x^2\theta_{xy} - \frac{\theta_x^3}{\theta_y}\theta_{yy} + \theta_y^2\theta_{xy} - \theta_x^2\theta_{xy} - \theta_x\theta_y\theta_{yy}\right) =$$

$$= \frac{1}{\theta_y^2\sqrt{\theta_x^2+\theta_y^2}}\left((\theta_x^2+\theta_y^2)\theta_{xy} - \frac{\theta_x}{\theta_y}(\theta_x^2+\theta_y^2)\theta_{yy}\right) =$$

$$= \frac{1}{\theta_y^2}\sqrt{\theta_x^2+\theta_y^2}\,\frac{\theta_{xy}\theta_y - \theta_x\theta_{yy}}{\theta_y^2} = \sqrt{1+H^2}H_y.$$

Лемма доказана.

Далее преобразуем соотношение (19). В силу (29) и (22)

$$g_t = \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}g_x + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}g_y.$$

Итак, система (18), (19) эквивалентна системе

$$g_{tt} = g_{xx} + g_{yy}, \tag{32}$$

$$g_t = \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}g_x + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}g_y, \tag{33}$$

где функция $H(t,x,y)$ удовлетворяет соотношениям (30), (31).

Лемма 3. Система (30), (31) находится в инволюции.

Доказательство состоит в непосредственной проверке соотношения $(H_t)_x = (H_x)_t$ в силу самой системы (30), (31).

Лемма 4. Система (32), (33) эквивалентна системе

$$g_t = \frac{H}{\sqrt{1+H^2}}g_x + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}g_y, \tag{33}$$

$$g_{xx} = 2Hg_{xy} - H^2g_{yy} + 2H_yg_x - 2HH_yg_y. \tag{34}$$

Доказательство. Из (33)

$$g_{tt} = g_{tx}\frac{H}{\sqrt{1+H^2}} + g_{ty}\frac{1}{\sqrt{1+H^2}} + g_x\left(\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\right)_t + g_y\left(\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\right)_t, \tag{35}$$

$$g_{tx} = g_{xx}\frac{H}{\sqrt{1+H^2}} + g_{xy}\frac{1}{\sqrt{1+H^2}} + g_x\left(\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\right)_x + g_y\left(\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\right)_x, \tag{36}$$

$$g_{ty} = g_{xy}\frac{H}{\sqrt{1+H^2}} + g_{yy}\frac{1}{\sqrt{1+H^2}} + g_x\left(\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\right)_y + g_y\left(\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\right)_y. \quad (37)$$

Подставляем (36), (37) в (35):

$$\begin{gathered} g_{tt} = \frac{H^2}{1+H^2}g_{xx} + \frac{2H}{1+H^2}g_{xy} + \frac{1}{1+H^2}g_{yy} + \\ +g_x\left[\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\left(\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\right)_x + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\left(\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\right)_y + \left(\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\right)_t\right] + \\ +g_y\left[\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\right)_x + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\right)_y + \left(\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\right)_t\right]. \end{gathered} \quad (38)$$

Из (32) и (38)

$$\begin{gathered} g_{xx} + g_{yy} = \frac{H^2}{1+H^2}g_{xx} + \frac{2H}{1+H^2}g_{xy} + \frac{1}{1+H^2}g_{yy} + \\ +g_x\left[\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\left(\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\right)_x + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\left(\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\right)_y + \left(\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\right)_t\right] + \\ +g_y\left[\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\right)_x + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\right)_y + \left(\frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\right)_t\right]. \end{gathered}$$

Используя (30), (31), убеждаемся, что это соотношение сводится к (34).

Лемма доказана.

Замечание 3. Можно показать, что условие совместности $(g_t)_{xx} = (g_{xx})_t$ системы (33), (34) имеет вид

$$Hg_{xyy} + \frac{H^2H_y}{1+H^2}g_{xy} + H_y^2 g_y = 0,$$

т.е. система (33), (34) не в инволюции.

Далее, от переменных (t, x, y) перейдем к переменным (H, x, y) и функцию g будем искать в виде

$$g = G(H, x, y). \quad (39)$$

В силу (30), (31)

$$g_t = \sqrt{1+H^2}H_yG_H, \;\; g_x = HH_yG_H + G_x, \;\; g_y = H_yG_H + G_y.$$

Подставляем производные g_t, g_x, g_y в (33). Получаем

$$HG_x + G_y = 0. \quad (40)$$

Так как (H, x, y) — независимые переменные, то

$$g = G = \Phi(x - Hy, H) \quad (41)$$

для некоторой функции $\Phi(\cdot,\cdot)$ двух аргументов.

Обозначим

$$p = x - Hy. \quad (42)$$

Из (41), учитывая (30) и (31), получаем

$$g_x = \Phi_p(1 - yHH_y) + \Phi_H HH_y,$$

$$g_{xx} = \Phi_{pp}(1 - yHH_y)^2 + 2\Phi_{pH}HH_y(1 - yHH_y) + \Phi_{HH}(HH_y)^2 -$$
$$-\Phi_p y(2HH_y + H^2H_{yy}) + \Phi_H(2HH_y^2 + H^2H_{yy}),$$
$$g_{xy} = -\Phi_{pp}(H + yH_y)(1 - yHH_y) + \Phi_{pH}(H_y - 2HH_y^2 - H^2H_y) +$$
$$+\Phi_{HH}HH_y^2 - \Phi_p(yH_y^2 + yHH_{yy} + HH_y) + \Phi_H(H_y^2 + HH_{yy}),$$
$$g_y = -\Phi_p(H + yH_y) + \Phi_H H_y,$$
$$g_{yy} = \Phi_{pp}(H + yH_y)^2 - 2\Phi_{pH}H_y(H + yH_y) + \Phi_{HH}H_y^2 -$$
$$-\Phi_p(yH_{yy} + 2H_y) + \Phi_H H_{yy}.$$

Подставляем производные g_x, g_y, g_{xx}, g_{xy}, g_{yy} в (34). Получаем

$$\Phi_{pp}(1 + H^2) = 2\Phi_p H_y.$$

Считая, что $\Phi_p \neq 0$, запишем это соотношение в виде

$$H_y = \Psi(p, H), \tag{43}$$

где

$$\Psi(p, H) = (1 + H^2)\frac{\Phi_{pp}}{2\Phi_p}. \tag{44}$$

В силу (30), (31) и (44)

$$H_y = \Psi(p, H), \ \ H_x = H\Psi(p, H), \ \ H_t = \sqrt{1 + H^2}\Psi(p, H). \tag{45}$$

Непосредственно проверяется (с учетом (30), (31) и (42)), что каждое из условий совместности $H_{xy} = H_{yx}$, $H_{ty} = H_{yt}$ системы (45) эквивалентно одному соотношению

$$\frac{\Psi_p}{\Psi^2} = \frac{1}{1 + H^2}. \tag{46}$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{\Psi} = \frac{p}{1 + H^2} + \frac{\alpha(H)}{1 + H^2}$$

или

$$\Psi = -\frac{1 + H^2}{p + \alpha(H)} \tag{47}$$

для некоторой функции $\alpha(z)$ одной переменной. Из (44) и (47)

$$\frac{\Phi_{pp}}{\Phi_p} = -\frac{2}{p + \alpha(H)},$$

$$\Phi = -\frac{\beta(H)}{p + \alpha(H)} + \gamma(H), \tag{48}$$

для некоторых функций $\beta(z)$, $\gamma(z)$ одной переменной.

Система (45) с учетом (47) принимает вид

$$H_y = -\frac{1 + H^2}{p + \alpha(H)}, \ \ H_x = -\frac{H(1 + H^2)}{p + \alpha(H)}, \ \ H_t = -\frac{(1 + H^2)^{3/2}}{p + \alpha(H)} \tag{49}$$

и находится в инволюции.

Покажем, что функцию H можно находить как решение уравнения Смирнова-Соболева.

Из (30)

$$y + Hx = A(t, H), \tag{50}$$

для некоторой функции $A(\cdot,\cdot)$ двух переменных. Отсюда

$$H_t = \frac{A_t}{x - A_H}, \;\; H_y = \frac{1}{A_H - x}. \tag{51}$$

Подставляем (51) в (31):

$$\frac{A_t}{x - A_H} = \frac{\sqrt{1+H^2}}{A_H - x},$$

$$A = -t\sqrt{1+H^2} + a(H). \tag{52}$$

Итак, функция H — решение уравнения Смирнова-Соболева

$$t\sqrt{1+H^2} + xH + y = a(H) \tag{53}$$

для некоторой функции $a(z)$ одной переменной.

Остается найти соотношения, связывающие функции $a(z)$, $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$. Из (49), (51) и (52)

$$H_y = -\frac{1+H^2}{p+\alpha(H)} = \frac{1}{A_H - x} = \frac{1}{-\frac{tH}{\sqrt{1+H^2}} + a'(H) - x}.$$

Следовательно,

$$p + \alpha(H) = (1+H^2)\left(\frac{tH}{\sqrt{1+H^2}} - a'(H) + x\right)$$

или

$$\alpha(H) + (1+H^2)a'(H) = H\left(t\sqrt{1+H^2} + xH + y\right).$$

В силу (52) это соотношение принимает вид

$$\alpha(H) + (1+H^2)a'(H) = Ha(H). \tag{54}$$

Это и есть искомое соотношение, связывающее функции $a(z)$, $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$. Из (41), (48) и (54) находим

$$g = -\frac{\beta(H)}{x - Hy + Ha(H) - (1+H^2)a'(H)} + \gamma(H).$$

Покажем, что можно положить $\theta = H$. Имеем соотношения

$$\theta_x = H\theta_y, \;\; \theta_t = \sqrt{1+H^2}\theta_y,$$

$$H_x = HH_y, \;\; H_t = \sqrt{1+H^2}H_y.$$

Из них следует, что

$$\begin{vmatrix} \theta_x & \theta_y \\ H_x & H_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta_t & \theta_y \\ H_t & H_y \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. функции θ и H функционально-зависимы: $\theta = s(H)$ для некоторой функции $s(z)$ одной переменной. Но так как в представлении $u = g(x,t)f(\theta)$ функция $f(\theta)$ произвольная, то можно считать, что $\theta = H$.

Теорема доказана.

Замечание 4. В размерности ≥ 3 задача описания амплитуд ОФИР волнового уравнения (8), в предположении, что соответствующая фаза является функционально-инвариантным решением, остается открытой.

Список литературы

[1] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики. Том 2.* М.-Л.: ГТТИ, 1945. 620 с.

[2] Н.П. Еругин, М.М. Смирнов, *Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений.* Дифф. уравнения. **17**:5 (1981), 853–865. MR0616922

[3] С.Л. Соболев, *Функционально-инвариантные решения волнового уравнения.* Труды физ.-мат. инст. им. Стеклова В.А. **5** (1934), 259–264. Zbl 0009.20903

[4] В.И. Смирнов, С.Л. Соболев, *Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний.* Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. **20** (1932), 37 с.

[5] В.И. Смирнов, С.Л. Соболев, *О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии.* Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. **29** (1933), с. 43–51.

[6] М.М. Смирнов, *Функционально-инвариантные решения волнового уравнения.* Доклады АН СССР. **67**: 6 (1949), 977–980. MR0031178

[7] М.М. Смирнов, *Функционально-инвариантные решения волнового уравнения.* Ученые записки ЛГУ. Сер. мат наук. **(135)21** (1950), 127–202. MR0086246

[8] М.М. Смирнов, *Функционально-инвариантные решения уравнений гиперболо-параболического типа с тремя независимыми переменными.* Прикл. мат. мех. **17**:4 (1953), 509–513. Zbl 0053.25102

[9] М.М. Смирнов, *Функционально-инвариантные решения уравнения 4-го порядка с двумя независимыми переменными.* Вестник ЛГУ. Сер. матем., мех., астр.. **2**: 7 (1956), 122–125. MR0088641

[10] М.М. Смирнов, *Функционально-инвариантные решения и неединственность решения задачи Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений.* Дифф. уравнения. **12**:5 (1976), 937–939. MR0442496

[11] Л.М. Галонен, *О некотором упрощении метода отыскания функционально-инвариантных решений волнового уравнения.* Ученые записки физ.-матем. фак. Ростовского гос. ун-та. **32**:4 (1955), 173–178. MR0082036

[12] Л.М. Галонен, *О функционально-инвариантные решениях волнового уравнения в n-мерной области.* **Изв. АН СССР. Сер. матем.**. **21**:1 (1957), 53–72. MR0088642

[13] Н.П. Еругин, *О функционально-инвариантные решениях.* Ученые записки ЛГУ. Сер. мат. наук. **15** (1948), 101–134.

[14] Н.П. Еругин, *Функционально-инвариантные решения уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.* Ученые записки ЛГУ. Сер. мат. наук. **16** (1949), 142–166.

[15] О.Ф. Меньших, *О бегущих волнах для нелинейных уравнений с частными производными второго порядка.* Изв. вузов. Математика. **4** (1974), 84–92.

[16] О.Ф. Меньших, *Функционально-инвариантные решения одного класса уравнений с частными производными второго порядка.* Доклады АН СССР, **205**:1 (1972), 30–32.

[17] О.Ф. Меньших, *О функционально-инвариантных решениях квазилинейных уравнений с частными производными второго порядка.* Дифф. уравнения. **11**:3 (1975), 531–540.

[18] О.Ф. Меньших, *О групповых свойствах нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, все решения которых являются функционально-инвариантными.* Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. **4(34)** (2004), 20–30. MR2123336

[19] М.С. Шнеерсон, *Уравнения Максвелла и функционально-инвариантные решения волнового уравнения.* Дифф. уравнения. **4**:4 (1968), 743–758. MR0231588

[20] A.P. Kiselev, V.V. Perel, *Highly localized solutions of the wave equation.* J. Math. Phys., **41**:4 (2000), 1934–1955. MR1751869

[21] Г. Бейтмен, *Математическая теория распространения электромагнитных волн.* М.: Физматлит, 1958.

[22] F.G. Friedlander, *Simple progressing solutions of the wave equation.* Proc. Cambridge Phil. Soc.. **43**:3 (1947), 360–373. MR0021214

[23] A.P. Kiselev, *Generalisation of Bateman-Hillion progressive wave and Bessel-Gauss pulses solutions of the wave equation via a separation of variables* J. Phys. A. Math. Gen. **36**:23 (2003), L345–L349. MR1986947

[24] V. Volterra, *Sur les vibrations des corps elastiques isotopes* Acta. Math.. **18** (1894), 161–332. MR1554855

[25] А.П. Киселев, *Относительно неискажающиеся волны. Новые примеры.* Записки научных семинаров ПОМИ. **275** (2001), 100–103. MR1854503

[26] А.П. Киселев, *Относительно неискаженные цилиндрические волны, зависящие от трех пространственных переменных.* Математ. заметки. **79**:4 (2006), 635–636. MR2251313

[27] А.П. Киселев, М.В. Перель, *Относительно неискажающиеся волны для m-мерного волнового уравнения.* Диф. уравнения. **38**:8 (2002), 1128–1129. MR2021182

[28] А.П. Киселев, А.Б. Плаченов, *Точные решения m-мерного волнового уравнения из параксиальных. Дальнейшее обобщение решения Бейтмена.* Зап. научн. сем. ПОМИ. **393** (2011), 167–177. MR2870211

[29] М.В. Нещадим, *Функционально-инвариантные решения уравнения Монжа-Ампера.* Вестник Новосибирского государственного университета. **2**:1 (2002), 53–57. Zbl 1026.58029

[30] М.В. Нещадим, *Обратная задача теории совместности и функционально-инвариантные решения волнового уравнения в двумерном пространстве.* Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. **40(299)**:14 (2012), 87–95.

[31] Ю.Е. Аниконов, М.В. Нещадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач математической физики.* Сибирские электронные математические известия. **7** (2010), 11–61. http://semr.math.nsc.ru

[32] Ю.Е. Аниконов, М.В. Нещадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. I.* Сибирский журнал индустриальной математики. **14**: 1 (2011), 27–39. MR2951441

[33] Ю.Е. Аниконов, М.В. Нещадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. II.* Сибирский журнал индустриальной математики. **14**:2 (2011), 28–33. MR2951441

[34] Ю.Е. Аниконов, М.В. Нещадим, *Представления для решений и коэффициентов дифференциальных уравнений 2-го порядка.* Сибирский журнал индустриальной математики, **15**:4 (2012), 17–23.

[35] Ж. Поммаре, *Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли.* М.: Мир, 1983. MR0731697

[36] А.Ф. Сидоров, В.П. Шапеев, Н.Н. Яненко, *Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике.* Новосибирск: Наука, 1984. MR0780937

[37] С.П. Фиников *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* М.–Л.: ГИИТЛ, 1948.

Михаил Владимирович Нещадим
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: neshch@math.nsc.ru