S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 450–453 (2013) УДК 512.554.31

MSC 17B45, 17B56

О ЦЕНТРАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЯХ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ

Ш.Ш. ИБРАЕВ

Abstract. The central extensions of the simple quotient Lie algebras by the corresponding centre of classical modular Lie algebras are calculated.

Keywords: Lie algebra, central extension.

1. Введение

Центральные расширения модулярных классических алгебр Ли вычислены в работе [1]. Согласно результату этой работы, все классические модулярные алгебры, допускающие центральные нерасщепляемые расширения, не являются простыми алгебрами Ли. В положительной характеристике к классическим алгебрам Ли также относят простые фактор-алгебры Ли классических алгебр Ли по соответствующим центрам (см., например [2]). В данной работе вычисляются центральные расширения таких простых алгебр Ли.

Пусть $\mathfrak{g}$ – классическая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$, $C_{\mathfrak{g}}$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\overline{\mathfrak{g}}$ – простая фактор-алгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда центр $C_{\mathfrak{g}}$ является ненулевым только в следующих случаях [3], §3:

1) $C_{\mathfrak{g}} \cong k$, если $\mathfrak{g} = A_l$ и $l + 1 \equiv 0\,(mod\,p)$;
2) $C_{\mathfrak{g}} \cong k$, если $\mathfrak{g} = D_l$, $p = 2$ и $l = 2m + 1$, $m \geq 2$;
3) $C_{\mathfrak{g}} \cong k \oplus k$, если $\mathfrak{g} = D_l$, $p = 2$ и $l = 2m$, $m \geq 2$;
4) $C_{\mathfrak{g}} \cong k$, если $\mathfrak{g} = E_6$ и $p = 3$;
5) $C_{\mathfrak{g}} \cong k$, если $\mathfrak{g} = E_7$ и $p = 2$.

Ibraev, S.S., On the central extensions of classical Lie algebras.

Работа выполнена при поддержке бюджетной программы 055 «Научная и/или научно-техническая деятельность» по теме «Алгебры Ли и их обобщения: коды, схемы и когомологии».

Поступила 11 января 2013 г., опубликована 22 мая 2013 г.

В когомологическом языке задача вычисления пространства классов эквивалентных центральных расширении алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ над k эквивалентна задаче вычисления пространства второй когомологии $H^2(\bar{\mathfrak{g}}, k)$.

Алгебру Ли $\mathfrak{g}$ мы будем рассматривать как алгебру Ли односвязной алгебраической группы G. Будем считать, что алгебра Ли и алгебраическая группа G имеют одинаковую неприводимую систему корней R. Пусть G^1 – ядро отображения Фробениуса F на G. Так как в категории ограниченных модулей теория представлений группы G (или G^1) и теория представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ эквивалентны [4], I.8.6 (I.9.6), то все ограниченные $\mathfrak{g}$-модули могут быть рассмотрены как G-модули (или G^1-модули). Композиция представления группы G на векторном пространстве V и отображения Фробениуса F определяет новое представление, в котором действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (или G^1) тривиально. Обозначим полученный модуль через $V^{(1)}$. Каждому весу μ пространства V сответствует вес $p\mu$ пространства $V^{(1)}$.

Пусть T – максимальный тор G, $X(T)$ – аддитивная группа характеров T, $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ – фундаментальные веса. Для каждого $\lambda \in X(T)$ можно определить одномерный B-модуль k_λ и индуцированный G-модуль $H^0(\lambda) = \mathrm{Ind}_B^G(k_\lambda)$.

Для простых классических модулярных алгебр Ли пространство эквивалентных классов центральных расширений тривиально [1]. Центральные расширения простой фактор-алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ описываются следующей теоремой:

Теорема 1. *Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – простая фактор-алгебра Ли по центру классической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$. Тогда пространство $H^2(\bar{\mathfrak{g}}, k)$ нетривиально и имеют место следущие изоморфизмы G-модулей:*

$$H^2(\bar{\mathfrak{g}}, k) \cong \begin{cases} H^0(\lambda_1)^{(1)} \oplus H^0(\lambda_2)^{(1)} \oplus k, & \textit{если } R = A_2 \textit{ и } p = 3; \\ H^0(\lambda_2)^{(1)} \oplus k, & \textit{если } R = A_3 \textit{ и } p = 2; \\ k, & \textit{если } R = A_l \ (l \geq 4) \textit{ и } l+1 \equiv 0 (mod\, p); \\ H^0(\lambda_1)^{(1)} \oplus H^0(\lambda_3)^{(1)} \oplus H^0(\lambda_4)^{(1)} \oplus k \oplus k, & \textit{если } R = D_4 \textit{ и } p = 2; \\ H^0(\lambda_1)^{(1)} \oplus k, & \textit{если } R = D_{2m+1} \ (m \geq 2) \textit{ и } p = 2; \\ H^0(\lambda_1)^{(1)} \oplus k \oplus k, & \textit{если } R = D_{2m} \ (m \geq 3) \textit{ и } p = 2; \\ k, & \textit{если } R = E_6 \textit{ и } p = 3; \\ k, & \textit{если } R = E_7 \textit{ и } p = 2. \end{cases}$$

2. Доказательство теоремы 1

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет место короткая точная последовательность алгебр Ли

$$0 \to C_{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to \bar{\mathfrak{g}} \to 0.$$

Рассматривая k как одномерное пространство над k, введем тривиальную структуру модуля над алгебрами Ли $C_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$. Тогда короткая точная последовательность коцепных комплексов

$$0 \to (C^*(C_{\mathfrak{g}}, k), d) \to (C^*(\mathfrak{g}, k), d) \to (C^*(\bar{\mathfrak{g}}, k), d) \to 0$$

дает длинную когомологическую последовательность

$$(1) \qquad \cdots \to H^1(\mathfrak{g}, k) \to H^1(C_{\mathfrak{g}}, k) \to H^2(\bar{\mathfrak{g}}, k) \to H^2(\mathfrak{g}, k) \to H^2(C_{\mathfrak{g}}, k) \to \cdots .$$

Так как

$$H^2(C_{\mathfrak{g}}, k) \cong \begin{cases} k, & \text{если } dim\, C_{\mathfrak{g}} = 2; \\ 0, & \text{если } dim\, C_{\mathfrak{g}} = 1 \end{cases}$$

и структура пространства $H^2(\mathfrak{g},k)$ известна, то легко показать, что $H^2(\mathfrak{g},k) \to H^2(C_{\mathfrak{g}},k)$ – нулевое отображение. Действительно, согласно основному результату работы [1],

$$(2) \quad H^2(\mathfrak{g},k) \cong \begin{cases} H^0(\lambda_1)^{(1)} \oplus H^0(\lambda_2)^{(1)}, & \text{если } R = A_2 \text{ и } p = 3; \\ H^0(\lambda_2)^{(1)}, & \text{если } R = A_3 \text{ и } p = 2; \\ H^0(\lambda_1)^{(1)} \oplus H^0(\lambda_3)^{(1)} \oplus H^0(\lambda_4)^{(1)}, & \text{если } R = D_4 \text{ и } p = 2; \\ H^0(\lambda_1)^{(1)}, & \text{если } R = D_l \, (l \geq 5) \text{ и } p = 2, \end{cases}$$

и в случаях $R = A_l$ и $n \geq 4$, $l+1 \equiv 0 (mod\, p)$; $R = E_6$ и $p = 3$; $R = E_7$ и $p = 2$ пространство $H^2(\mathfrak{g},k)$ тривиально. Далее, учитывая, что $H^1(\mathfrak{g},k) = 0$, из (1) получаем следующую точную последовательность:

$$(3) \qquad 0 \to H^1(C_{\mathfrak{g}},k) \to H^2(\overline{\mathfrak{g}},k) \to H^2(\mathfrak{g},k) \to 0.$$

Очевидно, что $H^1(C_{\mathfrak{g}},k) \cong C_{\mathfrak{g}}$ и все модули $H^0(\lambda_i)$ из формулы (2) неприводимы. Тогда последовательность (3) расщепляется и

$$(4) \qquad H^2(\overline{\mathfrak{g}},k) \cong H^2(\mathfrak{g},k) \oplus C_{\mathfrak{g}}.$$

Таким образом, утверждения теоремы 1 следуют из (4) и (2).

Доказательство теоремы 1 завершено.

Для алгебр Ли малых рангов легко можно описать соответствующие центральные расширения.

Пример. Пусть $R = A_2$ и $p = 3$. Выберем матричный базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$: $e_1 = E_{1,2}$, $e_2 = E_{2,3}$, $e_3 = E_{1,3}$, $h_1 = E_{1,1} - E_{2,2}$, $h_2 = E_{2,2} - E_{3,3}$, $f_1 = E_{2,1}$, $f_2 = E_{3,2}$, $f_3 = E_{3,1}$, где $E_{i,j}$ – квадратная матрица третьего порядка с единичным элементом в позиции (i,j) и нулевыми элементами в остальных местах. Когомологические классы следующих коциклов образуют базис пространства $H^2(\mathfrak{g},k)$:

$$\begin{cases} \psi_{3\lambda_1} = f_1^* \wedge f_3^*, \, \psi_{3(-\lambda_1+\lambda_2)} = e_1^* \wedge f_2^*, \, \psi_{-3\lambda_2} = e_2^* \wedge e_3^*; \\ \psi_{3\lambda_2} = f_2^* \wedge f_3^*, \, \psi_{3(\lambda_1-\lambda_2)} = e_2^* \wedge f_1^*, \, \psi_{-3\lambda_1} = e_1^* \wedge e_3^*. \end{cases}$$

Заметим, что G-модули $H^0(\lambda_1)^{(1)}$ и $H^0(\lambda_2)^{(1)}$, указанные в формуле (2), как векторное пространство изоморфны соответственно векторным пространствам $\langle[\psi_{3\lambda_1}], [\psi_{3(-\lambda_1+\lambda_2)}], [\psi_{-3\lambda_2}]\rangle$ и $\langle[\psi_{3\lambda_2}], [\psi_{3(\lambda_1-\lambda_2)}], [\psi_{-3\lambda_1}]\rangle$, где $[\psi]$ означает когомологический класс коцикла ψ. Определим в векторном пространстве $\mathfrak{g}(\lambda) = \mathfrak{g} + \langle z\rangle$ алгебру Ли $(\mathfrak{g}(\lambda), [,]_\lambda)$ по формуле

$$[a,b]_\lambda = [a,b] + \psi_\lambda(a,b)z, \; [a,z]_\lambda = 0, \; a,b \in \mathfrak{g},$$

где $[,]$ – умножение в алгебре Ли $\mathfrak{g}$,

$$\lambda \in \{3\lambda_1, \, 3(-\lambda_1+\lambda_2), \, -3\lambda_2, \, 3\lambda_2, \, 3(\lambda_1-\lambda_2), \, -3\lambda_1\}.$$

Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}(\lambda)$ является центральным расширением алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для простой фактор-алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ центральные расширения определяются коциклами

$$\begin{cases} \overline{\psi}_{3\lambda_1} = \overline{f}_1^* \wedge \overline{f}_3^*, \, \overline{\psi}_{3(-\lambda_1+\lambda_2)} = \overline{e}_1^* \wedge \overline{f}_2^*, \, \overline{\psi}_{-3\lambda_2} = \overline{e}_2^* \wedge \overline{e}_3^*; \\ \overline{\psi}_{3\lambda_2} = \overline{f}_2^* \wedge \overline{f}_3^*, \, \overline{\psi}_{3(\lambda_1-\lambda_2)} = \overline{e}_2^* \wedge \overline{f}_1^*, \, \overline{\psi}_{-3\lambda_1} = \overline{e}_1^* \wedge \overline{e}_3^*; \\ \overline{\psi}_0 = \overline{e}_2^* \wedge \overline{f}_2^* + \overline{e}_3^* \wedge \overline{f}_3^*, \end{cases}$$

где $\{\overline{e}_i, \, \overline{h}_1, \, \overline{f}_i \, : \, i = 1,2,3\}$ – базис фактор-алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$.

Список литературы

[1] W. L. J. van der Kallen, *Infinitesimally central extensions of Chevalley groups.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1973. MR0364484

[2] М. И. Кузнецов, Н. Г. Чебочко, *Деформации классических алгебр Ли*, Математический сборник, **191**:8 (2000), 69–88. MR1786417

[3] Б.Ю. Вейсфеллер, В.Г. Кац, *Экспоненциалы в алгебрах Ли характеристики p.* Изв. АН СССР, сер. матем., **35** (1971), 762–788.

[4] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups.* Academic Press, Inc., Pure and applied mathematics, **131** (1987). MR0899071

Шерали Шапатаевич Ибраев
Университет «Болашак»,
пр. Абая, 31А,
120000, Кызылорда, Казахстан
E-mail address: ibrayevsh@mail.ru