S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 464–474 (2013) УДК 517.956

MSC 35L20

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н.Т. ОРУМБАЕВА

Abstract. The constructional algorithm of finding periodical boundary value problem's solution for system of the quasi-linear of hyperbolic equations is offered. The sufficient conditions of algorithm's conference and unique solvability of investigating problem are established.

Keywords: system of hyperbolic equation, periodical boundary value problem.

1. Введение

На $\overline{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t,u), \qquad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $(n \times n)$ матрица $A(x,t)$, n-вектор-функция $f(x,t)$ непрерывны на $\overline{\Omega}$, n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывна на $[0,T]$, удовлетворяет условию $\psi(0) = \psi(T)$,

$$\|u(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|, \qquad \|A(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|.$$

Периодические краевые задачи для систем гиперболических уравнений различными методами были исследованы многими авторами. В работе [1] более общая нелокальная задача исследовалась методом введения функциональных

Orumbayeva, N.T., On an algorithm of finding periodical boundary value problem for system of the quasi-linear of hyperbolic equations.

Поступила 15 апреля 2013 г., опубликована 5 июня 2013 г.

параметров. Были установлены достаточные условия однозначной разрешимости и предложен алгоритм нахождения ее решения.

В настоящей работе, аналогично схеме построенной в [2] для линейных задач, квазилинейная периодическая краевая задача для систем гиперболических уравнений сводится к эквивалентной задаче, состоящей из семейства периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и функционального соотношения. При решении семейства периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений применяется метод параметризации [3]. Применение такого подхода позволило установить новые признаки однозначной разрешимости квазилинейной периодической краевой задачи и предложить конструктивный алгоритм нахождения ее приближенного решения. Преимуществом нового алгоритма от ранее предложенного является то, что нет необходимости нахождения решения задачи Коши на каждом его шаге.

Пусть $C(J, R^n)$ множество непрерывных на J $(J \subset R^1$ или $J \subset R^2)$ функций $u : J \to R^n$. Функция $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$ называется классическим решением задачи (1)-(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x,t) \in \overline{\Omega}$, и краевым условиям (2),(3).

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ и задачу (1)-(3) запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + f(x,t,u), \qquad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$v(x,0) = v(x,T), \qquad x \in [0,\omega], \tag{5}$$

$$u(x,t) = \psi(t) + \int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi, \qquad t \in [0,T], \quad x \in [0,\omega]. \tag{6}$$

Здесь задача нахождения решения периодической краевой задачи для системы квазилинейных гиперболических уравнений (1)-(3) сведена к семейству периодических краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений (4),(5) и функциональному соотношению (6). Задачи (1)-(3) и (4)-(6) эквивалентны в том смысле, что если функция $u^*(x,t)$ является решением задачи (1)-(3), то пара $\left(u^*(x,t), v^*(x,t) = \dfrac{\partial u^*(x,t)}{\partial x}\right)$ будет решением задачи (4)-(6) и наоборот, если пара $(\widehat{u}(x,t), \widehat{v}(x,t))$-решение задачи (4)-(6), то $\widehat{u}(x,t)$-решение задачи (1)-(3).

2. Схема метода

По шагу $h > 0 : Nh = T$ произведем разбиение $[0,T) = \bigcup\limits_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh)$, $N \geq 2$. При этом область Ω разбивается на N частей. Через $v_r(x,t), u_r(x,t)$ обозначим сужение функции $v(x,t), u(x,t)$ на $\Omega_r = [0,\omega] \times [(r-1)h, rh), r = \overline{1,N}$.

Тогда задача (4)-(6) будет эквивалентна краевой задаче

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = A(x,t)v_r + f(x,t,u_r), \qquad (x,t) \in \Omega_r, \tag{7}$$

$$v_1(x,0) - \lim_{t\to T-0} v_N(x,t) = 0, \quad x\in[0,\omega], \tag{8}$$

$$\lim_{t\to sh-0} v_s(x,t) = v_{s+1}(x,sh), \qquad s=\overline{1,N-1}. \tag{9}$$

$$u_r(x,t) = \psi(t) + \int\limits_0^x v_r(\xi,t)d\xi, \qquad (x,t)\in\Omega_r, \tag{10}$$

где соотношение (9)- условие склеивания функций $v(x,t)$ во внутренних линиях разбиения. Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(x,t)$ при $t=(r-1)h$, т.е. $\lambda_r(x) = v_r(x,(r-1)h)$ и сделаем замену $\widetilde{v}_r(x,t) = v_r(x,t) - \lambda_r(x), \quad r=\overline{1,N}$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial \widetilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)\widetilde{v}_r + A(x,t)\lambda_r(x) + f(x,t,u_r), \quad (x,t)\in\Omega_r, \tag{11}$$

$$\widetilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \quad x\in[0,\omega], \quad r=\overline{1,N}, \tag{12}$$

$$\lambda_1(x) - \lambda_N(x) - \lim_{t\to T-0} \widetilde{v}_N(x,t) = 0, \quad x\in[0,\omega], \tag{13}$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t\to sh-0} \widetilde{v}_s(x,t) - \lambda_{s+1}(x) = 0, \quad x\in[0,\omega], \quad s=\overline{1,N-1}, \tag{14}$$

$$u_r(x,t) = \psi(t) + \int\limits_0^x \widetilde{v}_r(\xi,t)d\xi + \int\limits_0^x \lambda_r(\xi)d\xi, \quad (x,t)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,N}. \tag{15}$$

Задачи (7)-(10) и (11)-(15) эквивалентны в том смысле, что если система пар $\{v_r(x,t),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, является решением задачи (7)-(10), то система троек $\{\lambda_r(x)=v_r(x,(r-1)h), \widetilde{v}_r(x,t)=v_r(x,t)-v_r(x,(r-1)h), u_r(x,t)\}$ $r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (11)-(15) и, наоборот, если $\{\lambda_r(x),\widetilde{v}_r(x,t),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, решение задачи (11)-(15), то $\{\lambda_r(x)+\widetilde{v}_r(x,t),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (7)-(10). Задача (11),(12) при фиксированных $\lambda_r(x),u_r(x,t)$ является однопараметрическим семейством задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где $x\in[0,\omega]$, и эквивалентна интегральному уравнению

$$\widetilde{v}_r(x,t) =$$

$$= \int\limits_{(r-1)h}^t A(x,\tau)\widetilde{v}_r(x,\tau)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^t A(x,\tau)d\tau\cdot\lambda_r(x) + \int\limits_{(r-1)h}^t f(x,\tau,u_r(x,\tau))d\tau. \tag{16}$$

Вместо $\widetilde{v}_r(x,t)$ подставим соответствующую правую часть (16) и повторив этот процесс ν $(\nu=1,2,...)$ раз получим

$$\widetilde{v}_r(x,t) = D_{\nu r}(x,t)\lambda_r(x) + F(x,t,u_r) + G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}_r), \tag{17}$$

где

$$D_{\nu r}(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^t A(x,\tau_1)d\tau_1 + ... + \int\limits_{(r-1)h}^t A(x,\tau_1)... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$F_{\nu r}(x,t,u_r) = \int\limits_{(r-1)h}^t f(x,\tau_1,u_r(x,\tau_1))d\tau_1 + ...+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1)...\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(x,\tau_\nu,u_r(x,\tau_\nu))d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}_r)=$$

$$=\int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1)...\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)\widetilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1.$$

Переходя в правой части уравнения (17) к пределу при $t\to rh-0$, находим $\lim\limits_{t\to rh-0}=\widetilde{v}_r(x,t), r=\overline{1,N}, x\in[0,\omega]$, подставляя их в (13),(14), для неизвестных функций $\lambda_r(x), r=\overline{1,N}$ получим систему функциональных уравнений:

$$Q_\nu(x,h)\lambda(x)=-F_\nu(x,h,u)-G_\nu(x,h,\widetilde{v}), \tag{18}$$

где

$$Q_\nu(x,h)=\begin{vmatrix} I & 0 & \dots & -[I+D_{\nu N}(x,Nh)] \\ I+D_{\nu 1}(x,h) & -I & \dots & 0 \\ 0 & I+D_{\nu 2}(x,2h) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -I \end{vmatrix},$$

$$F_\nu(x,h,u)=(-F_{\nu N}(x,Nh,u_N),F_{\nu 1}(x,h,u_1),...,F_{\nu,N-1}(x,(N-1)h,u_{N-1})),$$

$$G_\nu(x,h,\widetilde{v})=(-G_{\nu N}(x,Nh,\widetilde{v}_N),G_{\nu 1}(x,h,\widetilde{v}_1),...,G_{\nu,N-1}(x,(N-1)h,\widetilde{v}_{N-1})),$$

I-единичная матрица размерности n. Для нахождения системы из трех функций $\{\lambda_r(x),\widetilde{v}_r(x,t),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, имеем замкнутую систему состоящую из уравнений (18),(17) и (15).

Предполагая обратимость матрицы $Q_\nu(x,h)$ при всех $x\in[0,\omega]$, из уравнения (18), где $u_r(x,t)=\psi(t), \widetilde{v}_r(x,t)=0$, находим $\lambda^{(0)}(x)=(\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_2^{(0)}(x),...,\lambda_N^{(0)}(x))$, т.е.

$$\lambda^{(0)}(x)=-[Q_\nu(x,h)]^{-1}\big\{F_\nu(x,h,\psi)+G_\nu(x,h,0)\big\}.$$

Используя уравнение (17), при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$, найдем функции $\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)$, $r=\overline{1,N}$:

$$\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)=D_{\nu r}(x,t)\lambda_r^{(0)}(x)+F_{\nu r}(x,t,\psi)+G_{\nu r}(x,t,0).$$

Функции $u_r^{(0)}(x,t), r=\overline{1,N}$, определяются из соотношения

$$u_r^{(0)}(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x \widetilde{v}_r^{(0)}(\xi,t)d\xi+\int\limits_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi, \quad (x,t)\in\Omega_r.$$

Возьмем непрерывную на $[0,\omega]$ функцию $\rho(x)>0$ и построим множества

$$S(u^{(0)}(x,t),\rho(x))=\{(u_1(x,t),u_2(x,t),...,u_N(x,t)), \quad u_r(x,t)\in C(\Omega_r,R^n):$$
$$\|u_r(x,t)-u_r^{(0)}(x,t)\|<\rho(x),(x,t)\in\Omega_r, r=\overline{1,N}\},$$

$$G(u^{(0)}(x,t),\rho(x))=\{(x,t,u):(x,t)\in\overline{\Omega}, \|u-u_r^{(0)}(x,t)\|<\rho(x),(x,t)\in\Omega_r,$$
$$r=\overline{1,N}, \quad \|u-\lim_{t\to Nh-0}u_N^{(0)}(x,t)\|<\rho(x), \quad t=T, \quad x\in[0,\omega]\}.$$

Условие L. Функция $f(x,t,u)$ имеет непрерывную частную производную $f'_u(x,t,u)$ в $G(u^{(0)}(x,t),\rho(x))$ и $\|f'_u(x,t,u)\|\le L(x)$, где $L(x)$ непрерывная на $[0,\omega]$ функция.

За начальное приближение задачи (11)-(15) возьмем систему $\{\lambda_r^{(0)}(x)$, $\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)$, $u_r^{(0)}(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, и последовательные приближения строим по следующему алгоритму:

Шаг 1. А) Предполагая, что $u_r(x,t)=u_r^{(0)}(x,t)$ первые приближения по $\lambda_r(x)$, $\widetilde{v}_r(x,t)$ находим решая задачу (11)-(14). Взяв $\lambda_r^{(1,0)}(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$, $\widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)=\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)$, систему пар $\{\lambda_r^{(1)}(x),\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, найдем как предел последовательности $\{\lambda_r^{(1,m)}(x),\widetilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\}$, определяемый следующим способом:

Шаг 1.1. Предполагая обратимость матрицы $Q_\nu(x,h)$ при всех $x\in[0,\omega]$, из уравнения (18), где $\widetilde{v}_r(x,t)=\widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)$, находим $\lambda^{(1,1)}(x)=(\lambda_1^{(1,1)}(x),\lambda_2^{(1,1)}(x),$ $...,\lambda_N^{(1,1)}(x)):$

$$\lambda^{(1,1)}(x)=-[Q_\nu(x,h)]^{-1}\big\{F_\nu(x,h,u^{(0)})+G_\nu(x,h,\widetilde{v}^{(1,0)})\big\}.$$

Подставив найденные $\lambda_r^{(1,1)}(x), r=\overline{1,N}$ в (17) находим

$$\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)=D_{\nu r}(x,t)\lambda_r^{(1,1)}(x)+F_{\nu r}(x,t,u^{(0)})+G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}^{(1,0)}).$$

Шаг 1.2. Из уравнения (18), где $\widetilde{v}_r(x,t)=\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)$, определяем

$$\lambda^{(1,2)}(x)=-[Q_\nu(x,h)]^{-1}\big\{F_\nu(x,h,u^{(0)})+G_\nu(x,h,\widetilde{v}^{(1,1)})\big\}.$$

Вновь используя выражение (17), найдем функции $\widetilde{v}_r^{(1,2)}(x,t), r=\overline{1,N}:$

$$\widetilde{v}_r^{(1,2)}(x,t)=D_{\nu r}(x,t)\lambda_r^{(1,2)}(x)+F_{\nu r}(x,t,u^{(0)})+G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}^{(1,1)}).$$

На (1,m)-ом шаге получаем систему пар $\{\lambda_r^{(1,m)}(x),\widetilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\}, r=\overline{1,N}$. Предположим, что решение задачи (11)-(14) последовательность систем пар $\{\lambda_r^{(1,m)}(x),\widetilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\}$, определена при $m\to\infty$ сходится к непрерывным, соответственно, на $x\in[0,\omega]$, $(x,t)\in\Omega_r$ функциям $\lambda_r^{(1)}(x),\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t), r=\overline{1,N}$.

Б) Функции $u_r^{(1)}(x,t), r=\overline{1,N}$, определяются из соотношения

$$u_r^{(1)}(x,t)=\psi(t)+\int_0^x\widetilde{v}_r^{(1)}(\xi,t)d\xi+\int_0^x\lambda_r^{(1)}(\xi)d\xi,\quad (x,t)\in\Omega_r.$$

Шаг 2. А) Предполагая, что $u_r(x,t)=u_r^{(1)}(x,t)$ вторые приближения по $\lambda_r(x)$, $\widetilde{v}_r(x,t)$ находим решая задачу (11)-(14). Взяв $\lambda_r^{(2,0)}(x)=\lambda_r^{(1)}(x)$, $\widetilde{v}_r^{(2,0)}(x,t)=\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)$, систему пар $\{\lambda_r^{(2)}(x),\widetilde{v}_r^{(2)}(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, найдем как предел последовательности $\{\lambda_r^{(2,m)}(x),\widetilde{v}_r^{(2,m)}(x,t)\}$, определяемый следующим способом:

Шаг 2.1. Предполагая обратимость матрицы $Q_\nu(x,h)$ при всех $x\in[0,\omega]$, из уравнения (18), где $\widetilde{v}_r(x,t)=\widetilde{v}_r^{(2,0)}(x,t)$, находим $\lambda^{(2,1)}(x)=(\lambda_1^{(2,1)}(x),\lambda_2^{(2,1)}(x),$ $...,\lambda_N^{(2,1)}(x)):$

$$\lambda^{(2,1)}(x)=-[Q_\nu(x,h)]^{-1}\big\{F_\nu(x,h,u^{(1)})+G_\nu(x,h,\widetilde{v}^{(2,0)})\big\}.$$

Подставив найденные $\lambda_r^{(2,1)}(x), r=\overline{1,N}$ в (17) находим

$$\widetilde{v}_r^{(2,1)}(x,t)=D_{\nu r}(x,t)\lambda_r^{(2,1)}(x)+F_{\nu r}(x,t,u^{(1)})+G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}^{(2,0)}).$$

Шаг 2.2. Из уравнения (18), где $\widetilde{v}_r(x,t)=\widetilde{v}_r^{(2,1)}(x,t)$, определяем

$$\lambda^{(2,2)}(x)=-[Q_\nu(x,h)]^{-1}\big\{F_\nu(x,h,u^{(1)})+G_\nu(x,h,\widetilde{v}^{(2,1)})\big\}.$$

Вновь используя выражение (17), найдем функции $\widetilde{v}_r^{(2,2)}(x,t), r=\overline{1,N}$:

$$\widetilde{v}_r^{(2,2)}(x,t) = D_{\nu r}(x,t)\lambda_r^{(2,2)}(x) + F_{\nu r}(x,t,u^{(1)}) + G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}^{(2,1)}).$$

На (2,m)-ом шаге получаем систему пар $\{\lambda_r^{(2,m)}(x), \widetilde{v}_r^{(2,m)}(x,t)\}, r = \overline{1,N}$. Предположим, что решение задачи (11)-(14) последовательность систем пар $\{\lambda_r^{(2,m)}(x), \widetilde{v}_r^{(2,m)}(x,t)\}$, определена при $m \to \infty$ сходится к непрерывным, соответственно, на $x \in [0,\omega]$, $(x,t) \in \Omega_r$ функциям $\lambda_r^{(2)}(x), \widetilde{v}_r^{(2)}(x,t), r=\overline{1,N}$.

Б) Функции $u_r^{(2)}(x,t), r=\overline{1,N}$, определяются из соотношения

$$u_r^{(2)}(x,t) = \psi(t) + \int\limits_0^x \widetilde{v}_r^{(2)}(\xi,t)d\xi + \int\limits_0^x \lambda_r^{(2)}(\xi)d\xi, \quad (x,t) \in \Omega_r.$$

Продолжая процесс, на k-м шаге получаем систему троек $\{\lambda_r^{(k)}(x), \widetilde{v}_r^{(k)}(x,t), u_r^{(k)}(x,t)\}, r=\overline{1,N}$.

Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма устанавливает

Теорема 1. *Пусть*

1) функция $f(x,t,u)$ удовлетворяет условию L;

2) при некоторых $h>0:\ Nh=T,\ N=1,2,...$ и $\nu,\ \nu=\mathbb{N},\ (nN\times nN)$ матрица $Q_\nu(x,h)$ обратима при всех $x\in[0,\omega]$ и выполняются неравенства

а) $\|[Q_\nu(x,h)]^{-1}\| \le \gamma_\nu(x,h)$,

б) $q_\nu(x,h) = \dfrac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\left[1+\gamma_\nu(x,h)\sum\limits_{j=1}^{\nu}\dfrac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right] \le \mu < 1;$

3) $$\int\limits_0^x\left[z(\xi)L(\xi)e^{\int\limits_0^\xi z(\xi_1)L(\xi_1)d\xi_1}\int\limits_0^\xi g(\xi_1)\max_{t\in[0,T]}\|f(\xi_1,t,\psi(t))\|d\xi_1+\right.$$

$$\left.+g(\xi)\max_{t\in[0,T]}\|f(\xi,t,\psi(t))\|\right]d\xi < \rho(x),$$

где $\alpha(x) = \max\limits_{t\in[0,T]}\|A(x,t)\|,\quad \mu - const,\quad b_1(x) = \gamma_\nu(x,h)h\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\dfrac{(\alpha(x)h)^j}{j!},$

$$b_2(x) = \left[1+\gamma_\nu(x,h)\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!},\quad b_3(x) = \gamma_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!},$$

$$d(x) = \frac{1+b_3(x)}{1-q_\nu(x,h)}q_\nu(x,h)+b_3(x),\quad z(x) = \frac{1+b_3(x)}{1-q_\nu(x,h)}b_2(x)+b_1(x),$$

$$g(x) = z(x)L(x)\int\limits_0^x\Big[b_1(\xi)+b_2(\xi)\Big]d\xi + d(x)b_2(x).$$

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение $u^*(x,t)$, принадлежащее $S(u^{(0)}(x,t),\rho(x))$.

Доказательство. При предположениях относительно данных задачи имеют место неравенства

$$\|F_\nu(x,h,u)\| \le h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,u_r(x,t))\|,$$

$$\|G_\nu(x,h,\widetilde{v})\| \le \frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r(x,t)\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|D_{\nu r}(x,t)\| \le \sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}.$$

Из нулевого шага алгоритма вытекают следующие оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(0)}(x)\| \le b_1(x)\max_{t\in[0,T]}\|f(x,t,\psi(t))\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\| \le b_2(x)\max_{t\in[0,T]}\|f(x,t,\psi(t))\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(0)}(x,t)-\psi(t)\| \le \int\limits_0^x\Big[b_1(\xi)+b_2(\xi)\Big]\max_{t\in[0,T]}\|f(\xi,t,\psi(t))\|d\xi.$$

Учитывая условие L, установим неравенства:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(1,1)}(x)-\lambda_r{}^{(1,0)}(x)\| \le$$
$$\le b_1(x)L(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(0)}(x,t)-\psi(t)\|+$$
$$+b_3(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|,$$
$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\| \le$$
$$\le b_2(x)L(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(0)}(x,t)-\psi(t)\|+$$
$$+q_\nu(x,h)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|.$$

Справедливо неравенство

$$\Delta^{(1,1)}(x) =$$
$$= \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\| + \max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(1,1)}(x)-\lambda_r{}^{(1,0)}(x)\| \le$$
$$\le \Big[b_1(x)+b_2(x)\Big]L(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(0)}(x,t)-\psi(t)\|+$$
$$+\Big[b_3(x)+q_\nu(x,h)\Big]\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|.$$

Таким образом,

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(1,m+1)}(x)-\lambda_r{}^{(1,m)}(x)\| \le$$
$$\le b_3(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,m-1)}(x,t)\|, \qquad (19)$$
$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(1,m+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\| \le$$

$$\leq q_\nu(x,h) \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(1,m)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(1,m-1)}(x,t)\|. \qquad (20)$$

В силу неравенства $q_\nu(x,h) < 1$ следует равномерная сходимость $v_r^{(1,m+1)}(x,t)$, при $(x,t) \in \Omega_r$, к $v_r^{(1)}(x,t)$ и сходимость последовательности систем функций $\lambda_r^{(1,m+1)}(x)$ к непрерывным на $x \in [0,\omega]$ функциям $\lambda_r^{(1)}(x)$ при всех $r = \overline{1,N}$:

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(1,m+1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m}[q_\nu(x,h)]^j \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^{(1,m+1)}(x) - \lambda_r{}^{(1,0)}(x)\| \leq$$

$$\leq b_3(x)\sum_{j=0}^{m}[q_\nu(x,h)]^j \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\| +$$

$$+ \max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^{(1,1)}(x) - \lambda_r{}^{(1,0)}(x)\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(1,m+1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\| + \max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^{(1,m+1)}(x) - \lambda_r{}^{(1,0)}(x)\| \leq$$

$$\leq \Big[1 + b_3(x)\Big] \sum_{j=0}^{m}[q_\nu(x,h)]^j \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(1,0)}(x,t)\| +$$

$$+ \max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^{(1,1)}(x) - \lambda_r{}^{(1,0)}(x)\|.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим оценки:

$$\Delta^{(1)}(x) = \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\| +$$

$$+ \max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^{(1)}(x) - \lambda_r{}^{(0)}(x)\| \leq g(x) \max_{t\in[0,T]} \|f(x,t,\psi(t))\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|u_r^{(1)}(x,t) - u_r^{(0)}(x,t)\| \leq \int_0^x g(\xi) \max_{t\in[0,T]} \|f(\xi,t,\psi(t))\| d\xi < \rho(x).$$

Для систем разностей $\lambda_r{}^{(k+1)}(x) - \lambda_r{}^{(k)}(x)$, $\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)$, $u_r^{(k+1)}(x,t) - u_r^{(k)}(x,t)$, $r = \overline{1,N}$, $k = 1,2,...$ справедливы оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^{(k+1,1)}(x) - \lambda_r{}^{(k+1,0)}(x)\| \leq$$

$$\leq b_1(x)L(x) \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|u_r^{(k)}(x,t) - u_r^{(k-1)}(x,t)\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(k+1,1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t)\| \leq$$

$$\leq b_2(x)L(x) \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|u_r^{(k)}(x,t) - u_r^{(k-1)}(x,t)\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^{(k+1,m+1)}(x) - \lambda_r{}^{(k+1,m)}(x)\| \leq$$

$$\leq b_3(x) \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(k+1,m)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k+1,m-1)}(x,t)\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(k+1,m+1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k+1,m)}(x,t)\| \le$$

$$\le q_\nu(x,h) \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(k+1,m)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k+1,m-1)}(x,t)\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(k+1,m+1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t)\| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{m} [q_\nu(x,h)]^j \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(k+1,1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t)\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^{(k+1,m+1)}(x) - \lambda_r{}^{(k+1,0)}(x)\| \le$$

$$\le b_3(x) \sum_{j=0}^{m-1} [q_\nu(x,h)]^j \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(k+1,1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k+1,0)}(x,t)\| +$$

$$+ \max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^{(k+1,1)}(x) - \lambda_r{}^{(k+1,0)}(x)\|.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\| \le$$

$$\le \frac{1}{1-q_\nu(x,h)} b_2(x) L(x) \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|u_r^{(k)}(x,t) - u_r^{(k-1)}(x,t)\|, \tag{21}$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^{(k+1)}(x) - \lambda_r{}^{(k)}(x)\| \le$$

$$\le \Big[\frac{b_3(x)}{1-q_\nu(x,h)} b_2(x) + b_1(x)\Big] \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|u_r^{(k)}(x,t) - u_r^{(k-1)}(x,t)\|, \tag{22}$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|u_r^{(k+1)}(x,t) - u_r^{(k)}(x,t)\| \le$$

$$\le \int_0^x \Big[\max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^{(k+1)}(\xi) - \lambda_r{}^{(k)}(\xi)\| + \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(k+1)}(\xi,t) - \widetilde{v}_r^{(k)}(\xi,t)\|\Big] d\xi.$$

Суммируя, соответственно, левые и правые части неравенств (21), (22) имеем

$$\Delta^{(k+1)}(x) =$$

$$= \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\| + \max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^{(k+1)}(x) - \lambda_r{}^{(k)}(x)\| \le$$

$$\le z(x) L(x) \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|u_r^{(k)}(x,t) - u_r^{(k-1)}(x,t)\|, \tag{23}$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|u_r^{(k+1)}(x,t) - u_r^{(k)}(x,t)\| \le \int_0^x \Delta^{(k+1)}(\xi) d\xi.$$

Для функции $\Delta^{(k+1)}(x)$ на основе (23) получим неравенства

$$\Delta^{(k+1)}(x) \le z(x) L(x) \int_0^x \Delta^{(k)}(\xi) d\xi. \tag{24}$$

$$\Delta^{(k+1)}(x) \le \frac{z(x)L(x)}{k!} \Big(\int_0^x z(\xi) L(\xi) d\xi \Big)^k \int_0^x \Delta^{(1)}(\xi) d\xi.$$

Установим неравенства

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^{(k+1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|\le$$

$$\le\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^{(k+1)}(x)-\lambda_r^{(k)}(x)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\|+$$

$$+\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^{(k)}(x)-\lambda_r^{(k-1)}(x)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)\|+$$

$$+...+\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|\le$$

$$\le\Delta^{(k+1)}(x)+\Delta^{(k)}(x)+...+\Delta^{(1)}(x)\le$$

$$\le z(x)L(x)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\left(\int\limits_0^x z(\xi)L(\xi)d\xi\right)^j\int\limits_0^x\Delta^{(1)}(\xi)d\xi+\Delta^{(1)}(x)\le$$

$$\le z(x)L(x)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\left(\int\limits_0^x z(\xi)L(\xi)d\xi\right)^j\int\limits_0^x g(\xi)\max_{t\in[0,T]}\|f(\xi,t,\psi(t))\|d\xi+$$

$$+g(x)\max_{t\in[0,T]}\|f(x,t,\psi(t))\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(k+1)}(x,t)-u_r^{(0)}(x,t)\|\le$$

$$\le\int\limits_0^x\Bigg[z(\xi)L(\xi)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\left(\int\limits_0^\xi z(\xi_1)L(\xi_1)d\xi_1\right)^j\int\limits_0^\xi g(\xi_1)\max_{t\in[0,T]}\|f(\xi_1,t,\psi(t))\|d\xi_1+$$

$$+g(\xi)\max_{t\in[0,T]}\|f(\xi,t,\psi(t))\|\Bigg]d\xi<\rho(x).$$

При $k\to\infty$, получим оценку 3).

Таким образом, функция‘ $u^*(x,t)\in S(u^{(0)}(x,t),\rho(x))$ является решением задачи (1)-(3).

Докажем единственность. Пусть существуют два решения $u^*(x,t)$, $u^{**}(x,t)$ в $S(u^{(0)}(x,t),\rho(x))$. В силу эквивалентности задач (1)-(3) и (4)-(6) существуют пары $(v^*(x,t),\ u^*(x,t))$, $(v^{**}(x,t),\ u^{**}(x,t))$, которые являются решениями задачи (4)-(6). Тогда соответствующие им системы $(\lambda_r^*(x)+\widetilde{v}_r^*(x,t),u_r^*(x,t))$, $(\lambda_r^{**}(x)+\widetilde{v}_r^{**}(x,t),u_r^{**}(x,t))$, $r=\overline{1,N}$, будут решениями краевой задачи (11)-(15). Аналогично соотношению (24) для разностей $\lambda_r{}^*(x)-\lambda_r{}^{**}(x)$, $\widetilde{v}_r^*(x,t)-\widetilde{v}_r^{**}(x,t)$, $u_r^*(x,t)-u_r^{**}(x,t)$, при всех $(x,t)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$, получим:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^*(x)-\lambda_r{}^{**}(x)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(x,t)-\widetilde{v}_r^{**}(x,t)\|\le$$

$$\le z(x)L(x)\int\limits_0^x\left[\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^*(\xi)-\lambda_r{}^{**}(\xi)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(\xi,t)-\widetilde{v}_r^{**}(\xi,t)\|\right]d\xi.$$

С помощью неравенства Беллмана-Гроноулла имеем

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^*(x)-\lambda_r{}^{**}(x)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(x,t)-\widetilde{v}_r^{**}(x,t)\|=0.$$

Откуда вытекает, что $\lambda_r{}^*(x) = \lambda_r{}^{**}(x)$, $\widetilde{v}_r^*(x,t) = \widetilde{v}_r^{**}(x,t)$, $r = \overline{1,N}$. Из неравенства

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{u}_r^*(x,t) - \widetilde{u}_r^{**}(x,t)\| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^x \left[\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^*(\xi,t) - \widetilde{v}_r^{**}(\xi,t)\| + \max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r{}^*(\xi) - \lambda_r{}^{**}(\xi)\| \right] d\xi$$

имеем $\widetilde{u}_r^*(x,t) = \widetilde{u}_r^{**}(x,t)$, при всех $(x,t) \in \Omega_r$, $r = \overline{1,N}$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] А.Т. Асанова, Д.С. Джумабаев, *Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения, **41**:3 (2005), 337–346. MR2200649

[2] Н.Т. Орумбаева, *Об одном приближенном методе решения полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений*, Математический журнал, **4**:4 (2004), 64–74. MR2206775

[3] Д.С. Джумабаев, *Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Журн. вычисл. математики и мат. физики, **29**:1 (1989), 50–66. MR0984335

Нургул Тумарбековна Орумбаева
Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова,
ул. Университетская 28,
100028, Караганда, Казахстан
E-mail address: `Orumbayevan@mail.ru`