S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 475–490 (2013) УДК 512.552.13
MSC 16X99

О НАСЛЕДСТВЕННО ЧИСТЫХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ НАД ДЕДЕКИНДОВЫМИ КОЛЬЦАМИ

Л.М. МАРТЫНОВ

Abstract. The problem of the description hereditary pure associative algebras over Dedekind rings is investigated. In particular, nilalgebras, idempotent algebras and commutative algebras with such property are characterized.

Keywords: associative algebra, Dedekind ring, hereditary pure associative algebra.

1. Введение

Теория абелевых групп дает яркий пример развитой структурной теории. При этом важную роль там играют понятия полноты (делимости), редуцированности, периодичности (в частности, примарности), сервантности и слабой сервантности (чистоты). Оказалось, что к определениям этих понятий возможен другой подход, использующий теорию многообразий групп. Это дало возможность автору определить в [1] их аналоги для произвольных алгебр и сформулировать основную проблематику по изучению полученных понятий.

Заметим, что при определении этих аналогов используется понятие произведения классов алгебр в смысле А. И. Мальцева [2] и развиваются некоторые идеи совместных работ Л. Н. Шеврина и автора [3, 4] (см. также [5]), в которых, в частности, введено и изучается понятие разрешимости — аналог групповой разрешимости. Что касается проблематики, то она во многом навеяна теорией абелевых групп, но некоторые из проблем являются оригинальными и обусловлены спецификой алгебр. Эти проблемы оказываются интересными как для произвольных алгебр, так и для "классических"алгебр (групп, модулей, линейных алгебр, колец, полугрупп и др.).

Martynov, L. M., On hereditarily pure associative algebras over Dedekind rings.

Поступила 23 апреля 2013 г., опубликована 18 июля 2013 г.

Понятия полноты и редуцированности позволяют указать следующий методологический подход к развитию структурной теории алгебр, хорошо зарекомендовавший себя в теории абелевых групп — отправляясь от атомов решетки подмногообразий данного многообразия $\mathcal{V}$ алгебр, которые зачастую определяются хорошими тождествами и их алгебры устроены довольно просто, конструируем с помощью расширений редуцированные алгебры с "блоками-факторами"из атомов. С другой стороны, полные алгебры — это антиподы редуцированным, их нельзя "собрать"из атомов, но иногда можно охарактеризовать исчерпывающим образом (как, напр., в случае абелевых групп). Поскольку во многих случаях алгебры из $\mathcal{V}$ являются расширениями полных алгебр с помощью редуцированных (это имеет место, например, в случае групп, модулей, ассоциативных и лиевых колец и алгебр, унаров и др.) [6], изучение произвольных алгебр из $\mathcal{V}$ можно свести к изучению полных и редуцированных алгебр из $\mathcal{V}$ и их расширений. Таким образом, в этом случае, в многообразии $\mathcal{V}$ определен строгий (в смысле А. Г. Куроша [7]) радикал $(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ (он называется *полным радикалом*), для которого радикальный класс $\mathbf{R}$ состоит из всех полных алгебр из $\mathcal{V}$, а полупростой класс $\mathbf{S}$ — из всех редуцированных алгебр из $\mathcal{V}$. Многообразие $\mathcal{V}$ при этом совпадает с мальцевским $\mathcal{V}$–произведением $\mathbf{R} \circ_{\mathcal{V}} \mathbf{S}$. Напомним, что любая абелева группа A на самом деле является прямой суммой своих полной C и редуцированной R подгрупп, т. е. $A = C \oplus R$.

Ясно, что указанный подход, будучи универсальным, не может эффективно реализован в произвольных многообразиях алгебр. Однако для некоторых алгебр, как показали исследования ряда авторов для различных многообразий алгебр, он оказывается плодотворным. Предпочтение здесь следует отдавать многообразиям алгебр, решетка подмногообразий которых имеет хорошие атомы. Заметим, что многие многообразия классических алгебр (групп, полугрупп, модулей, колец, ассоциативных, альтернативных, йордановых, лиевых колец и алгебр, решеток, унаров) этому условию удовлетворяют. Для многообразий с плохими атомами, на наш взгляд, структурная теория (в классическом понимании) вообще не может быть развита. Трудно представить себе, например, развитие структурной теории в многообразии всех группоидов, решетка подмногообразий которого содержит континуум атомов, и не известно, какими тождествами они определяются и как устроены группоиды этих атомов.

Наряду с понятиями полноты и редуцированности изучались аналоги сервантности и слабой сервантности. Эти аналоги (главным образом аналог слабой сервантности — (атомная) чистота) исследовались для модулей [8, 9, 10], универсальных алгебр [11, 12, 13], полугрупп [14, 15, 16, 17, 18], лиевых алгебр над ассоциативно–коммутативным кольцом с единицей [19], ассоциативных колец [20] и для ассоциативных алгебр над дедекиндовыми кольцами, максимальные идеалы которых имеют конечные индексы [21].

Эти исследования показали, что, как и для абелевых групп, в случае других алгебр понятие чистоты оказывается тесно связанным с понятиями полноты и редуцированности. Например, любая полная алгебра всегда является всюду чистой; наследственно чистые алгебры зачастую являются редуцированными; простые по чистоте алгебры часто содержатся среди подалгебр минимально полных алгебр; любая минимально полная алгебра является простой по чистоте алгеброй; понятие чистой подалгебры является обобщением прямого множителя (и даже ретракта) алгебры. Все это делает задачу изучения чистоты для алгебр все более актуальной.

В настоящей статье, развивая идеи и используя некоторые результаты работы [21], исследуется задача описания наследственно чистых алгебр [1, проблема 17] для многообразия всех ассоциативных алгебр над произвольным дедекиндовым кольцом. В частности, охарактеризованы наследственно чистые нильалгебры, идемпотентные и коммутативные алгебры указанного многообразия. Заметим, что при этом охватываются соответствующие случаи алгебр над бесконечным полем.

2. Основные определения и обозначения

Приведем необходимые определения. Прежде всего, договоримся буквой p обозначать простое числа, а буквами k, m, n — натуральные числа. Для множества M через $\mid M \mid$ обозначается его кардинальное число. Условимся, если не оговорено противное, через R обозначать произвольное дедекиндово кольцо. Под модулем будем понимать левый унитарный R–модуль, а под алгеброй — ассоциативную алгебру над R (R–алгебру); в частности, поле — это, как правило, R–поле. Под идеалом алгебры или кольца понимается двусторонний идеал. Понятно, что любой идеал кольца R является алгеброй. Тот факт, что подмножество B алгебры A является подалгеброй алгебры A, будем записывать в виде $B \leq A$. Нулевую подалгебру будем обозначать буквой O. Для любой алгебры A условимся ее подалгебру B называть *собственной*, если $B \neq A$ и *нетривиальной*, если, кроме того, $B \neq O$. Аналогичную терминологию будем сохранять и для идеалов алгебры. Для подмножества M алгебры A через $\langle M\rangle$ и (M) будем обозначать соответственно подалгебру и идеал алгебры A, порожденные M.

Напомним, что кольцо R называется *дедекиндовым кольцом*, если оно является областью целостности с $1 \neq 0$ и любой его идеал является произведением простых идеалов. Обратим внимание на то, что кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел и любое поле являются дедекиндовыми кольцами. Для удобства чтения приведем некоторые хорошо известные факты из теории дедекиндовых колец (см. напр., [22, гл. V]): в дедекиндовом кольце каждый нетривиальный простой идеал максимален; разложение любого идеала в произведение простых множителей однозначно; дедекиндово кольцо является нетеровым (более того, любой его идеал порождается не более чем двумя элементами); дедекиндово кольцо с конечным числом нетривиальных простых идеалов является областью главных идеалов; факторкольцо дедекиндова кольца по нетривиальному идеалу является кольцом главных идеалов; локализация дедекиндового кольца по любому нетривиальному простому идеалу является кольцом дискретного нормирования. Будем говорить, что идеал дедекиндова кольца свободен от квадратов, если он нетривиален и его разложение в произведение максимальных идеалов не содержит одинаковых сомножителей.

Алгебра с одним образующим называется *моногенной*. Хорошо известно, что свободная моногенная алгебра $\langle x\rangle$ с образующим x изоморфна алгебре $R\langle x\rangle$ всех многочленов от переменной x с коэффициентами из R с нулевым свободным членом. В общем случае, для любого элемента a алгебры A имеет место $\langle a\rangle = \{f(a)|f(x) \in R\langle x\rangle\}$. Элемент a алгебры A называется алгебраическим над кольцом R, если он является корнем некоторого многочлена $f(x)$ из кольца $R[x]$ всех многочленов от переменной x с коэффициентами из R. Если алгебра A содержит в качестве подалгебры поле F, элемент a алгебры A является алгебраическим над полем F и единица поля F является единицей и для a, то наименьшую подалгебру, содержащую F и элемент a, будем называть простым алгебраическим расширением поля F с помощью элемента a и обозначать через $F[a]$. Понятно,что в нашем случае $F[a] = \{f(a)|f(x) \in F[x]\}$. Хорошо известно, что $F[a]$ является полем, изоморфным R–полю $F[x]/(p(x))$, где $p(x) \in F[x]$ — минимальный многочлена элемента a (т. е. неприводимый над F многочлен, для которого элемент a является корнем). В частности, $F[a]$ — конечное и потому алгебраическое расширение поля F.

Алгебру назовем MI–*алгеброй*, если любая ее ненильпотентная моногенная подалгебра содержит ненулевой идемпотент. Понятно, что любая MI–алгебра является I–*кольцом* в смысле [23, с. 304], т. е. кольцом, в котором каждый правый идеал, не являющийся ниль–идеалом, содержит ненулевой идемпотент. Ясно, что любая нильалгебра является MI–алгеброй.

Условимся, что через $var\Sigma$ обозначается многообразие всех алгебр, определенное системой тождеств Σ, а через $var\mathcal{K}$ — наименьшее многообразие, содержащее класс $\mathcal{K}$ алгебр.

Ниже будем использовать следующие обозначения:

$\mathbf{L}$ — решетка всех многообразий алгебр;

$\mathcal{Z} = var\{xy = 0\}$ — многообразие всех алгебр с нулевым умножением;

$\mathcal{P}$ — атом решетки $\mathbf{L}$;

$Ann(\mathcal{V}) = \{r \in R \mid (\forall A \in \mathcal{V})rA = O\}$ — аннулятор многообразия $\mathcal{V}$;

A^0 — алгебра, полученная из модуля A заданием нулевого умножения;

I — идеал кольца R;

P — максимальный идеал кольца R (если нет оговорок);

$F_P = R/P,\ \mathcal{F}_P = varF_P$;

$Z_I = (R/I)^0,\ \mathcal{Z}_I = varZ_I = var\{Ix = 0,\ xy = 0\}$.

Заметим, что если P имеет конечный индекс, то многообразие $\mathcal{F}_P$ определяется системой тождеств $\mathcal{F}_P = varF_P = var\{Px = 0,\ x^{p^n} = x\}$, где p^n — порядок поля F_P.

Алгебры с нулевым умножением будем называть также *абелевыми*. Многообразия абелевых алгебр образуют подрешетку $L(\mathbf{Ab})$ решетки $\mathbf{L}$, изоморфную решетке всех многообразий модулей. Любое абелево многообразие $\mathcal{V}$ алгебр совпадает с многообразием $\mathcal{Z}_V$, где $V = Ann(\mathcal{V})$.

Характеристикой алгебры с единицей будем называть аннулятор ее единицы. Понятно, что характеристика алгебры с единицей является идеалом I кольца R. Если $I = O$, то будем говорить об *алгебре нулевой характеристики*; в случае, когда I — нетривиальный простой идеал кольца R, будем говорить об *алгебре простой характеристики*. Простым R–полем будем называть поле над R, являющееся простым модулем над R. Понятно, что поля вида F_P являются простыми R–полями.

Ненулевую алгебру, не имеющую нетривиальных подалгебр, будем называть *простейшей*. Очевидно, что если P — максимальный идеал кольца R, то алгебры F_P и Z_P являются простейшими; в частности, если R — поле, то R является простейшей алгеброй. Абелеву алгебру A назовем *элементарной*, если она либо нулевая, либо A является прямой суммой алгебр вида Z_P.

Алгебру A, совпадающую со своим квадратом A^2, условимся называть (глобально) *идемпотентной*. Алгебру, в которой любая подалгебра идемпотентна, будем называть *наследственно идемпотентной*. Условимся называть поле F *элементарным идемпотентным*, если оно является конечным расширением поля вида F_P, и всякий раз, когда идеал P имеет конечный индекс в кольце R, выполняется равенство $F = F_P$. Алгебру назовем *элементарной идемпотентной алгеброй*, если любая её ненулевая моногенная подалгебра является прямой суммой конечного числа элементарных идемпотентных полей.

Понятно, что алгебра является наследственно идемпотентной тогда и только тогда, когда в ней любая моногенная подалгебра идемпотентна. Заметим, что элементарная идемпотентная алгебра является наследственно идемпотентной, но обратное, вообще говоря не верно. Например, если среди максимальных идеалов кольца есть идеал P конечного индекса, то любое поле F, отличное от F_P и являющееся конечным расширением конечного поля F_P, есть наследственно идемпотентная алгебра, но F не является элементарной идемпотентной алгеброй.

Следуя [3], алгебру A, в которой для любого её элемента a существует такое зависящее от a натуральное число $n(a) > 1$, что $a^{n(a)} = a$, будем называть *джекобсоновской*. Алгебра A называется *элементарной джекобсоновской* [21], если каждая её ненулевая моногенная подалгебра является прямой суммой конечного числа конечных полей вида F_P. Понятно, что в случае, когда все максимальные идеалы кольца R имеют конечные индексы, понятия элементарной идемпотентной и элементарной джекобсоновской алгебры совпадают.

Напомним [24] (см. также [25, теорему 12]), что атомы решетки $\mathbf{L}$ исчерпываются абелевыми многообразиями вида $\mathcal{Z}_P$ для любого P и многообразиями вида $\mathcal{F}_P$ только для тех P, которые имеют конечный индекс в R. Обратим внимание на то, что атомы порождаются, как многообразия, соответствующими простейшими алгебрами Z_P и F_P. Заметим, что если все максимальные идеалы кольца R имеют бесконечный индекс, то атомы решетки $\mathbf{L}$ исчерпываются абелевыми многообразиями вида $\mathcal{Z}_P$ для некоторого P. Кроме того, если R — конечное поле, то решетки $\mathbf{L}$ имеет два атома $\mathcal{Z}_O = var\{xy = 0\}$ и $\mathcal{F}_O = var\{x^{p^n} = x\}$, где p^n — порядок поля R; если R — бесконечное поле, то решетка $\mathbf{L}$ имеет единственный атом — многообразие $\mathcal{Z}_O = var\{xy = 0\}$ всех абелевых алгебр.

Всюду ниже без оговорок через $\mathcal{V}$ обозначается произвольное многообразие алгебр, через A — любая алгебра. Посредством $\mathcal{V}(A)$ будем обозначать $\mathcal{V}$–вербал алгебры A, т. е. наименьший идеал алгебры A во множестве всех идеалов, факторалгебры по которым принадлежат $\mathcal{V}$. Укажем правила нахождения вербалов алгебры A, соответствующих атомам $\mathcal{Z}_P$ и $\mathcal{F}_P$ решетки $\mathbf{L}$: $\mathcal{Z}_P(A) = PA + A^2$, $\mathcal{F}_P(A) = PA + (a - a^{p^n} \mid a \in A)$, где p^n — порядок поля F_P.

Алгебра A называется $\mathcal{V}$–полной, если ее $\mathcal{V}$–вербал $\mathcal{V}(A)$ совпадает с A, т. е. $\mathcal{V}(A) = A$. Если алгебра не имеет ненулевых $\mathcal{V}$–полных подалгебр, то она называется $\mathcal{V}$–редуцированной ($\mathcal{V}$–разрешимой). Подалгебра S алгебры A называется $\mathcal{V}$–чистой и обозначается посредством $S \prec_{\mathcal{V}} A$, если $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(A) \cap S$.

Заметим, что для любой подалгебры B алгебры A всегда справедливо включение $\mathcal{V}(B) \subseteq \mathcal{V}(A) \cap B$. Алгебра A называется наследственно $\mathcal{V}$–чистой, если любая ее подалгебра является $\mathcal{V}$–чистой, и всюду $\mathcal{V}$–чистой, если A является $\mathcal{V}$–чистой в любом своем расширении. Следуя [5], элемент a алгебры A назовем $\mathcal{V}$–полным, если $\mathcal{V}(\langle a \rangle) = \langle a \rangle$. Множество всех $\mathcal{V}$–полных элементов алгебры A обозначается символом $C_{\mathcal{V}}(A)$.

Алгебра называется *полной*, если она является $\mathcal{P}$–полной для любого $\mathcal{P}$. Понятно, что алгебра является полной тогда и только тогда, когда она не имеет гомоморфизмов на ненулевые алгебры из атомов решетки $\mathbf{L}$. Алгебра называется *редуцированной*, если она не имеет ненулевых полных подалгебр. Понятно, что нулевая алгебра является одновременно полной и редуцированной. Подалгебра S алгебры A называется *чистой* и обозначается посредством $S \prec A$, если $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(A) \cap S$ для любого атома $\mathcal{P}$ решетки $\mathbf{L}$ многообразий алгебр. Алгебра A называется *наследственно чистой*, если любая его подалгебра является чистой, и *всюду чистой*, если A является чистой в любом своем расширении. Условимся, ради краткости, наследственно чистые алгебры называть *HP–алгебрами.*

3. Основные результаты

Основным результатом статьи является

Теорема. *Пусть R — произвольное дедекиндово кольцо. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) Идемпотентная алгебра A является HP-алгеброй тогда и только тогда, когда A — элементарная идемпотентная алгебра.

2) Нильалгебра A является HP-алгеброй тогда и только тогда, когда A — элементарная абелева алгебра.

3) В любой HP-алгебре A ее квадрат A^2 есть элементарная идемпотентная алгебра, а радикал Джекобсона $J(A)$ является элементарной абелевой алгеброй; если все нильэлементы алгебры A содержатся в $J(A)$ (в частности, если A — коммутативная алгебра), то $A = A^2 \oplus J(A)$

4) Прямая сумма элементарной абелевой алгебры и элементарной идемпотентной алгебры есть HP-алгебра.

Отметим два важных следствия этой теоремы. Непосредственно из утверждений 3) и 4) теоремы вытекает

Следствие I. *Если R — произвольное дедекиндово кольцо, то коммутативная алгебра A является HP-алгеброй тогда и только тогда, когда A есть прямая сумма элементарной абелевой алгебры и элементарной идемпотентной алгебры.*

В качестве следствия теоремы получаем также основной результат статьи [21].

Следствие II. *Если все максимальные идеалы кольца R имеют конечные индексы, то алгебра A является HP-алгеброй тогда и только тогда, когда A есть прямая сумма элементарной абелевой алгебры и элементарной джекобсоновской алгебры.*

В самом деле, в этом случае согласно лемме 30 из [21] любая HP–алгебра A коммутативна. Остальное следует из утверждений 3) и 4) теоремы и того факта, что в данном случае элементарная идемпотентная алгебра является элементарной джекобсоновской алгеброй.

Доказательству основного результата предпошлём несколько вспомогательных утверждений. Для удобства чтения и ссылок, сформулируем в виде лемм несколько известных утверждений. При этом будет использована сквозная нумерация утверждений, причем своя для каждого вида утверждений. Первая лемма является частным случаем утверждения 1 из [12], справедливого для произвольных алгебр.

Лемма 1. 1) *Если $C \prec_{\mathcal{V}} B \prec_{\mathcal{V}} A$, то $C \prec_{\mathcal{V}} A$, т. е. отношение "быть $\mathcal{V}$–чистой подалгеброй" транзитивно. В частности, если $C \prec B \prec A$, то $C \prec A$, т. е. отношение "быть чистой подалгеброй" транзитивно.*

2) *Если $C \prec_{\mathcal{V}} A$ и $C \leq B$, то $C \prec_{\mathcal{V}} B$. В частности, если $C \prec A$ и $C \leq B$, то $C \prec B$.*

Из леммы 1 вытекает

Следствие 1. *Любая подалгебра наследственно $\mathcal{V}$–чистой алгебры является наследственно $\mathcal{V}$–чистой алгеброй. В частности, любая подалгебра HP–алгебры является HP–алгеброй.*

Аналог следующей леммы справедлив для произвольных алгебр.

Лемма 2. *Любая $\mathcal{V}$–полная алгебра является всюду $\mathcal{V}$–чистой алгеброй; в частности, любая полная алгебра является всюду чистой алгеброй.*

В самом деле, пусть полная алгебра C является подалгеброй алгебры A. Тогда $\mathcal{V}(C) = C$ и поэтому ввиду очевидного включения $\mathcal{V}(C) \subseteq \mathcal{V}(A)$ имеем включение $C \subseteq \mathcal{V}(A)$. Отсюда $\mathcal{V}(A) \cap C = \mathcal{V}(C)$.

Следствие 2. *Если в алгебре любая собственная подалгебра является $\mathcal{V}$–полной, то она является наследственно $\mathcal{V}$–чистой алгеброй. В частности, если в алгебре любая собственная подалгебра является полной, то она является HP–алгеброй.*

Частным случаем этого следствия является тот факт, что *любая простейшая алгебра является HP–алгеброй.*

Нам понадобится также следующее утверждение, отмечавшееся в [11] для алгебр с выделенным идемпотентом.

Лемма 3. *Алгебра A является наследственно $\mathcal{V}$–чистой тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}(A) = C_{\mathcal{V}}(A)$. В частности, алгебра A является HP-алгеброй тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}(A) = C_{\mathcal{P}}(A)$ для любого атома $\mathcal{P}$ решетки* **L**.

Следующая лемма отмечалась в [26, лемма 17] (ее аналог справедлив для произвольных алгебр [1, утверждение 1]).

Лемма 4. *Гомоморфный образ $\mathcal{V}$–полной алгебры является $\mathcal{V}$–полной алгеброй; в частности, гомоморфный образ полной алгебры является полной алгеброй.*

Следующая лемма является частным случаем леммы 6 статьи [3].

Лемма 5. *Для любого многообразия $\mathcal{V}$ алгебр $\mathcal{V}$–вербал прямой суммы любого множества $\{A_i \mid i \in I\}$ алгебр совпадает с прямой суммой множества $\{\mathcal{V}(A_i) \mid i \in I\}$ $\mathcal{V}$–вербалов этих алгебр, т. е. $\mathcal{V}(\sum_d \oplus A_i) = \sum_d \oplus \mathcal{V}(A_i)$ $(i \in I)$.*

Следствие 3. *Прямая сумма любого множества $\mathcal{V}$–полных алгебры является $\mathcal{V}$–полной алгеброй; в частности, прямая сумма любого множества полных алгебр является полной алгеброй.*

Следующая лемма является частным случаем леммы 5 работы [3].

Лемма 6. *Для любого многообразия $\mathcal{V}$ алгебр $\mathcal{V}$–вербал полной прямой суммы любого множества $\{A_i \mid i \in I\}$ алгебр содержится в полной прямой суммой множества $\{\mathcal{V}(A_i) \mid i \in I\}$ $\mathcal{V}$–вербалов этих алгебр, т. е. $\mathcal{V}(\sum_c \oplus A_i) \subseteq \sum_c \oplus \mathcal{V}(A_i)$ $(i \in I)$.*

Замечание 1. Полезно иметь в виду следующее утверждение, являющееся частным случаем предложения 1 из [12], справедливого для произвольных алгебр: *прямое слагаемое алгебры является $\mathcal{V}$–чистой подалгеброй; в частности, прямое слагаемое алгебры является чистой подалгеброй.*

Замечание 2. Частным случаем следствия 1 из [13], справедливого для алгебр с выделенным идемпотентом, является следующее: *алгебра A является HP–алгеброй тогда и только тогда, когда каждая ее моногенная подалгебра является чистой в A.* Этот факт и следствие 1 объясняют то обстоятельство, что моногенным алгебрам уделяется в работе достаточно много внимания.

Следующая лемма и её следствие по существу доказаны в [21, лемма 5, следствие 3] для ассоциативных алгебр над любым ассоциативно–коммутативным кольцом с единицей.

Лемма 7. *Если S есть $\mathcal{V}$–чистая подалгебра алгебры A, T — такой идеал в A, что $T \subseteq \mathcal{V}(A) \cap S$, то алгебра S/T является $\mathcal{V}$–чистой подалгеброй фактор-алгебры A/T.*

Следствие 4. *Если A есть HP-алгебра, то для любого $n > 1$ факторалгебра A/A^n является HP-алгеброй.*

Лемма 8. *Для алгебры R следующие условия эквивалентны:*
1) R является HP–алгеброй;
2) R — наследственно идемпотентная алгебра;
3) R — поле.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 3) Пусть R является HP–алгеброй. Если предположить, что R не является полем, то для любого P имеем $\mathcal{Z}_P(R) = PR + R^2 = R$. С другой стороны, для подалгебры P алгебры R имеем $\mathcal{Z}_P(P) = P^2 + P^2 = P^2 \neq P$. Поэтому $\mathcal{Z}_P(P) = P^2 \neq P = \mathcal{Z}_P(R) \cap P$. Отсюда следует, что R не является HP–алгеброй, что противоречит условию. Таким образом, R — поле.

3) $\Rightarrow$ 2) Если R — поле, то оно имеет всего две подалгебры R и O, которые являются идемпотетными. Следовательно, R является наследственно идемпотентной алгеброй.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть R — наследственно идемпотентная алгебра. Тогда R не имеет нетривиальных идеалов и поэтому является полем. Будучи простейшей алгеброй над собой, R является HP–алгеброй. $\square$

Обратим внимание на то, что любая простая алгебра (в частности, поле), не принадлежащая атомам решетки $\mathbf{L}$, является полной. Следующая лемма характеризует некоторые простые HP–алгебры. Прежде чем ее сформулировать, заметим, что *тело S является элементарным идемпотентным тогда и только тогда, S является алгебраическим расширением поля вида F_P для некоторого P, и всякий раз, когда поле F_P конечно, имеет место равенство $S = F_P$.*

Лемма 9. *Простая алгебра A с единицей e и без делителей нуля является HP–алгеброй тогда и только тогда, когда A — элементарное идемпотентное тело.*

Доказательство. Пусть простая алгебра A с единицей e и без делителей нуля является HP–алгеброй. Понятно, что алгебра A обязана иметь простую характеристику P. Рассмотрим подалгебру Re алгебры A, где e — единица алгебры A. Если $P = O$, то алгебра Re изоморфна R и поэтому, если R не является полем, то по лемме 8 R не является HP–алгеброй. В силу следствия 1 алгебра A не являлась бы HP–алгеброй. Таким образом, R — поле и $P = O$ — максимальный идеал. Если $P \neq O$, то поскольку в дедекиндовом кольце каждый нетривиальный простой идеал максимален, P — максимальный идеал кольца R. Таким образом, в обоих случаях, характеристика P алгебры A есть максимальный идеал кольца R и алгебра Re изоморфна полю F_P. Итак, можно считать, что алгебра A содержит поле F_P.

Рассмотрим возможные случаи.

1) Если поле F_P бесконечно, то F_P не принадлежит никакому из атомов решетки $\mathbf{L}$ и поэтому F_P является полным полем. Поскольку алгебра A имеет характеристику P, для любой ее подалгебры B имеем $PB = O$ и поэтому $\mathcal{Z}_P(B) = PB + B^2 = B^2$. С другой стороны, $\mathcal{Z}_P(A) \cap B = A \cap B = B$ и поэтому в HP–алгебре A каждая подалгебра должна совпадать со своим квадратом, т. е. A — наследственно идемпотентная алгебра. Учитывая это, для любой моногенной подалгебры $M = \langle a \rangle$ алгебры A получим $M^2 = M$ и поэтому $a = af(a)$ для некоторого многочлена $f(x)$ из $R\langle x \rangle$. Отсюда следует равенство $ae = aef(ae)$ и поэтому можно считать, что многочлен $xf(x) - x$ имеет коэффициенты из поля Re, изоморфного полю F_P. Таким образом, элемент $a = ae$ из A является корнем многочлена $xf(x) - x \in F_P\langle x \rangle$ и потому a — алгебраический над F_P элемент.

Напомним, что $F_P = Re$ является подполем алгебры A (в частности, единицы поля F_P и алгебры A совпадают). Рассмотрим наименьшую подалгебру $F_P[a]$ из A, содержащую F_P и элемент a. Хорошо известно, что $F_P[a] = \{f(a) | f(x) \in F_P[x]\}$ является полем, изоморфным полю $F_P[x]/(p(x))$, где $p(x)$ — минимальный многочлен элемента a (т. е. нормированный неприводимый многочлен кольца $F_P[x]$, для которого элемент a является корнем). В частности, $F_P[a]$ — конечное и потому алгебраическое расширение поля F_P. Итак, в этом случае алгебра A является алгебраическим расширением поля F_P. Из этого следует, в частности, что любой ненулевой элемент алгебры A с единицей обладает обратным элементом, т. е. в этом случае A — элементарное идемпотентное тело.

2) Пусть теперь поле F_P конечно. Если предположить, что $A \neq F_P$, то простая алгебра A не принадлежит атому $\mathcal{F}_P$ решетки $\mathbf{L}$ и поэтому является $\mathcal{F}_P$–полной. Следовательно, $\mathcal{F}_P(A) \cap F_P = A \cap F_P = F_P \neq \mathcal{F}_P(F_P) = O$, что противоречиво. Таким образом, $A = F_P$, т. е. и в этом случае A — элементарное идемпотентное тело.

Обратно, пусть A — элементарное идемпотентное тело. Если A является алгебраическим расширением бесконечного поля F_P, то в A любая моногенная подалгебра является бесконечным полем и поэтому полной алгеброй. Ввиду следствия 2 и замечания 2, A является HP–алгеброй. Если $A = F_P$ и поле F_P конечно, то A также является HP–алгеброй. □

Следствие 5. *Если все максимальные идеалы кольца R имеют бесконечный индекс, то для простой алгебры A с единицей и без делителей нуля следующие условия равносильны:*

1) A является HP–алгеброй;

2) A — наследственно идемпотентная алгебра;

3) A — алгебраическое расширением поля F_P для некоторого P.

Замечание 3. Если среди максимальных идеалов кольца R есть идеал P конечного индекса, то это следствие не верно. В самом деле, в этом случае любое конечное поле F, отличное от F_P и являющееся конечным расширением поля F_P, есть наследственно идемпотентная алгебра, но F по лемме 9 не является HP–алгеброй.

Лемма 10. *Если все идеалы кольца R имеют бесконечный индекс, то любая наследственно идемпотентная алгебра A является HP–алгеброй.*

В самом деле, в нашем случае атомы решетки $\mathbf{L}$ исчерпываются абелевыми многообразиями вида $\mathcal{Z}_P$ для некоторого P. Для каждого такого многообразия и произвольной подалгебры B алгебры A имеем $\mathcal{Z}_P(B) = PB + B^2 = B$, т. е. B является $\mathcal{Z}_P$–полной алгеброй. Следовательно, B — полная алгебра и поэтому в силу следствия 2 является HP–алгеброй.

Следующая лемма доказана по существу в [21, лемма 8].

Лемма 11. *Алгебра A является простейшей тогда и только тогда, когда A изоморфна либо полю F_P, либо алгебре Z_P для некоторого P.*

Лемма 12. *Элементарная идемпотентная алгебра является подпрямой суммой элементарных идемпотентных тел.*

Доказательство. Пусть A — элементарная идемпотентная алгебра. Тогда очевидно, что A является MI–алгеброй, а потому I–кольцом и, следовательно, радикал алгебры A есть нильидеал [23, предложение 9.3, с. 306]. Но алгебра A не имеет ненулевых нильпотентных элементов и поэтому является полупростой. Заметим, что свойство "быть элементарной идемпотентной алгеброй" наследуется подалгебрами и гомоморфными образами алгебры A. Пусть T — примитивный идеал алгебры A. Заметим, что согласно теореме 2.1 [23, с. 35] понятия примитивного идеала алгебры A и кольца A совпадают, в частности, совпадают радикалы алгебры A и кольца A. Утверждается, что A/T — тело. В противном случае по теореме 2.4.3 [23, с. 56] факторалгебра A/T содержала бы подкольцо, имеющее в качестве гомоморфного образа кольцо Δ_n матриц n-го порядка $(n > 1)$ над телом Δ. Но такое кольцо содержит ненулевые нильэлементы, что противоречиво. Следовательно, A/T — тело. Поскольку полупростая алгебра в силу теоремы 1.1 [23, с. 50] является подпрямой суммой примитивных алгебр, A является подпрямой суммой тел. Каждое такое тело, являясь гомоморфным образом элементарной идемпотентной алгебры A, обязано быть элементарным идемпотентным телом. $\square$

Следствие 6. *Элементарная идемпотентная коммутативная алгебра A является плотной подпрямой суммой элементарных идемпотентных полей.*

Лемма 13. Пусть $A = \langle a \rangle$ — *моногенная элементарная абелева алгебра и $I = Ann(a)$. Тогда либо $I = O$, R — поле и A изоморфна $R^0 = Z_O$, либо идеал I кольца R свободен от квадратов и алгебра A изоморфна алгебре Z_I; в частности, A есть прямая сумма конечного числа простейших алгебр типа Z_P.*

Доказательство. Поскольку $a^2 = 0$, ясно, что $A = \{ra | r \in R\}$ и поэтому алгебра A изоморфна алгебре Z_I. Если $I = O$ и O — не максимальный идеал, то $R^0 = Z_O$ не разлагается в прямую сумму алгебр вида Z_P. Таким образом, в этом случае R — поле. Пусть $I \neq O$ и $I = P_1^{i_1} P_2^{i_2} \dots P_k^{i_k}$, где $P_1, P_2, \dots, P_k$ —

попарно различные максимальные идеалы кольца R. Тогда алгебра Z_I является прямой суммой алгебр $Z_{P_1^{i_1}}, Z_{P_2^{i_2}}, \dots, Z_{P_k^{i_k}}$. Если предположить, что $i_m > 1$ для некоторого $m \in \{1, 2, \dots, k\}$, то среди подалгебр алгебры Z_I имелась бы подпрямо неразложимая алгебра $Z_{P_m^{i_m}}$, что противоречит элементарной абелевости алгебры Z_I. Таким образом, идеал I свободен от квадратов и A есть прямая сумма конечного числа простейших алгебр типа Z_P. $\square$

Лемма 14. *Если $A = B \oplus C$, где B — абелева алгебра, а C — наследственно идемпотентная алгебра, то для любой подалгебры D алгебры A имеет место $D = (B \cap D) \oplus (C \cap D)$.*

Доказательство. В самом деле, если $d \in D$, то $d = b + c$, где $b \in B$ и $c \in C$. Поскольку C — наследственно идемпотентная алгебра, $\langle c\rangle^2 = \langle c\rangle$ и элемент c представим в виде $c = cf(c)$ для некоторого многочлена $f(x) \in R\langle x\rangle$. Положим $h(x) = xf(x)$. Так как степень многочлена $h(x)$ не меньше 2, учитывая очевидные равенства $b^2 = 0$ и $bc = 0$, легко получаем, что $h(b + c) = cf(c) = c$. Таким образом, элемент $h(d) = c$ принадлежит $C \cap D$, а элемент $d - h(d) = b$ принадлежит $B \cap D$. Таким образом, в нашем случае $D = (B \cap D) \oplus (C \cap D)$.

Следующая лемма обосновывает утверждение 4) теоремы.

Лемма 15. *Если алгебра A является прямой суммой элементарной абелевой алгебры B и элементарной идемпотентной алгебры D, то A есть HP–алгебра.*

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно показать, что для любого атома $\mathcal{P}$ решетки $\mathbf{L}$ имеет место равенство $\mathcal{P}(A) = C_{\mathcal{P}}(A)$. В доказательстве нуждается только включение $\mathcal{P}(A) \subseteq C_{\mathcal{P}}(A)$. Возьмем любой элемент c из алгебры $\mathcal{P}(A)$ и покажем, что алгебра $C = \langle c\rangle$ является $\mathcal{P}$–полной. Прежде всего, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \oplus \mathcal{P}(D)$, где $\mathcal{P}(B)$ — элементарная абелева алгебра, а $\mathcal{P}(D)$ — элементарной идемпотентной алгебры. Заметим, что для любой простейшей алгебры вида Z_P имеет место альтернатива: $\mathcal{P}(Z_P) = Z_P$ или $\mathcal{P}(Z_P) = O$ (последнее имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{P} = \mathcal{Z}_P$). Аналогично, для любого тела S: $\mathcal{P}(S) = S$ или $\mathcal{P}(S) = O$ (последнее имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{P} = \mathcal{F}_P$, где максимальный идеал P имеет конечный индекс в R, и $S = F_P$). Понятно, что в каждом из случаев алгебры $\mathcal{P}(Z_P)$ и $\mathcal{P}(S)$ являются $\mathcal{P}$–полными.

По условию имеем $B = \sum_d \oplus Z_{P_\lambda}$ $(\lambda \in \Lambda)$ и по лемме 5 $\mathcal{P}(B) = \sum_d \oplus \mathcal{P}(Z_{P_\lambda}) = \sum_d \oplus Z_{P_\kappa}$ $(\kappa \in K \subseteq \Lambda)$, причем каждая алгебра Z_{P_κ} является $\mathcal{P}$–полной. С другой стороны, учитывая лемму 9, можно считать, что D является подпрямой суммой специальных тел S_μ $(\mu \in M)$. Но тогда по лемме 6 $\mathcal{P}(D)$ является подалгеброй полной прямой суммы специальных тел S_ν $(\nu \in N \subseteq M)$ со свойством $\mathcal{F}(S_\nu) = S_\nu$, т. е. $\mathcal{F}_P(D) \leq \sum_c \oplus S_\nu$.

По лемме 14 C является прямой суммой моногенной элементарной абелевой алгебры $\mathcal{P}(B) \cap C$ и моногенной элементарной идемпотентной алгебры $\mathcal{P}(D) \cap C$, т. е. $C = (\mathcal{P}(B) \cap C) \oplus (\mathcal{P}(D) \cap C)$. Тогда, учитывая лемму 13, имеем $\mathcal{P}(B) \cap C = Z_{P_1} \oplus Z_{P_2} \oplus \cdots \oplus Z_{P_k}$, где $P_1, P_2, ..., P_k$ — максимальные идеалы кольца R. Простейшие алгебры Z_{P_i} $(i = 1, 2, ..., k)$, будучи подалгебрами алгебры $\mathcal{P}(B)$, обязаны быть изоморфными некоторым алгебрам из множества $\{Z_{P_\kappa} \mid \kappa \in K \subseteq \Lambda\}$, которые являются $\mathcal{P}$–полными. Но тогда и алгебра $\mathcal{P}(B) \cap C$, как прямая сумма полных алгебр Z_{P_i} $(i = 1, 2, ..., k)$, является полной.

Далее, по определению элементарной идемпотентной алгебры имеем $\mathcal{P}(D) \cap C = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m$, где F_i $(i = 1, 2, ..., m)$ — специальные поля. Покажем, что алгебра $\mathcal{P}(D) \cap C$ является $\mathcal{P}$-полной. Достаточно показать, что любое поле F_i $(i = 1, 2, ..., m)$ является $\mathcal{P}$-полным. Если F_i — бесконечное поле, то это очевидно. Пусть F_i — конечное поле. Тогда $F_i = F_P$ для некоторого P. Поле F_i, будучи подалгеброй алгебры $\mathcal{P}_P(D)$, а следовательно, и алгебры $\sum_c \oplus S_\nu$ $(\nu \in N \subseteq M)$, где $\mathcal{P}(S_\nu) = S_\nu$, и являясь подпрямо неразложимой, обязана быть изоморфной подалгебре одного из специальных тел S_ν. Если тело S_ν является расширением бесконечного поля F_{Q_ν}, то это невозможно, так как тело S_ν в этом случае не содержит конечных подполей. Если S_ν — конечное тело, то $S_\nu = F_{Q_\nu}$ для некоторого максимального идеала Q_ν кольца R конечного индекса и поле F_i обязано быть изоморфным $\mathcal{P}$-полному полю F_{Q_ν} для некоторого $\nu \in N$. Таким образом, все поля, входящие в прямое разложение алгебры $\mathcal{P}(D) \cap C$ являются $\mathcal{P}$-полными, а поэтому и сама эта алгебра является $\mathcal{P}$-полной.

Из предыдущих рассмотрений вытекает, что алгебра C, являясь прямой суммой $\mathcal{F}_P$-полных алгебр $\mathcal{F}_P(B) \cap C$ и $\mathcal{F}_P(D) \cap C$, есть $\mathcal{P}$-полная алгебра. Итак, любой элемент $c \in \mathcal{P}(A)$ является $\mathcal{P}$–полным и поэтому принадлежит $C_{\mathcal{P}}(A)$, т. е. $\mathcal{P}(A) \subseteq C_{\mathcal{P}}(A)$ для любого атома $\mathcal{P}$ решетки L. Учитывая очевидное включение $C_{\mathcal{P}}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$, получаем требуемое равенство $\mathcal{P}(A) = C_{\mathcal{P}}(A)$.

Итак, алгебра A является HP–алгеброй. $\square$

Следствие 7. *Прямая сумма простейших алгебр является HP–алгеброй.*

Действительно, если алгебра A является прямой суммой простейших алгебр, то легко понять, что $A = B \oplus C$, где B — элементарная абелева алгебра, а C — элементарная идемпотентная алгебра. Остается сослаться на лемму 15.

Замечание 4. Подпрямая сумма простейших алгебр может уже и не быть HP–алгеброй. В самом деле, полупростая алгебра R, не являющаяся полем, является подпрямой суммой простых R–полей F_P по всем P, которые являются простейшими алгебрами. Но алгебра R в этом случае по лемме 8 не является HP–алгеброй.

Лемма 16. *Пусть моногенная алгебра A порождается ненулевым идемпотентом e и $I = Ann(e)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) A — наследственно идемпотентная алгебра;

2) алгебра A является HP–алгеброй;

3) либо $I = O$ и R — поле, либо идеал I свободен от квадратов.

4) алгебра A является прямой суммой конечного числа простых полей типа F_P.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $A = \langle e \rangle = Re$, и поэтому алгебра A изоморфна алгебре R/I.

1) $\Rightarrow$ 3) Пусть A есть наследственно идемпотентная алгебра. Предположим, что $I = O$. Тогда R обязано быть полем, так как $T^2 \neq T$ для любого нетривиального нетривиального идеала T кольца R. Пусть теперь $I = P^2Q$ для некоторого P. Рассмотрим в R/I ненулевую подалгебру PQ/I. Имеем $(PQ/I))^2 = O \neq PQ/I$, а это противоречит наследственной идемпотентности R/I. Таким образом, идеал I свободен от квадратов.

3) $\Rightarrow$ 4) Пусть $I = O$ и R — поле. То R есть прямая сумма поля F_O. Пусть $I = P_1P_2...P_k$, где $P_1, P_2, ..., P_k$ — попарно различные максимальные идеалы. Тогда алгебра R/I, а значит и алгебра A, изоморфно прямой сумме простых полей $F_{P_1}, F_{P_2}, ..., F_{P_k}$.

4) $\Rightarrow$ 2) Справедливость этого логического следования вытекает из следствия 6.

2) $\Rightarrow$ 3) Пусть $A = R/I$ есть HP–алгебра и предположим, что $I = O$. Тогда по лемме 5 алгебра $R = R/O$ является полем и R — наследственно идемпотентная алгебра. Пусть теперь $I = P^2Q$ для некоторого P . Рассмотрим в R/I подалгебру PQ/I. Имеем $\mathcal{Z}_P(PQ/I)) = P^2T/I + (PQ/I)^2 = O + O = O$. С другой стороны, так как R/I — алгебра с единицей, $(R/I)^2 = R/I$ и поэтому $\mathcal{Z}_P(R/I) = P(R/I) + (R/I)^2 = R/I$. Но тогда $PQ/I \cap \mathcal{Z}_P(R/I) = PQ/I \neq O = \mathcal{Z}_P(PQ/I))$, а это противоречит тому, что по предположению R/I является HP–алгеброй. Таким образом, идеал I свободен от квадратов.

4) $\Rightarrow$ 1) Справедливость этого логического следования очевидна. $\square$

Замечание 5. При доказательстве леммы 16 по существу показано, что если I — собственный идеал кольца R, то для алгебры $A = R/I$ эквивалентны условия 1)–4) леммы 13. Частным случаем последнего утверждения при $I = O$ является лемма 8.

Лемма 17. *Абелева алгебра является HP-алгеброй тогда и только тогда, когда она есть элементарная абелева алгебра.*

Это утверждение является частным случаем следствия 4 из [8], согласно которому наследственно чистые модули над нетеровым кольцом исчерпываются полупростыми, т. е. являются прямыми суммами простых (неприводимых) модулей. $\square$

Следующие леммы 18–25 по существу доказаны в [21] для произвольного дедекиндова кольца. Поэтому их доказательства опускаются, а формулировки приводятся здесь лишь для удобства чтения и ссылок. Первая из лемм обосновывает утверждение 2) теоремы — основного результата настоящей статьи.

Лемма 18 ([21, лемма 17]). *Нильалгебра A является HP-алгеброй тогда и только тогда, когда A есть элементарная абелева алгебра.*

Следующая лемма справедлива для ассоциативных алгебр над произвольным ассоциативно–коммутативным кольцом с единицей.

Лемма 19 ([21, лемма 20]). *Во всякой HP–алгебре A имеет место $A^2 = A^3$.*

Лемма 20 ([21, лемма 19]). *Любая HP–алгебра A с единицей e имеет либо нулевую характеристику и в этом случае R — поле, либо свободную от квадратов характеристику I.*

Лемма 21 ([21, лемма 21]). *Во всякой моногенной HP–алгебре $A = \langle a \rangle$ подалгебра A^2 имеет единицу и имеет либо нулевую характеристику и в этом случае R — поле, либо свободную от квадратов характеристику I.*

Лемма 22 ([21, лемма 23]). *Любая HP–алгебра A является MI-алгеброй. В частности, радикал $J(A)$ любой HP–алгебры A является элементарной абелевой алгеброй.*

Лемма 23 ([21, лемма 24]). *Любая идемпотентная HP–алгебра A является полупростой.*

Лемма 24 ([21, леммы 25]). *Если алгебра A является $\mathcal{V}$–полной, то любая ее $\mathcal{V}$–чистая подалгебра B является $\mathcal{V}$–полной.*

Лемма 25 ([21, лемма 26]). *Любая идемпотентная HP–алгебре A является наследственно идемпотентной алгеброй.*

Лемма 26. *Любая идемпотентная моногенная HP–алгебра A является элементарной идемпотентной алгеброй.*

Доказательство. Пусть $A = \langle a \rangle$ для некоторого ненулевого элемента $a \in A$ и $A^2 = A$. Тогда $a = af(a)$ для некоторого многочлена $f(x)$ из алгебры $R\langle x \rangle$ и поэтому A — алгебра с единицей $e = f(a)$. По лемме 16 A имеет либо нулевую характеристику и в этом случае R — поле, либо свободную от квадратов характеристику I. Поэтому подалгебра Re алгебры A является либо полем, изоморфным полю $R = F_O$, либо изоморфна алгебре R/I, которая является конечной прямой суммой простых полей R–полей $F_{P_1}, F_{P_2}, ..., F_{P_k}$, если $I = P_1P_2...P_k$, где $P_1, P_2, ..., P_k$ — попарно различные максимальные идеалы.

Рассмотрим возможные случаи.

1) Пусть Re — поле, изоморфное конечному простому полю $R = F_O$. Учитывая, что элемент a является алгебраическим над полем Re, легко понять, что в этом случае A есть поле, являющееся простым алгебраическое расширение поля Re с помощью элемента a. Поскольку A является HP–алгеброй, по лемме 9 $A = Re$.

2) Пусть Re — поле, изоморфное бесконечному простому полю $R = F_O$. Учитывая, что элемент a является алгебраическим над полем Re, легко понять, что в этом случае A есть простое алгебраическое расширение поля Re с помощью элемента a.

3) Пусть теперь $Re = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \dots \oplus Re_k$, где $Re_i \cong F_{P_i}$, а e_i — единица поля Re_i $(i = 1, 2, ..., k)$. Легко понять, что в этом случае $A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \dots \oplus Ae_k$, причем Ae_i — поле, являющееся простым алгебраическим расширением поля Re_i с помощью элемента $a_i = ae_i$ при любом $i = 1, 2, ..., k$. Однако, всякий раз, когда среди максимальных идеалов P_i $(i = 1, 2, ..., k)$ встретится идеал P_j конечного индекса, по лемме 9 и следствию 1 имеет место $Ae_j = Re_j$.

Таким образом, в обоих случаях A является элементарной идемпотентной алгеброй. □

Следующая лемма обосновывает утверждение 1) теоремы.

Лемма 27. *Идемпотентная алгебра A является HP–алгеброй тогда и только тогда, когда A есть элементарная идемпотентная алгебра.*

В самом деле, по лемме 25 любая моногенная подалгебра $B = \langle a \rangle$ алгебры A является идемпотентной и поэтому в силу следствия 1 и леммы 26 является элементарной идемпотентной алгеброй. Таким образом, A — элементарная идемпотентная алгебра. Обратное утверждение вытекает из леммы 15.

Лемма 28. *Любой идемпотент e наследственно идемпотентной алгебры A лежат в центре алгебры A.*

Действительно, алгебра A не имеет ненулевых нильпотентных элементов. Следовательно, ее идемпотенты находятся в центре [23, с. 305].

Следующая лемма обосновывает утверждение 3) теоремы.

Лемма 29. *В любой HP-алгебре A ее квадрат A^2 есть элементарная идемпотентная алгебра, а радикал Джекобсона $J(A)$ является элементарной абелевой алгеброй; если все ее нильэлементы содержатся в $J(A)$ (в частности, если алгебра A коммутативна), то $A = A^2 \oplus J(A)$..*

Доказательство. Идеал A^2 по лемме 19 совпадает со своим квадратом и поэтому по лемме 27 является элементарной идемпотентной алгеброй. Отсюда следует, в частности, что A^2 не имеет нильэлементов. С другой стороны, идеал $J(A)$ по лемме 22 является элементарной абелевой алгеброй. Таким образом, $A^2 \cap J(A) = O$. Покажем теперь, что $A = A^2 + J(A)$. Пусть x — произвольный элемент алгебры A. Легко понять, что для элемента x^2 в алгебре A^2 имеется единица e. По лемме 28 идемпотент e является центральным в алгебре A^2. Тогда имеем $x = (x-xe)+xe$, где $xe \in A^2$, $(x-xe) \in J(A)$, поскольку $(x-xe)^2 = x^2 - 2ex^2 + ex^2 = 0$. Если все нильэлементы алгебры A лежат в её радикале, то $x - xe \in J(A)$. Таким образом, в обоих случаях $A = A^2 \oplus J(A)$. $\square$

Основной результат статьи вытекает теперь из лемм 15, 18, 27 и 29.

В заключение заметим, что результаты данной работы анонсированы в [27].

Список литературы

[1] Л. М. Мартынов, *О понятиях примарности, полноты, редуцированности и чистоты для произвольных алгебр*, Универсальная алгебра и её приложения (Волгоград, 6–11 сентября 1999). Труды международного семинара. Волгоград: Перемена (2000), 179–190.

[2] А. И.Мальцев, *Об умножении классов алгебраических систем*, Сиб. мат. ж., **8**, № 2 (1967), 346–365.

[3] Л. Н. Шеврин, Л.М.Мартынов, *О достижимых классах алгебр*, Сиб. мат. журн., **12**, № 6 (1971), 1363–1381.
MR0291059

[4] L. N. Shevrin, L. M. Martynov, *Attainability and solvability for classes of algebras.* Colloq. Math. Soc. J. Bolyai (39.Semigroups: Structure and universal algebraic problems, Szeged (Hungary), 1981), North-Holland, Amsterdam e. a. 1985. P. 397–459.

[5] Л. М. Мартынов, *О проблеме спектров разрешимости для многообразий алгебр*, Алгебра и логика, **29**, № 2 (1990), 162–178.
MR1131148

[6] Л. М. Мартынов, *Об одном радикале алгебр со свойством трансвербальности по минимальным многообразиям*, Вест. Омск. ун-та, Вып. 3 (2004), 19-21.

[7] А. Г. Курош, *Радикалы в теории групп*, Сиб. мат. журн., **3**, № 6 (1962), 912–931.
MR0177038

[8] А. И. Корнев, *О модулях с чистыми подмодулями*, Универсальная алгебра и её приложения. Труды международного семинара (Волгоград, 6–11 сентября 1999). Волгоград: Перемена (2000), 144–152.

[9] А. И. Корнев, *Простые по чистоте модули редуцированных многообразий модулей над коммутативными кольцами*, Вест. Омск. ун-та, Вып. 4 (2000), 13–15.
Zbl 1032.13501

[10] A. A. Tuganbaev, *Primitively pure submodules and primitively divisible modules*, Journal of Mathematical Sciences, **110**, No 3 (2002), 2746–2754.
MR1922413

[11] О. В. Князев, *О чистых алгебрах с выделенным элементом*, Математика и информатика: наука и образование, Омск: Изд-во ОмГПУ, Вып. 1 (2001), 10–13.

[12] О. В. Князев, *О чистых алгебрах*, Вест. Омск. ун-та, Вып. 3 (2001), 18–20.
Zbl 1024.08500

[13] О.В. Князев *Об абсолютно чистых алгебрах с выделенным элементом*, Математика и информатика: наука и образование, Омск: Изд-во ОмГПУ, Вып. 2 (2002), 23–25.

[14] О.В. Князев, *Наследственно чистые коммутативные моноиды*, Математика и информатика: наука и образование, Омск: Изд-во ОмГПУ, Вып. 3 (2003), 16–19.

[15] О.В. Князев, *Наследственно чистые моноиды*, Сиб. электрон. матем. изв., **2** (2005), 83-87.
MR2152926

[16] О.В. Князев, *Полугруппы с наследственно чистыми подполугруппами*, Изв. Урал. гос. ун-та (Математика и механика), Вып. 8, № 38 (2005), 69–79.
MR2907155

[17] О. В. Князев, *Простые по чистоте вполне регулярные полугруппы*, Вест. Омск. ун-та, Вып. 4 (2006), 17–20.

[18] О. В. Князев, *О чистых циклических подгруппах групп*, Математика и информатика: наука и образование, Омск: Изд-во ОмГПУ, Вып. 5 (2006), 24–26.

[19] И. В. Знаева, *Наследственно чистые алгебры Ли*, Математика и информатика: наука и образование, Омск: Изд-во ОмГПУ, Вып.6 (2007), 12–15.
[20] Л. М. Мартынов, *Наследственно чистые ассоциативные кольца*, Математика и информатика: наука и образование, Омск: Изд-во ОмГПУ, Вып.9 (2010), 25–35.
[21] Л. М. Мартынов, *Наследственно чистые ассоциативные алгебры над дедекиндовым кольцом, максимальные идеалы которого имеют конечные индексы*, Алгебра и логика, **50**, № 6 (2011), 781–801.
MR2953278
[22] О. Зарисский, П. Самюэль, *Коммутативная алгебра*, Т. 1, ИЛ, Москва, 1963.
Zbl 0112.02902
[23] Н. Джекобсон, *Строение колец*, ИИЛ, Москва, 1961.
[24] T. R. Sundararaman, *Precomplete varieties of R–algebras*, Alg. Univers., **27**, No 2 (1974), 243–256.
[25] В. А. Артамонов, *Решетки многообразий линейных алгебр*, Успехи мат. наук., **33**, No 2 (1978), 135–167.
MR0495500
[26] Л. М. Мартынов, О примарных и редуцированных многообразиях моноассоциативных алгебр, Сиб. мат. ж., **42**, No 1 (2001), 103–112.
MR1830796
[27] Л. М. Мартынов *Наследственно чистые ассоциативные коммутативные алгебры над дедекиндовыми кольцами*, Международная конференция Мальцевские чтения, посвященная 60-летию со дня рождения С.С. Гончарова (11-14 октября 2011 г.). Тезисы докладов, Новосибирск, 2011, 116.

Мартынов Леонид Матвеевич
Омский государственный педагогический университет,
Набережная Тухачевского, 14,
644099, Омск, Россия
E-mail address: mart@omsk.edu