S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 558–561 (2013) УДК 512.54
MSC 13A99

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫЕ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АБЕЛЕВЫХ 2-ГРУПП И ПРОСТЫХ ГРУПП $L_2(2^m)$

А.А. ДУЖ

Abstract. Let G be a periodic Shunkov's group containing an involution. It is proved that if every finite subgroup from G of even order is contained in a subgroup, which is isomorphic to the direct product of an elementary abelian 2-group and a group $L_2(2^m)$ for some $m \geq 2$, that $G \simeq L_2(Q) \times V$, where Q is some locally finite field of characteristic 2 and V is a group of period 2.

Keywords: periodic Shunkov's group, saturation.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — непустое множество групп. Говорят, что группа G *насыщена* группами из $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$ [2].

Группа G называется *группой Шункова*, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [4].

В [1] показано, что периодическая группа, насыщенная прямыми произведениями одной фиксированной конечной простой группы $L_2(2^m)$ и элементарных абелевых 2-групп, локально конечна. Настоящая работа посвящена обобщению этого результата.

Duzh, A.A., Periodic Shunkov's groups saturated by the direct products of an elementary abelian 2-groups and a simple groups $L_2(2^m)$.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00717-а).

Поступила 15 июня 2013 г., опубликована 14 сентября 2013 г.

2. Основной результат

Пусть $\mathfrak{M} = \{L_2(2^m) \times I_n \mid m = 2, 3, ..., n = 0, 1, ...\}$, где I_n — элементарная абелева 2-группа порядка 2^n.

Теорема 1. *Периодическая группа Шункова, насыщенная множеством $\mathfrak{M}$, локально конечна и изоморфна группе $L_2(Q) \times V$, где Q — некоторое локально конечное поле характеристики 2, а V — группа периода 2.*

Теорема 1 является очевидным следствием более общего результата.

Теорема 2. *Пусть G — периодическая группа Шункова, содержащая инволюцию. Если каждая конечная подгруппа из G четного порядка содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и группы $L_2(2^m)$ для некоторого $m \geq 2$, то $G \simeq L_2(Q) \times V$, где Q — некоторое локально конечное поле характеристики 2, а V — группа периода 2.*

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\mathfrak{M} = \{L_2(2^m) \times I_n \mid m \geq 2, n \geq 0 -$ целые числа$\}$ и G — периодическая группа Шункова, каждая конечная подгруппа четного порядка которой содержится в подгруппе, изоморфной некоторому элементу множества $\mathfrak{M}$. Пусть, кроме того, G содержит хотя бы одну инволюцию. Если F — конечная подгруппа из G, то через $\mathfrak{M}(F)$ обозначим множество всех подгрупп из группы G, которые содержат F и изоморфны элементам из $\mathfrak{M}$. По условию $\mathfrak{M}(1)$ не пусто. Следующая лемма почти очевидна (см. [1]).

Лемма 1. *Любая 2-подгуппа группы G абелева и ее период равен 2.*

Следующее замечание легко получается с помощью простой индукции из того факта, что в G любые две инволюции порождают группу диэдра с элементарной 2-подгруппой порядка ≤ 4.

Лемма 2. *Пусть $s_1, ..., s_m$ — попарно перестановочные инволюции и t — инволюция из G. Тогда существует $x \in \langle s_1, ..., s_m, t\rangle$, что $\langle s_1, ..., s_m, t^x\rangle$ — абелева подгруппа.*

Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всех подгрупп из $\mathfrak{M}(1)$, изоморфных $L_2(2^m)$ для всех возможных $m \geq 2$, и пусть $\mathfrak{C} = \{C_G(P) \mid P -$ силовская 2-подгруппа в $L \in \mathfrak{S}\}$.

Лемма 3. *(а) Любой элемент из $\mathfrak{C}$ является силовскай 2-подгруппой в G.*

(б) $\mathfrak{C}$ составляет класс сопряженных подгрупп группы G. Более того, если $S, T \in \mathfrak{C}$, то S и T сопряжены в $\langle S, T\rangle$.

Доказательство. Использует леммы 1 и 2, а также известные свойства групп $L_2(2^m)$ (см. [1]).

До конца доказательства теоремы зафиксируем подгруппу $S \in \mathfrak{C}$. Следующая лемма доказывается так же, как и аналогичный результат, хорошо известный для конечных групп.

Лемма 4. *Два подмножества из S, сопряженные в G, сопряжены в $N = N_G(S)$.*

Зафиксируем обозначения $N = N_G(S)$ до конца доказательства.

Лемма 5. *(а) $N = SH$, где H — локально циклическая группа без инволюций.*

(б) $S = U \times V$, где $U = [S, H]$, $V = C_S(H)$. Подгруппа H действует свободно на U и транзитивно на множестве инволюций U.

Доказательство. По определению $S = C_G(F)$, где F — силовская 2-подгруппа некоторой изоморфной $L_2(2^m)$ подгруппы L из G. Очевидно, $N_L(F)$ не централизует F и содержится в N. Поэтому N/S не содержит инволюций и нетривиально. Пусть nS — элемент простого порядка p из N/S. Ясно, что в качестве n можно взять элемент порядка p. Из условия теоремы вытекает, что $\langle nS \rangle \trianglelefteq N/S$. Отсюда следует, что N/S локально конечная, а, следовательно, локально циклическая группа. Таким образом, N локально конечная группа. Остальные утверждения леммы вытекают из свойства насыщенности. Это доказывает лемму.

Сохраним до конца доказательства обозначения из формулировки леммы 5.

Лемма 6. *$V \trianglelefteq G$.*

Доказательство. Покажем вначале, что $[V, V^g] = 1$ для любого элемента $g \in G$. Действительно, в противном случае найдутся неперестановочные инволюции $v \in V$ и $w \in V^g$. Поскольку $\langle w, v \rangle$ — группа диэдра с абелевой силовской 2-подгруппой, то v инвертирует некоторый элемент r нечетного порядка из $\langle w, v \rangle$ и поэтому $\langle v, r \rangle$ содержится в подгруппе $L_1 \times V_1$, где $L_1 \simeq L_2(2^m)$ для некоторого m, а V_1 — элементарная абелева группа. Очевидно, $v = lt$, где l — нетривиальная инволюция, принадлежащая некоторой силовской 2-подгруппе T из L, а $t \in V_1$. Пусть $S_1 = C_G(T)$. По лемме 3 S_1 — силовская 2-подгруппа в G, сопряженная с S. Пусть $S_1^x = S$. Тогда v^x не принадлежит V. С другой стороны, по лемме 4 v и v^x сопряжены в N, что противоречит лемме 5. Итак, $[V, V^g] = 1$ для любого $g \in G$. Поэтому $W = \langle V^g \mid g \in G \rangle$ — элементарная абелева группа, нормальная в G. Так как SW — 2-группа, а S — силовская 2-подгруппа, то $SW = S$ и $W \leq S$. По леммам 4 и 5 $W \leq V$. Лемма доказана.

Лемма 7. *V содержится в центре S и $G/V \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля характеристики 2.*

Доказательство. Пусть $v \in V$ и $g \in G$. Тогда по лемме 6 $v^g \in V$. По лемме 4 $v^g = v^n$ для некоторого элемента $n \in N$. По лемме 5 $v^n = v$, т.е. $v^g = v$.

Пусть K — конечная подгруппа из G/V. Тогда $K = K_0V/V$, где K_0 — некоторая конечная подгруппа четного порядка из G. Пусть $K_0 \leq L_1 \times V_1$, где $L_1 \simeq L_2(2^m)$ для некоторого m, а V_1 — элементарная абелева группа. Ясно, что $V_1 \leq V$, поэтому $K \leq L_1V/V$. Таким образом, G/V — группа Шункова, насыщенная группами $L_2(2^m)$, и теперь лемма вытекает из [3].

Лемма 8. *$G = L \times V$, где $L \simeq L_2(Q)$.*

Доказательство. По лемме 7 G/V является объединением возрастающей цепи подгрупп L_i/V, каждая из которых изоморфна $L_2(2^i)$ для некоторого i. Так как в $\overline{L}_i$ силовские 2-подгруппы элементарные абелевы, $\overline{L}_i = M_i \times V$, где $M_i \simeq L_2(2^i)$. Очевидно, M_i составляет возрастающую цепочку подгрупп, объединение которой изоморфно $L_2(2^i)$, и $G = L \times V$. Лемма и теорема доказаны.

Список литературы

[1] А.А. Дуж, А.А. Шлепкин, *О периодической группе Шункова, насыщенной прямыми произведениями конечных элементарных абелевых 2-групп и* $L_2(2^n)$,Труды ИММ УрО РАН, **17**:4 (2011), 83–87.

[2] А.К. Шлепкин, *Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы*, Сб. тез. 3-ймеждунар. конф. по алгебре, Красноярск, (1993), 363.

[3] А.К. Шлепкин, *О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами*, Алгебра и логика, **37**:2 (1998), 224–245. MR1672893

[4] В.П. Шунков, *О периодических группах с почти регулярной инволюцией*, Алгебра и логика, **11**:4 (1972), 470–494.

Анна Александровна Дуж
Красноярский государственный аграрный университет,
пр. Мира 50,
660049, Красноярск, Россия
E-mail address: anyaduzh@yandex.ru