S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 56–64 (2013)

УДК 512.54
MSC 13A99

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ СПЛЕТЕННЫМИ ГРУППАМИ.

А.А. ШЛЕПКИН

Abstract. It is proved that an infinite 2–group saturated by the set $\mathfrak{S} = \{(< a > \times < b >) \leftthreetimes (v) | \ |a| = |b| = 2^n, v^2 = e, a^v = b, n = 1, 2, ...\}$ is isomorphic to the wreath product of a locally cyclic group and a group of order 2.

Keywords: saturation, groups saturated by current set of groups, wreathed groups

1. Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторое множество конечных групп. Говорят, что группа G насыщена группами из $\mathfrak{M}$, если каждая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторому элементу множества $\mathfrak{M}$. Сплетенной группой называется сплетение циклической группы и группы порядка 2. Известно, что сплетенные 2-группы являются силовскими 2-подгруппами некоторых конечных простых групп, а именно групп $L_3(q)$ при $q \equiv 1(mod4)$ и $U_3(q)$ при $q \equiv -1(mod4)$. В работе [1] доказано, что других конечных простых групп со сплетенной силовской 2-подгруппой нет. Таким образом, изучение 2-групп, насыщенных сплетенными группами, является необходимым этапом в изучении групп, насыщенных простыми группами $L_3(q)$ и $U_3(q)$.

Теорема 1. *Бесконечная 2-группа, насыщенная сплетенными группами, изоморфна сплетению бесконечной локально циклической 2-группы и группы порядка 2.*

Построен пример, показывающий, что теорема 1 для произвольных периодических групп неверна. Однако для некотрых классов групп, в частности, для локально конечных групп и групп Шункова такое обощение возможно.

Shlyopkin, A.A., Periodic groups, saturated by wreathed groups.

Поступила 14 января 2013 г., опубликована 25 января 2013 г.

Теорема 2. *Пусть G – локально конечная группа, насыщенная сплетенными группами. Тогда $G = (A \times B) \leftthreetimes < v >$, где $A^v = B$, A локально циклическая группа и $v^2 = e$.*

Напомним, что группой Шункова называется группа G в которой любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную группу и это свойство сохраняется при переходе к сечениям группы G по конечным подгруппам.

Теорема 3. *Пусть G – группа Шункова, насыщенная сплетенными группами. Тогда $G = (A \times B) \leftthreetimes < v >$, где $A^v = B$, A – локально циклическая группа и $v^2 = e$.*

2. Используемые результаты.

Определение 1. *Пусть группа G насыщена множеством X и K конечная подгруппа группы G. Через $X(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G содержащих K изоморфных подгрупп из X. В частности $X(1)$, где 1 единичная подгруппа группы G, будет обозначать множество всех подгрупп группы G изоморфных группам из X.* [7]

Предложение 1. *(Теорема Шмидта) Расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы есть локально конечная группа.*[6] *(Теорема 22.3.1).*

Предложение 2. *(Теорема Шункова) В бесконечной 2-группе T любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора. В частности, T содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Предложение 3. *Полная подгруппа A абелевой группы G выделяется в G прямым сожителем.*[6] *(Теорема 9.1.4).*

Предложение 4. *Пусть*

$$W =< x, y, v | x^{2^m} = y^{2^m}, [x, y] = 1, x^v = y >$$

– сплетение циклической группы порядка 2^m и группы порядка 2.

(1) Если A – абелева нециклическая подгруппа в W, то либо $A \leq< x, y >$, либо A – прямое произведение групп порядка 2 на циклическую группу.

(2) Централизатор в W любой нециклической подгруппы порядка 4 абелев и двупорожден.

(3) Любая подгруппа из W порождается не белее чем тремя элементами и ее коммутант – циклическая группа.

(4) $Z(W) =< xy >, W/Z(W)$ – группа диэдра.

(5) Если D подгруппа диэдра из W, то $C_W(D) = Z(W)$.

Доказательство легко следует из задания W.

3. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Определим множество $\mathfrak{S} = \{(< a > \times < b >) \leftthreetimes (v)|,\ |a| = |b| = 2^n, v^2 = e, a^v = b, n = 1, 2, ...\}$. Из условия насыщенности и предложения 1 вытекает, что в G существует конечная подгруппа $K_1 \in \mathfrak{S}(1)$ такая, что $|K_1| > 8$. Следовательно,

$$K_1 = (< a_1 > \times < b_1 >) \leftthreetimes (v_1),$$

где $|a_1| = |b_1| = 2^{n_1} > 2$. По предложению 1 $N_G(K_1) \neq K_1$. Возьмем элемент $x \in N_G(K_1) \setminus K_1$. По условию насыщенности имеет место следующее

$$< x, K_1 > \subseteq K_2 \in \mathfrak{S}(e)$$

и

$$K_2 = (< a_2 > \times < b_2 >) \leftthreetimes (v_2),$$

где $|a_2| = |b_2| = 2^{n_2} > 2^{n_1}$. Продолжая этот процесс строим бесконечную цепочку вложенных друг в друга конечных подгрупп группы G

$$K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_{m-1} \subset K_m \subset ... \tag{1}$$

таких, что $K_m \in \mathfrak{S}(1)$ для $m = \overline{1, \infty}$. Следовательно,

$$K_m = (< a_m > \times < b_m >) \leftthreetimes < v_m >,$$

где $|a_m| = |b_m| = 2^m$, $v_m^2 = e$ и $a_m^{v_m} = b_m$.

Лемма 1. *Пусть* $m_1 < m_2$,

$$K_{m_1} = (< a_{m_1} > \times < b_{m_1} >) \leftthreetimes (v_{m_1})$$

и

$$K_{m_2} = (< a_{m_2} > \times < b_{m_2} >) \leftthreetimes (v_{m_2}).$$

Тогда $v_{m_1} \notin (< a_{m_2} > \times < b_{m_2} >)$.

Доказательство. Предположим обратное:

$$v_{m_1} \in (< a_{m_2} > \times < b_{m_2} >).$$

Так как $|K_{m_2} : (< a_{m_2} > \times < b_{m_2} >)| = 2$, то элементы $a_{m_1}^2, b_{m_1^2}$ также лежат в $(< a_{m_2} \times < b_{m_2} >)$, которая является абелевой группой. Следовательно, $(a_{m_1}^2)^{v_{m_1}} = a_{m_1}^2$ и $(b_{m_1}^2)^{v_{m_1}} = b_{m_1}^2$ Но из определения группы K_{m_1} и того факта, что $|K_1| > 8$, вытекает следующее

$$(a_{m_1}^2)^{v_{m_1}} = (a_{m_1}^{v_{m_1}})^2 = b_{m_1}^2 \neq a_{m_1}^2 \neq e$$

и

$$(b_{m_1}^2)^{v_{m_1}} = (b_{m_1}^{v_{m_1}})^2 = a_{m_1}^2 \neq b_{m_1}^2 \neq e.$$

Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $v = v_1$ *Тогда для любого* $m = \overline{1, \infty}$

$$K_m = (< a_m > \times < b_m >) \leftthreetimes < v >,$$

и $a_m^v = b_m$.

Доказательство. По лемме 1

$$K_m = (< a_m > \times < b_m >) \leftthreetimes < v_m >= (< a_m > \times < b_m >) \leftthreetimes < v > .$$

Следовательно, для некоторго $x \in (< a_m > \times < b_m >), v = xv_m$ и

$$a_m^v = a_m^{xv_m} = (a_m^x)^{v_m} = a_m^{v_m} = b_m.$$

Лемма доказана.

В обозначениях леммы 2 имеет место

Лемма 3. *Для любого* $m = \overline{2, \infty}$

$$(< a_{m-1} > \times < b_{m-1} >) \subset (< a_m > \times < b_m >).$$

Доказательство. Предположим обратное –

$$(< a_{m-1} > \times < b_{m-1} >) \not\subset (< a_m > \times < b_m >).$$

Тогда имеет место хотя бы одно из следующих трех включений:

1) $< a_{m-1} > \subset (< a_m > \times < b_m >)$,

2) $< b_{m-1} > \subset (< a_m > \times < b_m >)$,

3) $< a_{m-1} b_{m-1} > \subset (< a_m > \times < b_m >)$.

Так как в противном случае

$$|K_m : (< a_m >) \times < b_m > | > 2,$$

что невозможно.

Пусть верно включение 1). Тогда по лемме 3

$$< b_{m-1} > = < a_{m-1}^v > \subset (< a_m > \times < b_m >)^v = (< a_m > \times < b_m >)$$

и

$$(< b_{m-1} > \times < a_{m-1} >) \subset (< a_m > \times < b_m >).$$

Противоречие. В случае 1) лемма доказана.

2) рассматривается аналогично 1).

Пусть выполнено включение 3). Тогда

$$< a_m > \times < b_m > \cap (< a_{m-1} > \times < b_{m-1} >) =$$
$$= < a_{m-1} b_{m-1} > \times < a_{m-1}^2 > = < a_{m-1} b_{m-1} > \times < b_{m-1}^2 > .$$

Так как $v = xy$ для некоторого $y \in (< a_{m-1} > \times < b_{m-1} >)$ и некоторого $x \in (< a_m > \times < b_m >)$, то $C_{K_m}(v)$ содержит нециклическую подгруппу $< a_{m-1} b_{m-1} > \times < a_{m-1}^2 >$ (предложение 5), что невозможно. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4. *Без ограничения общности можно считать, что*

$$< a_{m-1} > \subset < a_m >, \quad < b_{m-1} > \subset < b_m > .$$

Доказательство. Пусть x такой элемент из $< a_m > \times < b_m >$, что $x^2 = a_{m-1}$. Покажем, что такой x существуют. Пусть $a_{m-1} = a_m^{2^l} b_m^{2^r}$. Положим $x = a_m^{2^{l-1}} b_m^{2^{r-1}}$. Тогда

$$x^2 = (a_m^{2^{l-1}} b_m^{2^{r-1}})^2 = a_m^{2^{l-1}} b_m^{2^{r-1}} a_m^{2^{l-1}} b_m^{2^{r-1}} =$$
$$= a_m^{2^{l-1}+2^{l-1}} b_m^{2^{r-1}+2^{r-1}} = a_m^{2^l} b_m^{2^r}$$

Если $< x > \times < x^v > = < a_m > \times < b_m >$, то обозначив x через a_m получим требуемое. Если $< x > \times < x^v >$ – собственная подгруппа в $< a_m > \times < b_m >$, то повторим для x описанный выше прием извлечения квадратного корня из a_{m-1}. Лемма доказана.

В виду доказанной выше леммы обозначим:

$$G_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \bigcup_{m-1}^{\infty} (< a_m > \times < b_m >) \leftthreetimes < v >,$$

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} < a_m >,$$

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} < b_m > .$$

В этих обозначениях имеем

$$G_1 = (A \times B) \leftthreetimes < v >$$

и $A^v = B$. В дальнейшем группы G_1, A, B и инволюция v фиксированны.

Лемма 5. *Если G – локально конечная группа, то $G = G_1$.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть $e \neq x \in G \backslash G_1$. По условию теоремы

$$< K_1, x > \subset D_1 = ((< c_1 > \times < r_1 >) \leftthreetimes < v >),$$

где K_1 из последовательности (1) а $c_1^v = r_1$. Используя условие насыщенности, определим для $m = 2, 3, ...$ группу D_m следующим образом.

$$< K_m, D_{m-1} > \subset D_m = ((< c_m > \times < r_m >) \leftthreetimes < v >),$$

где K_m – группа из последовательности (1), а $c_m^v = d_m$. Таким образом мы имеем цепочку подгрупп:

$$D_1 \subset D_2 \subset ... \subset D_m \subset D_{m+1} \subset ...$$

По алгоритму, описанному в леммах 1 – 4, строим группу

$$G_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} ((< c_m > \times < d_m >) \leftthreetimes < v >) = (C \times R) \leftthreetimes < v >,$$

где C – локально циклическая группа и $C^v = R$. Так как $G_1 \subset G_2$ то $(A \times B) \subset (C \times R)$. Поскольку A, B, C, R – квазициклические группы, то по предложению 3 $(A \times B) = (C \times R)$ и $G_2 = G_1$. Противоречие с выбором x. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если $G \neq G_1$, то $G \setminus G_1$ содержит инволюцию.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда все инволюции из G лежат в G_1 и порождают в G характеристическую, локально конечную подгруппу $N \subset G_1$. Покажем, что фактор-группа $\overline{G} = G/N$ – абелева. Возьмем два элемента $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{G}$ и пусть $\overline{a}\overline{b} \neq \overline{b}\overline{a}$. Расссмотрим следующие ситуации:

1) $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 2$,
2) $|\overline{a}| = 2, |\overline{b}| = 2^n > 2$,
3) $|\overline{b}| = 2, |\overline{a}| = 2^n > 2$,
4) $|\overline{a}| = 2^m > 2; |\overline{b}| = 2^n > 2$.

1). Так как, $\overline{a}, \overline{b}$ – инволюции, то $< \overline{a}, \overline{b} >$ – конечная группа. По теореме Шмидта (предложение 1) $< a, b >$ – также конечная группа (a и b – прообразы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в G). По условию теоремы $< a, b > \subset ((< c > \times < d >) \leftthreetimes < w >) = K$, где $c^w = d$ и $w^2 = e$. Так как $c^{-k}d^k w$ – инволюция для любого k (предложение 5), то

$$(< c^{-1}d > \leftthreetimes < w >) \subset N,$$

значит,

$$< \overline{a}, \overline{b} > \subset K/N \simeq K/K \cap N = K/(< c^{-1}d > \leftthreetimes < w >) =< c > N$$

– абелева группа. Следовательно, $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$.

2). По 1) $< \overline{a}, \overline{a}^{\overline{b}}, ..., \overline{a}^{\overline{b}^{2^n-1}} >$ – конечная абелева группа. Следовательно,

$$< \overline{a}, \overline{a}^{\overline{b}}, ..., \overline{a}^{\overline{b}^{2^n-1}} > \leftthreetimes < \overline{b} > --$$

конечная группа т.е. $< a, a^b, ..., a^{b^{2^n-1}} > \leftthreetimes < b >$ и $< a, b >$ – конечные группы (предложение 1). Далее рассуждаем как в случае 1).

Случай 3) рассматривается аналогично 2).

4). По 2),3) и индукции $\overline{a}^2\overline{b} = \overline{b}\overline{a}^2$ и $\overline{b}^2\overline{a} = \overline{a}\overline{b}^2$. Значит, $< \overline{a}^2, \overline{b}^2 >$ лежит в центре $< \overline{a}, \overline{b} >$. Так как $< \overline{a}, \overline{b} > / < \overline{a}^2, \overline{b}^2 >$ порождается двумя инволюциями, то $< \overline{a}, \overline{b} >$ – конечная группа, далее рассуждаем как в случае 1). Следовательно $\overline{G}$ – абелева, а G – локально конечная группа (предложение 1) и по предложению 4 $G = G_1$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $(< a > \times < b >) \subset G, |a| = |b|$ *и*
$C_G(< a > \times < b >) = C$.
Тогда имеет место одно из следующих двух утверждений:
1. $C = P \times Q$, *где* P, Q *– квазициклические группы.*
2. $C = P\times < d >$, *где* $|d| = |a|$ *и* $< d >\subset (< a > \times < b >)$.

Доказательство. Вначале покажем, что G – бесконечная группа. Применяя к $(< a > \times < b >)$ алгоритм, описанный в леммах $(1 - 4)$, получаем следующее вложение

$$(< a > \times < b >) \subset (P \times Q)\leftthreetimes < t >,$$

где P, Q – квазициклические группы, $P^t = Q$ и $t^2 = 1$. Центр группы $(P \times Q)\leftthreetimes < t >$ есть квазициклическая группа $< rr^t | r \in P >= Z$. Следовательно, $C_G(< a > \times < b >)$ – бесконечная группа. Покажем, что C – абелева группа. Пусть $x, y \in C$ и $xy \neq yx$. Рассмотрим четыре случая

1) $|x| = |y| = 2$,
2) $|x| = 2,\ |y| = 2^n > 2$,
3) $|y| = 2, |x| = 2^n > 2$,
4) $|x| = 2^m > 2, |y| = 2^n > 2$.

1). По условию насыщенности и предложению 1 конечная группа $N_1 =< (< a > \times < b >), x, y >$ содержится в $((< c > \times < d >)\leftthreetimes < t_1 >) = M_1$, где $M_1 \subset \mathfrak{S}(< a > \times < b >)$. По предложению 4 $C_{M_1}(< a > \times < b >)$ – абелева группа. Противоречие с тем, что $yx \neq yx$.

2). По 1) $< x, x^y, ..., x^{y^{2^n-1}} > \leftthreetimes < y >$ – конечная группа. Далее рассуждаем как в случае 1).

3). Рассмотривается аналогично 2).

4). По 2), 3) и индукции $x^2y = yx^2$ и $xy^2 = y^2x$. Следовательно, $< x^2, y^2 >$ – центр группы $< x, y >$. Так как фактор-группа

$$< x, y > / < x^2, y^2 >$$

порождается двумя инволюциями то она конечна. Следовательно, $< x, y >$ конечная группа. Далее рассуждаем как в 1). Итак, C – абелева группа. Обозначим через $\tilde{C}$ полную часть группы C. По предложению 3 $C = \tilde{C} \times C_1$, где C_1 – циклическая группа. Из условий теоремы вытекает, что либо $\tilde{C} = P \times Q$ и

$C_1 =< e >$, либо $\tilde{C} = P$ и $C_1 =< d >$ где $|d| = |a|$ и

$$< d >\subset (< a > \times < b >).$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть* $G_1 \subset M \subset G$ *и* M *– локально конечная группа. Тогда* $G_1 = M$.

Доказательство. Пусть $G_1 \neq M$. Возьмем $x \in M \setminus G_1$. По условию насыщенности
$$< K_m, x > \subset ((< c_m > \times < d_m >) \leftthreetimes < v >),$$
где $R \in \mathfrak{S}(< K_m, x >)$. Следовательно,
$$(< c_m > \times < d_m >) \subset C(< a_m^2 > \times < b_m^2 >).$$
Так как $C(< a_m^2 > \times < b_m^2 >) = A \times B$ (лемма 7), то $x = yv$ для некоторого $y \in A \times B$ т.е. $x \in G_1$. Противоречие с выбором x. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $G_1 \neq G$. Тогда в G найдется подгруппа $G_2 \neq G_1$ такая, что*
1). $(A \times B) \leftthreetimes < v >= G_1 \simeq G_2 = (P \times Q) \leftthreetimes < a >$,
где a – инволюция из A.
2). $G_1 \cap G_2 = (Z\times < a >) \leftthreetimes < v >= (Z\times < v >) \leftthreetimes < a >$,
где $Z = Z(G_1) = Z(G_2)$ – центр групп G_1 и G_2.

Доказательство. Возьмем инволюцию $x \in G \setminus G_1$ и инволюцию $a \in A$. По условию насыщенности
$$< x, a > \subset M_1 = ((< c_1 > \times < d_1 >) \leftthreetimes < w_1 >).$$
Ясно, что $M_1 \not\subset G_1$. Положим $P_1 = M_1 \cap G_1$. Ясно, что $a \in P_1$. Возьмем элемент $x_1 \in N_{M_1}(P_1) \setminus P_1$ и $x_1^2 \in P_1$. Возьмем элемент $y_1 = aa^v$. Так как $y_1 \in Z(G_1)$, то $< x_1, y_1, P_1 >$ – конечная группа и по условию насыщенности
$$< x_1, y_1, P_1 > \subset M_2 = ((< c_2 > \times < d_2 >) \leftthreetimes < w_2 >).$$
Ясно, что $M_2 \not\subset G_1$. Положим $P_2 = M_2 \cap G_1$. Тогда $P_1 \subseteq P_2$ и $ay_1 = aaa^t = a^v = b \in P_2$. Поскольку b – инволюция из B, то все элементы порядка 2 из $A \times B$ лежат в P_2. Применяя алгоритм из лемм 1 – 4 к группе M_2, получим вложение
$$M_2 \subset G_2 = (P \times Q) \leftthreetimes < t >,$$
где P, Q – квазициклические, $P^t = Q$ и $t^2 = e$. По доказанному выше
$$(< a > \times < b >) \subset P_2 = M_2 \cap G_1 \subseteq G_2 \cap G_1.$$
По леммам 7,8
$$C_G(< a > \times < b >) = A \times B,$$
а
$$C_{G_2}(< a > \times < b >) = Z\times < a >= Z\times < b >,$$
где $Z = Z(G_2)$. Так как $a, b \in G_2$, и $a, b \notin (P \times Q)$, то по лемме 8
$$(P \times Q) \leftthreetimes < t >= (P \times Q) \leftthreetimes < a >= (P \times Q) \leftthreetimes < b > .$$
Положим $t \equiv a$. Пусть теперь c – инволюция из P, а z – инволюция из Z. Тогда
$$(< a > \times < b >)^c = (< a > \times < z >)^c = (< a^c > \times < z^c >) =$$
$$(< cacaa > \times < z >) = (< cc^a a > \times < z >) =$$
$$(< za > \times < z >) = (< a > \times < z >) = (< a > \times < b >)$$
Таким образом, $c \in N(< a > \times < b >)$, и $c \notin A \times B$. Пусть d – инволюция из Q. Тогда
$$(< a > \times < b >)^d = (< a > \times < z >)^d = (< a^d > \times < z^d >) =$$
$$(< dadaa > \times < z >) = (< dd^a a > \times < z >) =$$
$$(< za > \times < z >) = (< a > \times < z >) = (< a > \times < b >)$$

Таким образом, $d \in N(< a > \times < b >)$ и $d \notin A \times B$. Так как $c, d \in G_1$ и $c; d \notin A \times B$, то по лемме 8

$$G_1 = (A \times B) \leftthreetimes < d >= (A \times B) \leftthreetimes < c >= (A \times B) \leftthreetimes < v >$$

и $Z(G_1) = Z$. Положим $v \equiv c$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Предположим, что $G \neq G_1$. Рассмотрим фактор группу $C_G(Z)/Z$. Тогда

$$\overline{G_1} = G_1/Z = \overline{A} \leftthreetimes < \overline{v} >, \overline{G_2} = G_2/Z = \overline{P} \leftthreetimes < \overline{a} >,$$

$\overline{G_1} \cap \overline{G_2} =< \overline{a} > \times < \overline{v} >$, для любого $\overline{x} \in \overline{A}, \overline{x}^{\overline{v}} = \overline{x}^{-1}$ и для любого $\overline{y} \in \overline{P}, \overline{y}^{\overline{a}} = \overline{y}^{-1}$ (предложение 4). Возьмем элемент $\overline{a_1} \in \overline{A}$, такой, что $\overline{a_1}^2 = \overline{a}$. Возьмем элемент $\overline{v_1} \in \overline{P}$ такой, что $\overline{v_1}^2 = \overline{v}$. Ясно, что $< \overline{a_1}, \overline{v_1} > \subset N(< \overline{a} > \times < \overline{v} >)$ и

$$\overline{a}^{\overline{v_1}} = \overline{av}, \overline{v}^{\overline{a}} = \overline{av}, \overline{a}^{\overline{va_1}} = \overline{v},$$

$$\overline{a}^{(\overline{a_1 v_1})^2} = \overline{v}^{\overline{a_1 v_1}} = \overline{av}$$

$$\overline{a}^{(\overline{a_1 v_1})^3} = \overline{av}^{\overline{a_1 v_1}} = \overline{a}^{\overline{a_1}} = \overline{a}$$

Таким образом, $|\overline{v_1 a_1}|$ делится на 3, что невозможно. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $< b >$ – циклическкая группа простого порядка $p \geqslant 665$, v – инволюция и $B(m, p)$ – свободная бернсайдова группа периода p с m образующими. По основному результату из [2] $B(m, p)$ не локально конечна. Рассмотроим группу

$$G = (< b > \leftthreetimes < v >) \times B(m, p),$$

где $b^v = b^{-1}$. Покажем, что G насыщенна одной группой вида

$$(< c > \times < d >) \leftthreetimes < v >,$$

где $v^2 = e$, $|c| = n$, $c^v = d$. Действительно, пусть K конечная подгруппа из G. Тогда $K = \{x_1 y_1, x_2 y_2, ..., x_n y_n\}$, где $|K| = n$. Так как K – конечная группа, то $(x_i y_i)(x_j y_j) = x_i x_j y_i y_j = x_k y_k$, где $1 \leq i, j, k \leq n$ и $x_k = x_i x_j$, а $y_k = y_i y_j$. Таким образом $Y =< y_1, y_2, ..., y_n >$ – конечная подгруппа в $B(m, p)$ и по [2], (глава VII, теорема 1.8) $Y =< y >$ циклическая группа порядка p. Следовательно,

$$K \subseteq < x_1, ..., x_n > \times Y \subseteq (< b > \leftthreetimes < v >) \times Y.$$

Положим $c = by$ и $c^v = d = b^{-1} y$. Тогда

$$(< b > \leftthreetimes < v >) \times Y = (< c > \times < d >) \leftthreetimes < v >$$

– сплетенная группа требуемого вида. Ясно, что G не локально-конечная группа.

Доказательство теоремы 2.

Определим множество сплетенных групп $\mathfrak{Z} = \{(< a > \times < b >) \leftthreetimes < v >\}$, где $|a| < \infty, a^v = b$, и $|a|$ не фиксируется.

Пусть x, y элементы нечетного порядка из G. По условию насыщенности конечная группа

$$< x, y > \subset ((< c > \times < d >) \leftthreetimes < v >) \in \mathfrak{Z}(1).$$

Следовательно, $< x, y > \subset (< c > \times < d >)$ и $xy = yx$. В силу произвольности выбора x, y получаем, что все элементы нечетных порядков из G образуют абелеву подгруппу $N \subset G$. Несложно видеть, что $N = N_1 \times N_2$, где N_1 и N_2 –

изоморфные локально циклические группы. Факторгруппа $\overline{G} = G/N$ очевидно 2-группа и насыщена множеством $\mathfrak{S}$. Следовательно, по теореме 1

$$\overline{G} = (\overline{A} \times \overline{B}) \leftthreetimes < \overline{v} >, \overline{A}^{\overline{v}} = \overline{B}, \overline{v}^2 = e$$

и $\overline{A}$ – локально циклическая группа. Пусть v – инволюция из G, являющаяся прообразом инволюции $\overline{v}$ из $\overline{G}$, а M – полный прообраз группы $(\overline{A} \times \overline{B})$ в G. Ясно, что $G = M \leftthreetimes < v >$. Так как M – абелева группа, то $M = M_1 \times M_2$ где M_1– $2'$ группа, а M_2 2–группа. Следовательно, $M_1 = N$, а группа $M_2 \leftthreetimes < v >$ удовлетворяет условиям теоремы 1, значит, $M_2 = (A \times B) \leftthreetimes < v >$, где $A_1^v = B_1$ и A_1 – локально циклическая группа. Поскольку $v \in N(M_1)$, то можно считать, что

$$M_1 \leftthreetimes v = (N_1 \times N_2) \leftthreetimes < v >, N_1^v = N_2.$$

Положим $A = (N_1 \times A_1), B = (N_2 \times A_2)$. Тогда $G = (A \times B) \leftthreetimes < v >, A^v = B$ и A – локально циклическая группа. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.

Пусть $\mathfrak{Z}$ – множество из доказательства теоремы 2. Пусть $a \in G$ и $|a| = p \neq 2$. По условию теоремы $< a, a^g > \subset K \in \mathfrak{Z}(< a, a^g >)$. Следовательно,

$$K \simeq (< c > \times < d >) \leftthreetimes < v >,$$

где $c^v = d,\ v^2 = e$. Значит, $< a, a^g > \subset (< c > \times < d >)$. Последнее означает, что $< a^G >$ – абелева нормальная подгруппа в G, отсюда и из определения группы Шункова нетрудно показать, что все элементы нечетных порядков образуют в G абелеву нормальную подгруппу N. Факторгруппа $\overline{G} = G/N$ является 2 – группой и насыщенна множеством $\mathfrak{S}$. По теореме 1 $\overline{G}$ – локально конечная группа. По предложению 1 G локально конечна и по теореме 2 $G = (A \times B) \leftthreetimes (v)$, где A, B и v из условия. Теорема доказана.

Список литературы

[1] J.L. Alperin, R.Brauer, D. Gorenstein. Finite simple groups of 2 – rank two, Scripta math., 29, № 3 – 4 (1973), 191-214. MR0401902

[2] С.И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, М. Наука, (1975). MR0432770

[3] Д. В. Лыткина, *О 2-группах, конечные подгруппы которых обладают заданными свойствами*, Владикавк. матем. журн., 13:4, (2011), 35—39. MR2907403

[4] Д. В. Лыткина, *О частичном обобщении одного результата Макдональда*, Сиб. электрон. матем. изв., 8 (2011), 369–371. MR2876552

[5] А.К. Шлепкин, *Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы*, Сб. тезисов 3-й междунар. конф. по алгебре, Красноярск, (1993) 363.

[6] М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков *Основы теории групп*, изд. Лань, (2009).

[7] А. А. Кузнецов, К. А. Филиппов, *Группы, насыщенные заданным множеством групп*, Сиб. электрон. матем. изв., 8 (2011), 230–246. MR2876557

Алексей Анатольевич Шлепкин
Сибирский Федеральный Университет,
пр. Свободный 79,
630090, Красноярск, Россия
E-mail address: shlyopkin@gmail.com