S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 615–626 (2013) УДК 514.132
MSC 52B15, 51M20, 51M25, 51M09

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЕМОВ ТЕЛ

И.Х. САБИТОВ

Abstract. In this paper we propose some integral formulae for volumes of bodies with known boundaries in the spaces of constant curvature of arbitrary dimension with some examples of their applications.

Keywords: models of spaces of constant curvature, volumes and algebraic volumes, polygons, prizmo- and ball-like bodies, symplices.

1. Введение

Хорошо известно, что ориентированный объем V тела D в 3-х мерном евклидовом пространстве можно вычислить интегралом по его граничной поверхности по формуле

$$\iint\limits_{S=\partial D} xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy = 3V, \tag{1}$$

где x, y, z — компоненты радиус-вектора точек границы тела. В случае, когда мы отправляемся от некоторой заданной компактной ориентированной поверхности S, то интеграл в левой части формулы (1) дает нам объем (с множителем 3), заключенный внутри этой поверхности. Если же поверхность S является погруженной и имеет какие-то самопересечения, тогда интеграл определяет так называемый алгебраический объем, ограниченный поверхностью S.

Целью нашей работы является установление аналогичных (1) формул для объемов тел в пространствах постоянной кривизны и произвольной размерности с примерами применений этих формул к некоторым телам.

Sabitov, I.Kh., On a method of volume calculation for bodies.

Работа поддержана грантом Правительства России № 11.G34.31.0053.

Поступила 17 сентября 2013, опубликована 30 октября 2013 г.

2. Рассматриваемые метрики

Мы будем рассматривать метрики пространств постоянной кривизны в следующей форме

$$ds^2 = \frac{1}{(1+ar^2)^2}(dx_1^2 + ... + dx_n^2), \tag{2}$$

где $r^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$ и коэффициент a является некоторой постоянной. При $a = 0$ мы имеем случай евклидовой метрики; значения $a > 0$ соответствуют сферической метрике с кривизной $K = 4a$; если же $a < 0$, то имеем метрику n-мерного пространства Лобачевского тоже с кривизной $K = 4a$. Область существования метрики (2) мы обозначим B. В случае евклидовой метрики $B : 0 \le r < \infty$, для сферической метрики область B совпадает с расширенным (или компактифицированным) пространством $\bar{\mathbf{R}}^n : 0 \le r \le \infty$; наконец, в гиперболическом случае $B : 0 \le r < \dfrac{1}{\sqrt{-a}}$.

Другой класс метрик определен только для гиперболических метрик. Они даются моделью Пуанкаре пространства Лобачевского в верхнем полупространстве соответствующей размерности и кривизны $K < 0$:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + ... + dx_n^2}{(-K)x_n^2},\ x_n > 0. \tag{3}$$

3. Основные теоремы

Теорема 1. *Пусть в случае метрики вида (2) в области ее определения B задано некоторое компактное тело D с кусочно-гладкой граничной поверхностью ∂D. Тогда его объем $V(D)$ можно вычислить по следующей формуле*

$$V(D) = \int\limits_{\partial D} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(-1)^{i-1} x_i F_n(r)}{r^n} \right) dx_1 \wedge ...\hat{d}x_i ... \wedge dx_n, \tag{4}$$

где функция $F_n(r)$ определяется равенством

$$F_n(r) = \int_0^r \frac{t^{n-1}}{(1+at^2)^n} dt,$$

а запись $\hat{d}x_i$ означает, что этот дифференциал пропускается.

Доказательство . В римановой геометрии с метрикой, заданной стандартным образом коэффициентами g_{ij}, объем тела вычисляется по формуле

$$V = \int_D \sqrt{det(g_{ij})}\ dx_1 \wedge dx_2 ... \wedge dx_n. \tag{5}$$

Применим к поверхностному интегралу в правой части формулы (4) формулу Стокса и простыми преобразованиями получим интеграл в правой части формулы (5), а он равен значению объема тела D.

Если в B ввести функцию

$$\Phi(r) = \int_0^r t^{1-n} F_n(t) dt$$

тогда интеграл в формуле (4) можно интерпретировать как поток (в евклидовом смысле) векторного поля $grad\ \Phi(r)$ через гиперповерхность ∂D. В евклидовом пространств (случай $a = 0$) имеем $\Phi = \dfrac{r^2}{2n}$ и интеграл в (4) представляет $(1/n)$-ю часть потока радиус-вектора через поверхность, в соответствии с известным фактом.

Если некоторая компактная гиперповерхность S имеет самопересечения, то значение интеграла (4) можно рассматривать как величину алгебраического объема, определяемого этой поверхностью.

Формула для объема тел в гиперболическом пространстве в модели Пуанкаре с метрикой (3) является менее сложной и более эффективной для вычислений.

Теорема 2. *Пусть D — компактное тело с кусочно-гладкой граничной поверхностью, расположенное в верхнем полупространстве $x_n > 0$. Тогда его объем V в гиперболической метрике (3) может быть вычислен по формуле*

$$V=\frac{1}{(-K)^{n/2}}\int\limits_D \frac{dx_1 \wedge ... \wedge dx_n}{x_n^n}=\frac{(-1)^n}{(n-1)(-K)^{n/2}}\int\limits_{\partial D}\frac{dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}} \tag{6}$$

Доказательство получается непосредственным применением формулы Стокса к правому интегралу.

Замечание 1. Если поверхность $S = \partial D$ может быть разбита на две части, каждая из которых представляется уравнениями $x_n = f_1(x_1, ..., x_{n-1})$ и $x_n = f_2(x_1, ..., x_{n-1})$ над некоторой областью $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, тогда объем тела D вычисляется по формуле

$$V = \frac{(-1)^n}{(n-1)(-K)^{n/2}}[\int\limits_\Omega \frac{dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1}}{f_1^{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})} - \int\limits_\Omega \frac{dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1}}{f_2^{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})}]$$

Например, с использованием этой формулы можно вычислить объем цилиндро-подобного тела

$$D : x^2 + y^2 \le r^2, \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)} \le z \le \sqrt{R_2^2 - (x^2 + y^2)},$$
$$r < R_1 < R_2$$

в трехмерном пространстве Лобачевского с кривизной K. Получим

$$V(D) = \frac{\pi}{2(-K)^{3/2}} \ln \frac{R_1^2(R_2^2 - r^2)}{R_2^2(R_1^2 - r^2)}.$$

Рассмотрим случай n-мерного призмо-подобного тела, когда основания являются евклидово-конгруэнтными $(n-1)$-мерными многогранниками на гиперплоскостях $x_n = a$ и $x_n = b > a$, а боковые грани расположены на плоскостях, ортогональных к плоскости $x_n = 0$ и проходящих через соответствующие грани многогранников на основаниях (основания являются поверхностями с евклидовой метрикой, т.е. в данном случае эквидистантами). Тогда

$$V = \frac{(-1)^n}{(n-1)(-K)^{n/2}}[\int\limits_{x_n=b} \frac{dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1}}{b^{n-1}} - \int\limits_{x_n=a} \frac{dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1}}{a^{n-1}}].$$

Интегралы равны $(n-1)$-мерному объему области Ω — общей проекции оснований на плоскость $x_n = 0$. Если гиперболическое расстояние между основаниями равно H, тогда $b = ae^{H\sqrt{-K}}$ и

$$V = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)(-K)^{n/2}} a^{1-n}(1 - e^{-(n-1)H\sqrt{-K}})V^E_{n-1}(\Omega) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)(-K)^{1/2}}(1 - e^{-(n-1)H\sqrt{-K}})V^L_{n-1}(P),$$

где $V^E_{n-1}(\Omega)$ — евклидов $(n-1)$-мерный объем области Ω, а V^L_{n-1} обозначает $(n-1)$-мерный гиперболический объем нижнего основания "призмы". При $K \to 0$ приближенно имеем обычную формулу $|V| \approx HV^E_{n-1}$ (мы написали знак модуля, потому что положительность выбранной ориентации зависит от четности/нечетности n).

Замечание 2. Можно рассматривать и другие виды интегрального представления объемов:

$$V(D) = \frac{1}{2(n-1)(-K)^{n/2}}[\int\limits_{\partial D} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j-1}x_j}{x_n^n} dx_1 \wedge ...\hat{d}x_j ... \wedge dx_n + \int\limits_{\partial D} \frac{(-1)^n dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}}].$$

В общем случае можно взять любую комбинацию выражений вида

$$a_j \frac{(x_j - b_j)dx_1 \wedge ...\hat{d}x_j ... dx_n}{x_n^n}, j \le n-1, \quad a_n \frac{dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}}$$

с произвольными постоянными коэффициентами a_j, b_j при условии, что применение формулы Стокса даст нам в результате первый интеграл в равенстве (6).

4. Некоторые применения

Теперь мы хотим предложить применения приведенных выше формул к вычислению объемов некоторых конкретных тел в сферическом или гиперболическом пространствах.

Первое напрашивающееся их применение состоит в вычислении объемов тел, имеющих простое строение в евклидовом представлении. Например, вычислим в метрике (2) объем трехмерного шароподобного тела, ограниченного евклидовой сферой $S : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$. Объем V такого тела с использованием формулы (4) вычисляется следующим образом

$$V = \int\limits_S \frac{F_3(r)}{r^3}(x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2),$$

где функция $F_3(r)$ задана выражением

$$F_3(r) = \int_0^r \frac{t^2}{(1+at^2)^3} dt.$$

На сфере S имеем $r = R$ и в гиперболическом случае $a < 0$ мы получаем

$$V = 4\pi\left(\frac{1}{8(1+q)} - \frac{1}{4(1+q)^2} + \frac{1}{16\sqrt{-q}}\ln\frac{1+\sqrt{-q}}{1-\sqrt{-q}}\right)\frac{R^3}{q},\ q = aR^2 < 0$$

с асимптотическим поведением

$$V = (\frac{4}{3}\pi - \frac{3}{5}\pi q + ...)R^3$$

когда $a \to 0$, т.е когда гиперболическая метрика стремится к евклидовой.

В случае сферической метрики $a > 0$ и мы имеем

$$V = 4\pi\left(\frac{1}{8(1+q)} - \frac{1}{4(1+q)^2} + \frac{1}{8\sqrt{q}}arctg(\sqrt{q})\right)\frac{R^3}{q},\ q = aR^2 > 0$$

с асимптотическим поведением

$$V = \left(\frac{4}{3}\pi - \frac{3}{5}\pi q + ...\right)R^3$$

при стремлении сферической метрики к евклидовой.

Замечание 3. На самом деле мы получили формулы для объемов шаров данного радиуса в гиперболическом и сферическом пространствах, так как в обоих пространствах рассмотренная евклидовая сфера S радиуса R с центром в начале координат является сферой также и в соответствующем пространстве, с тем же центром, но с другим радиусом. Например, в случае гиперболического пространства радиус ρ этого шара в гиперболической метрике (2) связан с евклидовым радиусом R следующей формулой

$$R = \frac{2}{\sqrt{-K}}\,\mathrm{th}\,\frac{\rho\sqrt{-K}}{2}.$$

Тогда найденная выше формула для объема шара радиуса ρ в трехмерном пространстве Лобачевского с кривизной $K < 0$ переписывается в следующем хорошо известном виде

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{(-K)^3}}(sh(2\rho\sqrt{-K}) - 2\rho\sqrt{-K}).$$

Аналогичный результат справедлив и для объема шара в сферическом пространстве.

В частности, объем единичного шара в пространстве с кривизной (-1) равен $\dfrac{\pi(e^4 - 4e^2 - 1)}{2e^2} = \pi(sh2 - 2) \approx 1.6268\pi$, что соответствует известным формулам, см., например, [2], гл.3.

Очевидно, по этой же формуле (4) можно найти объем шара в гиперболическом и сферическом пространствах любой размерности, как и объемы других тел, у которых в евклидовом пространстве границы представляются простыми уравнениями, например, объем полнотория.

Получим теперь формулы для площадей и объемов некоторых фигур, имеющих в пространстве Лобачевского такую же геометрическую природу, как и в евклидовом пространстве.

5. Алгебраическая площадь многоугольников на плоскости Лобачевского

Пусть P — некоторый n-угольник на плоскости Лобачевского, смоделированной в верхней полуплоскости с метрикой Пуанкаре

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(-K)y^2},\ y > 0.$$

Теорема 2 дает нам формулу для площади многоугольника через интеграл по его границе. Этот интеграл, взятый по любой замкнутой кривой L, определяет алгебраическую площадь, ограниченную данной кривой. Таким образом, алгебраическая площадь S, ограниченная ориентированной кривой L (возможно, имеющей самопересечения и даже самоналожения), дается формулой

$$S(L) = \frac{1}{-K}\oint\limits_L \frac{dx}{y} \tag{7}$$

В случае ориентированного n-угольника P с циклически пронумерованными вершинами $M_1, ..., M_n$ интеграл в (7) равняется сумме интегралов по каждой стороне $M_iM_{i+1}, 1 \leq i \leq n$, где $M_{n+1} = M_1$.

Пусть (x_i, y_i) — координаты вершины M_i. Сторона M_iM_{i+1} расположена на полуокружности S_i с уравнением $(x - a_i)^2 + y^2 = R_i^2, y > 0$, и точки дуги M_iM_{i+1} имеют координаты

$$x = a_i + R_i \cos\varphi, \quad y = R_i \sin\varphi.$$

Для концевых точек дуги имеем значения

$$x_i = a_i + R_i \cos\varphi_i^+, \quad y_i = R_i \sin\varphi_i^+,$$
$$x_{i+1} = a_i + R_i \cos\varphi_{i+1}^-, \quad y_{i+1} = R_i \sin\varphi_{i+1}^-,$$

Тогда интеграл (7) вдоль стороны M_iM_{i+1} равен

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}} d\varphi = \varphi_i^+ - \varphi_{i+1}^-.$$

Геометрически разность $\varphi_i^+ - \varphi_{i+1}^-$ равна углу $\Delta_i\varphi$ между радиусами, идущими от центра $(a_i, 0)$ окружности S_i к точкам M_i и M_{i+1}, взятому с соответствующим знаком. Значит, для площади $S(P)$ имеем следующую формулу

$$-KS(P) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i\varphi.$$

Но эта формула не очень эффективна, так как для вычисления слагаемых в сумме нам нужно использовать специальную модель плоскости Лобачевского. Чтобы получить инвариантную формулу для вычисления площади, сгруппируем слагаемые по парам вида

$$(\varphi_{i+1}^+ - \varphi_{i+1}^-), 0 \leq i \leq n - 1.$$

Радиусы a_iM_{i+1} и $a_{i+1}M_{i+1}$ являются в точке M_{i+1} нормалями к дугам M_iM_{i+1} и $M_{i+1}M_{i+2}$ соответственно и они связаны с касательными направлениями, а значит, и с углами между ними. Мы определим в каждой вершине M_i так называемый внутренний угол γ_i при данной ориентации как геометрическую величину угла в M_i, остающегося слева при выбранном направлении обхода многоугольника. Мы считаем, что всегда $0 < \gamma < 2\pi$ (тем самым предполагается, что ни одна сторона многоугольника не может идти по предыдущей стороне). Разность $\varphi_{i+1}^{+} - \varphi_{i+1}^{-}$ равна определяемому с соответствующим знаком углу α_{i+1}, отсчитываемому от нормали в M_{i+1} к дуге $M_i M_{i+1}$ к нормали в той же точке M_{i+1} к дуге $M_{i+1}M_{i+2}$ (обе нормали берутся как продолжения соответствующих радиусов). Оказывается, что внутренний угол γ_{i+1} в точке M_{i+1} связан с углом α_{i+1} следующими равенствами : 1) $\alpha_{i+1} = -\gamma_{i+1}$ или 2) $\alpha_{i+1} = \pi - \gamma_{i+1}$ или 3) $\alpha_{i+1} = 2\pi - \gamma_{i+1}$ в зависимости от взаимного расположения дуг и касательных к ним. Именно, касательные направляем из точки M_{i+1} в стороны дуг $M_{i+1}M_i$ и $M_{i+1}M_{i+2}$ и связь между α_{i+1} и γ_{i+1} зависит от того, как расположены касательные в окрестности точки M_{i+1} - внутри или вне области, ограниченной дугами $M_{i+1}M_i$ и $M_{i+1}M_{i+2}$. Для этих расположений есть 8 возможных вариантов и они дают приведенные выше три возможных равенства. В итоге приходим к следующей теореме:

Теорема 3. *Алгебраическая площадь $S(P)$, ограниченная ориентированным n-угольником P, дается формулой*

$$-KS_P = m\pi - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i, \tag{8}$$

где m — некоторое неотрицательное целое число, а $0 < \gamma_i < 2\pi$ — величины внутренних углов при вершинах $M_i, 1 \le i \le n$.

Замечание 4. Значение числа m зависит от ориентации многоугольника. Если при одной ориентации $m = m^+$, тогда при противоположной ориентации $m = m^-$ с равенством $m^+ + m^- = 2n$. Значит, всегда $0 \le m \le 2n$. Для звездных, в частности, выпуклых, n-угольников с положительной ориентацией имеем $m^+ = n-2,\ m^- = n+2$. Индукцией получаем, что то же самое верно и для произвольных жордановых многоугольников.

Для определения точного значения числа m в формуле (8) нам нужно знать, сколько раз при переходе от углов α_i к углам γ_i встречаются указанные выше случаи 1), 2) и 3). Если случай k) встречается $m_k, 1 \le k \le 3$, раз, тогда $m = m_2 + 2m_3$. Например, для положительно ориентированного треугольника всегда $m = 1$, значит, $m_3 = 0, m_2 = 1$.

Замечание 5. В работе [1] для многоугольников на евклидовой плоскости показана связь между суммой внутренних углов многоугольника, его индексом и числом сторон. Формула (8) тоже дает некоторую информацию о сумме внутренних углов многоугольника на плоскости Лобачевского, но она получена с привлечением конкретной модели гиперболической плоскости (именно, число m определяется по расположению некоторых объектов в верхней полуплоскости). Было бы интересно получить такую же формулу или ее аналог инвариантным способом, не обращаясь к конкретной модели плоскости Лобачевского.

6. Алгебраический объем многогранников в гиперболическом пространстве

Пусть P — многогранник произвольного комбинаторного строения в некотором n-мерном пространстве Лобачевского, представленном моделью Пуанкаре в верхнем полупространстве с метрикой (3):

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + ... + dx_n^2}{(-K)x_n^2},\ x_n > 0.$$

Теорема 2 дает нам формулу для вычисления его объема через некоторый интеграл по его граничной поверхности. Если мы рассмотрим такой же интеграл по любой компактной гиперповерхности S (может быть, имеющей самопересечения), он определит нам алгебраический объем V_S, ограниченный этой поверхностью. и равный

$$V_S = \frac{1}{(n-1)(-K)^{n/2}} \int\limits_S \frac{(-1)^n dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}} \tag{9}$$

В случае многогранной поверхности S этот интеграл определен на ее гипергранях ω_i, каждая из которых задана как часть $(n-1)$-мерной полусферы

$$S_i:\ (x_1 - a_{i1})^2 + ... + (x_{n-1} - a_{i,n-1})^2 + x_n^2 = R_i^2$$

(если некоторая грань ω_i расположена на гиперплоскости, ортогональной к плоскости $x_n = 0$, тогда интеграл по этой грани равен нулю).

Пусть $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ортогональная проекция грани ω_i на гиперплоскость $x_n = 0$. Если полусфера S_i ориентирована своей внешней нормалью, тогда

$$\int\limits_{\omega_i} \frac{dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}} = \int\limits_{\Omega_i} \frac{dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1}}{(R_i^2 - r_i^2)^{(n-1)/2}}, \tag{10}$$

где $r_i^2 = (x_1 - a_{i1})^2 + ... + (x_{n-1} - a_{i,n-1})^2$. В свою очередь, каждая область Ω_i является некоторым k_i-гранником ($k_i \geq n$) и интеграл по Ω_i может быть сведен к интегралу по ее границе:

$$\frac{1}{R_i^{n-1}} \int\limits_{\Omega_i} \frac{dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1}}{[1 - (\frac{r_i}{R_i})^2]^{(n-1)/2}} =$$

$$\int\limits_{\partial\Omega_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j-1}(x_j - a_{ij}) F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^{n-1}} dx_1 \wedge ... \hat{dx}_j ... \wedge dx_{n-1}, \tag{11}$$

где функция F определена следующей формулой

$$F(t) = \int_0^t \frac{\tau^{n-2}}{(1-\tau^2)^{(n-1)/2}} d\tau,\ t = \frac{r_i}{R_i}.$$

Замечание 6. Если рассматриваемый многогранник является псевдомногообразием, тогда каждый интеграл в правой части формулы (11) имеет свой аналог от интеграла по гиперграни, примыкающей к той же $(n-2)$-мерной грани. Эти два интеграла по одной и той же $(n-2)$-мерной грани, но в противоположных ориентациях, должны привести к соответствующему слагаемому в знаменитой формуле Шлефли, но это пока не доказано.

Как пример применения этого метода найдем в трехмерном пространстве Лобачевского формулу для объема прямоугольной призмы, у которой 4 боковые грани ортогональны плоскости $z = 0$ и имеют уравнения $x = \pm a, y = \pm b$, а нижнее и верхнее основания расположены на плоскостях $x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2, x^2 + y^2 + z^2 = R_2^2 > R_1^2 > \dfrac{a^2 + b^2}{4}$.

Используя предыдущие формулы с $F(t) = -\frac{1}{2}\ln(1-t^2)$ и учитывая, что в (10) все интегралы по боковым граням равны нулю, получим, что

$$V = \frac{-1}{(-K)^{3/2}}\ [2(\ln\frac{R_1}{R_2})\ arctg\frac{b}{a} + 2(\ln\frac{R_1}{R_2})\ arctg\frac{a}{b} +$$
$$a\int\limits_0^b \frac{\ln\frac{R_2^2-(a^2+y^2)}{R_1^2-(a^2+y^2)}}{a^2+y^2}\ dy + b\int\limits_0^a \frac{\ln\frac{R_2^2-(b^2+x^2)}{R_1^2-(b^2+x^2)}}{b^2+x^2}\ dx].$$

7. Алгебраический объем симплексов в пространствах Лобачевского

Рассмотрим теперь вопрос о выражении объемов тетраэдров (симплексов) через длины их ребер. Этот вопрос обсуждается многими геометрами, начиная с работ Гаусса и Лобачевского, см. обзор [3]; литературу о работах конца 20-го — начала 21-го века можно найти, например, в [4]; одной из последних публикаций по этой тематике является работа [5].

Мы скажем, что симплекс в модели Пуанкаре n-мерного пространства Лобачевского расположен в *стандартной позиции*, если его вершины можно пронумеровать в таком порядке $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$, чтобы они имели координаты

$$A_0(0,0,0,...,0,1), A_1(0,0,0,...,0,q), A_2(x_{21},0,0,...,0,x_{2n})\ \ x_{21}>0,$$
$$A_3(x_{31},x_{32},0,...0,x_{3n})\ c\ x_{32}>0,...,$$
$$A_k(x_{k1},...,x_{k,k-1},0,...,0,x_{kn})\ c\ x_{k,k-1}>0,...,$$
$$A_{n-1}(x_{n-1,1},...,x_{n-1,n-2},0,x_{n-1,n})\ c\ x_{n-1,n-2}>0,$$
$$A_n(x_{n1},...,x_{n,n-1},x_{nn})\ c\ x_{n,n-1}>0.$$

Приведение симплекса к стандартному положению можно осуществить движением в пространстве, поэтому предположение об его расположении в стандартной позиции никакого ограничения на метод нахождения его объема не накладывает. Заметим только, что если мы хотим иметь симплекс с положительной ориентацией при указанном выборе нумерации его вершин, мы должны расположить вершину A_1 "ниже"вершины A_0 (т.е. считать $q>1$) при нечетных размерностях, и "выше"A_0 в четных размерностях.

Легко доказать следующую простую лемму.

Лемма 1. *Если симплекс находится в стандартном позиции, то координаты его вершин явно выражаются единственным образом в элементарных функциях через длины его ребер.*

Значит, предполагая, что мы знаем длины ребер симплекса в стандартном положении, мы можем считать, что знаем координаты его вершин. В находящемся в стандартной позиции симплексе все гиперграни за исключением двух расположены на ортогональных к плоскости $x_n = 0$ гиперплоскостях с уравнениями вида $a_1x_1 + ... + a_{n-1}x_{n-1} = a_n$, поэтому из интегралов (10) неравными нулю могут быть только два интеграла, соответствующие гиперграням $A_0A_2...A_n$ и $A_1A_2...A_n$. Эти грани представляются как области ω_0 и ω_1 на $(n-1)$-мерных полусферах S_0 и S_1, заданных уравнениями

$$S_0 : (x_1-a_{10})^2 + ..., +(x_{n-1}-a_{n-1,0})^2 + x_n^2 = R_0^2,$$
$$S_1 : (x_1-a_{11})^2 + ..., +(x_{n-1}-a_{n-1,1})^2 + x_n^2 = R_1^2$$

Области ω_0 и ω_1 являются $(n-1)$-мерными симплексами и они имеют одну и ту же ортогональную проекцию Ω на плоскость $x_n = 0$ с n вершинами

$$A'_0(0,...,0), A'_2(x_{21},0,...,0,0),...,A'_n(x_{n1},...,x_{n,n-1},0),$$

так что Ω в свою очередь является $(n-1)$-мерным евклидовым симплексом с $(n-2)$-мерной границей, состоящей из $(n-2)$-мерных евклидовых симплексов.

Согласно Лемме 1, если мы знаем длины ребер симплекса, то знаем координаты его вершин в виде некоторых явно заданных элементарных функциях от длин ребер, поэтому мы можем найти центры и радиусы полусфер S_0 и S_1 и, в конечном счете, можем найти для Ω уравнения его граничных симплексов, и тем самым найти области интегрирования для интегралов в правой части формулы (11). Таким образом, мы указали **алгоритм для вычисления объема n-мерного симплекса через длины его ребер**.

Рассмотрим случаи размерностей $n = 3$ и $n = 4$.

Случай $\mathbf{n = 3}$. Вершины тетраэдра в стандартной позиции имеют координаты (см. рис.1):

$$A_0(0,0,1), A_1(0,0,q), A_2(x_{21},0,x_{23}), A_3(x_{31},x_{32},x_{33}).$$

Вершины области Ω на плоскости x_3 имеют координаты

$$O(0,0), A'_2(x_{21},0), A'_3(x_{31},x_{32}).$$

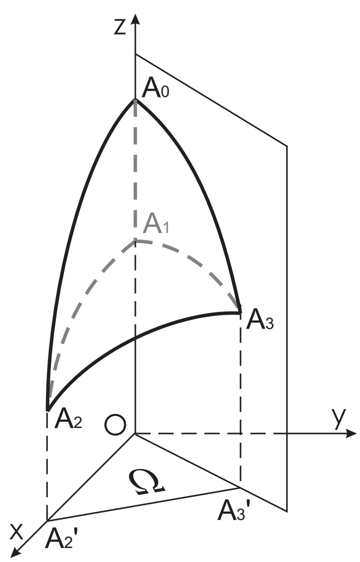

Рис. 1. Тетраэдр в стандартной позиции.

Для полусферы S_0 функция

$$F(\tau) = -\frac{1}{2}\ln(1-\tau^2), \tau = \frac{r_0}{R_0},$$

где $r_0^2 = (x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2$ и R_0 выражается в явном виде некоторой формулой в функции координат вершин A_0, A_2, A_3. Треугольник $\Omega : OA'_2A'_3$

имеет прямолинейные стороны, параметризованные следующим образом

$$OA_2': \ x = x_{21}t, \ y = 0, 0 \le t \le 1.$$
$$A_2'A_3': \ x = x_{21} + t(x_{31} - x_{21}), y = x_{32}t, 0 \le t \le 1.$$
$$A_3'O: \ x = x_{31} - x_{31}t, y = x_{32} - x_{32}t, 0 \le t \le 1.$$

На этих сторонах имеем соответственно:

$$r_0^2 = (x_{21}t - a_{01})^2 + a_{02}^2,$$
$$r_0^2 = (x_{21} - a_{01} + t(x_{31} - x_{21}))^2 + (x_{32}t - a_{02})^2,$$
$$r_0^2 = (x_{31} - a_{01} - x_{31}t)^2 + (x_{32} - a_{02} - x_{32}t)^2,$$

а функция F дана на каждой из сторон соответствующим выражением $F(\frac{r_0}{R_0}) = -\frac{1}{2}\ln(1 - (\frac{r_0}{R_0})^2)$.

Теперь надо все это подставить в формулу (11) и вычислить интегралы

$$\frac{a_{02}x_{21}}{2}\int\limits_{OA_2'} \frac{\ln(1 - (\frac{r_0}{R_0})^2)}{r_0^2}dt +$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{A_2'A_3'} [(x_{32}t - a_{02})(x_{31} - x_{21}) - (x_{21} + t(x_{31} - x_{21}) - a_{01})x_{32}]\frac{(\ln(1 - (\frac{r_0}{R_0})^2)}{r_0^2}dt +$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{A_3'O} [(x_{32} - x_{32}t - a_{02})(x_{31} - x_{21}) - (x_{21} + t(x_{31} - x_{21} - a_{01})x_{32}]\frac{\ln(1 - (\frac{r_0}{R_0})^2)}{r_0^2}dt$$

Для второй грани, расположеной на полусфере S_1, проходящей через вершины $A_1A_2A_3$, мы должны проделать аналогичные операции и затем взять разность между полученными результатами, выбирая вычитаемое в зависимости от ориентации тетраэдра. По известным результатам можно утверждать, что полученные интегралы нельзя вычислить в элементарных функциях.

Напомним, что все значения величин x и a с нижними индексами нам известны, если мы знаем длины ребер тетраэдра.

Случай $\mathbf{n = 4}$. В этом случае вершинами симплекса Ω на плоскости $x_4 = 0$ являются точки (см. рис.2)

$$O(0,0,0), A_2'(x_{21},0,0), A_3'(x_{31},x_{32},0), A_4'(x_{41},x_{42},x_{43}), \text{где } x_{21}, x_{32} \text{ и } x_{43} > 0,$$

и они образуют 4 граничные двумерные грани с уравнениями

$$OA_2'A_3': \ z = 0; \ OA_2'A_4': \ x_{43}y - x_{42}z = 0$$
$$OA_3'A_4': \ (x_{33}x_{42} - x_{43}x_{32})x +$$
$$(x_{31}x_{43} - x_{33}x_{41})y + (x_{32}x_{41} - x_{31}x_{42})z = 0$$
$$A_2'A_3'A_4': x_{32}x_{43}(x - x_{41}) + x_{43}(x_{21} - x_{31})(y - x_{41}) +$$
$$(x_{32}(x_{21} - x_{41}) - x_{42}(x_{21} - x_{31}))(z - x_{43}) = 0.$$

На этот раз для полусферы S_0 с радиусом R_0, проходящей через вершины $A_0A_2A_3A_4$, функция

$$F = \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 - r_0^2}} - arcsin(\frac{r_0}{R_0})$$

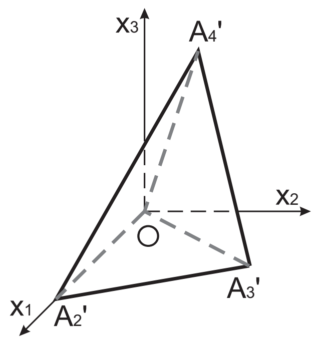

Рис. 2. Проекция 4-мерного симплекса, находящегося в стандартной позиции, на гиперплоскость $x_4 = 0$.

Интегралы в правой части формулы (11) должны браться по четырем вышеуказанным треугольным граням симплекса Ω, однако каждый такой интеграл может быть сведен к интегралам вдоль 1-мерных ребер этого симплекса.

Было бы интересно проверить, вычисляются ли эти интегралы в элементарных функциях.

8. Заключение

Мы хотим закончить статью некоторым списком нерешенных задач.

1) Найти доказательство формулы Шлефли для многогранников с использованием формулы (11).

2) Верно ли, что для любой размерности n вычисление объема гиперболическоо симплекса в функции длин его ребер сводится к вычислению одномерных интегралов от некоторых элементарных функций? Заметим, что для размерностей $n = 2, 3, 4$ это верно.

3) Верно ли, что для четных размерностей объем симплекса представляется элементарной функцией длин его ребер? Для размерности $n = 2$ это верно.

4) Составить программы для символьного и численного вычисления объемов симплексов а малых размерностях.

Выражаю сердечную благодарность Н.В. Абросимову за помощь в оформлении рисунков и подготовку оригинал-макета статьи. Благодарю также и анонимного рецензента за полезные замечания по тексту статьи и библиографии.

Список литературы

[1] И.Х. Сабитов, *Чему равна сумма углов многоугольника?* // Квант, **3** (2001), 6–12.
[2] Б.А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства* // М.: Наука, 1969.
[3] Д.В. Алексеевский, Э.Б. Винберг, А.С. Солодовников, *Геометрия пространств постоянной кривизны* // Геометрия-2, Итоги науки и техники, Серия "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления т.29, ВИНИТИ, М., 1988, с. 5–146.
[4] Д.А. Деревнин, А.Д. Медных, *О формуле объема гиперболического тетраэдра* // УМН, **60**:2 (2005), 159–160. MR2152953
[5] Á.G. Horváth, Formulas on hyperbolic volume // Aequationes mathematicae, **83**:1–2, 97–116. MR2885502

Иджад Хакович Сабитов
Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Ярославский Государственный Университет им. П. Г. Демидова
E-mail address: E-mail: isabitov@mail.ru