S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 627–640 (2013) УДК 519.23
MSC 62F12

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУХШАГОВЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ОДНОМЕРНОГО ПАРАМЕТРА

Ю.Ю. ЛИНКЕ, А.И. САХАНЕНКО

Abstract. The authors' approach to study two-step estimators of one-dimensional unknown parameters is extended to a wider classes of the first- and second-step estimators which include well known M-estimators. Under general restrictions necessary and sufficient conditions are found for the normalized difference between the second-step estimator and the unknown parameter to converge weakly to an arbitrary distribution.

Keywords: two-step estimators, impovement of statistical estimators, limit distribution, asymptotical normality, M-estimators, regression.

1. Введение

Пусть при каждом $n = 1, 2, \ldots$ наблюдаются независимые случайные элементы $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nn}$, распределения которых зависят от некоторого параметра θ_n. Рассматривается задача оценивания этого неизвестного параметра. В целом ряде статистических задач оценки неизвестного параметра строятся в два этапа. Предварительно, на первом этапе, находится некоторая оценка $\theta_n^* = \theta_n^*(X_{n1}, \ldots, X_{nn})$, удовлетворяющая, скажем, требованию состоятельности. На втором же шаге с помощью θ_n^* строится оценка θ_n^{**}, которая точнее приближает неизвестный параметр θ_n и часто обладает рядом оптимальных свойств.

По-видимому первым двухшаговые оценки использовал Р. Фишера в задаче приближенного вычисления оценки максимального правдоподобия для одномерного неизвестного параметра (см. [1-3]). Наш интерес к такого рода оценкам мотивирован их широким применением в различных статистических задачах и,

Linke, Yu.Yu. and Sakhanenko A.I., On asymptotics of the distribution of a two-step statistical estimator of a one-dimensional parameter.

Работа поддержана РФФИ (гранты 13-01-12415 офи-м, 13-01-00511).

Поступила 3 октября 2013 г., опубликована 8 ноября 2013 г.

в частности, в задачах регрессионного анализа (см., например, [13-19], а также более подробную библиографию в [20-22]).

С целью охватить все используемые в [13-19] двухшаговые оценки мы далее предполагаем, что оценки второго шага θ_n^{**} имеют следующий вид:

$$\theta_n^{**} = \theta_n^* + \frac{\sum W_{ni}(\theta_n^*, X_{ni}) + W_{n0}}{\sum V_{ni}(\theta_n^*, X_{ni}) + V_{n0}}, \tag{1}$$

где символ $\sum$ здесь и всюду далее в работе используется вместо $\sum_{i=1}^n$, а статистики $\{W_{ni}(\theta_n^*, X_{ni})\}$, $\{V_{ni}(\theta_n^*, X_{ni})\}$, $W_{n0} = W_{n0}(\{X_{ni}\})$ и $V_{n0} = V_{n0}(\{X_{ni}\})$ зависят только от указанных аргументов и подбираются так, чтобы θ_n^{**} приближала бы точнее неизвестный параметр θ_n, нежели оценка первого шага θ_n^*.

Первая задача настоящей статьи состоит в получении общих необходимых и достаточных условий для сходимости вида

$$(\theta_n^{**} - \theta_n)/d_n \Longrightarrow \eta \qquad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{2}$$

где η — случайная величина, распределение которой может быть произвольным, хотя наиболее распространенный вариант, возникающий в приложениях, — это случай, когда η имеет нормальное распределение.

В силу представления (1) понятно, что условия для справедливости (2) существенно зависят от выбора оценки первого шага θ_n^* . Построение состоятельной оценки первого шага в тех или иных задачах представляет собой отдельную, вообще говоря, нетривиальную проблему. В настоящей работе мы предполагаем, что для оценки первого шага θ_n^* справедливо следующее достаточно общее представление

$$\theta_n^* - \theta_n = \frac{\sum u_{ni}(X_{ni}) + u_{n0}}{1 + \sum v_{ni}(X_{ni}) + v_{n0}} \quad \text{и} \quad \mathbf{E}u_{ni}(X_{ni}) = \mathbf{E}v_{ni}(X_{ni}) = 0 \ \ \forall n, i \tag{3}$$

для некоторых специально подобранных случайных величин

$$u_{ni}(X_{ni}) = u_{ni}(\theta_n, X_{ni}), \qquad v_{ni}(X_{ni}) = v_{ni}(\theta_n, X_{ni}), \qquad i = 1, \dots, n,$$

$$u_{n0} = u_{n0}(\theta_n, \{X_{ni}\}), \qquad v_{n0} = v_{n0}(\theta_n, \{X_{ni}\}),$$

которые зависят только от перечисленных аргументов.

Асимптотика поведения двухшаговых статистических оценок, допускающих представления (1) и (3) в частном случае, когда $W_{n0} = V_{n0} = u_{n0} = v_{n0} = 0$, изучалась в [4]. В [5] часть результатов работы [4] обобщены на случай многомерного неизвестного параметра. Отметим также, что ряд задач линейной и дробно–линейной регрессии, оценивание в которых естественным образом приводит к двухшаговым оценкам вида (1) и (3) при $W_{n0} = V_{n0} = u_{n0} = v_{n0} = 0$, изучены авторами в [6-12].

Особо подчеркнем, что отказ от условия $v_{n0} = 0$ в (3) существенно расширяет класс оценок. Дело в том, что М-оценки удовлетворяют представлению (3) при минимальных дополнительных предположениях. Действительно, пусть θ_n^* является решением уравнения

$$\sum M_{ni}(\theta_n^*) = 0, \qquad \text{где} \qquad \mathbf{E}M_{ni}(\theta_n) = 0 \quad \forall n, i, \tag{4}$$

причем все функции $\{M_{ni}(\cdot) = M_{ni}(\cdot, X_{ni})\}$ — дифференцируемы. В этом случае

$$0 = \sum M_{ni}(\theta_n^*) = \sum M_{ni}(\theta_n) + (\theta_n^* - \theta_n) \int_0^1 \sum M'_{ni}\big(\theta_n + t(\theta_n^* - \theta_n)\big) dt.$$

Таким образом, если положить $a_{ni}(\theta_n) := \mathbf{E} M'_{ni}(\theta_n)$, то

$$-\sum M_{ni}(\theta_n) = (\theta_n^* - \theta_n) \left(\sum a_{ni}(\theta_n) + \sum [M'_{ni}(\theta_n) - a_{ni}(\theta_n)] + \varepsilon_n(\theta_n^*, \theta_n) \right),$$

где $\varepsilon_n(\theta_n^*, \theta_n)$ — остаточный член в формуле Тейлора, записанный в той или иной форме. А потому для разности $\theta_n^* - \theta_n$ справедливо представление (3) при

$$u_{ni}(X_{ni}) = -M_{ni}(\theta_n) \Big/ \sum a_{ni}(\theta_n), \quad v_{ni}(X_{ni}) = \big[M'_{ni}(\theta_n) - a_{ni}(\theta_n)\big] \Big/ \sum a_{ni}(\theta_n),$$

$$u_{n0} = 0, \qquad v_{n0} = \varepsilon_n(\theta_n^*, \theta_n) \Big/ \sum a_{ni}(\theta_n).$$

Напомним, что M-оценки являются основным способом построения оценок в случае разнораспределенных наблюдений (см., например, [1]) и класс M-оценок включает в себя оценки максимального правдоподобия, оценки наименьших квадратов и оценки метода моментов. Тем самым отказ от использовавшегося ранее авторами условия $W_{n0} = V_{n0} = u_{n0} = v_{n0} = 0$ приводит к существенному расширению изучаемого класса двухшаговых оценок.

Главная цель настоящей работы — продолжить разработку методов *исследования* двухшаговых оценок и быть еще одним удобным инструментом для изучения двухшаговых оценок в различных задачах. Наличие такого инструмента позволит существенно уменьшить объем доказательств в указанных исследованиях и даст возможность проводить их при минимальных ограничениях. Отметим также, что задача *построения* оценок θ_n^* и θ_n^{**} может быть решена только в рамках конкретной статистической модели (см., например, [5-12]) и выходит за рамки данной работы.

Подчеркнем еще, что используемый авторами подход к изучению двухшаговых оценок позволяет накладывать весьма слабые ограничения как на функции, определяющие оценку второго шага θ_n^{**}, (в частности, от указанных функций требуется, по-существу, лишь условие Гельдера), так и на оценку первого шага θ_n^* (в частности, в некотором смысле на скорость сближения θ_n^* и θ_n). Некоторое сравнение с традиционным подходом при изучении двухшаговых оценок, связанным с использованием формулы Тейлора для соответствующих функций, содержится в [5].

Отметим лишь, что при традиционном подходе к исследованию двухшаговых оценок неизбежно приходится предполагать непрерывную дифференцируемость второго порядка и существование интегрируемой мажоранты для производных второго порядка указанных функций, а также $\sqrt{n}$ – ограниченность (или по крайней мере $n^{1/4}$ – состоятельность) оценки первого шага. Такого рода ограничения являются классическими, начиная с работ Г. Крамера. Предлагаемый подход исследования оценок позволяет использовать более слабые условия на скорость сближения оценки первого шага и неизвестного параметра и, в частности, позволяет иногда улучшать оценки, которые обладают лишь свойством состоятельности, что при традиционном подходе пока никому не удалось сделать. Более того, при использовании предлагаемого метода исследований не требуется даже непрерывной дифференцируемости отмеченных функций, что является минимальным предположением при традиционном подходе к изучению улучшенных оценок.

Основные результаты составляют § 2, доказательства которых отнесены в § 3.

Всюду в работе, когда не оговорено противное, пределы берутся при $n \to \infty$. При $s_n > 0$ несколько раз используется запись вида

$$\tau_n = O_p(s_n), \qquad \text{если} \qquad \sup_n \mathbf{P}(|\tau_n| > K s_n) \to 0 \quad \text{при} \quad K \to \infty.$$

При определении некоторых величин нам иногда удобнее использовать символ := подчеркивающий, что слева от этого символа стоит обозначение для выражения, находящегося справа от него.

2. Основные результаты

2.1. Прежде всего отметим, что при

$$(5)\quad U_{ni}(t, X_{ni}) = W_{ni}(t, X_{ni}) + (t - \theta_n) V_{ni}(t, X_{ni}), \qquad U_{n0} = W_{n0} + (\theta_n^* - \theta_n) V_{n0}$$

представление (1) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\theta_n^{**} - \theta_n = \frac{\sum U_{ni}(\theta_n^*, X_{ni}) + U_{n0}}{\sum V_{ni}(\theta_n^*, X_{ni}) + V_{n0}}. \tag{6}$$

Далее при изучении свойств оценок второго шага мы отдаем предпочтение представлению (6) вместо (1), поскольку в этом случае условия в основных утверждениях имеют наиболее компактный и удобный для понимания вид.

Перечислим ограничения, которые постоянно используются в работе.

($\mathbf{A_1}$). Для оценки θ_n^* справедливо представление (3) и

$$v_{n0} \xrightarrow{p} 0, \qquad \sigma_{nv}^2 := \sum \mathbf{E} v_{ni}^2(X_{ni}) \to 0. \tag{7}$$

Кроме того, при некоторых неслучайных $\sigma_n > 0$ и $\varkappa_n > 0$

$$\sigma_{nu}^2 := \sum \mathbf{E} u_{ni}^2(X_{ni}) \le \sigma_n^2, \quad u_{n0} = O_p(\sigma_n) \quad \text{и} \quad \sigma_n/\varkappa_n \to 0. \tag{8}$$

($\mathbf{A_2}$). Для оценки θ_n^{**} справедливо представление (6) и при некоторых фиксированных натуральных числах $l_V \ge l_U \ge l_0 \ge 1$ и некоторых наборах случайных функций $\{\psi_{nki}(\cdot) = \psi_{nki}(\cdot, X_{ni})\}$ имеют место разложения:

$$U_{ni}(t, X_{ni}) = \sum_{k=1}^{l_U} \psi_{nki}(t), \qquad V_{ni}(t, X_{ni}) = \sum_{k=l_U+1}^{l_V} \psi_{nki}(t), \qquad t \in I_n, \tag{9}$$

где $I_n = [\theta_n - \varkappa_n, \theta_n + \varkappa_n]$. Кроме того, при некоторых неслучайных $p_{nk} \in (0, 1]$

$$\forall k \le l_V \quad \overline{\psi}_{nki} := \sup \left\{ \frac{|\psi_{nki}(t) - \psi_{nki}(\theta_n)|}{|t - \theta_n|^{p_{nk}}} : t \in I_n \right\} < \infty \quad \text{п.н.} \tag{10}$$

($\mathbf{A_3}$). Существует числовая последовательность $A_n \ne 0$ такая, что

$$\mu_{n0} := \Big(\sum V_{ni}(\theta_n, X_{ni}) + V_{n0} \Big) / A_n \xrightarrow{p} 1, \tag{11}$$

$$\forall\, k = l_U + 1, \dots, l_V \qquad \sigma_n^{p_{nk}} \sum \mathbf{E} \overline{\psi}_{nki} / A_n \to 0. \tag{12}$$

($\mathbf{A_4}$). Существует числовая последовательность $B_n \ne 0$ такая, что

$$\forall\, k = 1, \dots, l_0 \quad \sum \sigma_{ni}^{p_{nk}} \big(\mathbf{E} \overline{\overline{\psi}}{}_{nki}^{\,2} \big)^{1/2} / B_n \to 0, \quad \sigma_n^{2p_{nk}} \sum \mathbf{E} \overline{\overline{\psi}}{}_{nki}^{\,2} / B_n^2 \to 0, \tag{13}$$

где $\sigma_{ni}^2 := \mathbf{E}u_{ni}^2(X_{ni}) + \sigma_n^2 \mathbf{E}v_{ni}^2(X_{ni})$ и

$$\overline{\overline{\psi}}_{nki} := \sup\left\{\frac{|\psi_{nki}(t_1) - \psi_{nki}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{p_{nk}}} : \quad t_1, t_2 \in I_n, \quad t_1 \neq t_2\right\}. \tag{14}$$

Кроме того,

$$\forall\, k = 1, \ldots, l_0 \qquad \big(|u_{n0}| + \sigma_n |v_{n0}|\big)^{p_{nk}} \sum \mathbf{E}\overline{\overline{\psi}}_{nki}/B_n \xrightarrow{p} 0, \tag{15}$$

$$\forall\, k = l_0 + 1, \ldots, l_U \qquad \sigma_n^{p_{nk}} \sum \mathbf{E}\overline{\psi}_{nki}/B_n \to 0. \tag{16}$$

2.2. Положим еще

$$\begin{gathered}\Delta_n(t) := \sum_{k=1}^{l_0} \sum \mathbf{E}\big(\psi_{nki}(t, X_{ni}) - \psi_{nki}(\theta_n, X_{ni})\big), \\ w_n(t) := \sum U_{ni}(\theta_n, X_{ni})/B_n + \Delta_n(t)/B_n + U_{n0}/B_n.\end{gathered} \tag{17}$$

Нам также потребуется условие

$$w_n\big(\theta_{nuv}\big) \Longrightarrow \eta \qquad \text{при} \quad \theta_{nuv} = \theta_n + \frac{\sum u_{ni}(X_{ni})}{1 + \sum v_{ni}(X_{ni})}. \tag{18}$$

В леммах 1 и 2 будет показано, что все введенные выше величины определены с вероятностями, стремящимися к единице.

Сформулируем теперь основное утверждение работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* $(A_1) - (A_4)$. *Тогда условие* (18) *необходимо и достаточно для того, чтобы имела место сходимость* (2) *при* $d_n = B_n/A_n$.

Замечание 1. При проверке условий (11) и (18), в которых участвуют случайные величины U_{n0} и V_{n0}, проще всего попытаться подобрать такие неслучайные числовые последовательности $\overline{U}_{n0}$ и $\overline{V}_{n0}$, чтобы имели место следующие сходимости

$$\big(U_{n0} - \overline{U}_{n0}\big)/B_n \xrightarrow{p} 0 \qquad \text{и} \qquad \big(V_{n0} - \overline{V}_{n0}\big)/A_n \xrightarrow{p} 0. \tag{19}$$

Даже в этом простом случае теорема 1 усиливает основной результат из [4], где предполагалось, что $U_{n0} \equiv V_{n0} \equiv 0$.

Замечание 2. Если условия (19) выполнены при некоторых неслучайных $\overline{U}_{n0}$ и $\overline{V}_{n0}$, то предположение (11), как и оба ограничения в приводимом ниже предположении (25), превращаются в условия сходимости распределений сумм независимых случайных величин. То есть это условия на объект достаточно хорошо изученный, причем мы не требуем условий безграничной малости слагаемых в этих суммах. А сходимость (18) в этом случае станет условием на сходимость распределений некоторого функционала от трех таких сумм.

Отметим еще, что именно условия (11) и (18) определяют вид нормирующих постоянных A_n и B_n, которые играют важную роль в работе.

Замечание 3. Как показано в [4] (см. замечание 1) условия из (13) можно заменить на следующее более простое хотя и более грубое предположение

$$\forall\, k = 1, \ldots, l_0 \qquad \sigma_n^{2p_{nk}} \Big(\sum \big(\mathbf{E}\overline{\overline{\psi}}{}_{nki}^{\,2}\big)^{1/(2-p_{nk})}\Big)^{2-p_{nk}} \Big/ B_n^2 \to 0. \tag{20}$$

Замечание 4. Если выполнены следующие условия регулярности

$$(21) \qquad \sup_{n,i} \sum_{k=1}^{l_0} \mathbf{E}\overline{\overline{\psi}}{}^2_{nki} < \infty, \qquad \sup_{n,i} \sum_{k=l_0+1}^{l_V} \mathbf{E}\overline{\psi}_{nki} < \infty, \qquad u_{n0} = 0,$$

то нетрудно убедиться непосредственно, что для справедливости условий (12)–(16) и (20) достаточно выполнения следующих простых ограничений:

$$(22) \qquad \sigma_n^2 + \frac{1}{|A_n|} + \frac{1}{B_n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad p := \inf_{n,k} p_{nk} > 1/2, \quad n^{(1-p)/2}|v_{n0}|^p \xrightarrow{p} 0.$$

Отметим еще, что при $p = 1$ последнее условие в (22) превращается в сходимость $v_{n0} \xrightarrow{p} 0$ из (7).

Замечание 5. Нетрудно понять, что верны следующие утверждения:

1) Если $\Delta_n\big(\theta_{nuv}\big)/B_n + U_{n0}/B_n \xrightarrow{p} 0$ и

$$(23) \qquad \sum U_{ni}(\theta_n, X_{ni})/B_n - \sum \alpha_{ni}(\theta_n)/B_n \Longrightarrow \eta$$

при некоторых неслучайных $\alpha_{ni}(\theta_n)$, то для справедливости (18) необходимо и достаточно условие

$$\sum \alpha_{ni}(\theta_n)/B_n \to 0.$$

2) Если при всех n, i и t существует $\alpha_{nki}(t) = \mathbf{E}\psi_{nki}(t)$, $k = 1, \ldots, l_U$ и

$$\sum \sum_{k=1}^{l_0} \alpha_{nki}\big(\theta_{nuv}\big)/B_n + \sum \sum_{k=l_0+1}^{l_U} \alpha_{nki}(\theta_n)/B_n + U_{n0}/B_n \xrightarrow{p} 0,$$

то условие (23) при $\alpha_{ni}(\theta_n) = \mathbf{E}U_{ni}(\theta_n, X_{ni})$ необходимо и достаточно для сходимости (18).

При получении достаточных условий для сходимости (18) проще использовать утверждение 2), а наиболее простые необходимые условия получаются из утверждения 1) при $\alpha_{ni}(\theta_n) = \mathbf{E}U_{ni}(\theta_n, X_{ni})$. Но наиболее тонкие необходимые и достаточные условия в терминах срезанных случайных величин можно непосредственно извлечь из утверждения теоремы 1.

Отметим также, что в теореме 1 и приводимом ниже следствии 1 не требуется существования математического ожидания у величин $U_{ni}(t, X_{ni})$.

2.3. Положим

(24)

$$d_n^* = \frac{\Big(\sum \big(U_{ni}^*(\theta_n^*)\big)^2\Big)^{1/2}}{\sum V_{ni}(\theta_n^*, X_{ni}) + V_{n0}} \quad \text{при} \quad U_{ni}^*(t) := U_{ni}(t, X_{ni}) - (\theta_n^{**} - \theta_n)V_{ni}(t, X_{ni}).$$

Следствие 1. *Пусть выполнены предположения* $(A_1) - (A_4)$, *справедливо условие* (18) *и, кроме того,*

$$(25) \quad \mu_{n1}^2 := \sum V_{ni}^2(\theta_n, X_{ni})/A_n^2 \xrightarrow{p} 0, \quad \mu_{n2} := \Big(\sum U_{ni}^2(\theta_n, X_{ni})\Big)^{1/2}/B_n \xrightarrow{p} 1.$$

Тогда

$$(26) \qquad (\theta_n^{**} - \theta_n)/d_n^* \Longrightarrow \eta.$$

Замечание 6. Если выполнено (5), то справедливо равенство

$$U^*_{ni}(\theta^*_n) = W_{ni}(\theta^*_n, X_{ni}) + (\theta^*_n - \theta^{**}_n) V_{ni}(\theta^*_n, X_{ni}).$$

А потому величины $U^*_{ni}(\theta^*_n)$ и, как следствие, величина d^*_n из (24) — статистики. Таким образом, утверждение следствия 1, т.е. сходимость (26), может быть полезной при построении доверительных интервалов и проверке гипотез, поскольку в них разность $\theta^{**}_n - \theta_n$ нормируется величиной d^*_n, не содержащей неизвестных параметров.

Замечание 7. Всюду в работе $\theta = \theta_n$ — это неизвестный параметр. Кроме того, неизвестными могут быть и некоторые другие величины. Поэтому при практических применениях утверждений работы мы должны проверять выполнение их условий при всех возможных значениях всех неизвестных параметров (т.е. так же, как это всегда делается в математической статистике (см., например, [1])).

Замечание 8. В классических задачах математической статистики параметр θ обычно предполагается не зависящим от числа наблюдений n. Однако в данной работе мы считаем, что $\theta = \theta_n$ может зависеть от n. Мы поступаем так с целью охватить, кроме классических, еще несколько классов задач. Во-первых, случай сближающихся гипотез, когда при изучении вероятностей ошибок второго рода истинное значение неизвестного параметра будет зависеть от n. Во-вторых, при получении равномерных по $\theta \in \Theta$ предельных теорем нам придется рассматривать подпоследовательность $\theta_n \in \Theta$, т.е. истинное значение неизвестного параметра опять с необходимостью будет зависеть от n.

3. Доказательства

3.1. С целью упростить обозначения условимся далее как правило опускать у используемых величин индекс n, а у всех функций из (9) также не писать второй аргумент $X_i = X_{ni}$. Заметим, что в таких упрощенных обозначениях

$$(27)\quad U_i(t) = U_{i0}(t) + U_{i1}(t) \quad \text{при} \quad U_{i0}(t) := \sum_{k=1}^{l_0} \psi_{ki}(t), \quad U_{i1}(t) := \sum_{k=l_0+1}^{l_U} \psi_{ki}(t).$$

Положим

$$(28)\qquad \rho_V(t) := \sum |V_i(t) - V_i(\theta)| \,/ |A|, \qquad \rho_U(t) := \sum |U_{i1}(t) - U_{i1}(\theta)| \,/ |B|.$$

Лемма 1. *Если выполнено условие* (A_1)*, то оценка θ^* и случайная величина θ_{uv} определены с вероятностями, стремящемися к единице. Если же, дополнительно, справедливы условия* (A_2) *и* (A_3)*, то*

$$(29)\qquad |\rho_0(\theta^*)| \le \rho_V(\theta^*) \xrightarrow{p} 0, \quad \text{где} \quad \rho_0(t) := \sum (V_i(t) - V_i(\theta)) \,/ A,$$

а оценка θ^{**} также определена с вероятностью, стремящейся к единице.

Лемма 2. *Если верны условия* (A_1), (A_2) *и* (A_4)*, то случайные величины $\Delta(\theta_{uv})$ и $w(\theta_{uv})$ определены с вероятностями, стремящемися к единице, и*

$$(30)\qquad |\rho_1(\theta^*)| \le \rho_U(\theta^*) \xrightarrow{p} 0, \quad \text{где} \quad \rho_1(t) := \sum (U_{i1}(t) - U_{i1}(\theta)) \,/ B,$$

$$(31)\qquad \rho_2(\theta^*, \theta_{uv}) \xrightarrow{p} 0, \quad \text{где} \quad \rho_2(t_1, t_2) := \sum (U_{i0}(t_1) - U_{i0}(t_2)) \,/ B,$$

$$(32)\qquad \rho_3(\theta_{uv}) \xrightarrow{p} 0, \quad \text{где} \quad \rho_3(t) := \sum (U_{i0}(t) - U_{i0}(\theta)) \,/ B - \Delta(t)/B.$$

В частности, при сделанных предположениях

$$\rho := \sum U_i(\theta^*)/B + U_0/B - w(\theta_{uv}) = \rho_1(\theta^*) + \rho_2(\theta^*, \theta_{uv}) + \rho_3(\theta_{uv}) \xrightarrow{p} 0. \tag{33}$$

Лемма 3. *Если справедливы все условия следствия* 1, *то*

$$\rho_4(\theta^*) \xrightarrow{p} 0, \qquad \text{где} \quad \rho_4(t) := \Big(\sum \big(U_i^*(t)\big)^2\Big)^{1/2}/B - \mu_2. \tag{34}$$

Доказательства этих трех основных лемм будут проведены в несколько этапов в пунктах 3.2–3.5.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Используя (6) и обозначения, введенные в (11), (29) и (33), получаем представление:

$$\frac{\theta^{**} - \theta}{d} = \frac{\sum U_i(\theta^*)/B + U_0/B}{\sum V_i(\theta^*)/A + V_0/A} = \frac{w(\theta_{uv}) + \rho}{\mu_0 + \rho_0(\theta^*)}. \tag{35}$$

Если выполнено (18), т.е. $w(\theta_{uv}) \Rightarrow \eta$, то сходимость $(\theta^{**} - \theta)/d \Rightarrow \eta$ немедленно следует из (35) и сходимостей (11), (29) и (33).

Перепишем теперь равенство (35) в виде

$$w(\theta_{uv}) = \frac{\theta^{**} - \theta}{d}(\mu_0 + \rho_0(\theta^*)) - \rho. \tag{36}$$

Если же, наоборот, $(\theta^{**} - \theta)/d \Rightarrow \eta$, то сходимость $w(\theta_{uv}) \Rightarrow \eta$ вытекает из (36) с учетом сходимостей (11), (29) и (33). Тем самым и необходимость условия (18) для сходимости (2) доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 1. Из (24) и обозначений, введенных в (25), (33) и (34), имеем

$$\frac{\theta^{**} - \theta}{d^*} = \frac{w(\theta_{uv}) + \rho}{\mu_2 + \rho_4(\theta^*)}. \tag{37}$$

Требуемая сходимость $(\theta^{**} - \theta)/d^* \Rightarrow \eta$ следует теперь из (37) и сходимостей (18), (25), (33) и (34). □

3.2. В этом пункте мы определим "срезки" $\widetilde{\theta}^*$ и $\widetilde{\theta}_{uv}$ величин θ^* и θ_{uv} и изучим их простейшие свойства. Нам будут удобны следующие упрощенные обозначения:

$$u := \sum u_{ni}(X_{ni}), \quad v := \sum v_{ni}(X_{ni}), \quad u_0 := u_{n0}, \quad v_0 := v_{n0}. \tag{38}$$

Напомним, что величины u_0 и v_0 могут зависеть от всей серии наблюдений $\{X_{n1}, \ldots, X_{nn}\}$. В обозначениях из (38) определения (3) и (18) можно переписать в виде

$$\theta^* = \theta + (u + u_0)/(1 + v + v_0), \qquad \theta_{uv} = \theta + u/(1 + v). \tag{39}$$

Кроме того, из условия (3) и предположения (A_1), с учетом обозначений (38), имеем

$$\mathbf{E}u = \mathbf{E}v = 0, \qquad \mathbf{E}u^2 = \sigma_u^2 \le \sigma^2, \qquad \mathbf{E}v^2 = \sigma_v^2 \to 0. \tag{40}$$

Введем в рассмотрение функции

$$f_u(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \le \varkappa/2, \\ \kappa/2, & \text{если } x \ge \varkappa/2, \\ -\kappa/2, & \text{если } x \le -\varkappa/2, \end{cases} \qquad f_v(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x \le -1/2, \\ 1 + x, & \text{если } x \ge -1/2. \end{cases} \tag{41}$$

Используя эти функции определим "срезки" $\widetilde{\theta}^*$ и $\widetilde{\theta}_{uv}$ величин θ^* и θ_{uv} следующими равенствами:

$$\widetilde{\theta}^* = \theta + f_u(u+u_0)/f_v(v+v_0), \qquad \widetilde{\theta}_{uv} = \theta + f_u(u)/f_v(v). \tag{42}$$

Лемма 4. *Если верно условие* (A_1)*, то случайная величина* θ_{uv} *определена с вероятностью, стремящейся к единице и*

$$|\widetilde{\theta}_{uv} - \theta| \le \varkappa, \qquad \mathbf{P}(\widetilde{\theta}_{uv} \ne \theta_{uv}) \to 0. \tag{43}$$

Если же, дополнительно, справедливы условия (A_2) *и* (A_4)*, то величины* $\Delta(\theta_{uv})$ *и* $w(\theta_{uv})$ *определены с вероятностями, стремящемися к единице, и*

$$\rho_3(\widetilde{\theta}_{uv}) \equiv \sum_{k=1}^{l_0} \sum \big(\psi_{ki}(\theta_{uv}) - \psi_{ki}(\theta)\big)/B - \Delta(\theta_{uv})/B \xrightarrow{p} 0.$$

В частности, в этом случае справедливо также и (32).

Доказательство. Воспользуемся результатами работы [4], поскольку используемые в данной работе величины θ_{uv} и $\widetilde{\theta}_{uv}$ совпадают, соответственно, с θ^* и $\widetilde{\theta}$ из [4] (см. определения (41) и (42) в [4]). Поэтому утверждения леммы 4 следует из замечания 1 и лемм 4.1 и 4.3 в [4] (см. также обозначение (35) в [4]). □

Лемма 5. *Пусть выполнено условие* (A_1)*. Тогда случайная величина* θ^* *определена с вероятностью, стремящейся к единице и*

$$|\widetilde{\theta}^* - \theta| \le \varkappa, \quad |\widetilde{\theta}^* - \theta| \le 2|u+u_0| = O_p(\sigma), \quad \mathbf{P}(\widetilde{\theta}^* \ne \theta^*) \to 0. \tag{44}$$

Доказательство. В силу неравенства Чебышева

$$Q_v := \mathbf{P}[|v+v_0| > 1/2] \le \mathbf{P}[|v| > 1/4] + \mathbf{P}[|v_0| > 1/4] \le \mathbf{E}v^2/(1/4)^2 + \mathbf{P}[|v_0| > 1/4].$$

Следовательно, в силу условия (7)

$$\mathbf{P}[1+v+v_0 = 0] \le \mathbf{P}[v+v_0 < -1/2] \le Q_v \le 16\sigma_v^2 + \mathbf{P}[|v_0| > 1/4] \to 0. \tag{45}$$

Таким образом, знаменатель в (3) обращается в нуль с вероятностью, стремящейся к нулю. А значит, случайная величина θ^* определена с вероятностью, стремящейся к единице.

Используя опять неравенство Чебышева и (40), при $K > 0$ находим:

$$\mathbf{P}[|u| > K\sigma/2] \le \mathbf{E}u^2/(K\sigma/2)^2 = \sigma_u^2/(K\sigma/2)^2 \le 4/K^2.$$

Таким образом, в силу (8)

$$Q(K) := \sup_n \mathbf{P}[|u+u_0| > K\sigma] \le 4/K^2 + \sup_n \mathbf{P}[|u_0| > K\sigma/2] \to 0 \ \text{ при } K \to \infty. \tag{46}$$

Значит, $|u+u_0| = O_p(\sigma)$.

Далее, с учетом определений (39), (42) и неравенств (45) и (46)

$$\mathbf{P}(\widetilde{\theta}^* \ne \theta^*) \le \mathbf{P}(|u+u_0| \ge \varkappa/2) + \mathbf{P}(v+v_0 \le -1/2) \le Q(\varkappa/\sigma) + Q_v \to 0.$$

При выводе этой сходимости мы воспользовались также условием (8).

Тем самым доказана последняя сходимость в (44).

Наконец, из определений (41) следует, что $f_v(\cdot) \ge 1/2$, а потому в ввиду определения (42)

$$|\widetilde{\theta}^* - \theta| = |f_u(u+u_0)|/f_v(v+v_0) \le \min\{\varkappa, 2|u+u_0|\}.$$

И первые два соотношения в (44) установлены. □

Замечание 9. *Из последних утверждений в (43) и (44) немедленно вытекает, что нам достаточно доказать варианты лемм 1–3, в которых величины θ^* и θ_{uv} заменены на их "срезки", то есть на величины $\widetilde{\theta}^*$ и $\widetilde{\theta}_{uv}$ соответственно.*

3.3. В этом пункте мы докажем несколько вспомогательных утверждений и установим сходимость (31). Нам потребуется

Лемма 6. *Если выполнено условие (A_1), то при всех n, k и i справедливы соотношения*

$$|\widetilde{\theta}^* - \widetilde{\theta}_{uv}| \le 2|u_0| + 4|v_0||u|, \quad |\psi_{ki}(\widetilde{\theta}^*) - \psi_{ki}(\widetilde{\theta}_{uv})| \le (2|u_0| + 4|v_0||u|)^{p_k} \overline{\overline{\psi}}_{ki}. \tag{47}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя определение (42), имеем

$$\widetilde{\theta}^* - \widetilde{\theta}_{uv} = \frac{f_u(u+u_0)}{f_v(v+v_0)} - \frac{f_u(u)}{f_v(v)} =$$

$$= \frac{f_u(u+u_0) - f_u(u)}{f_v(v+v_0)} - \frac{f_u(u)\big(f_v(v) - f_v(v+v_0)\big)}{f_v(v) f_v(v+v_0)}. \tag{48}$$

Нетрудно проверить, что ввиду определений из (41)

$$|f_u(u+u_0) - f_u(u)| \le |u_0|, \quad |f_v(v) - f_v(v+v_0)| \le |v_0|, \quad |f_u(u)| \le |u|,$$

и $f_v(\cdot) \ge 1/2$. Подставляя эти соотношения в (48), получаем первую оценку из (47).

Для доказательства второго неравенства из (47) нужно воспользоваться определением (14). □

Лемма 7. *Пусть случайные или неслучайные величины $s > 0$, τ, ν и ζ таковы, что*

$$\tau = O_p(s) \qquad i \qquad s\nu \mathbf{E}|\zeta| \xrightarrow{p} 0. \tag{49}$$

В этом случае $\tau\nu\zeta \xrightarrow{p} 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно понять, что при любом неслучайном $K > 0$

$$Q_K(\varepsilon) := \mathbf{P}(|\tau\nu\zeta| > \varepsilon,\, |\tau| \le Ks,\, |\zeta| \le K\mathbf{E}|\zeta|) \le \mathbf{P}(K^2 s|\nu|\mathbf{E}|\zeta| > \varepsilon]. \tag{50}$$

А поскольку еще $\mathbf{P}[|\zeta| > K\mathbf{E}|\zeta|) \le 1/K$ в силу неравенства Чебышева, то справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|\tau\nu\zeta| > \varepsilon) &\le Q_K(\varepsilon) + \mathbf{P}(|\zeta| > K\mathbf{E}|\zeta|) + \mathbf{P}(|\tau| > Ks) \\ &\le \mathbf{P}[s|\nu|\mathbf{E}|\zeta| > \varepsilon/K^2] + 1/K + \sup_n \mathbf{P}(|\tau| > Ks). \end{aligned} \tag{51}$$

Из (49) и (51) заключаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\tau\nu\zeta| > \varepsilon) \le \frac{1}{K} + \sup_n \mathbf{P}(|\tau| > Ks). \tag{52}$$

Поскольку $\tau = O_p(s)$, то переходя теперь в (52) к пределу при $K \to \infty$, мы получим требуемое утверждение леммы: $\mathbf{P}(|\tau\nu\zeta| > \varepsilon) \to 0$. □

Лемма 8. *Пусть выполнены предположения (A_1) и (A_2) и верно условие (15). Тогда имеет место сходимость (31).*

Доказательство. Заметим, что ввиду (27) и (31)

$$\rho_2(\widetilde{\theta}^*, \widetilde{\theta}_{uv}) = \sum_{k=1}^{l_0} \sum \big(\psi_{ki}(\widetilde{\theta}^*) - \psi_{ki}(\widetilde{\theta}_{uv})\big)/B.$$

Следовательно

$$|\rho_2(\widetilde{\theta}^*, \widetilde{\theta}_{uv})| \le \sum_{k=1}^{l_0} \rho_{k2} \qquad \text{при} \qquad \rho_{k2} := \sum \big|\psi_{ki}(\widetilde{\theta}^*) - \psi_{ki}(\widetilde{\theta}_{uv})\big|/|B|. \tag{53}$$

А из (47) получаем:

$$\rho_{k2} \le 2|u_0|^{p_k}\zeta_{k2} + 4|v_0|^{p_k}|u|^{p_k}\zeta_{k2} \qquad \text{при} \qquad \zeta_{k2} := \sum \overline{\overline{\psi}}_{ki}/|B|. \tag{54}$$

Заметим теперь, что

$$\forall k = 1, \dots, l_0 \quad |u_0|^{p_k}\zeta_{k2} \xrightarrow{p} 0, \qquad |v_0|^{p_k}|u|^{p_k}\zeta_{k2} \xrightarrow{p} 0. \tag{55}$$

Это утверждение немедленно следует из условия (15) и леммы 7, если воспользоваться этой леммой сначала при $\tau = s = 1$ и $\nu = |u_0|^{p_k}$, а затем при $\tau = |u|^{p_k}$, $s = \sigma^{p_k}$ и $\nu = |v_0|^{p_k}$.

Теперь из (53), (54) и (55) для срезанных случайных величин мы получаем сходимость $\rho_2(\widetilde{\theta}^*, \widetilde{\theta}_{uv}) \xrightarrow{p} 0$. Но из этого факта и замечания 9 следует сходимость (31). □

3.4. В этом пункте мы зывершим вывод лемм 1 и 2. Нам потребуется

Лемма 9. *Если выполнено условие* (A_1), *то*

$$\rho_{k0} := \sum \big|\psi_{ki}(\widetilde{\theta}^*) - \psi_{ki}(\theta)\big|/|A| \le 2|u+u_0|^{p_k}\zeta_{k0} \quad \textit{при} \quad \zeta_{k0} := \sum \overline{\psi}_{ki}/|A|, \tag{56}$$

$$\rho_{k1} := \sum \big|\psi_{ki}(\widetilde{\theta}^*) - \psi_{ki}(\theta)\big|/|B| \le 2|u+u_0|^{p_k}\zeta_{k1} \quad \textit{при} \quad \zeta_{k1} := \sum \overline{\psi}_{ki}/|B|, \tag{57}$$

$$\rho_{k2}^2 := \sum \big|\psi_{ki}(\widetilde{\theta}^*) - \psi_{ki}(\theta)\big|^2/B^2 \le 4|u+u_0|^{2p_k}\zeta_{k2} \quad \textit{при} \quad \zeta_{k2} := \sum \overline{\overline{\psi}}{}_{ki}^2/B^2. \tag{58}$$

Доказательство. Для вывода этого утверждения надо учесть оценки из (44) и несколько раз воспользоваться неравенством

$$\big|\psi_{ki}(\widetilde{\theta}^*) - \psi_{ki}(\theta)\big| \le |\widetilde{\theta}^* - \theta|^{p_k}\overline{\psi}_{ki} \le |\widetilde{\theta}^* - \theta|^{p_k}\overline{\overline{\psi}}_{ki}$$

которое очевидным образом следует из определений (10) и (14). □

Отметим, что из определений (27) и (28), (56) и (57) имеем:

$$\rho_V(\widetilde{\theta}^*) \le \sum_{k=l_U+1}^{l_V} \rho_{k0}, \qquad \rho_U(\widetilde{\theta}^*) \le \sum_{k=l_0+1}^{l_U} \rho_{k1}. \tag{59}$$

Доказательство леммы 1. Ввиду лемм 4 и 5 нам осталось лишь установить сходимость (29). Но в силу замечания 9, с учетом соотношений из (59), для этого достаточно будет показать, что

$$\rho_V(\widetilde{\theta}^*) \le \sum_{k=l_U+1}^{l_V} \rho_{k0} \xrightarrow{p} 0. \tag{60}$$

Учитывая оценки из (56) и условие (12), нетрудно заметить, что сходимость (60) следует из леммы 7 при $\tau = |u+u_0|^{p_k}$, $s = \sigma^{p_k}$ и $\nu = 1$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Покажем прежде всего, что

$$\rho_U(\widetilde{\theta}^*) \le \sum_{k=l_0+1}^{l_U} \rho_{k1} \xrightarrow{p} 0. \tag{61}$$

Действительно, первое неравенство в (61) установлено в (59). А сходимость в (61) вытекает из леммы 7 при $\tau = |u+u_0|^{p_k}$, $s=\sigma^{p_k}$ и $\nu=1$, если только мы воспользуемся оценками из (57) и условием (16).

Теперь из (61) и замечания 9 немедленно получаем (30). Остальные утверждения леммы 2 уже доказаны в леммах 4 и 8, а соотношение (33) является очевидным следствием сходимостей (30)–(32) и определений (17) и (27). □

3.5. В этом пункте мы докажем лемму 3. Для произвольной последовательности $\{b_i\}$ определим ее евклидову норму:

$$\|b_\bullet\| := \Big(\sum b_i^2\Big)^{1/2} \le \sum |b_i|. \tag{62}$$

В частности, из неравенства в (62) и (59), с учетом представлений (9) и (27), находим, что

(63)
$$\|V_\bullet(\widetilde{\theta}^*) - V_\bullet(\theta)\|/|A| \le \rho_V(\widetilde{\theta}^*) \xrightarrow{p} 0, \quad \|U_{\bullet 1}(\widetilde{\theta}^*) - U_{\bullet 1}(\theta)\|/|B| \le \rho_U(\widetilde{\theta}^*) \xrightarrow{p} 0.$$

Подчеркнем, что ввиду замечания 9 обе сходимости в (63) уже доказаны в леммах 1 и 2.

Лемма 10. *Пусть выполнены условия следствия* 1. *Тогда*

$$\widetilde{\rho}_5 := \Big(\|U^*_\bullet(\widetilde{\theta}^*\| - \|U_\bullet(\widetilde{\theta}^*)\|\Big)/B \xrightarrow{p} 0. \tag{64}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя свойство нормы суммы и первые соотношения в (25) и (63) получаем, что

$$\|V_\bullet(\widetilde{\theta}^*)\|/|A| \le \|V_\bullet(\widetilde{\theta}^*) - V_\bullet(\theta)\|/|A| + \|V_\bullet(\theta)\|/|A| \le \rho_V(\widetilde{\theta}^*) + \mu_1 \xrightarrow{p} 0. \tag{65}$$

Применяя теперь свойство разности норм и учитывая определения (24), имеем:

$$|\widetilde{\rho}_5| \le \frac{\|U^*_\bullet(\widetilde{\theta}^*) - U_\bullet(\widetilde{\theta}^*)\|}{|B|} \le |\theta^{**} - \theta| \frac{\|V_\bullet(\widetilde{\theta}^*)\|}{|B|} = \frac{|\theta^{**}-\theta|}{|d|} \frac{\|V_\bullet(\widetilde{\theta}^*)\|}{|A|} \xrightarrow{p} 0. \tag{66}$$

При выводе последней сходимости в (66) мы использовали (65) и еще учли, что $|\theta^{**}-\theta|/|d| \Rightarrow |\eta|$, в силу теоремы 1. □

Лемма 11. *Если справедливы условия следствия* 1, *то*

$$\|U_{\bullet 0}(\widetilde{\theta}^*) - U_{\bullet 0}(\theta)\|/|B| \le \widetilde{\rho}_U := \sum_{k=1}^{l_0} \|\psi_{k\bullet}(\widetilde{\theta}^*) - \psi_{k\bullet}(\theta)\|/|B| \equiv \sum_{k=1}^{l_0} \rho_{k2} \xrightarrow{p} 0. \tag{67}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойства нормы суммы из определения (27) следует первое неравенство в соотношении (67). Тождество в (67) соответствует определению в (58). Но, в силу (58), сходимость $\widetilde{\rho}_u \xrightarrow{p} 0$ вытекает из второго условия в (13) и из леммы 7 при $\tau = |u+u_0|^{2p_k}$, $s=\sigma^{2p_k}$ и $\nu=1$. □

Лемма 12. *Если справедливы условия следствия* 1, *то*

$$\widetilde{\rho}_6 := \|U_\bullet(\widetilde{\theta}^*)\|/B - \|U_\bullet(\theta)\|/B \xrightarrow{p} 0. \tag{68}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойства разности норм, имеем:

$$|B\widetilde{\rho}_6| \le \|U_\bullet(\widetilde{\theta}^*) - U_\bullet(\theta)\| = \|U_{\bullet 0}(\widetilde{\theta}^*) + U_{\bullet 1}(\widetilde{\theta}^*) - U_{\bullet 0}(\theta) - U_{\bullet 1}(\theta)\|$$
$$\le \|U_{\bullet 0}(\widetilde{\theta}^*) - U_{\bullet 0}(\theta)\| + \|U_{\bullet 1}(\widetilde{\theta}^*) - U_{\bullet 1}(\theta)\|.$$

Но отсюда и из (63) и (67) получаем, что $|\widetilde{\rho}_6| \le \widetilde{\rho}_U + \rho_U(\widetilde{\theta}^*) \xrightarrow{p} 0.$ □

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3. Используя обозначения из (25) и (34), а также уже доказанные сходимости (64) и (68), нетрудно заметить, что

$$\rho_4(\widetilde{\theta}^*) = \|U^*_\bullet(\widetilde{\theta}^*)\|/B - \mu_2 = \|U^*_\bullet(\widetilde{\theta}^*)\|/B - \|U_\bullet(\theta)\|/B = \widetilde{\rho}_5 + \widetilde{\rho}_6 \xrightarrow{p} 0. \quad (69)$$

Требуемая сходимость (34) вытекает из (69) ввиду замечания 9. □

Таким образом, все утверждения работы полностью доказаны.

Список литературы

[1] А.А. Боровков, *Математическая статистика*, Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997. MR1845991

[2] Ш. Закс, *Теория статистических выводов*, М.:Мир, 1975. MR0420924

[3] S. Verrill, *Rate of convergence of k-step Newton estimators to efficient likelihood estimators,* Statistical and Probability Letters, **77** (2007), 1371–1376. MR2392808

[4] Ю.Ю. Линке, *Об асимптотике распределения двухшаговых статистических оценок*, Сибирский Математический Журнал, 52 **4**, (2011), 841–860. MR2883219

[5] Ю.Ю. Линке, А.И. Саханенко, *Об асимптотике распределения одного класса двухшаговых статистических оценок многомерного параметра*, Математические труды, 16 **1** (2013), 89–120.

[6] Ю.Ю. Линке, А.И. Саханенко, *Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно – линейной регрессии*, Сибирский Математический Журнал, 41 **1** (2000), 150–163. MR1756483

[7] А.И. Саханенко, Ю.Ю. Линке, *Асимптотически оптимальное оценивание в задаче дробно – линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах*, Сибирский Математический Журнал, 47 **6** (2006), 1372–1400. MR2302851

[8] Ю.Ю. Линке, А.И. Саханенко, *Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно – линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах,* Сибирский Математический Журнал, 49 **3** (2008), 592–619. MR2442541

[9] Ю.Ю. Линке, А.И. Саханенко, *Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии при невыполнении некоторых классических предположений*, Сибирский Математический Журнал, 50 **2** (2009), 380–396. MR2531763

[10] Ю.Ю. Линке, А.И. Саханенко, *Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах,* Сибирский Математический Журнал, 51 **1** (2010), 128–145. MR2654527

[11] А.И. Саханенко, Ю.Ю. Линке, *Улучшение оценок в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах,* Сибирский Математический Журнал, 52 **1** (2011), 143–160. MR2810257

[12] А.И. Саханенко, Ю.Ю. Линке, *Состоятельное оценивание в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах,* Сибирский Математический Журнал, 52 **4** (2011), 894–912. MR2883222

[13] G.A.F. Seber, C.J. Wild, *Nonlinear Regression*, John Wiley and Sons, 2003.

[14] J.S. Houwelingen, *Use and Abuse of Variance Models in Regression*, Biometrics, **44** (1988), 1073–1081. Zbl 0715.62118

[15] T. Amemia, *Regression Analisys When the Variance of the Dependent Variable is Proportional to the Squares of its Expectation*, J. Amer. Stat. Assoc., 68 **34** (1973), 928–934.

[16] J.D. Jobson, W.A. Fuller, *Least Squares Estimation When the Covariance Matrix and the Parameter Vector are Functionally Related*, J. Amer. Stat. Assoc., 75 **369** (1975), 176–181.

[17] R.J. Carrol, D. Ruppert, *Robust estimation in heteroscedastic linear models,* Annals of Stat., 10 **2** (1982), 429–441.

[18] В.А. Гуревич, *О взвешенных М-оценках в нелинейной регрессии*, Теория вероятностей и ее применения, 33 **2** (1988), 421–424. MR0954598

[19] P.J. Bickel, *One-step Huber Estimates in the Linear Model,* J. Amer. Stat. Assoc., **70** (1975), 428–434. MR0386168

[20] N.R. Draper, *Applied regression analysis bibliography update 1994-1997*, Commun. Statist.-Theory Meth, 27 **10** (1998), 2581–2623. MR1652652

[21] N.R. Draper, *Applied regression analysis bibliography update 1998-1999*, Commun. Statist.-Theory Meth., 29 **9,10** (2000), 2313–2341. MR1792578

[22] N.R. Draper, *Applied regression analysis bibliography update 2000-2001*, Commun. Statist.-Theory Meth., 31 **11** (2002), 2051–2075. MR1939358

Юлиана Юрьевна Линке
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия; Новосибирский государственный университет
E-mail address: linke@math.nsc.ru

Александр Иванович Саханенко
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия; Новосибирский государственный университет
E-mail address: aisakh@mail.ru