S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 641–648 (2013) УДК 514.74
MSC 52C05

ДИСКРЕТНЫЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОТОК БИССЕКТРИС ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И ВОПРОСЫ ЕГО СХОДИМОСТИ

Э.И. ШАМАЕВ

Abstract. The flow of planar polygons by vectors outward along their bisectors is studied. In case the initial planar polygon is strictly convex a convergence of vectors constructed by angles of polygons is proved.

Keywords: discrete geometric flows, planar polygons.

1. Введение

Пусть последовательность выпуклых многоугольников с m вершинами $\{A_n^1A_n^2 \ldots A_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ задана рекуррентным соотношением

$$A_{n+1}^i = A_n^i + v_n^i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где v_n^i — единичный вектор, направленный по внешней биссектрисе $\angle A_n^{i-1}A_n^iA_n^{i+1}$. Такие последовательности мы называем потоком биссектрис многоугольников. Здесь и далее индекс $i \in \mathcal{I} = \{1, \ldots, m\}$ используется для нумерации вершин m-угольника, где индекс $m+1$ указывает 1-ю вершину, 0 — на m-ю вершину.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $A_1^1A_1^2 \ldots A_1^m$ строго выпуклый многоугольник, тогда верны следующие утверждения:*

Shamaev, E.I., The discrete geometric bisectors flow of strictly convex polygons and its convergence questions.

The work is partly supported by the grants 12-01-00124-a and 12-01-31020-мол_а of Russian Foundation for Basic Research, No.14.A18.21.0367 of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, NSh-544.2012.1 of President Grants for Government Support the Leading Scientific Schools of the Russian Federation, MK-1526.2013.1 of President Grants for Young Researches.

Received November, 22, 2012, published December, 13, 2013.

1) по рекуррентному соотношению (1) корректно определены все элементы потока биссектрис и каждый элемент является строго выпуклым многоугольником;

2) последовательность векторов $\{(\angle A_i^1, \angle A_i^2, \ldots, \angle A_i^m)\}_{i=1}^{\infty}$, *составленных из углов многоугольников* $\{A_n^1 A_n^2 \ldots A_n^m\}_{n=1}^{\infty}$, *сходится к вектору*

$$\left(\frac{\pi(m-2)}{m}, \frac{\pi(m-2)}{m}, \ldots, \frac{\pi(m-2)}{m}\right)$$

в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$.

Введем обозначение половин углов m-угольника и вектора составленного из них — пусть

$$\alpha_n^i = \frac{1}{2}\angle A_n^i, \quad i \in \mathcal{I}, \quad \alpha_n = (\alpha_n^1, \alpha_n^2, \ldots, \alpha_n^m) \in \mathbb{R}^m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ со стандартным скалярным произведением рассмотрим норму $||v|| = \sqrt{(v,v)}$. Имеет место следующая лемма для потока биссектрис многоугольников.

Лемма 1. *Пусть* $\{A_n^1 A_n^2 \ldots A_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ *— поток биссектрис многоугольников, состоящий из строго выпуклых многоугольников. Тогда для каждого* $i \in \mathcal{I}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *верно равенство*

$$2\alpha_{n+1}^i = 2\alpha_n^i + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\alpha_n^{i-1} - \sin\alpha_n^i}{|A_n^{i-1}A_n^i| + \cos\alpha_n^{i-1} + \cos\alpha_n^i}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\alpha_n^{i+1} - \sin\alpha_n^i}{|A_n^i A_n^{i+1}| + \cos\alpha_n^i + \cos\alpha_n^{i+1}}\right). \tag{2}$$

Обозначим наибольший половинный угол многоугольника $A_n^1 A_n^2 \ldots A_n^m$ через

$$\alpha_n^{\max} = \max_{i\in\mathcal{I}} \alpha_n^i$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$. Верны следующие оценки.

Лемма 2. *В условиях леммы 1 для любых* $i \in \mathcal{I}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *величина*

$$\operatorname{arctg}\left|\frac{\sin\alpha_n^{i+1} - \sin\alpha_n^i}{|A_n^i A_n^{i+1}| + \cos\alpha_n^i + \cos\alpha_n^{i+1}}\right| \tag{3}$$

не больше чем

$$\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2n\cos\alpha_1^{\max}}\right\}|\alpha_n^{i+1} - \alpha_n^i| \tag{4}$$

и не меньше чем

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\alpha_1^{max}}{2n + |A_1^i A_1^{i+1}|}\cdot\left|\alpha_n^{i+1} - \alpha_n^i\right|. \tag{5}$$

Для каждого $i \in \mathcal{I}$ и $n \in \mathbb{N}$ примем $q_n^i = p_n^{i+1}$ и определим

$$p_n^i = \begin{cases} \frac{1}{4n}, & \text{если } \alpha_n^{i-1} = \alpha_n^i; \\ \frac{1}{2(\alpha_n^{i-1} - \alpha_n^i)}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\alpha_n^{i-1} - \sin\alpha_n^i}{|A_n^{i-1}A_n^i| + \cos\alpha_n^{i-1} + \cos\alpha_n^i}\right), & \text{иначе.}\end{cases}$$

Тогда отображение $\alpha_n \mapsto \alpha_{n+1}$, заданное рекуррентным соотношением (2), примет вид

$$\alpha_{n+1}^i = \alpha_n^i + p_n^i(\alpha_n^{i-1} - \alpha_n^i) + q_n^i(\alpha_n^{i+1} - \alpha_n^i), \quad i \in \mathcal{I}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Из леммы 2 следует, что $p_n^i \in (0; 1/4]$. Следовательно, отображение (6) удовлетворяет условиям следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть заданы произвольные числа* $q_k^i = p_n^{i+1}, p_n^i \in (0; 1/2)$ *и вектор* $\alpha_1 \in (0; +\infty)^m$.

Тогда последовательность векторов $\{\alpha_n = (\alpha_n^1, \alpha_n^2, \dots, \alpha_n^m)\}_{n=1}^{\infty}$ *пространства* $\mathbb{R}^m$, *определенная рекуррентным соотношением (6), обладает следующими четырьмя свойствами:*

1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ *и* $i \in \mathcal{I}$ *справедливо неравенство*

$$\min_{j \in \mathcal{I}} \alpha_1^j \leqslant \alpha_n^i \leqslant \max_{j \in \mathcal{I}} \alpha_1^j.$$

2) для каждого $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$||\alpha_n|| \geqslant ||\alpha_{n+1}||;$$

равенство имеет место только при $\alpha_n = \frac{||\alpha_n||}{\sqrt{m}}(1, 1, \dots, 1)$.

3) для каждого $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$||\alpha_n||^2 - ||\alpha_{n+1}||^2 \geqslant 4(\min_{i \in \mathcal{I}} p_n^i) \min_{i \in \mathcal{I}}(1/2 - p_n^i) \sum_{i \in \mathcal{I}} (\alpha_n^{i+1} - \alpha_n^i)^2.$$

4) если ряд с положительными слагаемыми

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\min_{i \in \mathcal{I}} p_n^i \min_{i \in \mathcal{I}} (1/2 - p_n^i) \right) \tag{7}$$

расходится, то последовательность

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

сходится к вектору $(\frac{1}{m} \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_1^i)(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$.

Заметим, что если $p_n^i = \frac{1}{2}$, $i \in \mathcal{I}$, $n \in \mathbb{N}$, и m четно, то последовательность определенная соотношением (6) и $\alpha_1 = (1, 0, \dots, 1, 0)$ не сходится.

Из оценки (5) следует, что p_n^i не меньше $\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_1^{max}}{2n+p}$, где p — полупериметр начального многоугольника. Оценка (4) дает неравенство $1 - p_n^i \geqslant 3/4$ для достаточно больших n. Таким образом, ряд (7) действительно расходится.

Первое утверждение теоремы 1 будет доказано в п.3, а второе утверждение следует из лемм 1 и 2, теоремы 2 и следующего замечания: поскольку рекуррентное соотношение (6) сохраняет сумму $\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_n^i$, поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \left(\frac{\pi(m-2)}{2m}, \frac{\pi(m-2)}{2m}, \dots, \frac{\pi(m-2)}{2m} \right),$$

где $\frac{1}{2}\pi(m-2)$ — сумма половинных углов m-угольника.

В [1] доказан частный случай теоремы 2 для $p_n^i = q_n^i = p \in (0; 1/3)$, $i \in \mathcal{I}$, $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим множество строго выпуклых m-угольников через Ω и метрическое пространство строго выпуклых m-угольников с единичным периметром через Ω_1, где расстояние между двумя m-угольниками $A_1 \dots A_m$ и $B_1 \dots B_m$ определено как наибольшая нижняя граница множества расстояний, построенного по всем подобным многоугольникам

$$\rho(A_1 \dots A_m, B_1 \dots B_m) = \inf_{\substack{C_1 \dots C_m \in \Omega_1, \\ C_1 \dots C_m \sim B_1 \dots B_m}} \sqrt{|A_1 - C_1|^2 + \dots + |A_m - C_m|^2}.$$

Проекцию Ω в Ω_1, возникающее с помощью гомотетии $\sim$, обозначим через $\iota : \Omega \to \Omega_1$.

Теорема 1 была доказана на пути к доказательству следующей гипотезы.

Гипотеза 1. *В условиях теоремы 1 для любого начального строго выпуклого многоугольника $A_1^1 A_1^2 \dots A_1^m$ на плоскости $\mathbb{C}$ последовательность многоугольников (1)*

$$\iota(A_1^1 A_1^2 \dots A_1^m), \quad \iota(A_2^1 A_2^2 \dots A_2^m), \quad \dots, \quad \iota(A_n^1 A_n^2 \dots A_n^m), \quad \dots,$$

сходится в метрическом пространстве (Ω_1, ρ).

При любом начальном строго выпуклом многоугольнике пределом последовательности $\{\iota(A_n^1 A_n^2 \dots A_n^m)\}_{n=1}^{\infty}$ в метрическом пространстве (Ω_1, ρ) является правильный m-угольник.

Пусть последовательность многоугольников с m вершинами $\{A_n^1 A_n^2 \dots A_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ задана рекуррентным соотношением

$$A_{n+1}^i = A_n^i + \sigma \left(A_n^{i-1} + A_n^{i+1} - 2A_n^i \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

зависящим от параметра $\sigma \in \mathbb{R}$. В [2] было доказано, что при $n > 4$ и любом фиксированном $\sigma \in (0; 1/3]$ последовательность (8), возможно, самопересекающихся и не выпуклых замкнутых ломаных сходится в точку при любых начальных замкнутых ломаных. В [2] также показано, что последовательность замкнутых ломанных, полученных нормированием $\iota : \Omega \to \Omega_1$ элементов последовательности (8), сходится к замкнутой ломаной вписанной в эллипс при некоторых аналитических условиях на начальные данные. Результаты [2] для замкнутых ломаных обобщены для многогранников в [3].

Автор благодарит С.В. Иванова за полезные обсуждения и рецензента за ценные замечания.

2. Доказательство теоремы 2

Сумма коэффициентов $1 - p_n^i - q_n^i$, p_n^i, q_n^i из (6) для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathcal{I}$ равна 1. Поскольку для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$ и произвольных положительных $p, q, r \in \mathbb{R}$ таких, что $p + q + r = 1$, верны неравенства

$$\min\{x, y, z\} \leqslant px + qy + rz \leqslant \max\{x, y, z\},$$

то для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathcal{I}$ справедливы неравенства

$$\min_{j \in \mathcal{I}} \alpha_n^j \leqslant \min_{j \in \{i-1, i, i+1\}} \alpha_n^j \leqslant \alpha_{n+1}^i \leqslant \max_{j \in \{i-1, i, i+1\}} \alpha_n^j \leqslant \max_{j \in \mathcal{I}} \alpha_n^j.$$

Поэтому верно

$$\min_{j \in \mathcal{I}} \alpha_1^j \leqslant \alpha_n^i \leqslant \max_{j \in \mathcal{I}} \alpha_1^j = \alpha_1^{\max}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathcal{I}$.

Для любых $p, q, r, x, y, z \in \mathbb{R}$ таких, что $p + q + r = 1$, справедливо равенство, проверяемое раскрытием скобок после умножения первых трех слагаемых правой части на $p + q + r = 1$,

$$(px + qy + rz)^2 = px^2 + qy^2 + rz^2 - pq(x - y)^2 - pr(x - z)^2 - qr(y - z)^2.$$

Возьмем в этом равенстве вместо (p, q, r) тройку $(p_n^i, 1 - p_n^i - q_n^i, q_n^i)$, вместо (x, y, z) — $(\alpha_n^{i-1}, \alpha_n^i, \alpha_n^{i+1})$. Полученные равенства для $i \in \mathcal{I}$ просуммируем по

$\mathcal{I}$ при фиксированном $n \in \mathbb{N}$.

$$(9)\quad \sum_{i\in\mathcal{I}} \left((1-p_n^i-q_n^i)\alpha_n^i + p_n^i\alpha_n^{i-1} + q_n^i\alpha_n^{i+1}\right)^2 = \sum_{i\in\mathcal{I}} \left((1-p_n^i-q_n^i)(\alpha_n^i)^2 + p_n^i(\alpha_n^{i-1})^2 + q_n^i(\alpha_n^{i+1})^2\right) - \sum_{i\in\mathcal{I}} \Big((1-p_n^i-q_n^i)p_n^i(\alpha_n^i-\alpha_n^{i-1})^2 + (1-p_n^i-q_n^i)q_n^i(\alpha_n^i-\alpha_n^{i+1})^2 + p_n^iq_n^i(\alpha_n^{i-1}-\alpha_n^{i+1})^2\Big).$$

Из (6) следует, что левая часть (9) является суммой квадратов чисел α_{n+1}^i, $i \in \mathcal{I}$. В силу $p_n^i = q_n^{i-1}$ и $q_n^i = p_n^{i+1}$ для всех $i \in \mathcal{I}$ и $n \in \mathbb{N}$, первое слагаемое правого выражения $\sum \left((1-p_n^i-q_n^i)(\alpha_n^i)^2 + p_n^i(\alpha_n^{i-1})^2 + q_n^i(\alpha_n^{i+1})^2\right)$ из (9) равно $||\alpha_n||^2 = \sum_{i\in\mathcal{I}}(\alpha_n^i)^2$. Поэтому (9) эквивалентно равенству

$$(10)\quad ||\alpha_{n+1}||^2 = ||\alpha_n||^2 - \sum_{i\in\mathcal{I}} \Big((1-p_n^i-q_n^i)p_n^i(\alpha_n^i-\alpha_n^{i-1})^2 + (1-p_n^i-q_n^i)q_n^i(\alpha_n^i-\alpha_n^{i+1})^2 + p_n^iq_n^i(\alpha_n^{i-1}-\alpha_n^{i+1})^2\Big).$$

Из условия $p_n^i, q_n^i \in (0; 1/2)$ для всех $i \in \mathcal{I}$, $n \in \mathbb{N}$ и (10) следует $||\alpha_n||^2 \geqslant ||\alpha_{n+1}||^2$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Введем следующие обозначения

$$\lambda_n = \min_{i\in\mathcal{I}} p_n^i \min_{i\in\mathcal{I}} \left(\frac{1}{2} - p_n^i\right), \quad ||\alpha_n||_s = \max_{i\in\mathcal{I}} \alpha_n^i - \min_{j\in\mathcal{I}} \alpha_n^j.$$

Поскольку рекуррентное соотношение (6) задается формулой среднего с некоторыми положительными весами, то последовательность $\{||\alpha_n||_s\}_{n=1}^\infty$ является невозрастающей монотонной.

Из (10) следует неравенство

$$||\alpha_n||^2 - ||\alpha_{n+1}||^2 \geqslant \sum_{i\in\mathcal{I}} \Big(2\lambda_n(\alpha_n^i-\alpha_n^{i-1})^2 + 2\lambda_n(\alpha_n^i-\alpha_n^{i+1})^2\Big).$$

Поэтому верно следующее

$$(11)\qquad ||\alpha_n||^2 - ||\alpha_{n+1}||^2 \geqslant 4\lambda_n \sum_{i\in\mathcal{I}} \left(\alpha_n^i - \alpha_n^{i-1}\right)^2.$$

Из неравенства между средними квадратическим и арифметическим

$$\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i\in\mathcal{I}} \left(\alpha_n^i - \alpha_n^{i-1}\right)^2} \geqslant \frac{\sum_{i\in\mathcal{I}} |\alpha_n^i - \alpha_n^{i-1}|}{m}.$$

следует $\sum_{i\in\mathcal{I}} \left(\alpha_n^i - \alpha_n^{i-1}\right)^2 \geqslant \frac{1}{m}(\sum_{i\in\mathcal{I}} |\alpha_n^i - \alpha_n^{i-1}|)^2$. Поскольку сумма $\sum_{i\in\mathcal{I}} |\alpha_n^i - \alpha_n^{i-1}|$ равна длине замкнутого пути, пройденного на числовой оси по точкам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, то эта сумма не меньше $2||\alpha_n||_s$. Теперь из (11) мы получаем ключевое неравенство

$$(12)\qquad ||\alpha_n||^2 - ||\alpha_{n+1}||^2 \geqslant \frac{16}{m}\lambda_n||\alpha_n||_s^2.$$

Из сходимости монотонной убывающей последовательности $\{||\alpha_n||^2\}_{n=1}^\infty$ и оценки (12) следует сходимость ряда $\sum \lambda_n||\alpha_n||_s^2$. Из расходимости ряда $\sum \lambda_n$ с положительными слагаемыми следует, что предел невозрастающей монотонной последовательности $||\alpha_n||_s$ не может быть положительным числом.

Поскольку $\sum_{i\in\mathcal{I}}\alpha_n^i$ всегда постоянна в силу определения (6), то из $||\alpha_n||_s\to 0$ следует $\alpha_n\to(\frac{1}{m}\sum_{i\in\mathcal{I}}\alpha_n^i)(1,1,\dots,1)$ при $n\to\infty$.

Теорема 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Докажем математической индукцией первое утверждение теоремы 1. Пусть n-й элемент потока является строго выпуклым многоугольником. Достаточно показать, что $(n+1)$-й элемент потока также является строго выпуклым многоугольником. Выберем для фиксированного произвольного $i\in\mathcal{I}$ систему координат с началом в A_n^i и осью ординат параллельной v_n^i. Из строгой выпуклости n-го многоугольника следует, что лучи $A_n^iA_n^{i-1}$ и $A_n^iA_n^{i+1}$ содержатся в третьем и четвертом квадрантах и не параллельны оси абсцисс. Тогда при любых единичных векторах v_n^{i-1} и v_n^{i+1} ординаты точек A_{n+1}^{i-1} и A_{n+1}^{i+1} меньше 1. Следовательно, внутренний угол A_{n+1}^i $(n+1)$-го многоугольника строго меньше π.

Докажем лемму 1. Пусть многоугольник $B^1B^2\dots B^n$ следует за многоугольником $A^1A^2\dots A^n$ в потоке биссектрис. Вместо $\alpha_n^1,\dots,\alpha_n^m$ иногда будем писать $\alpha^1,\dots,\alpha^m$ для упрощения записи. Зафиксируем произвольное $i\in\mathcal{I}$. Рассмотрим четырехугольник $A^iA^{i+1}B^{i+1}B^i$ и прямые π_1 и π_2 параллельные A^iA^{i+1}, содержащие соответственно точки B^i и B^{i+1}. Ясно, что углы $A^iB^i\pi_1=\alpha^i$. Поэтому $\angle A^iB^iB^{i+1}=\alpha^i\pm\angle B^{i+1}B^i\pi_1$.

По определению потока биссектрис $|A^iB^i|=|A^{i+1}B^{i+1}|=1$. Ортогональная проекция B^iB^{i+1} на прямую A^iA^{i+1} равна $|A^iA^{i+1}|+\cos\alpha^i+\cos\alpha^{i+1}$. Ортогональная проекция B^iB^{i+1} на перпендикуляр к A^iA^{i+1} равна $|\sin\alpha^i-\sin\alpha^{i+1}|$. Таким образом,

$$\angle B^{i+1}B^i\pi_1=\operatorname{arctg}\frac{|\sin\alpha^i-\sin\alpha^{i+1}|}{|A^iA^{i+1}|+\cos\alpha^i+\cos\alpha^{i+1}}.$$

Аналогичными рассуждениями приходим к подобному равенству для $A^{i-1}A^i$. С учетом знаков приходим к равенству (2).

Лемма 1 доказана.

Верны очевидные равенства для произвольных α^{i+1}, $\alpha^i\in\mathbb{R}$

$$\operatorname{tg}\frac{|\alpha^{i+1}-\alpha^i|}{2}=\frac{|2\cos\frac{\alpha^{i+1}+\alpha^i}{2}\sin\frac{\alpha^{i+1}-\alpha^i}{2}|}{|2\cos\frac{\alpha^{i+1}+\alpha^i}{2}\cos\frac{\alpha^{i+1}-\alpha^i}{2}|}=\frac{|\sin\alpha^{i+1}-\sin\alpha^i|}{|\cos\alpha^i+\cos\alpha^{i+1}|}.$$

Следовательно, для $n\in\mathbb{N}$ и $i\in\mathcal{I}$ верно неравенство

$$\operatorname{tg}\frac{|\alpha_n^{i+1}-\alpha_n^i|}{2}\geqslant\frac{|\sin\alpha_n^{i+1}-\sin\alpha_n^i|}{|A_n^iA_n^{i+1}|+\cos\alpha_n^i+\cos\alpha_n^{i+1}}. \tag{13}$$

Поскольку арктангенс монотонно возрастающая функция на $[0;+\infty)$ и $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha_n^{i+1}-\alpha_n^i\leqslant\frac{\pi}{2}$, то имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Для каждых $i\in\mathcal{I}$ и $n\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{arctg}\left|\frac{\sin\alpha_n^{i+1}-\sin\alpha_n^i}{|A_n^iA_n^{i+1}|+\cos\alpha_n^i+\cos\alpha_n^{i+1}}\right|\leqslant\frac{1}{2}|\alpha_n^{i+1}-\alpha_n^i|. \tag{14}$$

Из леммы 3 очевидно следует лемма

Лемма 4. *Последовательность наибольших углов*

$$\alpha_1^{\max}, \alpha_2^{\max}, \alpha_3^{\max}, \ldots$$

является монотонно убывающей.

Докажем лемму 2. Из леммы 4 и условия строгой выпуклости начального многоугольника следует важная оценка, справедливая для всех $i \in \mathcal{I}$ и $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n^i \leqslant \alpha_1^{\max} < \frac{\pi}{2}.$$

В частности верно неравенство $\cos\alpha_n^i + \cos\alpha_n^{i+1} \geqslant 2\cos\alpha_1^{\max}$ для $i \in \mathcal{I}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Поскольку для всех $i \in \mathcal{I}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ верно равенство

$$|A_n^i A_n^{i+1}| = \sqrt{(|A_{n-1}^i A_{n-1}^{i+1}| + \cos\alpha_{n-1}^i + \cos\alpha_{n-1}^{i+1})^2 + (\sin\alpha_{n-1}^i - \sin\alpha_{n-1}^{i+1})^2},$$

то $9|A_n^i A_n^{i+1}| \geqslant |A_{n-1}^i A_{n-1}^{i+1}| + 2\cos\alpha_1^{\max}$ для всех $i \in \mathcal{I}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Отсюда следует оценка

$$|A_n^i A_n^{i+1}| + \cos\alpha_n^i + \cos\alpha_n^{i+1} \geqslant |A_1^i A_1^{i+1}| + 2n\cos\alpha_1^{\max}.$$

Теперь из $|\sin x - \sin y| = |2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}| \leqslant |x-y|$ следует неравенство

$$\frac{|\sin\alpha_n^{i+1} - \sin\alpha_n^i|}{|A_n^i A_n^{i+1}| + \cos\alpha_n^i + \cos\alpha_n^{i+1}} \leqslant \frac{|\alpha_n^{i+1} - \alpha_n^i|}{2n\cos\alpha_1^{\max}} \tag{15}$$

для всех $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Теперь из леммы 3 и (15) следует (4).

Из α_n^i, $\alpha_n^{i+1} \in (0;\pi/2)$ следует, что левая часть неравенства (13) не превосходит 1, тем более правая часть (13) не превосходит 1. Теперь из неравенства $\operatorname{arctg} x \geqslant \frac{\pi x}{4}$, верного для всех $x \in [0;1)$, следует, что

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{|\sin\alpha_n^{i+1} - \sin\alpha_n^i|}{|A_n^i A_n^{i+1}| + \cos\alpha_n^i + \cos\alpha_n^{i+1}}\right) \geqslant \frac{\pi}{4} \times \frac{|\sin\alpha_n^{i+1} - \sin\alpha_n^i|}{|A_n^i A_n^{i+1}| + \cos\alpha_n^i + \cos\alpha_n^{i+1}}.$$

Из $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ и $\alpha_n^i \leqslant \alpha_1^{\max}$ следует, что последнее выражение больше чем

$$\frac{\pi}{4} \times \frac{2\cos\alpha_1^{\max}}{|A_n^i A_n^{i+1}| + \cos\alpha_n^i + \cos\alpha_n^{i+1}} \times \sin\left|\frac{\alpha_n^{i+1} - \alpha_n^i}{2}\right|. \tag{16}$$

Из неравенства $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$, верного для всех $x \in [0;\pi/4)$, и из очевидного неравенства $\cos\alpha_n^i + \cos\alpha_n^{i+1} \leqslant 2$ следует, что (16) больше чем

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\alpha_1^{\max}}{|A_n^i A_n^{i+1}| + 2}|\alpha_n^{i+1} - \alpha_n^i|.$$

По определению потока биссектрис $|A_n^i A_{n+1}^i| = 1$. По неравенству треугольника в $A_n^i A_n^{i+1} A_{n+1}^i$ верно $|A_n^i A_n^{i+1}| < |A_n^{i+1} A_{n+1}^i| + 1$. Теперь также по неравенству треугольника для треугольника $A_n^{i+1} A_{n+1}^{i+1} A_{n+1}^i$ верно $|A_{n+1}^i A_{n+1}^{i+1}| < |A_n^i A_n^{i+1}| + 1$. Заметим, что неравенства являются строгими в силу того, что $\frac{\pi}{2} > \alpha_1^{max} \geqslant \alpha_n^{max}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому с возрастанием $n \in \mathbb{N}$ длина $|A_n^i A_n^{i+1}|$ увеличивается на величину меньшую чем 2, поэтому

$$|A_n^i A_n^{i+1}| < |A_1^i A_1^{i+1}| + 2(n-1).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\alpha_1^{\max}}{|A_n^i A_n^{i+1}| + 2}|\alpha_n^{i+1} - \alpha_n^i| > \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\alpha_1^{\max}}{2n + |A_1^i A_1^{i+1}|}|\alpha_n^{i+1} - \alpha_n^i|.$$

Лемма 2 доказана.

References

[1] Э.И Шамаев, *Сходимость одной итерационной последовательности, возникающей в дискретных аналогах потоков обратной средней кривизны*, Математические заметки ЯГУ, **17**: 1 (2010), 149–153. Zbl 1274.53098

[2] A.M. Bruckstein, G. Sapiro, D. Shaked, *Evolutions of planar polygons*, International J. of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, **9**:6 (1995), 991–1014.

[3] A. Imiya, U. Eckhardt, *Discrete Mean Curvature Flow'*, SCALE-SPACE '99 Proceedings of the Second International Conference on Scale-Space Theories in Computer Vision, Springer-Verlag London, (1999), 477–482.

Эллэй Иванович Шамаев
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48
677000, Якутск, Россия
E-mail address: eshamaev@mail.ru