S⓪MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 649–655 (2013) УДК 517.55
MSC 13A99

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ИЗ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ В $\mathbb{R}^n$

А.М. КЫТМАНОВ, О.В. ХОДОС

Abstract. We consider domains of convergences of series of homogeneous harmonic polynomials. It is given asserions, which is anagous of theorems about domains of convergence of power series in $\mathbb{C}^n$

Keywords: harmonic polynomial, domain of convergence.

Пусть B — единичный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле, а S — его граница. Как обычно, гармоническая функция f это функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta f = 0$. Ясно, что всякая линейная функция является гармонической.

Рассмотрим систему однородных гармонических многочленов $\{P_{k,s}\}$ в $\mathbb{R}^n$, где k — степень многочлена, а s — номер этого многочлена в системе. $P_{k,s}|_S = Q_{k,s}$ — сферические функции, такие, что система $\{Q_{k,s}\}$ образует полную ортонормированную систему в пространстве $\mathcal{L}^2(S)$ со скалярным произведением

$$(f,g) = \int\limits_S f\overline{g}\, d\sigma,$$

где f, $g \in \mathcal{L}^2(S)$, $d\sigma$ — элемент поверхности S. Здесь $s = 1, 2, \ldots, \sigma(k)$, $\sigma(k)$ — число функций $Q_{k,s}$, входящих в базис (при фиксированном k). Это число

$$\sigma(k) = \frac{(n+2k-2)(n+k-3)!}{k!(n-2)!}.$$

Число $\sigma(k)$ является степенной функцией по k степени $n-2$ при фиксированном n (см., например, [1, гл. 11]).

Kytmanov, A.M., Hodos, O.V., On convergence of series of homogeneous harmonic polynomials in $\mathbb{R}^n$.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-0007).

Поступила 28 июня 2013 г., опубликована 14 декабря 2013 г.

Хорошо известно, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ (см., например, [2]) каждая гармоническая функция является действительной или мнимой частью голоморфной функции. Поэтому всякий однородный гармонический многочлен степени k имеет вид:

$$\mathrm{Re}\,(az^k), \quad \mathrm{Im}\,(bz^k),$$

где a и b — комплексные числа, а $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Если ввести полярные координаты $z = e^{i\varphi}$, где r это модуль z, а φ — аргумент z, то ортогональная система однородных гармонических многочленов будет состоять из функций $r^k \cos k\varphi,\ k \geqslant 0$; $r^k \sin k\varphi,\ k > 0$. Ряд по этой системе есть обычный ряд Фурье (так как на единичной окружности $r = 1$).

В трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ система сферических функций (и однородных гармонических многочленов) также описана (см., например, [3, дополнение 2, часть 2, §3]). Описание этой системы состоит в следующем.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ сферическую систему координат $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$.

Ортогональная система сферических функций на S в $\mathbb{R}^3$ (для каждого k) имеет вид

$$\begin{aligned} Q_k^{-l} &= P_k^{(l)}(\cos\psi)\cdot\cos l\varphi, \\ Q_k^{l} &= P_k^{(l)}(\cos\psi)\cdot\sin l\varphi, \qquad l = 1,\dots,k, \\ Q_k^{0} &= P_k(\cos\psi), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k\cdot k!}\,\frac{d^k\left(t^2-1\right)^k}{d\,t^k}$$

— многочлены Лежандра,

$$P_k^{(l)}(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{l}{2}}\,\frac{d^l P_k(t)}{dx^l}$$

— присоединенные функции Лежандра.

Система (1) состоит из $2k+1$ функций с нормами

$$\|Y_k^l\|^2 = \int\limits_{S_1}\left(Y_k^l\right)^2\,d\sigma = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(Y_k^l(\varphi,\psi)\right)^2\cdot\sin\psi\,d\varphi\,d\psi = \frac{2}{2k+1}\cdot\pi\cdot\varepsilon_l\cdot\frac{(k+l)!}{(k-l)!},$$

где $\varepsilon_0 = 2$, а $\varepsilon_k = 1$ при $k > 0$. Так что ортонормированная система сферических функций (соответсвенно, однородных гармонических многочленов) легко строится.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n > 3$ полное описание ортонормированных систем сферических функций отсутствует. Показано, что они существуют и что они выражается через, так называемые, многочлены Гегенбауэра (ультрасферические функции) (см., например, [1, гл. 11] и [4, гл.4, §2]).

Будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\sigma(k)} a_{k,s}P_{k,s}(x), \tag{2}$$

сходящиеся в каждой точке x из некоторой ограниченной области G к функции $F(x)$. Этот ряд мы можем переписать в виде

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\sigma(k)} a_{k,s} P_{k,s}(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x), \tag{3}$$

где $Y_k(x) = \sum\limits_{s=1}^{\sigma(k)} a_{k,s} P_{k,s}(x)$ — однородный гармонический многочлен степени k.

Как известно (см, например, [1, гл. II], если функция F гармонична в шаре B, то она разлагается в ряд вида (3), абсолютно сходящийся в B и равномерно сходящийся на любом компакте из B.

Покажем, что не для всякой гармонической в B ряд Тейлора для нее сходится в B.

Пусть

$$F(x) = \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} c_\alpha x^\alpha \tag{4}$$

— ряд Тейлора функции $F(x)$ в окрестности точки 0, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $c_\alpha = \dfrac{1}{\alpha!} \dfrac{\partial^\alpha F}{\partial x^\alpha}(0)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ и $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$

Ряд (4) не обязан сходиться абсолютно и равномерно во всем шаре B_R.

Пример 1. Рассмотрим фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$\varphi(x) = \frac{c_n}{\left(|x_1 - R|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \right)^{n-2}}$$

с особенностью в точке $(R, 0, \dots, 0)$.

Эта функция гармонична в шаре B_R. Если бы ряд Тейлора абсолютно сходился к $\varphi(x)$ в B_R, то он должен был бы абсолютно сходиться к голоморфному продолжению $\varphi(x)$ в шаре $B_R^c = \left\{ x \in \mathbb{C}^n : |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 < R^2 \right\}$ из $\mathbb{C}^n$. Но знаменатель функции $\varphi(x)$

$$|x_1 - R|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2$$

равен 0 в точке $c = \left(\dfrac{R}{2}, \dfrac{iR}{2}, 0, \dots, 0 \right)$, $|c| = \dfrac{R}{\sqrt{2}} < R$. Поэтому $\varphi(x)$ не может быть голоморфно продолжена в B_R^c.

Так что области сходимости таких рядов вида (3) нельзя описать, используя разложение в степенные ряды. т.е. используя методы теории функций многих комплексных переменных.

Сходимость ряда (3) в G налагает некоторые дополнительные условия на F и на G.

Лемма 1. *Пусть ряд (3) сходится в точке $x^0 \in G$, $x^0 \neq 0$, тогда он сходится абсолютно на множестве $\{x : \ x = tx^0, \ t \in (-1, 1)\}$ и равномерно на любом множестве $\{x : \ x = tx^0, \ t \in [-r, r]\}$, $0 < r < 1$.*

Доказательство. Действительно, пусть ряд (3) сходится в точке $x^0 \in G$, $x^0 \neq 0$, тогда для $t \in \mathbb{R}$

$$F(tx^0) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(tx^0) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k Y_k(x^0). \tag{5}$$

Т.е. $F(tx^0)$ — степенной ряд по t, сходящийся при $t = 1$, тогда степенной ряд (5) абсолютно сходится для $t \in (-1, 1)$ и равномерно на любом отрезке $[r, r] \subset (-1, 1)$, $0 < r < 1$.

Причем равномерно сходится не только ряд (5), но и ряд из модулей, так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} |t|^k \, |Y_k(x^0)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} r^k \, |Y_k(x^0)|.$$

$\square$

Отсюда получаем

Следствие 1. *Если ряд (3) сходится в G, то он сходится абсолютно и его область сходимости звездная и симметричная относительно нуля.*

В дальнейшем будем предполагать, что G — ограниченная симметричная относительно нуля и сильно звездная, т.е. области $G_r = \{x : \ x = ry, \ y \in G\}$ относительно компактны в G для всех r, $0 < r < 1$. Условие сильной звездности является близким к условию звездности, но несколько более сильное. Оно гарантирует что радиусы сходимости ряда (3) в "близких" точках также "близки". Данную ситуацию можно сравнить с ситуацией с кратными степенными рядами. Для таких рядов справедлива лемма Абеля (см., например, [5]), утверждающая, что если степенной ряд сходится абсолютно в некоторой точке из $\mathbb{C}^n$, то он будет сходится в поликруге с центром в 0, на остове которого лежит данная точка. Таким образом, если точки, в которых степенной ряд сходится, "близки то и поликруги "близки". Данное свойство отсутствует в случае рядов из однородных гармонических многочленоа. А свойство сильной звездности его гарантирует.

Будем также требовать, что во всех областях G_r, $0 < r < 1$, равномерно сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |Y_k(x)|. \tag{6}$$

Условие (6) гарантирует, что $F(x)$ гармонична в G. Действительно, из равномерной сходимости получаем, что функция F — непрерывна в G. Применим к (3) оператор Лапласа Δ(в слабом смысле), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta Y_k = 0,$$

тогда из известной леммы Вейля получаем, что F — гармоническая функция.

Если $G = B_R = \{x : \ |x| < R\}$ — шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $R > 0$, S_R его граница и $F \in \mathcal{C}^l(B_R)$, $l > n/2$, то если сходится ряд (3), условие (6) автоматически выполняется (см. [1, гл. XI, §4]), так как в этом случае на S_R

$$|Y_k(x)| \leqslant C \cdot k^{n/2-1-2m} \|\Delta_\theta^m F\|_{\mathcal{L}^2(S_r)},$$

где Δ_θ — сферический оператор Лапласа на S_r. Таким образом, при $m > n/4$, т.е. при $l > n/2$ каждый член ряда(6) будет ограничен $\dfrac{1}{k^{1+\varepsilon}}$, т.е. ряд (6) будет абсолютно и равномерно сходиться на S_r, $r < R$.

Если F еще и гармоничекая, то ряд (6) будет равномерно сходиться в B_r, для любого $r < R$ (см. [1, гл. XI, §4]).

Рассмотрим множество в $\mathbb{C}^n$ вида

$$G^{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}^n : \ z = \zeta x, \ x \in G, \ \zeta \in \Delta\},$$

где $\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ открытый единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром в нуле. Множество $G^{\mathbb{C}}$ относительно компактно в $\mathbb{C}^n$, поскольку $\overline{G}^{\mathbb{C}}$ есть образ $\overline{G} \times \overline{\Delta}$ при непрерывном отображении $(x, \zeta) \to \zeta x$.

Ряды (2) (или (3)) определяют тогда некоторое продолжение $F^{\mathbb{C}}(z)$ функции F в $G^{\mathbb{C}}$. Действительно, рассмотрим для $z = \zeta x$, $\zeta \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} Y_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\zeta x) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k \, Y_k(x), \ x \in G. \tag{7}$$

В силу сходимости (3) в точке $x \in G$ ряд (7) является степенным рядом, сходящимся при $\zeta = 1$ и поэтому он сходится абсолютно в Δ и равномерно на любом компакте из единичного круга Δ. Кроме того, он сходится абсолютно при $\zeta = 1$, поэтому равномерно сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\zeta|^k \, |Y_k(x)| \,, \qquad \text{где } |\zeta| \leqslant 1.$$

Так как по предположению ряд (6) равномерно сходится в G_r для любого $0 < r < 1$, и

$$|Y_k(z)| \leqslant |Y_k(x)| \,, \quad k \in \mathbb{N},$$

то ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |Y_k(z)|$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Y_k(z)$ равномерно сходятся в $G_r^{\mathbb{C}}$ в силу критерия Коши. То есть функция $F^{\mathbb{C}}(z)$ непрерывна на $G^{\mathbb{C}}$. Кроме того она голоморфна по ζ при фиксированном $x \in G$ в Δ.

Обозначим

$$d_k(G) = \sup_{x \in G} |Y_k(x)| \quad \text{и} \quad d_{k,s}(G) = \sup_{x \in G} |P_{k,s}(x)|.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы ряд (3) сходился в G, а ряд (6) равномерно сходился на любом множестве G_r, $0 < r < 1$, необходимо и достаточно, чтобы ряд и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(G) r^k$$

сходился для любого $r < 1$, т.е. выполнялось условие

$$\varlimsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{d_k(G)} \leqslant 1.$$

Доказательство. Достаточность следует из того, что для $x \in G_r$, $y \in G$ и $x = ry$

$$|Y_k(x)| = |Y_k(ry)| = r^k \, |Y_k(y)| \leqslant r^k d_k(G).$$

Поэтому по признаку Вейерштрасса ряд (6) равномерно сходиться на G_r.

Необходимость. Рассмотрим функцию $F^{\mathbb{C}}(z)$ на $G^{\mathbb{C}}$. На $G_r^{\mathbb{C}}$

$$\sup_{z \in G_r^{\mathbb{C}}} \left| F^{\mathbb{C}}(z) \right| = M_r < \infty$$

в силу непрерывности $F^{\mathbb{C}}$ и относительной компактности $G_r^{\mathbb{C}}$. Так как

$$F^{\mathbb{C}}(z) = F^{\mathbb{C}}(\zeta x^0) = \sum_{k \geqslant 0} \zeta^k Y_k(x^0), \qquad \text{где } x^0 \in \overline{G}_r,$$

то в силу голоморфности функции $F^{\mathbb{C}}$ и неравенств Коши
$$\left|Y_k(x^0)\right| \leqslant \max_{|\zeta|\leqslant 1}\left|F^{\mathbb{C}}(\zeta x^0)\right| \leqslant M_r.$$

Пусть $G' \subset\subset G$ и G' сильно звездная симметричная область. Покажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k(G')$ сходится.

Возьмем область G^0 — сильно звездную и симметричную и такую, что $G' \subset\subset G^0 \subset\subset G$, тогда для $r > 1$ и достаточно близких к 1 имеем $G^0 \subset\subset G^0_r \subset\subset G$ и выполнены неравенства
$$d_k(G') \leqslant d_k(G^0) = \frac{1}{r^k}\cdot d_k(G^0_r) \leqslant \frac{1}{r^k}\cdot \sup_{G^0_r{}^{\mathbb{C}}} |F| = \frac{c_r}{r^k},$$

поэтому
$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(G') \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} d_k(G^0) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}\cdot d_k(G^0_r) \leqslant c_r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} = c_r\frac{1}{1-\frac{1}{r}} < \infty.$$

Возьмем в качестве $G' = G_r$, получим
$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(G_r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k d_k(G)$$
и этот ряд сходится для любого $r < 1$. □

Рассмотрим более сильное условие сходимости. Пусть ряд
$$\sum_{k,s} |a_{k,s}|\,|P_{k,s}(x)| \tag{8}$$
сходится равномерно в любой области G_r, $0 < r < 1$.

Следствие 2. *Для того чтобы ряд (8) сходился равномерно в любой области G_r, $0 < r < 1$, необходимо и достаточно чтобы ряд*
$$\sum_k r^k\left(\sum_s |a_{k,s}| d_{k,s}\right)$$
сходился для всех $r < 1$.

Доказательство. Достаточность следует из равенств
$$|P_{k,s}(x)| = |P_{k,s}(ry)| = r^k|P_{k,s}(y)| \leqslant r^k d_{k,s},$$
где $x \in G_r,\ y \in G,\ x = ry$, и критерия Коши равномерной сходимости.

Необходимость доказывается также, как в теореме 1. □

Используя формулу Коши-Адамара для одномерных степенных рядов, получим

Следствие 3. *Для того чтобы ряд (8) сходился равномерно в любой области G_r, $0 < r < 1$, необходимо и достаточно чтобы*
$$\varlimsup_{k\to\infty}\max_{1\leqslant s\leqslant\sigma(k)}\sqrt[k]{\sum_{s=1}^{\sigma(k)}|a_{k,s}|d_{k,s}} \leqslant 1. \tag{9}$$

Условие (9) можно переписать в другом виде. Так как

$$\max_s |a_{k,s}| d_{k,s} \leqslant \sum_{s=1}^{\sigma(k)} |a_{k,s}| D_{d,s} \leqslant \sigma(k) \max_s |a_{k,s}| d_{k,s},$$

а $\sigma(k)$ является многочленом по k степени $n-2$, то $\sqrt[k]{\sigma(k)} \to 1$ при $k \to \infty$, поэтому справедливо утверждение.

Следствие 4. *Для того чтобы ряд (8) сходился равномерно в любой области G_r, $0 < r < 1$, необходимо и достаточно чтобы*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \max_{1\leqslant s\leqslant\sigma(k)} \sqrt[k]{|a_{k,s}| d_{k,s}} \leqslant 1. \tag{10}$$

Результаты работы [6] влекут что условие (10) эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{k,s} a_{k,s} d_{k,s} P_{k,s}$$

в единичном шаре. Таким образом, справедливо утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы ряд (8) сходился равномерно в любой области G_r, $0 < r < 1$, необходимо и достаточно чтобы ряд*

$$\sum_{k,s} a_{k,s} d_{k,s} P_{k,s}$$

сходился абсолютно в шаре $B = \{x : \ |x| < 1\}$ и равномерно на любом компакте из этого шара.

Теорема 2 вполне соответствует теореме из [5, гл. 3, §14] о сходимости кратных степенных рядов в $\mathbb{C}^n$.

Список литературы

[1] С.Л.Соболев, *Введение в теорию кубатурных формул*, М., Наука, 1974. MR0478560

[2] Б.В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, т. 1, М., Наука, 1976. MR0584934

[3] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, *Уравнения математической физики*, М., Наука, 1966. MR0211100

[4] И.Стейн, Г.Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, М., Мир, 1974.

[5] В.С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, М., Наука, 1964. MR0171937

[6] О.В. Ходос, *Об аналоге формулы Коши-Адамара для гармонических в шаре функций*, Журнал СФУ. Математика и физика, **2** (2009), no. 4, 517-520.

Александр Мечиславович Кытманов
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 79
660041, Красноярск, Россия
E-mail address: kytmanov49@gmail.com

Ольга Вениаминовна Ходос
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 79
660041, Красноярск, Россия
E-mail address: OKhodos@sfu-kras.ru