

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 10, стр. 65–78 (2013)

УДК 532.592

MSC 76B55

О БИФУРКАЦИЯХ СДВИГОВЫХ СОПРЯЖЕННЫХ
ТЕЧЕНИЙ

А.Ю. КАЗАКОВ

ABSTRACT. We consider the non-linear problem on the pairs of horizontal weakly-stratified shear flows which possess predicted fluxes of mass, momentum and energy. Using the methods of the branching theory, we reduce this problem to an equivalent system of implicit algebraic equations. Analysis of the branching system yields necessary and sufficient conditions for bifurcation of conjugate flows. As an example, we show numerically that these conditions are satisfied for a basic continuously stratified flow with a density profile being close to the two-layer stratification.

Keywords: weakly-stratified fluid, conjugate flows, internal waves, branching equations.

1. ВВЕДЕНИЕ

Два одномерных течения стратифицированной жидкости называются сопряженными, если они являются согласованными в смысле законов сохранения массы, импульса и энергии. Этот термин, сама постановка задачи об отыскании пар сопряженных течений как бифуркационной задачи для квазилинейного эллиптического уравнения Дюбрей–Жакотэн–Лонга, а также первые результаты о ее разрешимости принадлежат Бенджамину [1]. Данная задача тесно связана с проблемой аналитического описания предельных форм внутренних уединенных волн, сформулированной в работе Эмика и Тернера [2]. В указанной работе было установлено, что одной из таких предельных форм являются уединенные волны столбовидного вида с уплощенными вершинами, по форме

КАЗАКОВ, А.Ю., ON BIFURCATIONS OF STRATIFIED SHEAR FLOWS.

© 2012 Казаков А. Ю.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (контракт 02.740.11.0617).

Поступила 22 октября 2012 г., опубликована 7 февраля 2013 г.

напоминающие плато. Волны типа плато имеют фронты, подобные плавным внутренним борам, и почти одномерные горизонтальные срединные течения, сопряженные с невозмущенным течением перед волной. Тем самым решения одномерной задачи о сопряженных течениях дают существенную априорную информацию о предельных амплитудах двумерных внутренних волн.

В работе [3] установлено, что для равномерного течения с профилем плотности, близким к линейному, имеет место множественная неединственность решений задачи о сопряженных течениях. В [4] получены аналитические условия существования сдвигового течения, сопряженного с равномерным потоком; там же с использованием этих условий построены приближенные решения, описывающие волны типа плато. В настоящей работе рассматривается общая постановка о парах сопряженных сдвиговых потоков с непрерывной стратификацией. Эта задача исследовалась ранее в работе [5], где было найдено необходимое условие ее разрешимости. В предлагаемой работе находится также и достаточное условие; кроме того, численно демонстрируется выполнение этих условий для непрерывно стратифицированного основного потока с профилем плотности, близким к двухслойному распределению.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О СОПРЯЖЕННЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Плоское течение стратифицированной жидкости в слое $\{-\infty < x < +\infty, 0 < y < h\}$ описывается уравнением Дюбрей–Жакотэн – Лонга для функции тока $\psi(x, y)$

$$(1) \quad \rho(\psi)\Delta\psi + \rho_\psi(\psi) \left(\frac{|\nabla\psi|^2}{2} + gy \right) = B_\psi(\psi),$$

где функция $\rho(\psi)$ задает распределение плотности по линиям тока, $B(\psi)$ – функция Бернулли [6]. Будем предполагать, что в невозмущенном горизонтальном потоке при $x \rightarrow -\infty$ профиль плотности $\rho = \rho_0(y/h, \sigma)$ и функция тока $\psi = \psi_0(y/h)$ известны:

$$(2) \quad \rho_0(Y, \sigma) = \rho_*(1 + \sigma\rho_1(Y) + \sigma^2\rho_2(Y, \sigma)), \quad \psi_0(Y) = ch\psi_1(Y).$$

Здесь постоянная $\rho_* > 0$ задает характерный масштаб плотности; σ – малый параметр Буссинеска, связанный с характерной частотой плавучести N_0 соотношением $\sigma = N_0^2 h/g$. Напомним, что частотой плавучести (частотой Брента–Вайсяля) называется величина $N(y)$, определяемая соотношением

$$N^2(y) = -\frac{g\rho_0 y}{\rho_0}.$$

Безразмерные функции ρ_1, ρ_2 в первой из формул (2) задают, соответственно, фоновый профиль плотности и тонкую структуру стратификации [7] (при этом предполагается, что стратификация является гидростатически устойчивой: $\rho_{1Y} < 0$). В свою очередь, определение функции тока ψ_0 использует среднюю скоростью $c = \text{const}$ основного течения и безразмерную функцию ψ_1 (обладающую свойствами $\psi_1(0) = 0, \psi_1(1) = 1$ и $\psi_{1Y} \neq 0$), которая задает профиль сдвига скорости. Для известных функций $\rho_0(Y, \sigma)$ и $\psi_0(Y)$ зависимость $\rho(\psi)$, участвующая в уравнении (1), может быть представлена в виде

$$\rho(\psi) = \rho_0(y_1(\psi/ch), \sigma),$$

где y_1 – отображение, обратное к ψ_1 , а вид функции $B_\psi(\psi)$ может быть определен в силу уравнения (1).

Отметим, что уравнение (1) допускает вариационную формулировку с лагранжианом вида

$$(3) \quad L(\psi, \nabla\psi; y, \lambda, \sigma) = \frac{1}{2}\rho(\psi) |\nabla\psi|^2 - g\rho(\psi)y + B(\psi).$$

Поскольку указанный лагранжиан является инвариантным относительно группы переноса по переменной x , теорема Э. Нетер дает дивергентную форму записи уравнения (1)

$$(L - \psi_x L_{\psi_x})_x + (-\psi_x L_{\psi_y})_y = 0.$$

Интегрируя это соотношение по y и учитывая граничные условия $\psi_x(x, 0) = \psi_x(x, 1) = 0$, получаем, что для любого x должно быть выполнено соотношение

$$(4) \quad \int_0^1 (L - \psi_x L) dy = \text{const},$$

играющее ключевую роль в дальнейших рассуждениях.

Перейдем к безразмерным переменным, считая величину h характерным масштабом для пространственных переменных x , y , величину ch — масштабом для функций тока ψ и ψ_0 , величину ρ_* — масштабом плотности и величину $\rho_* c^2$ — масштабом функции Бернулли B . Сохраняя прежние обозначения для всех безразмерных величин, сформулируем краевую задачу для уравнения Дюбрей–Жакотэн — Лонга относительно искомой функции $w(x, \psi)$ в плоскости независимых переменных Мизеса (x, ψ) . При такой формулировке форма линий тока задается в виде $y = y_0(\psi) + w(x, \psi)$, где зависимость $y_0(\psi)$ соответствует невозмущенному течению с известной функцией тока $\psi = \psi_0(y)$. Для течения типа плавного бора функция w в полосе $\{-\infty < x < \infty, 0 < \psi < 1\}$ должна удовлетворять следующим уравнениям и граничным условиям:

$$(5) \quad - \left(\frac{\rho w_\psi}{y_{0\psi}^3} \right)_\psi + \rho \left(\frac{w_x}{y_{0\psi}} \right)_x + \lambda \tilde{\rho}_\psi w + \\ + \left(\rho \frac{y_{0\psi}^3 w_x^2 + 3y_{0\psi} w_\psi^2 + 2w_\psi^3}{2y_{0\psi}^3 (y_{0\psi} + w_\psi)^2} \right)_\psi + \rho \left(\frac{w_x w_\psi}{y_{0\psi} (y_{0\psi} + w_\psi)} \right)_x = 0,$$

$$(6) \quad w(0, x) = 0, \quad w(1, x) = 0,$$

$$(7) \quad w \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty), \quad w \rightarrow w_\infty(\psi) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Здесь $\rho(\psi, \sigma) = \rho_0(y_0(\psi), \sigma)$, $\tilde{\rho}(\psi, \sigma) = \sigma^{-1} \rho(\psi, \sigma)$. В настоящей работе задача о сопряженных течениях рассматривается для случая слабой стратификации (с малым параметром $\sigma > 0$), поэтому следует отметить, что далее при рассмотрении системы (5)–(7) в пределе при $\sigma = 0$ входящие в нее отображения доопределяются по непрерывности. Кроме того, характерные масштабы c и h будем предполагать такими, что безразмерное плотностное число Фруда $\lambda = \sigma gh/c^2$, входящее в уравнение (5) и рассматриваемое как бифуркационный параметр, принимает конечные значения.

Функция $w_\infty(y)$ в условии (7), определяющая сопряженное течение при $x \rightarrow +\infty$, должна быть решением уравнений (5), (6). При этом она также должна

удовлетворять дополнительному условию, которое вытекает из соотношения (4):

$$(8) \quad \int_0^1 \left(\frac{\rho w_{\infty\psi}^2}{2y_{0\psi}^2(y_{0\psi} + w_{\infty\psi})} + \frac{\lambda}{2} \tilde{\rho}_{\psi} w_{\infty}^2 \right) d\psi = 0.$$

С гидродинамической точки зрения, соотношение (8) выражает совпадение потоков горизонтального импульса в основном ($w = 0$) и сопряженном ($w = w_{\infty}(\psi)$) течениях. Отметим, что сохранение константы Бернулли и плотности вдоль линий тока обеспечивает совпадение потоков массы и энергии этих течений.

Таким образом, для функции $w = w_{\infty}(\psi)$, определяющей сопряженное течение, получается система уравнений

$$(9) \quad F(w(\psi); \lambda, \sigma) = 0, \quad w(0) = w(1) = 0,$$

$$(10) \quad \int_0^1 P(w(\psi), w_{\psi}(\psi); \lambda, \sigma) d\psi = 0,$$

с нелинейными дифференциальными операторами

$$(11) \quad F(w; \lambda, \sigma) = - \left(\frac{\rho w_{\psi}}{y_{0\psi}^3} \right)_{\psi} + \lambda \tilde{\rho}_{\psi} w + \left(\rho \frac{3y_{0\psi} w_{\psi}^2 + 2w_{\psi}^3}{2y_{0\psi}^3 (y_{0\psi} + w_{\psi})^2} \right)_{\psi},$$

$$(12) \quad P(w, w_{\psi}; \lambda, \sigma) = \frac{\rho w_{\psi}^3}{4y_{0\psi}^2 (y_{0\psi} + w_{\psi})^2}.$$

Указанный здесь вид оператора P получен в результате преобразования выражения (8) путем исключения из него параметра λ в силу уравнения (9).

Задача (9) по своей постановке является нелинейной задачей Штурма — Лиувилля. Аналогичные задачи возникают во многих прикладных областях [8], однако наличие дополнительного интегрального соотношения (10) делает эту постановку задачи нетрадиционной. Отдельно следует отметить особенность формулировки задачи, связанную с ее вариационным свойством. А именно, поскольку подынтегральное выражение в соотношении (8) является лагранжианом уравнения (9), задача о сопряженных течениях (9)–(10) может рассматриваться как задача об отыскании критических точек функционала (8) на поверхности его нулевого уровня.

3. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О СОПРЯЖЕННЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Классическое решение нелинейной задачи (9) $w(\psi)$ будем разыскивать в пространстве гладких функций

$$\mathbb{E} = \{ w \in C^2[0, 1] \mid w(0) = w(1) = 0 \},$$

при этом оператор F из (9) будем рассматривать как отображение $F(\cdot, \lambda, \sigma) : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$, где $\mathbb{F} = C[0, 1]$. Напомним, что в исходной задаче имеется естественный малый параметр слабой стратификации σ . Поэтому рассмотрим линейную задачу Штурма — Лиувилля

$$(13) \quad A(\lambda)\langle \varphi \rangle = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0,$$

которая получается в результате линеаризации системы (9) при $\sigma = 0$. Линейный оператор $A(\lambda)\langle \cdot \rangle : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ здесь имеет вид

$$(14) \quad A(\lambda)\langle \varphi \rangle = - \left(\frac{\varphi_\psi}{y_{0\psi}^3} \right)_\psi + \lambda \rho_{1\psi} \varphi.$$

Из общей теории линейных задач Штурма — Лиувилля вытекает, что задача (13) имеет счетное семейство однократных собственных значений. Пусть λ_0 — минимальное собственное значение задачи (13) и $\varphi_0(\psi)$ — соответствующая ему собственная функция, тогда оператор $A(\lambda_0)$ является фредгольмовым оператором с одномерным ядром, которое порождается функцией φ_0 . Достаточное условие разрешимости неоднородного уравнения $A(\lambda_0)\langle \varphi \rangle = f$ имеет вид $r\langle f \rangle = 0$ с функционалом $r : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{R}$, действующим по формуле

$$r\langle f \rangle = \int_0^1 \varphi_0(\psi) f(\psi) d\psi.$$

В соответствии с методом Ляпунова — Шмидта [9] определим проектор $H : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}$, как $H\langle f \rangle = \varphi_0 r\langle f \rangle$. В силу непрерывности функционала r пространство \mathbb{F} может быть представлено в виде прямой суммы замкнутых подпространств

$$\mathbb{F} = \text{im}H \oplus \text{im}A(\lambda_0).$$

Кроме того, поскольку $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$, проектор H также задает представление пространства \mathbb{E} в виде прямой суммы

$$\mathbb{E} = \ker A(\lambda_0) \oplus \ker(H|_{\mathbb{E}}).$$

Принимая во внимание это разложение, решение w задачи (9) будем разыскивать в виде $w = b\varphi_0 + u$, где $b \in \mathbb{R}$ — амплитудный параметр, а функция u принадлежит пространству $\ker(H|_{\mathbb{E}})$, т. е. $r\langle u \rangle = 0$. С учетом разложения пространства \mathbb{F} запишем систему (9) в следующей эквивалентной форме

$$(15) \quad A(\lambda_0)\langle u \rangle = (I - H)\langle R(b\varphi_0 + u; \lambda, \sigma) \rangle,$$

$$(16) \quad 0 = r\langle R(b\varphi_0 + u; \lambda, \sigma) \rangle,$$

где I — тождественное отображение, $R(w; \lambda, \sigma)$ — малый нелинейный оператор, квадратичный по совокупности переменных w , $(\lambda - \lambda_0)$ и σ . В силу теоремы о неявных отображениях уравнение (15) определяет малое отображение $u(\lambda, \sigma, b)$, допускающее оценку

$$(17) \quad \|u(\lambda, \sigma, b)(\cdot)\|_{C^2[0,1]} \leq C(|b|\sigma + |\lambda - \lambda_0||b| + b^2).$$

Подставляя отображение $u(\lambda, \sigma, b)$ в уравнение (16), получаем скалярное уравнение разветвления относительно вещественных параметров λ , σ и b , описывающее все гладкие ветви решений исходной системы (9) в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, $\sigma = 0$,

$$r\langle R(b\varphi_0 + u(\lambda, \sigma, b); \lambda, \sigma) \rangle = 0.$$

В то же время подстановка представления решения $w = b\varphi_0 + u(\lambda, \sigma, b)$ в дополнительное интегральное условие (10) дает еще одно скалярное соотношение на параметры задачи. Таким образом, для отличных от тождественного нуля

решений w система (9)–(10) сводится к эквивалентной ей системе двух вещественных скалярных уравнений разветвления вида

$$(18) \quad f(\lambda, \sigma, b) = 0, \quad g(\lambda, \sigma, b) = 0$$

с функциями

$$(19) \quad f(\lambda, \sigma, b) = \int_0^1 \varphi_0 \left[- \left(\frac{\rho(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_\psi)}{y_{0\psi}^3} \right)_\psi + \lambda \tilde{\rho}_\psi (\varphi_0 + \tilde{u}) + \right. \\ \left. + \left(\rho \frac{3by_{0\psi}(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_\psi)^2 + 2b^2(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_\psi)^3}{2y_{0\psi}^3(y_{0\psi} + b\varphi_{0\psi} + b\tilde{u}_\psi)^2} \right)_\psi \right] d\psi,$$

$$(20) \quad g(\lambda, \sigma, b) = \int_0^1 \left(\frac{\rho(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_\psi)^3}{4y_{0\psi}^2(y_{0\psi} + b\varphi_{0\psi} + b\tilde{u}_\psi)^2} \right) d\psi,$$

где гладкое при $b \geq 0$ отображение $\tilde{u}(\lambda, \sigma, b)(\psi) = b^{-1}u(\lambda, \sigma, b)$, определено неявно, причем $\tilde{u}(\lambda_0, 0, 0)(\psi) = 0$ в силу оценки (17). Анализ совместности полученной вещественной системы (18) для малых нетривиальных решений вида $(w(\sigma), \lambda(\sigma))$ дает следующий ключевой результат.

Теорема 1. *Условие*

$$(21) \quad \mu(\varphi_0) \stackrel{def}{=} \int_0^1 \frac{\varphi_{0\psi}^3}{y_{0\psi}^4} d\psi = 0$$

является необходимым для существования нетривиальной ветви решений $(w(\sigma), \lambda(\sigma))$ задачи о сопряженных течениях (9)–(10), имеющих асимптотику $(w(\sigma), \lambda(\sigma)) \rightarrow (0, \lambda_0)$ при $\sigma \rightarrow 0$.

Доказательство. По построению каждому малому нетривиальному решению $(w(\sigma), \lambda(\sigma))$ исходной системы (9)–(10) соответствует решение $(b(\sigma), \lambda(\sigma))$ системы (18), такое что $b(0) = 0$, $\lambda(0) = 0$. Вычисляя значение функции $g(\lambda(\sigma), \sigma, b(\sigma))$ для $\sigma = 0$ из представления (20), находим, что

$$g(\lambda_0, 0, 0) = \int_0^1 \frac{\varphi_{0\psi}^3}{4y_{0\psi}^4} d\psi.$$

Таким образом, заключаем, что для обеспечения совместности системы (18) в точке $(\lambda_0, 0, 0)$ необходимо требовать выполнения условия (21).

Отметим, что необходимое условие существования сопряженного течения (21) уже было получено в работе [5] с использованием несколько отличающейся схемы доказательства. Дальнейший анализ локальной разрешимости системы (18) позволяет развить имеющиеся результаты и получить достаточные условия существования.

Теорема 2. *Пусть выполнено необходимое условие ветвления (21) и при этом выполнено*

$$(22) \quad \eta(\varphi_0) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{3\varphi_{0\psi}^2}{2y_{0\psi}^4} \right)_\psi \mathbf{G} \left\langle \left(\frac{3\varphi_{0\psi}^2}{2y_{0\psi}^4} \right)_\psi \right\rangle - \frac{\varphi_{0\psi}^4}{y_{0\psi}^5} \right) d\psi \neq 0,$$

где $\mathbf{G} : \text{im}A(\lambda_0) \mapsto \ker(H|_{\mathbb{E}})$ — оператор Грина задачи (13). Тогда существует гладкая ветвь $(w(\sigma), \tilde{\lambda}(\sigma))$ малых решений задачи (9)–(10) с асимптотикой

$$(23) \quad \tilde{\lambda}(\sigma) = \lambda_0 - \sigma \left(\int_0^1 \rho_{1\psi} \varphi_0^2 d\psi \right)^{-1} \times \int_0^1 \left(\frac{\rho_{1\varphi_0^2}}{y_{0\psi}^3} + \lambda_0 \rho_{2\psi} \varphi_0^2 \right) d\psi + O(\sigma^2),$$

$$w(\sigma) = -\frac{\sigma \varphi_0}{\eta(\varphi_0)} \int_0^1 \left(\frac{\rho_{1\varphi_0^3}}{2y_{0\psi}^4} - \left(\frac{3\varphi_0^2}{2y_{0\psi}^4} \right)_{\psi} \right) \times$$

$$\times \mathbf{G} \left\langle \left(\frac{\rho_{1\varphi_0\psi}}{y_{0\psi}^3} \right)_{\psi} - \varphi_0 \left(\tilde{\lambda}_{\sigma}(0) \rho_{1\psi} + \lambda_0 \rho_{2\psi} \right) \right\rangle d\psi + O(\sigma^2).$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (21), в этом случае точка $(\lambda_0, 0, 0)$ удовлетворяет второму уравнению системы (18), а из соотношения (19) непосредственно вытекает, что указанная точка удовлетворяет и первому из уравнений. Из теоремы о неявной функции следует, что условие локальной разрешимости системы (18) выражается в терминах определителя ее линейной части и имеет вид

$$(24) \quad \det M = \det \begin{pmatrix} f_b(\lambda_0, 0, 0) & f_{\lambda}(\lambda_0, 0, 0) \\ g_b(\lambda_0, 0, 0) & g_{\lambda}(\lambda_0, 0, 0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Вычислим входящие в это условие производные. Для вычисления производной $f_b(\lambda_0, 0, 0)$ заметим, что для линейного оператора $A(\lambda_0)$ при произвольных $\varphi, w \in \mathbb{E}$ выполнено соотношение

$$(25) \quad \int_0^1 A(\lambda_0) \langle \varphi \rangle w d\psi = \int_0^1 A(\lambda_0) \langle w \rangle \varphi d\psi.$$

Далее из соотношений (19) и (25), используя интегрирование по частям, имеем

$$(26) \quad f_b(\lambda_0, 0, 0) = \int_0^1 \varphi_0 \left[A(\lambda_0) \langle \tilde{u}_b \rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{3by_{0\psi}(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_{\psi})^2 + 2b^2(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_{\psi})^3}{2y_{0\psi}^3(y_{0\psi} + b\varphi_{0\psi} + b\tilde{u}_{\psi})^2} \right)_{\psi} \right]_{(\lambda_0, 0, 0)} d\psi = -\frac{3}{2} \int_0^1 \frac{\varphi_{0\psi}^3}{y_{0\psi}^4} d\psi.$$

Таким образом, значение $f_b(\lambda_0, 0, 0)$ пропорционально значению функционала $\mu(\varphi_0)$ и из условия (21) вытекает, что $f_b(\lambda_0, 0, 0) = 0$. Отметим, что пропорциональность величин $f_b(\lambda_0, 0, 0)$ и $g(\lambda_0, 0, 0)$ не является случайной, а вытекает из вариационного характера рассматриваемой задачи [5]. Поскольку $f_b(\lambda_0, 0, 0)$ обращается в нуль, выражение для определителя (24) упрощается

$$\det M = -f_{\lambda}(\lambda_0, 0, 0)g_b(\lambda_0, 0, 0).$$

Выражение для $f_{\lambda}(\lambda_0, 0, 0)$ получается аналогично (26)

$$f_{\lambda}(\lambda_0, 0, 0) = \int_0^1 \varphi_0 \left[- \left(\frac{\tilde{u}_{\lambda\psi}}{y_{0\psi}^3} \right)_{\psi} + \lambda_0 \rho_{1\psi} \tilde{u}_{\lambda} + \rho_{1\psi}(\varphi_0 + \tilde{u}) \right]_{(\lambda_0, 0, 0)} d\psi =$$

$$(27) \quad = \int_0^1 \varphi_0 \left(A(\lambda_0) \langle \tilde{u}_\lambda \rangle |_{(\lambda_0, 0, 0)} + \rho_{1\psi} \varphi_0 \right) d\psi = \int_0^1 \rho_{1\psi} \varphi_0^2 d\psi.$$

Величина $f_\lambda(\lambda_0, 0, 0)$ не обращается в нуль поскольку $\rho_{1\psi} \neq 0$, в силу постулируемого условия устойчивости стратификации, поэтому локальная разрешимость системы (18) определяется производной отображения $g(\lambda, \sigma, b)$ по параметру b . Из (20) имеем

$$(28) \quad g_b(\lambda_0, 0, 0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\tilde{u}_b(\lambda_0, 0, 0) \left(\frac{3\varphi_{0\psi}^2}{2y_{0\psi}^4} \right)_\psi - \frac{\varphi_{0\psi}^4}{y_{0\psi}^5} \right) d\psi.$$

Производная неявного отображения \tilde{u}_b , входящая в выражение (28), может быть вычислена из определяющего уравнения (15). Для \tilde{u} это уравнение имеет вид:

$$(29) \quad A(\lambda_0) \langle \tilde{u} \rangle = (I - H) \left\langle - \left(\frac{(1 - \rho)(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_\psi)}{y_{0\psi}^3} \right)_\psi + (\lambda_0 \rho_{1\psi} - \lambda \tilde{\rho}_\psi)(\varphi_0 + \tilde{u}) - \right. \\ \left. - \left(\rho \frac{3by_{0\psi}(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_\psi)^2 + 2b^2(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_\psi)^3}{2y_{0\psi}^3(y_{0\psi} + b\varphi_{0\psi} + b\tilde{u}_\psi)^2} \right)_\psi \right\rangle.$$

Дифференцируя левую и правую части уравнения (29) по параметру b в точке $(\lambda_0, 0, 0)$, получаем уравнение для определения производной $\tilde{u}_b(\lambda_0, 0, 0)$

$$A(\lambda_0) \langle \tilde{u}_b \rangle |_{(\lambda_0, 0, 0)} = (I - H) \left\langle \left(-\frac{3\varphi_{0\psi}^2}{2y_{0\psi}^4} \right)_\psi \right\rangle.$$

Наличие проектора $(I - H)$ в правой части указанного уравнения обеспечивает существование единственного решения $\tilde{u}_b(\lambda_0, 0, 0)$, которое можно получить с помощью оператора Грина $\mathbf{G}(\cdot)$ линейной задачи Штурма — Лиувилля (13). Однако в силу выполнения условия (21) имеем $H \left\langle (3\varphi_{0\psi}^2/2y_{0\psi}^4)_\psi \right\rangle = 0$, поэтому функция $\tilde{u}_b(\lambda_0, 0, 0)$ имеет вид

$$\tilde{u}_b(\lambda_0, 0, 0) = -\mathbf{G} \left\langle \left(\frac{3\varphi_{0\psi}^2}{2y_{0\psi}^4} \right)_\psi \right\rangle.$$

Подставляя найденное выражение для $\tilde{u}_b(\lambda_0, 0, 0)$ в (28), получаем

$$g_b(\lambda_0, 0, 0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{3\varphi_{0\psi}^2}{2y_{0\psi}^4} \right)_\psi \mathbf{G} \left\langle \left(\frac{3\varphi_{0\psi}^2}{2y_{0\psi}^4} \right)_\psi \right\rangle - \frac{\varphi_{0\psi}^4}{y_{0\psi}^5} \right) d\psi.$$

Таким образом, при выполнении условия (22) определитель (24) отличен от нуля, и система (18) однозначно разрешима в окрестности точки $(\lambda_0, 0, 0)$. Выражения для $f_\sigma(\lambda_0, 0, 0)$ и $g_\sigma(\lambda_0, 0, 0)$, дающие асимптотическое представление решения (23), могут быть получены из соотношений (19) и (20) аналогично соотношениям (26) и (27).

4. ПРОВЕРЯЕМОСТЬ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Условия (21) и (22) выражаются в терминах собственных функций линейной задачи Штурма — Лиувилля (13), которые, как известно, имеют аналитическое представление только для некоторых специальных распределений плотности и скорости невозмущенного потока [10]. Тем не менее, в определенных важных случаях полученные условия оказываются проверяемыми и могут быть сопоставлены с известными результатами или проанализированы численно.

Рассмотрим двухслойное течение жидкости и проведем формальное сопоставление полученных результатов с известным для этого случая решением. Пусть U_1 и U_2 — скорости жидкости невозмущенного течения в нижнем и верхнем слоях, а H_1 и H_2 — толщины слоев. Будем предполагать, что профиль плотности указанного течения имеет вид $\rho_0(y) = \rho_*(1 - \sigma\theta(y - H_1))$, где $\theta(y)$ — функция Хевисайда. В этом случае кусочно-линейная функция $\varphi_0 \in W_2^1[0, 1]$ вида

$$(30) \quad \varphi_0(\psi) = \begin{cases} \psi/q_1, & 0 \leq \psi < q_1, \\ (1 - \psi)/(1 - q_1), & q_1 \leq \psi \leq 1, \end{cases}$$

где $q_1 = U_1 H_1 / (U_1 H_1 + U_2 H_2)$, является обобщенной собственной функцией линейной задачи Штурма — Лиувилля (13), если выполнено соотношение

$$(31) \quad F_1^2 + \frac{h_1}{1 - h_1} F_2^2 = h_1.$$

Здесь $F_1 = U_1 / \sqrt{g\sigma h}$, $F_2 = U_2 / \sqrt{g\sigma h}$ — денсиметрические (плотностные) числа Фруда, $h = H_1 + H_2$ — полная глубина жидкости, $h_1 = H_1/h$. Соотношение (31) вытекает непосредственно из обобщенной постановки задачи (13). Известно [11], что эллипс (31) в плоскости чисел Фруда (F_1, F_2) задает границу непрерывного спектра линеаризованной задачи о двумерных стационарных волнах в двухслойной жидкости (точкам данного спектра соответствуют обобщенные собственные функции в виде синусоидальных волновых пакетов). Известно также, что геометрическое место точек существования сопряженных течений в плоскости (F_1, F_2) есть квадрат $|F_1| + |F_2| = 1$, касающийся эллипса (31) в четырех точках $(F_1, F_2) = (\pm h_1, \pm(1 - h_1))$ (см. рис. 1а). Указанные точки являются точками бифуркации, в которых нетривиальные сопряженные течения ответвляются от основного потока (они же являются точками бифуркации для решений в виде плавного бора [11] и уединенных волн типа плато [12]). Подставляя представление собственной функции (30) в необходимое условие ветвления (21), получаем соотношение

$$(F_2 h_1)^2 = F_1^2 (1 - h_1)^2,$$

которое задает в плоскости (F_1, F_2) пару прямых, пересекающих эллипс (31) в упомянутых выше четырех точках бифуркации (см. рис. 1б). При выполнении условия (21) формальная проверка достаточного условия (22) сводится к вычислению интеграла

$$\eta(\varphi_0) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi_{0\psi}^4}{y_{0\psi}^5} d\psi,$$

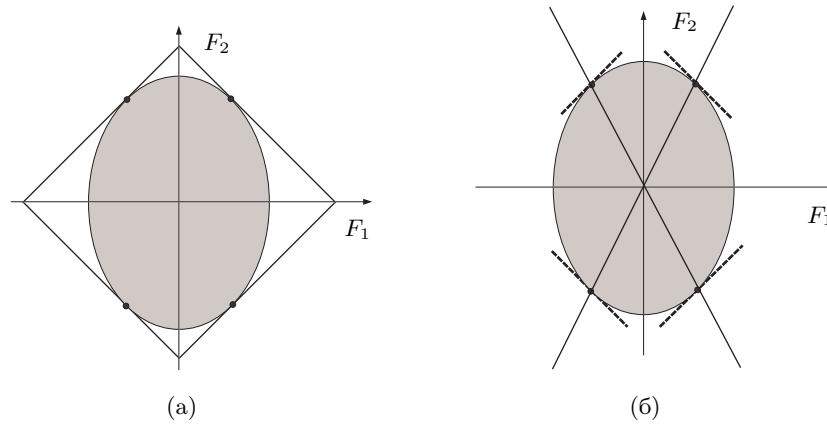


Рис. 1. Спектр линеаризованной задачи и диаграммы сопряженных течений: (а) — решение задачи [11], (б) — решение, задаваемое локальными условиями (21) и (22).

в котором подынтегральная функция является знакоопределенной. В результате теорема 2 дает следующее асимптотическое представление решения

$$w(\sigma) = \frac{\varphi_0(1 - q_1)^2}{2\eta(\varphi_0)(1 - h_1)^4} \sigma + O(\sigma^2),$$

которое соответствует нетривиальному (отличному от невозмущенного состояния) сопряженному течению. В этом смысле условия (21) и (22) характеризуют гладкие профили плотности и скорости основного течения, для которых ветвление малых решений задачи (9)–(10) аналогично ветвлению двухслойных сопряженных течений. При этом необходимое условие ветвления (21) определяет те точки в пространстве параметров задачи, в которых может происходить ветвление ее решений. Достаточное условие (22) классифицирует эти точки, выделяя те из них, в окрестности которых существует единственная ветвь нетривиальных решений.

Отметим, что необходимое условие (21) выполняется для бессдвигового основного течения, в котором фоновый профиль плотности в соотношениях (2) имеет вид $\rho_1(y) = -y$, т. е. для течения с профилем плотности близким к линейному или экспоненциальному [4]. Однако, как нетрудно показать, достаточное условие (22) для такого течения не выполняется. С другой стороны, в работе [3] было установлено, что для равномерного течения с указанным профилем плотности количество ветвей сопряженных течений определяется тонкой структурой стратификации, т. е. функцией $\rho_2(y, \sigma)$. При этом соответствующий выбор коэффициента $\rho_2(y, \sigma)$ обеспечивает существование любого наперед заданного количества ветвей решений.

Проанализируем теперь случай, когда непрерывная стратификация в основном равномерном потоке близка к двухслойной. Пусть в соотношениях (2) коэффициент плотности $\rho_1(y)$ имеет вид

$$(32) \quad \rho_1(y) = -e^{\frac{1}{2} \operatorname{th}(2(y-h_1)/\delta)}.$$

Указанное распределение плотности используется для моделирования пикноклина (скачка плотности), находящегося на глубине $y = h_1 \in (0, 1)$ с шириной области перехода порядка $\delta > 0$ (см. рис. 2а) [10]. Известно, что в этом случае

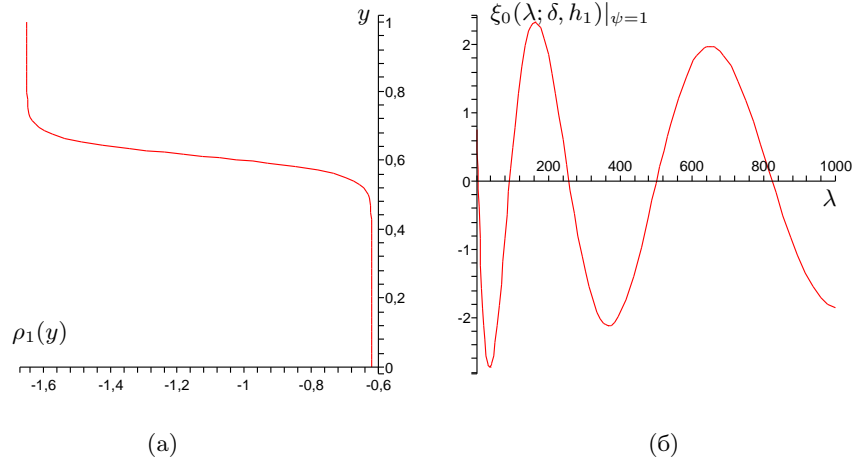


Рис. 2. При $h_1 = 0.6, \delta = 0.1$, (а) - вид фонового профиля плотности, (б) - значение решения задачи Коши $\xi_0(\lambda; \delta, h_1)$ в точке $\psi = 1$ при $\lambda > 0$.

решение линейной задачи Штурма — Лиувилля (13) может быть получено в виде гипергеометрического ряда, однако использование такого представления собственной функции для проверки условия (21) представляется затруднительным. Поэтому в настоящей работе указанное условие проверяется численно.

Для определения собственных значений и собственных функций задачи (13) воспользуемся модифицированным методом стрельбы. При произвольных допустимых δ и h_1 рассмотрим задачу Коши с оператором $A(\lambda)$ из (14) при $y_0(\psi) = \psi$ и $\rho_1(\psi)$ из соотношения (32)

$$(33) \quad \begin{aligned} -\varphi_{\psi\psi} + \lambda\varphi \left(e^{\frac{1}{2}\text{th}(2(\psi-h_1)/\delta)} \right)_{\psi} &= 0, \\ \varphi(0) &= 0, \quad \varphi_{\psi}(0) = 1. \end{aligned}$$

Для указанной задачи численно определим ее решение $\xi_0(\lambda; \delta, h_1)$ и минимальный корень $\Lambda(\delta, h_1)$ уравнения $\xi_0(\lambda; \delta, h_1)|_{\psi=1} = 0$, дающий минимальное собственное значение соответствующей задачи Штурма — Лиувилля (13) (см. рис. 2б). В результате может быть численно определена собственная функция $\varphi_0(\delta, h_1) = \xi_0(\Lambda(\delta, h_1); \delta, h_1)$, график которой приведен на рисунке 3а.

С использованием полученной собственной функции $\varphi_0(\delta, h_1)(\psi)$ определим значение функционала $\mu(\varphi_0(\delta, h_1))$, участвующего в условии (21). Оказывается (см. рис. 3б), что существует некоторый интервал допустимых значений h_1 таких, что уравнение $\mu(\varphi_0(\delta, h_1)) = 0$ имеет корень $\delta(h_1) > 0$. Это означает, что выбранное семейство гладких профилей плотности (32), при надлежащем выборе δ и h_1 , удовлетворяет необходимому условию существования сопряженного течения (21).

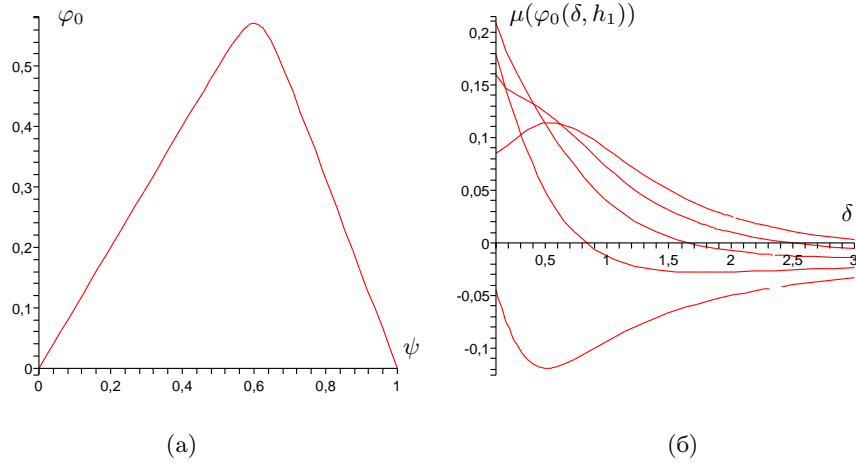


Рис. 3. (а) - вид собственной функции φ_0 при $h_1 = 0.6, \delta = 0.1$,
 (б) - значения функционала $\mu(\varphi_0(\delta, h_1))$ при $\delta > 0.1$ и $h_1 =$
 $0.1, 0.2, \dots, 0.5$

Численный расчет показывает, что для $h_1 = 0.47$ условие (21) будет выполняться при $\delta = 0.2447\dots$. Для этой пары значений численно определим значение функционала $\eta(\varphi_0)$ из формулировки достаточного условия (22). В определении указанного функционала участвует значение оператора Грина $\bar{\varphi} = \mathbf{G}\langle(3\varphi_{0\psi}^2)_{\psi}\rangle$, которое дается решением краевой задачи

$$(34) \quad \begin{aligned} -\bar{\varphi}_{\psi\psi} + \Lambda(\delta, h_1)\bar{\varphi} \left(e^{\frac{1}{2} \text{th}(2(\psi-h_1)/\delta)} \right)_{\psi} &= (3\varphi_{0\psi}^2)_{\psi}, \\ \bar{\varphi}(0) &= 0, \quad \bar{\varphi}(1) = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что условие разрешимости этой задачи имеет вид $r\langle(3\varphi_{0\psi}^2)_{\psi}\rangle = 0$ и эквивалентно условию (21), которое выполняется в силу выбора конкретных значений параметров δ и h_1 . При использовании метода Ляпунова–Шмидта предполагалось, что решение $\bar{\varphi}$ удовлетворяет ограничению $r\langle\bar{\varphi}\rangle = 0$. Однако структура выражения (22) такова, что при подстановке в него вместо $\bar{\varphi}$ функции вида $\bar{\varphi} + C\varphi_0$, получающееся значение функционала $\eta(\varphi_0)$ не зависит от постоянной C , если выполнено условие (21). Функция вида $\bar{\varphi} + C\varphi_0$ может быть численно получена как решение задачи Коши с условиями $\bar{\varphi}(0) = 0, \bar{\varphi}_{\psi}(0) = 1$, поставленной для уравнения краевой задачи (34). Подстановка решения задачи Коши в условие (22) дает $\eta(\varphi_0) = -0.2359\dots$. Аналогичное наблюдение справедливо и при вычислении асимптотики (23). В результате для случая бесдвигового невозмущенного потока с фоновым профилем плотности вида (32) из теоремы 2 вытекает следующее приближенное представление решения исходной задачи о сопряженных течениях (9)–(10)

$$(35) \quad w(\psi) = -(0.4295\dots)\sigma\varphi_0(\psi) + O(\sigma^2).$$

Вид собственной функции $\varphi_0(\psi)$ приведен на рисунке 4а, а соответствующий приближенный вид профиля скорости в сопряженном течении — на рисунке 4б.

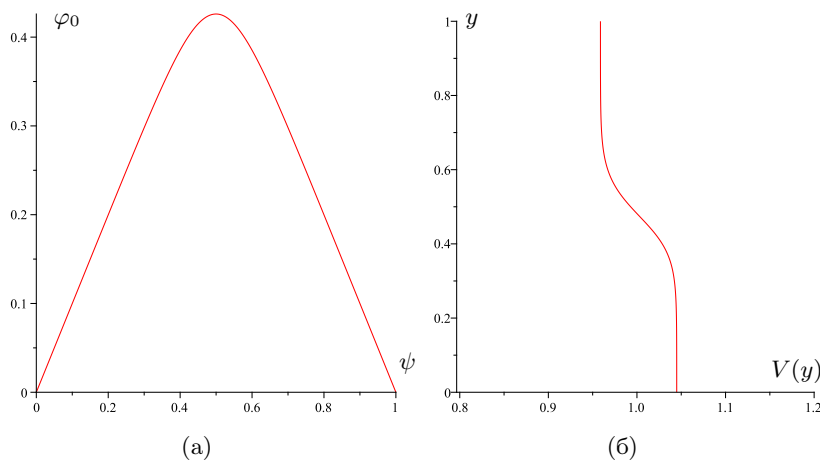


Рис. 4. (а) - вид собственной функции φ_0 при $h_1 = 0.47, \delta = 0.2447\dots$, удовлетворяющей условию (21), (б) - соответствующий приближенный вид профиля скорости в сопряженном течении при $\sigma = 0.1$.

Приведенная выше схема вычислений показывает, что полученные в настоящей работе условия разрешимости рассматриваемой задачи являются проверяемыми и позволяют, по крайней мере численно, охарактеризовать параметры невозмущенного течения, при которых реализуется ветвление сопряженных течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. V. Benjamin, *Unified theory of conjugate flows*, Philos. Trans. Roy. Soc., London A, **269** (1971), 587–643. MR0446075
- [2] C. Amick, R.E.L. Turner, *A global theory of internal solitary waves in two-fluid system*, Trans. Amer. Math. Soc., **298** (1986), 431–484. MR0860375
- [3] Макаренко Н.И. *Сопряженные течения и плавные боры в слабостратифицированной жидкости*, ПМТФ, **40**:2 (1999), 69–78. MR1711960
- [4] N. I. Makarenko, J. L. Maltseva, A. Yu. Kazakov, *Conjugate flows and amplitude bounds for internal solitary waves*, Nonlinear Processes in Geophysics, **16**:2 (2009), 169–178.
- [5] А. Ю. Казаков, *Сдвиговые сопряженные течения слабостратифицированной жидкости*, ПМТФ, **50**:2 (2009), 79–88. MR2502113
- [6] C.-S. Yih, *Stratified flows*, Academic Press, New York, 1980. MR0569474
- [7] К. Н. Федоров, *Тонкая термохалинная структура вод океана*, Гидрометеоздат, Ленинград, 1976, 184 с.
- [8] В. Г. Осмоловский, *Нелинейная задача Штурма — Лиувилля*, учеб. пособие, СПбГУ, Санкт-Петербург, 2003, 230 с.
- [9] М. М. Вайнберг. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, М.М. Вайнберг, В.А. Треногин, Наука, Москва, 1969, 529 с. MR0261416
- [10] В. Краусс, *Внутренние волны*, Гидрометеоздат, Ленинград, 1968, 272 с.
- [11] N. I. Makarenko, *Smooth bore in two-layer fluid* Intern. Ser. Numer. Math., **106** (1992), 195–204. MR1229538

- [12] Ж. Л. Мальцева *Об одном типе уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости* ПМТФ, **40**:5 (1999), 55–61. MR1741050

КАЗАКОВ АЛЕКСЕЙ ЮРЬЕВИЧ
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 15,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: alexey.yu.kazakov@gmail.com