S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 689–698 (2013) УДК 519.17
MSC 05C25

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$

Л.Ю. ЦИОВКИНА

Abstract. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$. It is shown, that there exists the unique (up to isomorphism) arc-transitive distance-regular graph with intersection array $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$. This graph is obtainable by the Cameron construction.

Keywords: distance-regular graph, automorphism, arc-transitive graph, antipodal cover.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, a, b — две вершины из Γ, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через $\Gamma_{i_1,i_2,\ldots,i_t}$, где $i_j \le d$ для всех $j = 1, \ldots, t$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в

Tsiovkina, L.Yu., On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00012), программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), и гранта ИММ УрО РАН для молодых ученых за 2013 год.

Поступила 6 декабря 2013 г., опубликована 17 декабря 2013 г.

котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$ в Г.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Г называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Г равна k. Граф Г назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Г — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Г. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Г, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Граф Г диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Г для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$.

Для подмножества X автоморфизмов графа Г через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Г, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Г. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются *числами пересечения графа* Г.

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин не большим 1000.

Предложение 1. *Пусть* Г *является дистанционно регулярным графом диаметра, большего* 2*, на* $v \le 1000$ *вершинах. Если* $\lambda = 2$ *и* $\mu > 1$*, то либо* Г *имеет массив пересечений графа Хэмминга* $H(n, 3)$*,* $n = 3, 4, 5, 6$*, либо верно одно из утверждений:*

(1) Г — *примитивный граф с массивом пересечений* $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$*,* $\{19, 16,$
$8; 1, 2, 8\}$*,* $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$*,* $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$*,* $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$*;*

(2) Г — *антиподальный граф с* $\mu = 2$ *и массивом пересечений* $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$*,* $r \in \{3, 4, ..., 21\} - \{10, 16\}$ *и* $v = 2r(r + 1)$*;*

(3) Г — *антиподальный граф с* $\mu \ge 3$ *и массивом пересечений*
$\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$*,* $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$*,* $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$*,* $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$*,*
$\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$*,* $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$*,* $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$.

Продолжается исследование реберно симметричных графов с такими массивами пересечений. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. В данной работе изучаются автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$.

Граф Г с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ имеет $v = 1 + 27 + 81 + 3 = 112$ вершин и спектр $27^1, 3^{63}, -1^{27}, -9^{21}$. Так как $r > 2$ и $m = n^2$, то окрестность любой вершины в Г — сильно регулярный граф с собственными значениями $a_1 = 2$, 2, -1. Поэтому окрестность вершины в Г является объединением изолированных треугольников.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{27,24,1;1,8,27\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2,3,7\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф и либо*

(i) $p = 7$, $\alpha_1(g) = 84s + 28$, $\alpha_3(g) = 0$, *либо*

(ii) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 8s$ *и* $\alpha_1(g) = 24l + 16s - 8$;

(2) $p = 3$ *и либо* Ω *является* 4*-кликой,* $\alpha_3(g) = 12$, $\alpha_1(g) = 24 + 36l$, *либо* Ω *лежит в антиподальном классе и* $|\Omega| \in \{1,4\}$;

(3) $p = 2$, Γ *содержит* $t \geq 2$ *антиподальных классов пересекающих* Ω *по* s *вершинам,* t *четно и либо* $s = 4$ *и* $t \leq 8$, *либо* $s = 2$ *и* $t \leq 16$.

Известно существование реберно симметричного дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{27,24,1;1,8,27\}$, получаемого с помощью конструкции Камерона [5]. Следующая теорема устанавливает единственность (с точностью до изоморфизма) реберно симметричного дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{27,24,1;1,8,27\}$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{27,24,1;1,8,27\}$ *и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Пусть* $U = U_3(3)$, $S, Q \in Syl_3(U), S \neq Q$, $L = N_U(S) \cap N_U(Q)$ *и* g *— это элемент порядка* 4 *из* $N_U(L) - L$. *Положим* $H = S\langle g^2\rangle$. *Через* $\Gamma(U,H,HgH)$ *обозначим граф на множестве вершин* $\{Hx|\ x \in U\}$, *в котором две вершины* Hx, Hy *смежны тогда и только тогда, когда* $xy^{-1} \in HgH$. *Тогда* $\Gamma \simeq \Gamma(U,H,HgH)$ *и* $G'' \simeq U$.

1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [3]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \{R_0, ..., R_d\})$, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u,w) таких, что $d(u,w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u,w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j = \sum p^l_{ij}A_k$ для подходящих неотрицательных целых p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j,l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Заметим, что матрица P_j является значением некоторого рационального многочлена от P_1, поэтому упорядочение собственных значений матрицы P_1 задает порядок на множестве собственных значений матрицы P_j. Матрицы P и Q, у которых на месте (i,j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_jp_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$.

Предложение 2. *Пусть* u_j *и* w_j *— левый и правый собственные векторы матрицы* P_1, *отвечающие собственному значению* $p_1(j)$ *и имеющие* *первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j\rangle$.*

Доказательство. См. теорему 17.12 из [4].

Фактически, из доказательства теоремы 17.12 следует, что w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(n, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^n$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [3]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = n^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 63, χ_2 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 27, то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$,*

$$\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) - 2\alpha_3(g) + \alpha_1(g))/12 - 7/3,$$

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 1 = 27 - (\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/4.$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 63$ и $\chi_2(g) - 27$ делятся на p.

Доказательство. См. доказательство леммы 1 из [5].

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$

В этом параграфе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ и $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$.

Заметим, что Γ содержит 28 антиподальных классов, в каждом из которых 4 вершины.

Замечание. Если Ω пересекает антиподальные классы K, L, то $|K \cap \Omega| = |L \cap \Omega|$.

В самом деле, вершина из $L \cap \Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K \cap \Omega$, поэтому $|K \cap \Omega| \leq |L \cap \Omega|$. Симметрично $|L \cap \Omega| \leq |K \cap \Omega|$.

Лемма 2. *Если Ω — пустой граф, то либо $p = 7$, $\alpha_1(g) = 84s + 28$ и $\alpha_3(g) = 0$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 8s$ и $\alpha_1(g) = 24l + 16s - 8$.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $112 = 2^4 7$, то $p = 7$ или 2.

Пусть $p = 7$. Тогда $\alpha_3(g) = \alpha_0(g) = 0$, $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/12 - 7/3$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 112$. По лемме 1 число $\chi_1(g) - 63 = \alpha_1(g)/12 - 7/3 - 63$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = 84s + 28$.

Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_1(g) = (-2\alpha_3(g) + \alpha_1(g))/12 - 7/3$ нечетно. Далее, число $\chi_2(g) - 27 = \alpha_3(g)/4 - 28$ четно, поэтому $\alpha_3(g) = 8s$ и $\alpha_1(g) = 24l + 16s - 8$.

Лемма доказана.

В леммах 3–5 предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $p > 2$, то $\lambda_\Omega = 2$. Далее, каждый μ-подграф в Γ является 8-кокликой и если $p > 7$, то $\mu_\Omega = 8$.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $p \neq 3$, то Ω содержит по вершине из $[a]$, из $\Gamma_2(a)$ и из $\Gamma_3(a)$;*

(2) *если $p > 3$, то $\Gamma_3(a) \subset \Omega$;*

(3) *любая вершина из Ω смежна с некоторой вершиной из $\Gamma - \Omega$.*

Доказательство. Если $p \neq 3$, то p не делит $|\Gamma_i(a)|$, поэтому Ω содержит по вершине из $[a]$, из $\Gamma_2(a)$ и из $\Gamma_3(a)$.

Для любой вершины a из Ω подграф $\Gamma_3(a)$ является g-допустимым и в случае $p > 3$ имеем $\Gamma_3(a) \subset \Omega$.

Допустим, что Ω содержит $[a]$. Пусть $p > 7$. Тогда любая вершина $u \in \Gamma_2(a)$ лежит в $[a_i] \cap [a_j]$ для некоторых вершин a_i, a_j из $[a]$. Отсюда $u \in \Omega$, поскольку иначе $|[a_i] \cap [a_j]| \geq p + 1 > 8$. Тогда $\Gamma \subset \Omega$, противоречие.

Пусть $p = 2, 5$ или 7. Тогда в $\Gamma_3(a)$ есть вершина b из Ω и $[b] \subset \Omega$. Иначе, если $[b]$ содержит вершину x из $\Gamma - \Omega$, то $[b]$ содержит вершину x^g, и $[x] \cap [x^g] = \{a_1, ..., a_8, b\}$ для вершин $\{a_1, ..., a_8\} \in [a]$, противоречие. Теперь для вершины $y \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b) - \Omega$ получим $|[y] \cap [y^g] \cap \Omega| \geq 16$, противоречие.

Пусть $p = 3$. Тогда $\Omega = a^\perp$ и для двух несмежных вершин $b, c \in [a]$ подграф $[b] \cap [c]$ содержит вершину a и 7 вершин из $\Gamma_2(a) - \Omega$, противоречие.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *число p не больше 3;*

(2) *если $p = 3$, то либо Ω является 4-кликой, $\alpha_3(g) = 12$, $\alpha_1(g) = 24 + 36l$, либо Ω лежит в антиподальном классе и $|\Omega| \in \{1, 4\}$.*

Доказательство. Пусть $p > 7$. Тогда каждая вершина $u \in \Gamma - \Omega$ смежна не более, чем с одной вершиной из Ω, $|\Omega| \geq 1 + 8 + 1 + 3 = 13$ и $|\Gamma - \Omega| \geq 11|\Omega| \geq 143$, противоречие. Пусть $p > 3$. Тогда $|\Omega| = 4t$, где t — число антиподальных классов, попадающих в Ω, Ω — регулярный граф степени $t - 1$ и p делит $28 - t$. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $4t(28 - t)$, но не больше $8(112 - 4t)$, поэтому $t^2 - 36t + 224 \geq 0$. Отсюда $t \leq 8$ или равно 28, причем в последнем случае получим $\Gamma \subset \Omega$, противоречие.

Если $p = 7$, то $t = 7$, $|\Omega| = 28$, окрестность вершины в Ω является объединением двух изолированных треугольников, $\mu_\Omega = 1$ и $|\Omega_2(a)| = 18$. Поэтому граф Ω связен. Пусть $\{c_1, c_2, c_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ — два треугольника из $\Omega(a)$ и $[c_1] \cap \Omega_2(a) = \{e_1, e_2, e_3\}$ — треугольник из $\Omega_2(a)$, содержащий вершину e_1, смежную с некоторой вершиной $a_2 \in \Omega_3(a)$. Тогда $[c_1] \cap \Omega(a_2) = \{e_1\}$. В свою очередь, вершина e_1 содержится в некотором треугольнике $\{e_1, x, y\}$ из $\Omega(a_2)$.

Так как $\mu_\Omega = 1$, то подграф $[c_1] \cup [c_2] \cup [c_3]$ не содержит ребер $\{e_1, x\}$ и $\{e_1, y\}$. Но тогда $x, y \in [b_1] \cup [b_2] \cup [b_3]$, противоречие.

Если $p = 5$, то $t = 3, 8$, но окрестность вершины в Ω является объединением некоторого числа изолированных треугольников, противоречие с тем, что $t-1$ не делится на 3.

Пусть $p = 3$ и Γ содержит t антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t-1$, 3 делит $t-1$, $|\Omega| = st$, $\alpha_3(g) = (4-s)t$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 112 - 4t$ и $\chi_1(g) = (9st + \alpha_1(g) - 8t)/12 - 7/3$. По лемме 1 число $\chi_1(g) - 63$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 8t - 9st + 28 + 36l$.

Рассмотрим множество вершин U, лежащих в антиподальных классах, не пересекающих Ω. Каждая вершина из U смежна в среднем с $st(28-t)/(112-4t) = st/4$ вершинами из Ω, поэтому $st = |\Omega| \leq 32$, $s \in \{1, 4\}$.

Пусть $s = 4$. Тогда $t = 7, 4$ или 1. Если $t = 7$, то окрестность вершины в Ω является объединением двух изолированных треугольников и Ω — связный вполне регулярный граф с параметрами $(28, 6, 2, 2)$. Противоречие с тем, что $|\Omega_2(a)| \neq 9$. Если $t = 4$, то $\mu_\Omega = 2$, но Ω это локально треугольный граф, противоречие. Если $t = 1$, то Ω — это антиподальный класс, содержащий вершину a и каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 1 вершиной из Ω, $\alpha_1(g) = 36l$.

Пусть $s = 1$. Тогда либо Ω является 4-кликой, $\alpha_3(g) = 12$, $\alpha_1(g) = 24 + 36l$, либо $|\Omega| = 1$, $\alpha_1(g) = 27 + 36l$.

Лемма 5. *Если $p = 2$, то Γ содержит $t \geq 2$ антиподальных классов пересекающих Ω по s вершинам, t четно и либо $s = 4$ и $t \leq 8$, либо $s = 2$ и $t \leq 16$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда $s \in \{2, 4\}$, Ω — регулярный граф степени $t-1$, число $|\Omega|$ четно, $\lambda_\Omega \in \{0, 2\}$, $\mu_\Omega \in \{2, 4, 6, 8\}$ и t четно.

Как и выше доказывается, что $|\Omega| = st \leq 32$, кроме того, $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = (s-1)(t-1)$ и связная компонента графа $\Omega(a)$ является либо треугольником, либо состоит из одной вершины.

Если $t = 2$, то Ω — объединение s изолированных ребер и ровно для одного треугольника Δ из $[a]$ имеем $\Delta = \Delta^g$ и g переставляет вершины $x_1, x_2 \in \Delta$.

Далее, $\chi_1(g) - 63 = (7st - 2\alpha_3(g) + \alpha_1(g))/12 - 7/3 - 63$ делится на 2. Если $s = 4$, то число $(28(t-1) + \alpha_1(g))/12$ нечетно. Если $s = 2$, то число $(14(t-2) - 2\alpha_3(g) + \alpha_1(g))/12$ нечетно.

Лемма, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

3. **Характеризация реберно симметричных дистанционно регулярных графов с массивом пересечений** $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве дуг графа Γ и K — ядро действия, индуцируемого G на множестве антиподальных классов графа Γ. Пусть $\{a, b\}$ — ребро графа Γ. Тогда $|G : G_a| = 112$, $|G_a : G_{a,b}| = 27$. Так как $[a]$ — объединение изолированных треугольников, то по лемме 3 $G_a \simeq G_a^{[a]}$ и $G_a^{[a]}$ является подгруппой подстановочного сплетения диэдральной группы порядка 6 с помощью симметрической группы степени 9. Из теоремы следует, что $G_{a,b}$ является $\{2, 3\}$-подгруппой в G. Пусть Σ — это множество антиподальных классов графа Γ, $F \in \Sigma, a \in F$. Через $G_F(G_{\{F\}})$ обозначим поточечный (глобальный) стабизатор класса F в G. Пусть K — ядро действия, индуцируемого группой G на множестве антиподальных классов графа Γ, и $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/K$.

Имеем $|G_{\{F\}} : G_a| = r$ и $|G_{\{F\}}/K : G_aK/K| = r/|K|$ и $|K|$ делит 4.

Легко видеть, что справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения.*

(1) *Если* $|K| = 4$, *то* $G_F = G_a \cap C_G(K)$ *и* $G_{\{F\}} = KG_a$. *В частности, если* $G_a \leq C_G(K)$, *то* $G_F = G_a$ *и* $G_{\{F\}} = K \times G_a$.

(2) *Если* $|K| = 2$, *то* $G_F \leq G_a \cap C_G(K)$ *и каждый элемент из* $G_a \cap C_G(K)$ *фиксирует поточечно орбиту* $K(a)$ *или весь антиподальный класс* F.

Лемма 7. $\bar{T} \in \{U_3(3), L_2(8)\}$.

Доказательство. Заметим, что G действует дважды транзитивно на Σ. Так как 28 — не степень простого числа, то аффинный случай невозможен. В почти простом случае из [3, таблица 7.4] следует, что $\bar{T} \in \{A_{28}, L_2(27), U_3(3), Sp_6(2), L_2(8)\}$. Так как $\pi(G) = \{2, 3, 7\}$, то либо $\bar{T} = U_3(3)$, либо $\bar{T} = L_2(8)$.

Лемма 8. *Если* G *содержит нормальную подгруппу* T, *изоморфную* $L_2(8)$, *то* $K \simeq Z_2 \times Z_2$, *каждая* T*-орбита на* Γ *содержит ровно по одной вершине из каждого антиподального класса и состоит из вершин, находящихся попарно на расстоянии 2 в* Γ.

Доказательство.

Пусть G содержит нормальную подгруппу T и пусть $T \simeq L_2(8)$. Тогда $|\bar{G}| = 2^3 3^3 7$, $\bar{G} \simeq \mathrm{Aut}(L_2(8))$ и 2 делит $|K|$.

Порядок T-орбиты на Γ делится на 28 и не превосходит 56. Если $|T(a)| = 56$, то на множестве вершин графа Γ имеется точно две орбиты O_1 и O_2 группы T, причем каждая из них содержит по две точки из каждого антиподального класса. Через Γ_i, где $i \in \{1, 2\}$, обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве вершин из орбиты O_i. Ввиду действия группы K на Γ получим, что $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$. Если Γ_1 является кокликой, то $|T(a)| \leq r(k+1)/(n+1) = 28$, противоречие. Поэтому Γ_1 содержит ребро из Γ. Так как G_a фиксирует орбиту $T(a)$, то Γ_1 является реберно симметричным графом. Значит, для любой вершины $a' \in T(a)$ имеем $a' \cup [a'] \subset T(a)$, противоречие с тем, что граф Γ связен.

Если $|T(a)| = 28$, то $|T_a| = 2 \cdot 3^2$ и, как и выше, получим, что $T(a)$ является кокликой и, поэтому, состоит из вершин, находящихся попарно на расстоянии 2 в Γ. Так как каждая вершина $a_i \in F - \{a\}$ смежна не более, чем с 9 вершинами из $T(a) - \{a\}$, то G_a действует транзитивно на $\Gamma_3(a)$. Поэтому $K \simeq Z_2 \times Z_2$ и, ввиду леммы 6, $G_F = G_a \cap C_G(K) = T_a \simeq Z_9 : Z_2$.

Лемма 9. *Пусть* $U = U_3(3)$ *и* $S, Q \in Syl_3(U), S \neq Q$. *Пусть* $L = N_U(S) \cap N_U(Q)$ *и* g *— это элемент порядка 4 из* $N_U(L) - L$. *Положим* $H = S\langle g^2 \rangle$. *Через* $\Gamma(U, H, HgH)$ *обозначим граф на множестве вершин* $\{Hx|\ x \in U\}$, *в котором две вершины* Hx, Hy *смежны тогда и только тогда, когда* $xy^{-1} \in HgH$. *Тогда* $\Gamma(U, H, HgH)$ *— реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$.

Доказательство. Компьютерные вычисления в GAP.

Всюду далее в статье через X будем обозначать граф $\Gamma(U, H, HgH)$ из леммы 9.

Лемма 10. *Если G содержит нормальную подгруппу T, изоморфную группе $U_3(3)$, транзитивную на вершинах графа Γ, то $\Gamma \simeq X$, $T = G''$ и $C_G(T) = K \simeq Z_4$.*

Доказательство. Пусть G содержит нормальную подгруппу T, изоморфную группе $U_3(3)$, транзитивную на вершинах графа Γ. Тогда $|T : T_a| = 112, |T_a| = 2 \cdot 3^3$ и $|G| = 2^5 3^3 7 s|K|$, где $s = |\bar{G} : \bar{T}|$ делит 2. Поэтому T действует транзитивно на дугах графа Γ.

Пусть ψ — это действие группы $U = U_3(3)$ на множестве вершин графа Γ, такое, что $\psi(U) = T$ и $R_{U/H}$ — это действие группы U правым умножением на множестве U/H правых смежных классов группы U по подгруппе $H = \psi^{-1}(T_x)$, где $x \in V(\Gamma)$.

Зададим биекцию ϕ множества вершин графа Γ на множество U/H по правилу $\phi(y) = \{z \in U | \psi(z)(x) = y\}$ для $y \in V(\Gamma)$. Тогда для любого $z \in U$ выполнено равенство $\psi(z) = \phi^{-1} R_{U/H}(z) \phi$.

Пусть g — это элемент из U такой, что вершины $y = \psi(g)(x)$ и x смежны, а $\psi(g^2)(x) = x$. Тогда $\phi(y) = Hg$, $\phi(x) = H$, $Hg^2 = H$ и $\langle H, g \rangle = U$. Ввиду [9, лемма 2.7] граф $\Gamma(U, H, HgH)$ на множестве вершин $\{Hx | \ x \in U\}$, в котором две вершины Hx, Hy смежны тогда и только тогда, когда $xy^{-1} \in HgH$, связен и U действует (правым умножением) точно и транзитивно на вершинах и на дугах графа $\Gamma(U, H, HgH)$.

Пусть $S \in Syl_3(U)$ и $S \leq H$. Положим $L = N_U(S) \cap N_U(S^g)$. Имеем $g^2 \in L \cap H = \langle h \rangle$, где h — инволюция из L, и $g \in N_U(L) - L$.

Ясно, что отображение ϕ задает изоморфизм графов Γ и $\Gamma(U, H, HgH)$. Если g — это инволюция из $N_U(L) - L$, то, как показывают компьютерные вычисления в GAP, $\Gamma(U, H, HgH)$ не является дистанционно регулярным графом, противоречие. Следовательно, g — это элемент порядка 4 из $N_U(L) - L$. Так как в $N_U(L) - L$ содержится всего два элемента порядка 4, то $X \simeq \Gamma$.

Компьютерными вычислениями в GAP устанавливается, что $G = (Z_4 \times U_3(3)) : Z_2$, стабилизатор вершины в G — это $G_a = (((Z_3 \times Z_3) : Z_3) : Z_8) : Z_2$ и глобальный стабилизатор антиподального класса в G — это $G_{\{F\}} = (Z_2 \times ((((Z_3 \times Z_3) : Z_3) : Q_8) : Z_2)) : Z_2$. Кроме того, $G'' \simeq U_3(3)$ и $C_G(G'') = K$. Каждый элемент порядка 3 из G фиксирует поточечно ровно один антиподальный класс графа Γ, G_a имеет две орбиты на $\Gamma_3(a)$, ранг группы G равен 6 и $1 < Z(G) < K \simeq Z_4$.

Лемма 11. *Если z — это неединичный элемент порядка 2 из $K \cap Z(G)$, то частное $\tilde{\Gamma}$ графа Γ на множестве $\langle z \rangle$-орбит является дистанционно транзитивным графом с массивом пересечений $\{27, 16, 1; 1, 16, 27\}$ и группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\tilde{\Gamma}) \simeq Z_2 \times Sp_6(2)$.*

Доказательство. Если $K_0 \leq K \cap Z(G)$ и $|K_0| = 2$, то, ввиду [8], частное $\tilde{\Gamma}$ графа Γ на множестве K_0-орбит является дистанционно транзитивным графом с массивом пересечений $\{27, 16, 1; 1, 16, 27\}$. Как показано в [10], с точностью до изоморфизма существует единственная пара Φ и Φ' дистанционно-транзитивных дополнительных два-графов Тейлора с массивами пересечений

$\{27,16,1;1,16,27\}$ и $\{27,10,1;1,10,27\}$ соответственно. Кроме того, $\mathrm{Aut}(\Phi) = \mathrm{Aut}(\Phi') = Z_2 \times Sp_6(2)$. Лемма доказана.

Так как $K \neq 1$, то, очевидно, выполняется одна из следующих трех возможностей.

(A) Если $K \simeq Z_2$, то $K = Z(G)$ и $G_a \times K \trianglelefteq G_{\{F\}}$.

(B) Если $K \simeq Z_2 \times Z_2$, то $G/C_G(K) \simeq B \leq S_3$.

(C) Если $K \simeq Z_4$, то $G/C_G(K) \simeq B \leq Z_2$, откуда $|K \cap Z(G)| \geq 2$.

Лемма 12. $\Gamma \simeq X$.

Доказательство. Пусть N — это нормальная подгруппа в G, содержащая K такая, что $N/K = soc(G/K)$. Тогда $N/K \leq C_G(K)/K$ и $N \leq C_G(K)$.

В случае, если $N = N'$, то $K \leq Z(N) \cap N'$ и поэтому K содержится в мультипликаторе Шура $M(N/K)$ простой неабелевой группы N/K. Противоречие с тем, что $(N/K, M(N/K)) \in \{(U_3(3),1),(L_2(8),1)\}$ и $K \neq 1$.

Значит, коммутант N' группы N — собственная подгруппа в N. Так как N/K — это неабелева простая группа и N/N' — абелева группа, то $K \nleq N'$ и $N = KN'$. Если K — минимальная нормальная подгруппа в G (например, в случае $K \simeq Z_2$ или, быть может, в случае $K \simeq Z_2 \times Z_2$), то $K \cap N' = 1$, откуда $N = K \times N'$ и $N' \simeq N/K$.

Если $K \simeq Z_2$, то G содержит нормальную подгруппу N' изоморфную $L_2(8)$ или $U_3(3)$, противоречие с леммами 8,10.

Осталось рассмотреть следующие две возможности:

(1) $K \cap N' = 1$;

(2) $K \cap N' \neq 1$ и либо $K = \langle j \rangle \simeq Z_4$, $j \in N - N'$ и $K \cap N' = \langle j^2 \rangle$, либо $K = \langle t \rangle \langle j \rangle \simeq Z_2 \times Z_2$, $j \in N - N'$ и $K \cap N' = \langle t \rangle$.

Рассмотрим сначала случай (2). Предположим, что $N' = N''$. Тогда $K \cap N' \leq Z(N')$ и $N/K = N'K/K \simeq N'/(K \cap N')$ — простая неабелева группа, поэтому $K \cap N'$ содержится в мультипликаторе Шура $M(N'/(K \cap N'))$ простой неабелевой группы $N'/(K \cap N')$. Противоречие с тем, что $(N'/(K \cap N'), M(N'/(K \cap N'))) \in \{(U_3(3),1),(L_2(8),1)\}$ и $K \cap N' \neq 1$.

Поэтому $N'' < N'$. Так как $N'/(K \cap N')$ — это неабелева простая группа и N'/N'' — абелева группа, то $K \cap N' \nleq N''$ и $N' = (K \cap N')N''$. Так как $K \cap N'$ — минимальная нормальная подгруппа в N', то $K \cap N'' = 1$, откуда $N' = (K \cap N') \times N''$ и $N'' \simeq N'/(K \cap N')$. Отсюда G содержит нормальную подгруппу N'' изоморфную $L_2(8)$ или $U_3(3)$. Предположим, что $N'' \simeq L_2(8)$. Тогда, ввиду леммы 8, N'-орбита на множестве вершин графа Γ состоит из объединения ровно двух N''-орбит. Поскольку порядок коклики в Γ не больше 28, то $N'(a)$ содержит ребро. Но тогда G_a фиксирует орбиту $N''(a)$ и $a' \cup [a'] \subset N'(a')$ для любой вершины $a' \in N'(a)$, противоречие со связностью графа Γ. Аналогичными рассуждениями получим, что в случае $N'' \simeq U_3(3)$ группа N'' транзитивна на вершинах графа Γ. Тогда $|N'' \cap G_a| = |N''|/112 = 2 \cdot 3^3$ и N'' действует транзитивно на дугах графа Γ. Тогда $\Gamma \simeq X$, $N \simeq Z_4 \times U_3(3)$ и $N' \simeq U_3(3)$, противоречие.

В случае (1) имеем $N = K \times N' \trianglelefteq G$. Если $N' \simeq U_3(3)$, то группа N' транзитивна на вершинах и на дугах графа Γ, и $\Gamma \simeq X$.

Пусть $N' \simeq L_2(8)$. Тогда, ввиду леммы 8, $|N'(a)| = 28$ и $K \simeq Z_2 \times Z_2$. Отсюда N транзитивна на вершинах графа Γ и $K \leq Z(N)$. Кроме того, группа $N'G_a$ действует 2-транзитивно на вершинах из орбиты $N'(a)$, поэтому $N'G_a \simeq$

$\mathrm{Aut}(L_2(8))$ и в G_a есть элемент h порядка 3 такой, что $G = (N' \times K) : \langle h \rangle$. Пусть $h \in N_G(K) - C_G(K)$. Тогда $hg_1h^{-1}(a) = hg_1(a) = g_2(a)$ для любых двух инволюций $g_1, g_2 \in K$, поэтому h индуцирует 3-цикл на $F - \{a\}$. Значит, группа $K\langle h \rangle$ действует 2-транзитивно на F. Но тогда $SL(2,2) \le (K\langle h \rangle)_a^F \simeq \langle h \rangle$, противоречие.

Отсюда $h \in C_G(K)$ и $G = (N' : \langle h \rangle) \times K$. Но тогда группа $N'G_a$ фиксирует каждую N'-орбиту на Γ и действует 2-транзитивно на $N'(a)$, противоречие с тем, что $\mu = 8$. Лемма и теорема 2 доказаны.

Список литературы

[1] Буриченко В.П., Махнев А.А., *О вполне регулярных локально циклических графах*, Современные проблемы математики. Тезисы 42 Всероссийской молодежной конференции. ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2011, 181–183.

[2] Махнев А.А., Падучих Д.В., *Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, Доклады академии наук, **435**:3 (2010), 1–4.

[3] Cameron P.J., *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts **45** (1999), Cambridge University Press, Cambridge. MR1721031

[4] Cameron P.J., van Lint J.H., *Designs, graphs, codes and their links*, London Math. Soc. Student Texts **22** (1991), Cambridge University Press, Cambridge. MR1148891

[5] Cameron P.J., *Covers of graphs and EGQs*, Discrete Math., **97**: 1–3 (1991), 83–92. MR1140790

[6] Гаврилюк А.Л., Махнев А.А., *Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Доклады академии наук, **432**:5 (2010), 583–587. MR2766516

[7] Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю., *Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик: аффинный случай* , Доклады академии наук, **449**:6 (2013), 639–643.

[8] Godsil C.D., Hensel A.D., *Distance regular covers of the complete graphs* J. Comb. Theory Ser. B., **56** (1992), 205–238. MR1186756

[9] Godsil C.D., Liebler R.A., Praeger C.E., *Antipodal distance transitive covers of complete graphs*, Europ. J. Comb., **19**:4 (1998), 455-478. MR1630564

[10] Taylor D.E., *Two-graphs and doubly transitive groups*, J. Comb. Theory Ser. A., **61** (1992), 113–122. MR1178388

[11] The GAP Group, GAP Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.6.4; 2013; http://www.gap-system.org.

Людмила Юрьевна Циовкина
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16,
620990, Екатеринбург, Россия
E-mail address: l.tsiovkina@gmail.com