S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 705–718 (2013) УДК 517.9

MSC 35R30

ФОРМУЛЫ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ КОШИ

Н.Б. АЮПОВА

Abstract. In the paper we study some questions of connection of formulas for solutions to inverse problems for evolution equations and classical formulas for Cauchy problems.

Keywords: inverse problems, evolution equations, Cauchy problem.

В данной работе изучаются вопросы связи формул для решения линейных некорректных обратных задач для эволюционных уравнений [1, 2, 3] с классическими формулами для решения задач Коши в случае, когда данные обратных задач порождены начальными условиями.

Показано, что в случае специальных данных обратных задач для общих эволюционных уравнений из результатов [1, 2] следуют классические формулы Пуассона — решения задачи Коши для параболического уравнения.

Пусть D — область вещественного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, K — компакт в $\mathbb{R}^n$ — замкнутое ограниченное множество. Будем рассматривать целые комплекснозначные функции $w(x)$ такие, что имеет место представление

$$w(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $\widehat{w}(\xi)$ — комплекснозначная непрерывная функция с компактным носителем K. Множество таких функций обозначим $\{W\}$. Заметим, что если $w(x)$ — аналитическое продолжение целой функции $w(x)$, $x \in D$, $w(x) \in \{W\}$ на все

Ayupova, N.B., Formulas in inverse problems for evolution equations and representations of solutions to Cauchy problems.

© 2013 Аюпова Н.Б.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00074).

Поступила 6 июня 2013 г., опубликована 19 декабря 2013 г.

пространство $\mathbb{R}^n$ (мы сохраняем обозначение для аналитического продолжения целой функции $w(x)$, $x \in D$), то имеет место формула обращения преобразования Фурье (1), а именно

$$\widehat{w}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy. \tag{2}$$

Пусть $A(t)$, $t \geq 0$ — линейный оператор, действующий по переменной x на целые функции $w(x) \in \{W\}$, имеющий бесконечно дифференцируемый символ $\widetilde{A}(\xi, t)$: $A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} = \widetilde{A}(\xi, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}$. Пусть $B(\xi, t) = \int\limits_0^t \widetilde{A}(\xi, p) dp$, в частности, если $\widetilde{A}(\xi)$ не зависит от t, то $B(\xi, t) = \widetilde{A}(\xi)t$. Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A(t)w, \text{ с данными } w|_{t=0} = w_0 \in \{W\}. \tag{3}$$

Имеют место с учетом (2) соотношения

$$w(x, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{B(\xi,t)} \widehat{w}_0(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{B(\xi,t)} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_0(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{B(\xi,t)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-y)} d\xi \right] w_0(y) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) w_0(y) dy.$$

Функцию

$$\Phi(x - y, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{B(\xi,t)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-y)} d\xi, \tag{4}$$

если интеграл существует, называют фундаментальным решением. Например, если A — оператор Лапласа, то

$$\Phi(x - y, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\xi^2 t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-y)} d\xi = \frac{1}{2(\sqrt{\pi t})^n} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}.$$

Заметим, что решение задачи (3) в форме

$$w(x, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{B(\xi,t)} \widehat{w}_0(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi \tag{5}$$

в силу финитности и непрерывности $\widehat{w}_0(\xi)$, всегда существует независимо от того, существует ли фундаментальное решение в виде (4) или нет. И для каждого фиксированного t, $t \geq 0$, решение (5) является целой функцией по x, так как $\mathrm{e}^{B(\xi,t)} \widehat{w}_0(\xi)$ — непрерывная финитная функция.

Задача: найти $w(x, t)$, $\lambda(x)$, такие, что

$$\begin{gathered} \frac{\partial w}{\partial t} = A(t)w + \lambda(x) f(t), \\ w|_{t=a} = w_a(x) \in \{W\}, \quad w|_{t=b} = w_b(x) \in \{W\}, \end{gathered} \tag{6}$$

$f(t)$ — непрерывная функция, такая что $\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp \neq 0$, это неравенство всегда выполнено для $\xi \in K_b \cup K_a$, где K_b — носитель $\widehat{w}_b(\xi)$, K_a — носитель $\widehat{w}_a(\xi)$.

Некорректность задачи связана с тем, что данные задаются лишь для $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D — произвольная область. Похожие задачи рассмотрены в [4], [5], [6]. В статье [7] рассмотрена подобная задача для системы эволюционных уравнений в случае, когда второе слагаемое правой части имеет вид $\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(y,t)\lambda(x-y)dy$. Д. Г. Орловский [8] рассмотрел задачу нахождения решения и параметра из более широкого класса, но с более строгими ограничениями на оператор.

Существование и единственность решений для подобных задач были рассмотрены в работах [4], [7], [9] и др.

Применительно к задаче (6) в работе [1] получены формулы для решения этой задачи

$$
\begin{aligned}
w(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{w}_a(\xi)\mathrm{e}^{B(\xi,t)-B(\xi,a)} \int\limits_t^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp} \\
+ \frac{\widehat{w}_b(\xi)\mathrm{e}^{B(\xi,t)-B(\xi,b)} \int\limits_a^t \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi, \\
\lambda(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{-B(\xi,b)}\widehat{w}_b(\xi) - \mathrm{e}^{-B(\xi,a)}\widehat{w}_a(\xi)}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

При этом оказывается, что найденные по формулам (7) функции $w(x,t)$, $\lambda(x)$ — целые по переменной x, [10].

Подставляя в формулы (7)

$$
\widehat{w}_a(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy, \quad \widehat{w}_b(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_b(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy,
$$

где $w_a(y)$, $w_b(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ — аналитические продолжения целых функций $w_a(y)$, $w_b(y)$, $y \in D$ в соответствии с равенством (2) получим следующие соотношения для $w(x,t)$, $\lambda(x)$, определенные только $w_a(y)$, $w_b(y)$, $y \in D$ и их аналитическим продолжением $w_a(y)$, $w_b(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$.

$$(8)\quad w(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left\{\frac{\mathrm{e}^{B(\xi,t)-B(\xi,a)}\int\limits_t^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)}f(p)dp\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}dy}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)}f(p)dp} + \frac{\mathrm{e}^{B(\xi,t)-B(\xi,b)}\int\limits_a^t \mathrm{e}^{-B(\xi,p)}f(p)dp\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_b(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}dy}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)}f(p)dp}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi,$$

$$(9)\quad \lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathrm{e}^{-B(\xi,b)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_b(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}dy - \mathrm{e}^{-B(\xi,a)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}dy}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)}f(p)dp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi.$$

Имеет место

Теорема 1. *Если*

$$(10)\qquad w_a(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{B(\xi,a)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi, \quad w_b(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{B(\xi,b)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi,$$

где $\widehat{w}_0(\xi)$ непрерывная функция с носителем K, то

$$w(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{B(\xi,t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi, \quad \lambda(x) = 0,$$

то есть

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = A(t)w, \quad w|_{t=0} = w_0, \quad x \in D, \quad w_0(x) \in \{W\}.$$

Доказательство. Пусть данные $w_a(x)$, $w_b(x)$ определены формулами (10), тогда в силу (7) $\lambda(x) = 0$

$$\lambda(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{B(\xi,b)-B(\xi,b)} - \widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{B(\xi,a)-B(\xi,a)}}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)}f(p)dp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi = 0.$$

При этом решение имеет вид

$$w(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{B(\xi,a)+B(\xi,t)-B(\xi,a)} \int\limits_t^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp} + \frac{\widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{B(\xi,b)+B(\xi,t)-B(\xi,b)} \int\limits_a^t \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{B(\xi,t)} \left[\int\limits_t^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp + \int\limits_a^t \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp\right]}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p)dp} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{B(\xi,t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi.$$

□

Следствие. Если $A(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ и

$$w_a(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|}{4a}} dy,$$

$$w_b(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi b})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|}{4ba}} dy,$$

то $\lambda = 0$, и решение дается формулой Пуассона

$$w(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|}{4t}} dy.$$

Теорема 2. *Если $B(\xi,t) = \tilde{A}(\xi)t$ и*

$$\begin{aligned} w_a(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\lambda}_0(\xi) \int\limits_0^a \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)(a-\tau)} f(\tau)d\tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi, \\ w_b(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\lambda}_0(\xi) \int\limits_0^b \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)(b-\tau)} f(\tau)d\tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\widehat{w}_0(\xi)$ — непрерывная функция с компактным носителем, то

$$\lambda(x) = \lambda_0(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\lambda}_0(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi,$$

$$w(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}_0(\xi) \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\lambda}_0(\xi) \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)(t-\tau)} f(\tau) d\tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi.$$

Доказательство. Подставляя выражения (11) для $w_a(x)$, $w_b(x)$ в формулу (9), получаем для $\lambda(x)$

$$\lambda(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)b} \left(\widehat{w}_0(\xi) \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)b} + \widehat{\lambda}_0(\xi) \int\limits_0^b \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)(b-\tau)} f(\tau) d\tau \right)}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p) dp} \right.$$
$$\left. - \frac{\mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)a} \left(\widehat{w}_0(\xi) \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)a} + \widehat{\lambda}_0(\xi) \int\limits_0^a \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)(a-\tau)} f(\tau) d\tau \right)}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-B(\xi,p)} f(p) dp} \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\lambda}_0(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi = \lambda_0(x).$$

Для решения $w(x,t)$ из формул (11) и (8) следует

$$w(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\widehat{w}_0(\xi) \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)(a+t-a)} \int\limits_t^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p) dp}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p) dp} \right.$$
$$\left. + \frac{\widehat{w}_0(\xi) \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)(b+t-b)} \int\limits_a^t \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p) dp}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p) dp} \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\widehat{\lambda}_0(\xi) \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)(a+t-a)} \int\limits_0^a \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)\tau} f(\tau) d\tau \int\limits_t^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p) dp}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p) dp} \right.$$
$$\left. + \frac{\widehat{\lambda}_0(\xi) \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)(b+t-b)} \int\limits_0^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)\tau} f(\tau) d\tau \int\limits_a^t \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p) dp}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p) dp} \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi.$$

Первый интеграл равен

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)t}\left[\int\limits_t^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p)dp + \int\limits_a^t \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p)dp\right]}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p)dp} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)t}\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p)dp}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p)dp} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi.$$

Для второго интеграла получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{\lambda}_0(\xi)\mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)t}}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p)dp} \Big(\int\limits_0^a \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi),p} f(p)dp\big(\int\limits_t^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)\tau} f(\tau)d\tau + \int\limits_a^t \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)\tau} f(\tau)d\tau\big)$$

$$+ \int\limits_a^t \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)\tau} f(\tau)d\tau \int\limits_a^b \mathrm{e}^{-\tilde{A}(\xi)p} f(p)dp\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\lambda}_0(\xi)\mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)(t-\tau)} f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi d\tau.$$

Объединяя получившиеся выражения, получаем

$$w(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\lambda}_0(\xi)\mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)(t-\tau)} f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi d\tau.$$

Теорема доказана. □

Следствие. Если

$$w_a(x) = \int\limits_0^a \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda(y)f(\tau)}{2(\sqrt{\pi(a-\tau)})^n}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4(a-\tau)}}dyd\tau + \frac{1}{2(\sqrt{\pi a})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_0(y)\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4a}}dy,$$

$$w_b(x) = \int\limits_0^b \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda(y)f(\tau)}{2(\sqrt{\pi(b-\tau)})^n}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4(b-\tau)}}dyd\tau + \frac{1}{2(\sqrt{\pi b})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_0(y)\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4b}}dy,$$

$w_0(x) \in \{W\}$, то представление

$$w(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda(y)f(\tau)}{2(\sqrt{\pi(t-\tau)})^n}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}}dyd\tau + \frac{1}{2(\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_0(y)\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy$$

является классической формулой Пуассона.

Замечание. Если A — дифференциальный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами, то решение $w(x,t)$ можно представить в виде

$$w(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) w_0(y) dy + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-\tau, x-y) \lambda_0(y) f(\tau) dy d\tau,$$

где $\Phi(t,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\tilde{A}(\xi)t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\xi} d\xi$.

В самом деле, по теореме Мальгранжа–Эренпрайса [11] в этом случае уравнение (6) имеет фундаментальное решение.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Aw = \lambda(x) f(t) + \mu(x)\varphi(t), \tag{12}$$

с данными

$$w|_{t=a} = w_a(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=a} = w'_a(x), \quad w|_{t=b} = w_b(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=b} = w'_b(x), \tag{13}$$

$x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Как и выше, линейный оператор A действует по переменной $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и имеет символ $\tilde{A}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{A}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad A\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\tilde{A}(\xi).$$

Задача заключается в следующем: по информации (13) найти функции $w(x,t)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$. Далее предполагаем, что функции принадлежат классу $\{W\}$. Предполагается, что дифференцируемые функции $f(t)$, $\varphi(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$ и константы a, b известны. Обратная задача (12), (13) может интерпретироваться как задача перевода состояния $(w_a(x), w'_a(x))$ в состояние $(w_b(x), w'_b(x))$; здесь функции $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ — элементы управления. Введем следующие обозначения

$$\Delta(\xi) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(p-\tau)}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}} \varphi(\tau) f(p) dp d\tau, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} P_r^\alpha(\xi) \quad &= \quad \hat{w}_r(\xi) \int\limits_a^b \cos(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(r-p))\alpha(p)dp \\ &\quad -\hat{w}'_r(\xi) \int\limits_a^b \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(r-p))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}} \alpha(p)dp. \end{aligned} \tag{15}$$

Число r принимает только два значения, либо a, либо b; функция $\alpha(p)$ может быть равна либо $f(p)$ либо $\varphi(p)$, $a \le p \le b$; как и выше функции $\hat{w}_r(\xi)$, $\hat{w}'_r(\xi)$ — Фурье образы функций $w_a(x)$, $w'_a(x)$, $w_b(x)$, $w'_b(x)$ при $r = a$ и $r = b$ соответственно:

$$w_r(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{w}_r(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi, \quad w'_r(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{w}'_r(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi.$$

Мы предполагаем, что (14), (15) такие, что $\Delta(\xi)$ и $P_r^\alpha(\xi)$ определены корректно.

Далее приведем теорему из книги [2]

Теорема 3. [2] *Пусть* $w_a(x)$, $w'_a(x)$, $w_b(x)$, $w'_b(x)$ *в* (13) *принадлежат классу* $\{W\}$ *и пусть выполнены*

$$\Delta(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n; \quad |\xi| \leq N.$$

Тогда существует целое по x *решение обратной задачи* (12), (13) $w(x,t)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$ *, определенное формулами*

$$w(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\Delta(\xi)} \left\{ \begin{vmatrix} \int\limits_t^b \frac{\sin\sqrt{A}(t-p)}{\sqrt{A}} f(p)dp & \int\limits_t^b \frac{\sin\sqrt{A}(t-p)}{\sqrt{A}} \varphi(p)dp \\ \int\limits_a^b \cos\sqrt{A}(t-p)\, f(p)dp & \int\limits_a^b \cos\sqrt{A}(t-p)\, \varphi(p)dp \end{vmatrix} \widehat{w}_a \right.$$
$$+ \begin{vmatrix} \int\limits_t^b \frac{\sin\sqrt{A}(t-p)}{\sqrt{A}} f(p)dp & \int\limits_t^b \frac{\sin\sqrt{A}(t-p)}{\sqrt{A}} \varphi(p)dp \\ \int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{A}(t-p)}{\sqrt{A}} f(p)dp & \int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{A}(t-p)}{\sqrt{A}} \varphi(p)dp \end{vmatrix} \widehat{w}'_a \tag{16}$$
$$+ \begin{vmatrix} \int\limits_a^t \frac{\sin\sqrt{A}(t-p)}{\sqrt{A}} f(p)dp & \int\limits_a^t \frac{\sin\sqrt{A}(t-p)}{\sqrt{A}} \varphi(p)dp \\ \int\limits_a^b \cos\sqrt{A}(t-p)\, f(p)dp & \int\limits_a^b \cos\sqrt{A}(t-p)\, \varphi(p)dp \end{vmatrix} \widehat{w}_b$$
$$\left. + \begin{vmatrix} \int\limits_a^t \frac{\sin\sqrt{A}(t-p)}{\sqrt{A}} f(p)dp & \int\limits_a^t \frac{\sin\sqrt{A}(t-p)}{\sqrt{A}} \varphi(p)dp \\ \int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{A}(t-p)}{\sqrt{A}} f(p)dp & \int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{A}(t-p)}{\sqrt{A}} \varphi(p)dp \end{vmatrix} \widehat{w}'_b \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi,$$

$$\lambda(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{P_b^{\varphi}(\xi) - P_a^{\varphi}(\xi)}{\Delta(\xi)} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi, \tag{17}$$

$$\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{P_a^{f}(\xi) - P_b^{f}(\xi)}{\Delta(\xi)} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi. \tag{18}$$

Если данные $w_a(x)$, $w'_a(x)$, $w_b(x)$, $w'_b(x)$ порождены начальным состоянием, а именно

$$w_a(x) = \int_0^a \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(a-\tau)}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}} \left[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau) + \widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi d\tau$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\widehat{w}_0(\xi)\cos\sqrt{\tilde{A}(\xi)}a + \widehat{w}_1(\xi)\frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}a}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi, \tag{19}$$

$$w'_a(x) = \int_0^a \int_{\mathbb{R}^n} \cos\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(a-\tau) \left[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau) + \widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi d\tau$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \left[-\widehat{w}_0(\xi)\sqrt{\tilde{A}(\xi)}\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}a + \widehat{w}_1(\xi)\cos\sqrt{\tilde{A}(\xi)}a\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi, \tag{20}$$

$$w_b(x) = \int_0^b \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(b-\tau)}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}} \left[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau) + \widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi d\tau$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\widehat{w}_0(\xi)\cos\sqrt{\tilde{A}(\xi)}b + \widehat{w}_1(\xi)\frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}b}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi, \tag{21}$$

$$w'_b(x) = \int_0^b \int_{\mathbb{R}^n} \cos\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(b-\tau) \left[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau) + \widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi d\tau$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \left[-\widehat{w}_0(\xi)\sqrt{\tilde{A}(\xi)}\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}b + \widehat{w}_1(\xi)\cos\sqrt{\tilde{A}(\xi)}b\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi, \tag{22}$$

то справедлива следующая теорема 4

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и данные* $w_a(x)$, $w'_a(x)$, $w_b(x)$, $w'_b(x)$ *обратной задачи* (12) – (13) *представимы в виде* (19) – (22), *тогда формулы* (16)–(18) *корректно определены и имеет место равенство*

$$w(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(t-\tau)}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}} \left[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau) + \widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi d\tau$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\widehat{w}_0(\xi)\cos\sqrt{\tilde{A}(\xi)}t + \widehat{w}_1(\xi)\frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}t}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi.$$

Доказательство. Вычислим $P_r^\alpha(\xi)$ и докажем, что $\lambda=\lambda_0$, $\mu=\mu_0$. Имеем

$$P_r^\alpha(\xi)=\widehat{w}_0(\xi)\int\limits_a^b \cos\sqrt{\tilde{A}(\xi)}p\,\alpha(p)dp+\widehat{w}_1(\xi)\int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}p}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}\alpha(p)dp$$
$$+\int\limits_0^r\int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(\tau-p)}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}(\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau)+\widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau))\alpha(p)dpd\tau.$$

Тогда

$$P_b^\varphi(\xi)-P_a^\varphi(\xi)=\int\limits_0^b\int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(p-\tau)}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau)+\widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)]\varphi(p)dpd\tau$$
$$-\int\limits_0^a\int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(p-\tau)}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau)+\widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)]\varphi(p)dpd\tau$$
$$=\int\limits_a^b\int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(p-\tau)}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau)+\widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)]\varphi(p)dp.d\tau.$$

Принимая во внимание, что

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b \frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(p-\tau)}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}\varphi(\tau)\varphi(p)dp\,d\tau=0,$$

и подставляя выражения для $P_b^\varphi(\xi)-P_a^\varphi(\xi)$, $\Delta(\xi)$ в формулу для $\lambda(x)$, получаем

$$\lambda(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{\lambda}_0(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi.$$

Аналогично

$$\mu(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{\mu}_0(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi.$$

Подставляя $P_r^\alpha(\xi)$ и $\Delta(\xi)$ в формулу для решения (16) и собирая коэффициенты при $\widehat{w}_0(\xi)$, $\widehat{w}_1(\xi)$ и $\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau)+\widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)$, получаем

$$w(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\Delta(\xi)}\Bigg\{\Bigg[\widehat{w}_0(\xi)\Bigg(\int\limits_a^b\cos(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}p)\varphi(p)dp\int\limits_a^b\frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(t-\tau))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}f(\tau)d\tau$$
$$-\int\limits_a^b\cos(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}\tau)f(\tau)d\tau\int\limits_a^b\frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(t-p))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}\varphi(p)dp\Bigg)$$

$$
\begin{aligned}
&+\widehat{w}_1(\xi)\left(\int\limits_a^b \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}p)}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}\varphi(p)dp\int\limits_a^b \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(t-\tau))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}f(\tau)d\tau\right.\\
&\qquad\left.-\int\limits_a^b \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}\tau)}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}f(\tau)d\tau\int\limits_a^b \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(t-p))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}\varphi(p)dp\right)\\
&+\int\limits_a^b \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(t-s))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}f(s)ds\\
&\quad\times\int\limits_0^a\int\limits_a^b \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(p-\tau))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau)+\widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)]\varphi(p)dp\,d\tau\\
&+\int\limits_a^t \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(t-s))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}f(s)ds\\
&\quad\times\int\limits_a^b\int\limits_a^b \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(p-\tau))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau)+\widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)]\varphi(p)dp\,d\tau\\
&-\int\limits_a^b \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(t-p))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}\varphi(p)dp\\
&\quad\times\int\limits_0^a\int\limits_a^b \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(s-\tau))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau)+\widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)]f(s)dsd\tau\\
&-\int\limits_a^b \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(t-p))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}f(s)ds\\
&\quad\left.\times\int\limits_a^t\int\limits_a^b \frac{\sin(\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(s-\tau))}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau)+\widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)]f(s)dsd\tau\right\}\\
=&\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}(t-\tau)}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}\left[\widehat{\lambda}_0(\xi)f(\tau)+\widehat{\mu}_0(\xi)\varphi(\tau)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi d\tau\\
&\qquad+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\widehat{w}_0(\xi)\cos\sqrt{\tilde{A}(\xi)}t+\widehat{w}_1(\xi)\frac{\sin\sqrt{\tilde{A}(\xi)}t}{\sqrt{\tilde{A}(\xi)}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi.
\end{aligned}
$$

Теорема доказана. □

Следствие. Пусть

$$w_a(x) = \frac{w_0(x+a) + w_0(x-a)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-a}^{x+a} w_1(s)ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^a f(\tau)\int\limits_{x-(a-\tau)}^{x+(a-\tau)} \lambda(\xi)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^a \varphi(\tau)\int\limits_{x-(a-\tau)}^{x+(a-\tau)} \mu(\xi)d\xi d\tau,$$

$$w_b(x) = \frac{w_0(x+b) + w_0(x-b)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-b}^{x+b} w_1(s)ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^b f(\tau)\int\limits_{x-(b-\tau)}^{x+(b-\tau)} \lambda(\xi)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^b \varphi(\tau)\int\limits_{x-(b-\tau)}^{x+(b-\tau)} \mu(\xi)d\xi d\tau,$$

$$w_a'(x) = \frac{w_0'(x+a) + w_0'(x-a)}{2} + \frac{w_1(x+a) + w_1(x-a)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^a f(\tau)(\lambda(x+(a-\tau)) + \lambda(x-(a-\tau)))d\tau + + \frac{1}{2}\int\limits_0^a \varphi(\tau)(\mu(x+(a-\tau)) + \mu(x-(a-\tau)))d\tau$$

$$w_b'(x) = \frac{w_0'(x+b) + w_0'(x-ba)}{2} + \frac{w_1(x+b) + w_1(x-b)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^b f(\tau)(\lambda(x+(b-\tau)) + \lambda(x-(b-\tau)))d\tau + + \frac{1}{2}\int\limits_0^b \varphi(\tau)(\mu(x+(b-\tau)) + \mu(x-(b-\tau)))d\tau,$$

тогда решение имеет вид

$$w(x,t) = \frac{w_0(x+t) + w_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} w_1(s)ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f(\tau)\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \lambda(\xi)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \mu(\xi)d\xi d\tau.$$

Список литературы

[1] Ю.Е. Аниконов, *Формулы в многомерной обратной задаче для эволюционного уравнения*, ДАН РАН, **334** (1994), 263–265. MR1275436

[2] Yu.E. Anikonov, *Formulas in Inverse and Ill–Posed Problems*, VSP, Utrecht, 1997. MR1451620

[3] Ю.Е. Аниконов, М.П. Вишневский, *Формулы в обратных задачах для эволюционного уравнения*, Сибирский математический журнал, **37** (1996), 963–976. MR1643238

[4] Н.Б. Аюпова, В.П. Голубятников, *О формальных решениях многомерных эволюционных уравнений*, Математические труды, **1** (1998), 3–23. MR1761402

[5] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, and I.A. Vasin. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics* , Marcel Dekker, Inc., New York, 2000. MR1748236

[6] A. Prilepko, S. Piskarev, and S.-Y. Shaw, *On approximation of inverse problem for abstract parabolic differential equations in banach spaces*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **15** (2007), 831–851. MR2375905

[7] Yu.E. Anikonov and Li Shumin, *An inverse problem for a system of evolution equations*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **19** (2011), 1–12. MR2794393

[8] Д.Г. Орловский, *К задаче определения параметра эволюционного уравнения*, Дифференциальные уравнения, **26** (1990), 1614–1621. MR1080438

[9] Н.Б. Аюпова, *О корректности решения задачи управления функцией источника*, Сибирский журнал индустриальной математики, **9** (2006), 3–11. MR2310155

[10] Л.И. Ронкин, *Введение в теорию целых функций многих переменных*, Наука, Москва, 1971. MR0588524

[11] В.С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, Москва, 1976. MR0450966

Наталья Борисовна Аюпова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ayupova@math.nsc.ru