S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 719–726 (2013)

УДК 519.23
MSC 62F12

ЯВНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ НОРМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА ЧАСТИЧНО-ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

К.В. ЕРМОЛЕНКО, А.И. САХАНЕНКО

Abstract. The problem of estimation of an unknown parameter in a special nonlinear regression problem is considered. The problem is given in the E.Z. Demidenko's monograph as a standard example of a nonlinear regression where finding of the classical least squares estimator containes considerable computing difficulties. In the paper explicit estimators of the unknown parameter are constructed which may be represented as a ratio of two linear statistics depending on specially picked up constants. The asymptotic normality of these estimators is proved and the assessment with the minimum asymptotic variance is found. Earlier only one example of nonlinear regression problem, belonging to A.I Sakhanenko. and Yu.Yu. Linke, was known for which it was succeeded to find explicit estimators with similar properties.

Keywords: partially linear regression, difficulties in the method of the least squares, explicit estimators of parameters, asymptotically normal estimators.

1. Введение

Пусть в результате некоторого эксперимента мы наблюдаем последовательность независимых случайных величин $\{Y_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, для которых справедливо представление

$$Y_i = x_i\theta + z_i g(\theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

Yermolenko X.V. and Sakhanenko A.I., Explicit asymptotically normal estimators of an unknown parameter in a partially linear regression problem.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-12415 офи-м).

Поступила 9 ноября 2013 г., опубликована 19 декабря 2013 г.

где $\{\varepsilon_i\}$ — ненаблюдаемые независимые случайные ошибки с неизвестными распределениями, для которых выполнены условия

$$\mathbb{E}\varepsilon_i = 0 \quad \text{и} \quad 0 < \sigma_i^2 := \mathbb{D}\varepsilon_i < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

При этом считается, что коэффициенты $\{x_i\}$, $\{z_i\}$ — неслучайные и известные, а значения дисперсий σ_i^2 могут быть как известны, так и нет. Функция $g(\cdot)$ должна быть известна при традиционном подходе, но, как мы убедимся позже, при предлагаемом подходе это необязательно.

В работе исследуется задача оценивания неизвестного параметра θ по выборке объема n. В случае, когда не выполнено условие

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0, \tag{3}$$

эта задача является частным случаем задачи нелинейной регрессии. Традиционным методом получения оценки для неизвестного θ является *метод наименьших квадратов* (МНК). Оценка МНК выглядит следующим образом:

$$\widehat{\theta}_n = arg\min_{\theta} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - x_i\theta - z_i g(\theta))^2. \tag{4}$$

Однако, если, например, $g(\theta) = sin(\theta)$, то практическая реализация МНК связана с большими вычислительными трудностями, поскольку в этом случае в (4) будет бесконечное число локальных минимумов, а для того чтобы проверить, что минимум является глобальным необходимо преодолеть серьезные технические проблемы (см., например, [1]).

В данной работе нам удалось в задаче (1) избежать использования МНК и построить целый класс явных асимптотически нормальных оценок. Чтобы описать этот класс, для всех $n \geqslant 2$ выберем некоторые наборы чисел $c_{n\bullet} = \{c_{ni} : i = 1, \ldots, n\}$, которые должны удовлетворять следующим двум условиям:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ni} z_i = 0 \quad \text{и} \quad A_n(c_{n\bullet}) := \sum_{i=1}^{n} c_{ni} x_i \neq 0 \quad \forall\, n \geqslant 2. \tag{5}$$

Далее будем изучать поведение статистик вида:

$$\theta_n^*(c_{n\bullet}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} Y_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} c_{ni} x_i. \tag{6}$$

В §2 показано, что при достаточно широких предположениях о константах $\{c_{ni}\}$ приведенная оценка $\theta_n^*(c_{n\bullet})$ асимптотически нормальна и найдена в явном виде ее асимптотическая дисперсия $d_n^2(c_{n\bullet})$.

В §3 мы минимизируем эту дисперсию и, тем самым, оптимизируем оценку $\theta_n^*(c_{n\bullet})$. В частности, в классическом случае, когда величины $\{\varepsilon_i\}$ одинаково распределены, мы рекомендуем в первую очередь использовать оценку (6) при

$$c_{nj} = x_j - k_n^{(1)} z_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где $k_n^{(1)} = 0$ при выполнении условия (3) и $k_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} z_i x_i \big/ \sum_{i=1}^{n} z_i^2$ в противном случае.

В §4 мы рассмотрим вопрос о построении доверительных интервалов и проверке гипотез. Для этого мы получим оценку $d_n^*(c_{n\bullet})$ для коэффициента $d_n(c_{n\bullet})$.

Явные асимптотически нормальные оценки неизвестного параметра линейной регрессии известны более 200 лет, начиная с К.Гаусса (см., например, [2], [3]).

Для нелинейной регрессии ранее такие оценки были известны только для одного класса нелинейной регрессии (см.[4]). Таким образом, в данной работе найден второй класс задач нелинейной регрессии, для которых удается построить явные асимптотически нормальные оценки неизвестного параметра.

2. Асимптотическая нормальность $\theta_n^*(c_{n\bullet})$

Введем некоторые обозначения:

$$B_n^2(c_{n\bullet}) := \sum_{i=1}^n c_{ni}^2\sigma_i^2, \quad d_n(c_{n\bullet}) := B_n(c_{n\bullet})/A_n(c_{n\bullet}), \tag{8}$$

где величина $A_n(c_{n\bullet})$ уже определена в (5).

Теорема 1. *Пусть справедливы условия* (2) *и* (5), *а величины* $\{\varepsilon_i\}$ *имеют нормальные распределения. Тогда случайная величина* $(\theta_n^*(c_{n\bullet})-\theta)\big/d_n(c_{n\bullet})$ *имеет стандартное нормальное распределение.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (5), *а случайные величины* $\{c_{ni}\varepsilon_i\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга. Тогда оценка* $\theta_n^*(c_{n\bullet})$ *является асимптотически нормальной, то есть при* $n\to\infty$

$$(\theta_n^*(c_{n\bullet})-\theta)\big/d_n(c_{n\bullet}) \Rightarrow N(0,1). \tag{9}$$

Доказательства. Из определения (1) с учетом условий (5) нетрудно извлечь, что

$$\theta = \left(\sum_{i=1}^n c_{ni}Y_i - \sum_{i=1}^n c_{ni}\varepsilon_i\right)\Big/\sum_{i=1}^n c_{ni}x_i.$$

Это равенство и формула (6) дают следующее представление:

$$\theta_n^*(c_{n\bullet})-\theta = \left(\sum_{i=1}^n c_{ni}\varepsilon_i\right)\Big/\sum_{i=1}^n c_{ni}x_i. \tag{10}$$

Используя (2) нетрудно убедиться, что $\mathbb{E}[\theta_n^*(c_{n\bullet})-\theta]=0$ и

$$\mathbb{D}[\theta_n^*(c_{n\bullet})-\theta] = \left(\sum_{i=1}^n c_{ni}^2\sigma_i^2\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^n c_{ni}x_i\right)^2 = d_n^2(c_{n\bullet}). \tag{11}$$

Поскольку любая линейная комбинация независимых нормально распределенных случайных величин сама имеет нормальное распределние, то, тем самым, мы доказали теорему 1.

Далее, нетрудно заметить, что

$$\mathbb{E}[c_{ni}\varepsilon_i]=0 \quad \text{и} \quad \mathbb{D}[c_{ni}\varepsilon_i]=c_{ni}^2\sigma_i^2, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Следовательно, из представлений (10) и (11) с учетом ЦПТ Линдеберга вытекает требуемое утверждение (9) теоремы 2.

3. Оптимизация $\theta_n^*(c_{n\bullet})$

Ясно, что точность оценки $\theta_n^*(c_{n\bullet})$ зависит от коэффициента $d_n(c_{n\bullet})$. Поэтому необходимо минимизировать этот коэффициент, то есть при фиксированном n найти такие $\bar{c}_{n\bullet}=\{\bar{c}_{ni}: i=1\ldots n\}$, удовлетворяющие условию (5), что $d_n(\bar{c}_{n\bullet})=\inf\limits_{c_{n\bullet}} d_n(c_{n\bullet})$. Однако прежде надо выяснить вопрос об условиях существования чисел $c_{n\bullet}=\{c_{ni}: i=1\ldots n\}$, удовлетворяющих условию (5).

Свойство 1. *Пусть при некотором фиксированном* $n \geqslant 2$ *верно условие* (2) *и не выполнено условие* (3). *В этом случае для существования чисел* $\{c_{ni}\}$, *удовлетворяющих условию* (5), *необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее неравенство:*

$$a_n c_n > b_n^2, \quad \text{где} \quad a_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{\sigma_i^2}, \quad b_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i x_i}{\sigma_i^2}, \quad c_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}. \tag{12}$$

Кроме того, если справедливы предположения (2) *и* (12), *то* $a_n > 0$ *и условие* (3) *заведомо не выполнено.*

При $a_n > 0$ нам потребуются обозначения:

$$\overline{c}_{nj} := (x_j - k_n z_j)/\sigma_j^2 \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, n, \quad \text{где} \quad k_n := b_n/a_n. \tag{13}$$

Сформулируем теперь основное утверждение параграфа.

Теорема 3. *Пусть при некотором фиксированном* $n \geqslant 2$ *справедливы предположения* (2) *и* (12). *Тогда для любого набора чисел* $c_{n\bullet}$, *удовлетворяющего условиям из* (5), *имеют место следующие соотношения:*

$$d_n^2(c_{n\bullet}) \geqslant d_{n,opt}^2 := \frac{1}{c_n - k_n b_n} = \frac{1}{A_n(\overline{c}_{n\bullet})} = \frac{1}{B_n^2(\overline{c}_{n\bullet})} > 0. \tag{14}$$

При этом равенство в (14) *достигается тогда и только тогда, когда*

$$c_{nj} = K\overline{c}_{nj} \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{где} \quad K \neq 0. \tag{15}$$

К сожалению, числа $\{c_{ni}\}$ из (15) могут зависеть от неизвестных параметров. Однако в последнем параграфе работы будет приведен пример, показывающий, что в важном частном случае удается найти числовые величины $\{c_{ni}\}$, которые удовлетворяющие условиям (15) и могут использоваться в статистических процедурах, поскольку они не зависят от неизвестных параметров.

Замечание 1. Отметим, что если верно условие (3), то уравнение (1) превратится в хорошо изученное уравнение линейной регрессии (см. [2], [3]). В этом случае для существования чисел $\{c_{ni}\}$, удовлетворяющих условию (5), необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $c_n > 0$. А чтобы получить аналог теоремы 3, надо в формулах (13), (14) и (15) положить $k_n = 0$.

Остальная часть §3 будет посвящена доказательству свойства 1 и теоремы 3.

Пусть справедливы условия (2) и (12). Тогда $a_n > 0$, что влечет невыполнимость предположения (3). Значит, числа $\{c_{nj} = \overline{c}_{nj}\}$ из (13) очевидно удовлетворяют обоим условиям из (5). Кроме того, в этом случае, в силу определений (5), (8) и (13)

$$K(c_n - k_n b_n) = K \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_{ni} x_i = A_n(K\overline{c}_{n\bullet}) =$$

$$= K \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_{ni} x_i - K k_n \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_{ni} z_i = K \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \overline{c}_{ni}^2 = K B_n^2(\overline{c}_{n\bullet}). \tag{16}$$

В частности, из (16), (13) и (12) вытекает, что

$$B_n^2(\overline{c}_{n\bullet}) = c_n - k_n b_n = (a_n c_n - b_n^2) a_n > 0.$$

Кроме того, $B_n^2(K\bar{c}_{n\bullet}) = K^2B_n^2(\bar{c}_{n\bullet})$ ввиду (8), а потому

$$d_n^2(K\bar{c}_{n\bullet}) = \frac{B_n^2(K\bar{c}_{n\bullet})}{A_n^2(K\bar{c}_{n\bullet})} = \frac{K^2B_n^2(\bar{c}_{n\bullet})}{K^2B_n^4(\bar{c}_{n\bullet})} = \frac{1}{B_n^2(\bar{c}_{n\bullet})}. \qquad (17)$$

Этот факт и (16) показывают, что при c_{nj} из (15) справедлива вся цепочка соотношений из (14), причем неравенство в (14) превращается в равенство.

С учетом равенств из (14) и (16) распишем теперь подробнее следующую квадратичную форму:

$$B_n^2(c_{n\bullet} - K\bar{c}_{n\bullet}) = B_n^2(c_{n\bullet}) + K^2B_n^2(\bar{c}_{n\bullet}) - 2K\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2c_{ni}(x_i - k_nz_i)/\sigma_i^2 =$$

$$= B_n^2(c_{n\bullet}) + K^2/d_{n,opt}^2 - 2K\sum_{i=1}^{n}c_{ni}x_i + 2Kk_n\sum_{i=1}^{n}c_{ni}z_i.$$

В силу условий (5) последнее равенство можно записать следующим образом:

$$B_n^2(c_{n\bullet} - K\bar{c}_{n\bullet}) = B_n^2(c_{n\bullet}) + K^2/d_{n,opt}^2 - 2KA_n(c_{n\bullet}).$$

Отсюда легко видеть, что при $K = A_n(c_{n\bullet})d_{n,opt}^2$

$$0 \leqslant B_n^2(c_{n\bullet} - K\bar{c}_{n\bullet}) = B_n^2(c_{n\bullet}) - A_n^2(c_{n\bullet})d_{n,opt}^2 = A_n^2(c_{n\bullet})[d_n^2(c_{n\bullet}) - d_{n,opt}^2]. \quad (18)$$

В частности, из (18) вытекает справедливость требуемого неравенства (14). Кроме того, из (18) следует, что равенство в (14) возможно только когда

$$0 = B_n^2(c_{n\bullet} - K_0\bar{c}_{n\bullet}) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2(c_{ni} - K_0\bar{c}_{ni})^2.$$

Но, в силу (2), этот факт означает, что для равенства в (14) необходимо выполнения для всех j условий (15) при $K = K_0$, причем $K_0 \neq 0$.

Тем самым мы доказали все утверждения теоремы 3.

А чтобы закончить доказательство свойства 1 нам осталось лишь показать, что *если верно условие* (2)*, но не выполнены предположения* (3) *и* (12)*, то не существует чисел* $\{c_{ni}\}$*, удовлетворяющих* (5).

Действительно, в этом случае

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(a_nx_i - b_nz_i)^2/\sigma_i^2 = a_n^2c_n + b_n^2a_n - 2a_nb_nb_n = a_n(a_nc_n - b_n^2). \qquad (19)$$

Но $a_n > 0$ при невыполнении (3) и $b_n^2 \geqslant a_nc_n$ в силу (19). Значит $a_nc_n = b_n^2$ при невыполении (12) и из (19) вытекает, что в этом случае

$$x_i = z_ib_n/a_n = k_nz_i \quad \text{при всех} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, если некоторые числа $\{c_{ni}\}$ удовлетворяют первому условию в (5), то

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ni}x_i = k_n\sum_{i=1}^{n}c_{ni}z_i = 0.$$

То есть эти числа не удовлетворяют второму условию в (5).

Значит, для существования чисел, удовлетворяющих обоим условиям в (5), в рассматриваем случае необходимо выполнение условия (12).

4. О применении теорем 1 – 3

Если нам не известны дисперсии $\{\sigma_i^2\}$, то при построении доверительных интервалов и проверке гипотез нам было бы удобнее иметь аналог теоремы 2, в которой вместо асимптотической дисперсии $d_n^2(c_{n\bullet})$ участвует ее оценка $d_n^{*2}(c_{n\bullet})$. Положим

$$\varepsilon_i^* := Y_i - x_i\theta_n^* - z_i g(\theta_n^*),\ B_n^{*2}(c_{n\bullet}) := \sum_{i=1}^n c_{ni}^2(\varepsilon_i^*)^2,\ d_n^*(c_{n\bullet}) := \frac{B_n^*(c_{n\bullet})}{A_n(c_{n\bullet})}. \quad (20)$$

В отличии от теорем 1 – 3 в этом параграфе мы считаем, что функция $g(\cdot)$ нам известна, и что она удовлетворяет условию Липшица с постоянной M, то есть

$$M = \sup\left\{\frac{|g(t_1)-g(t_2)|}{|t_1-t_2|} : t_1 \neq t_2;\ t_1, t_2 \in R\right\} < \infty. \quad (21)$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, *а функция* $g(\cdot)$ *удовлетворяет условию Липшица* (21) *и*

$$\alpha_n := \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n c_{ni}^2 x_i^2} + M\sqrt{\sum_{i=1}^n c_{ni}^2 z_i^2}}{\sum_{i=1}^n c_{ni}x_i} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \quad (22)$$

Тогда при $n \to \infty$

$$(\theta_n^* - \theta)\big/ d_n^*(c_{n\bullet}) \Rightarrow N(0,1). \quad (23)$$

Остальная часть §4 посвящена доказательству теоремы 4. Нам понадобятся два свойства.

Свойство 2. *Если имеет место сходимость* (9) *и*

$$\beta_n := d_n^*(c_{n\bullet})/d_n(c_{n\bullet}) \xrightarrow{p} 1,$$

то имеет место также и сходимость (23).

Это утверждение очевидно. А доказательство следующего свойства можно найти, например, в [5].

Свойство 3. *Если случайные величины* $\{c_{ni}\varepsilon_i\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, то*

$$\gamma_n^2 := \sum_{i=1}^n c_{ni}^2\varepsilon_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^n c_{ni}^2\sigma_i^2 \xrightarrow{p} 1.$$

С целью сделать доказательство теоремы 4 более наглядным далее суммы вида $\sum_{i=1}^n c_{ni}^2 y_i^2$ будем понимать как квадраты норм $\|c_{n\bullet}y_\bullet\|^2$ векторов $c_{n\bullet}y_\bullet = (c_{n1}y_1, \ldots, c_{nn}y_n)$. В этом случае справедливы следующие представления:

$$d_{n\bullet} = \|c_{n\bullet}\sigma_\bullet\|/A_n(c_{n\bullet}), \quad d_{n\bullet}^* = \|c_{n\bullet}\varepsilon_\bullet^*\|/A_n(c_{n\bullet}),$$
$$\beta_n = \frac{d_{n\bullet}^*}{d_{n\bullet}} = \frac{\|c_{n\bullet}\varepsilon_\bullet^*\|}{\|c_{n\bullet}\sigma_\bullet\|}, \qquad \gamma_n = \frac{\|c_{n\bullet}\varepsilon_\bullet\|}{\|c_{n\bullet}\sigma_\bullet\|}.$$

В силу известного свойства разности норм, имеем:

$$|\beta_n - \gamma_n| = \frac{|\|c_{n\bullet}\varepsilon_\bullet^*\| - \|c_{n\bullet}\varepsilon_\bullet\||}{\|c_{n\bullet}\sigma_\bullet\|} \leqslant \frac{\|c_{n\bullet}(\varepsilon_\bullet^* - \varepsilon_\bullet)\|}{\|c_{n\bullet}\sigma_\bullet\|}. \quad (24)$$

Так как $\varepsilon_i^* - \varepsilon_i = x_i(\theta_n^* - \theta) + z_i(g(\theta) - g(\theta_n^*))$ в силу (1) и (20), то учитывая условие Липшица (21) находим, что при всех i

$$\|\varepsilon_i^* - \varepsilon_i\| \leqslant |\theta_n^* - \theta|(|x_i| + M|z_i|).$$

Но из этого соотношения немедленно получаем :

$$\|c_{n\bullet}(\varepsilon_i^* - \varepsilon_i)\| \leqslant |\theta_n^* - \theta|(\|c_{n\bullet}x_i\| + M\|c_{n\bullet}z_i\|). \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24) и учитывая обозначение α_n из (22), нетрудно заметить, что

$$|\beta_n - \gamma_n| \leqslant \frac{|\theta_n^* - \theta|}{\|c_{n\bullet}\sigma_\bullet\|}\alpha_n A_n(c_{n\bullet}) = \frac{|\theta_n^* - \theta|}{d_n(c_{n\bullet})}\alpha_n. \tag{26}$$

Поскольку $\eta_n := (\theta_n^* - \theta)/d_n(c_{n\bullet}) \Rightarrow N(0,1)$ в силу (9), то из (4) и (26) следует, что $|\beta_n - \gamma_n| \leqslant |\eta_n|\alpha_n \xrightarrow{p} 0$. Но из этого факта, с учетом свойства 3 находим, что

$$|\beta_n - 1| \leqslant |\beta_n - \gamma_n| + |\gamma_n - 1| \xrightarrow{p} 0.$$

Значит $\beta_n \xrightarrow{p} 1$ и утверждение теоремы 4 немедленно вытекает из свойства 2.

5. Заключение

Пусть случайные величины $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ удовлетворяют условию (1). Предполагаем, что случайные величины $\{\varepsilon_i\}$ независимы и

$$\mathbb{E}\varepsilon_i = 0, \quad 0 < \mathbb{D}\varepsilon_i = \sigma^2/w_i < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

где числа $\{w_i > 0\}$ – известны, а коэффициент $\sigma > 0$ может быть как известен, так и не известен. В этом случае из теоремы 3 и замечания 1 вытекает, что в качестве оптимальных чисел $\{c_{nj},\ j = 1, \ldots, n\}$ можно брать

$$c_{nj,opt} := w_j(x_j - k_n^{(w)}z_j), \qquad \text{где} \quad k_n^{(w)} = \sum_{i=1}^n w_i x_i z_i \Big/ \sum_{i=1}^n w_i z_i^2 \tag{28}$$

при невыполнении условия (3), и $k_n^{(w)} = 0$, когда $z_1 = \cdots = z_n = 0$.

Заметим еще, что в этом случае $c_{nj,opt} = \sigma^2 \overline{c}_{nj}$, а потому из (16) имеем:

$$\sum_{i=1}^n c_{ni,opt}x_i = \sum_{i=1}^n c_{ni,opt}^2/w_i = B_n^2(c_{n\bullet,opt})/\sigma^2.$$

В частности, отсюда вытекает следующее неравенство для используемой в предположения (22) теоремы 4 величины α_n:

$$|\alpha_n| \leqslant \max_{i\leqslant n}\sqrt{w_i}(|x_i| + M|z_i|)\Big/\sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^n c_{ni,opt}^2/w_i}.$$

Таким образом, при выполнении (27) следующее простое условие

$$\sup_i w_i(x_i^2 + M^2 z_i^2) < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} B_n^2(c_{n\bullet,opt}) = \infty \tag{29}$$

достаточно для справедливости предположения (22) теоремы 4.

Подчеркнем, что в классическом случае дисперсии $\mathbb{D}\varepsilon_i = \sigma^2$ совпадают при всех i, а потому мы рекомендуем использовать числа $\{c_{ni}\}$, определенные в формуле (7), которая является частным случаем формулы (28) при $\{w_i \equiv 1\}$. А условие (29) в классическом случае принимает особенно простой вид.

Список литературы

[1] Е.З. Демиденко. *Оптимизация и регрессия*, Москва, «Наука», 1989. MR1007832
[2] А.А. Боровков. *Математическая статистика*, Москва, Физматлит, 2007.
[3] Дж. Себер. *Линейный регрессионый анализ*, Москва, «Мир», 1980. MR0580805
[4] Ю.Ю. Линке, А.И. Саханенко. *Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно-линейной регрессии*, Сибирский математический журнал, 41, **1** (2000), 150–163. MR1756483
[5] А.А. Боровков. *Теория вероятностей*, Москва, Эдиториал УРСС, 1999.

Ксения Владимировна Ермоленко
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ksyunya0211@mail.ru

Александр Иванович Саханенко
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: aisakh@mail.ru