S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 79–89 (2013) УДК 510.643
MSC 03F25

НЕЗАВИСИМЫЙ БАЗИС ДОПУСТИМЫХ ПРАВИЛ ВЫВОДА ПРЕДТАБЛИЧНЫХ ЛОГИК И ИХ РАСШИРЕНИЙ

В.В. РИМАЦКИЙ, В.Р. КИЯТКИН

Abstract. *We obtain independent bases for admissible inference rules of pretabular modal logics PT2, PT3 and all its extensions. Also we describe such bases for global admissible rules of logics PT2, PT3.*

Keywords: *(pretabular) modal logic, frame (model) Kripke, admissible inference rule, basys for admissible rules.*

1. Введение

В последние годы в исследовании допустимых правил вывода (ДПВ) неклассических логик наметился определенный прогресс. За последние 10-12 лет были получены явные базисы для допустимых правил большинства важных индивидуальных логик $S4$, Grz, GL, Int и некоторых классов транзитивных логик (см. [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]).

Данная статья посвящена описанию явного независимого базиса для допустимых правил предтабличных логик $PT2, PT3$ и их расширений. Впервые незавимый базис для этих логик был получен в [8] в 2000г. Мы предлагаем новый базис правил вывода, который позволил также описать базисы всех расширений этих логик, а также является базисом глобально допустимых правил вывода логик $PT2, PT3$.

Rimatskii, V.V., Kiyatkin, V.R., Independent bases for admissible rules of pretabular modal logic and its extensions.

Поступила 22 сентября 2012 г., опубликована 8 февраля 2013 г.

2. Предварительные сведения

Авторы предполагают знакомство читателя с семантикой модальных логик и теорией допустимых правил вывода. Все необходимые определения, обозначения и вспомогательные результаты читатель может найти например в [1], [8], [11].

Язык модальных логик состоит из счетного множества пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_n, \ldots$, логических связок классической логики $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и унарного модального оператора $\Box$. *Нормальная модальная логика* есть множество модальных формул L, содержащее все пропозициональные тавтологии, схему аксиом $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$, и замкнутое относительно подстановок, правила отделения $\alpha,\ \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$ и необходимости $\alpha \vdash \Box\alpha$. Минимальная модальная логика, полученная из квазитавтологий исчисления высказываний добавлением аксиом $\Box(A \vee \neg A) \equiv (A \vee \neg A)$; $\Box(A \rightarrow B) \equiv (\Box A \rightarrow \Box B)$ и правила $A/\Box A$, обозначается как логика K. Расширение логики K схемой $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ обозначается $K4$; расширение $K4$ схемой $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ порождает логику $S4$. Если L нормальная модальная логика, то для формул $\alpha \in L$ пишем $\vdash_L \alpha$ или $L \vdash \alpha$. Если логика L фиксированна или ясна из контекста, то обозначаем для простоты $\vdash \alpha$. Далее мы рассматриваем только модальные логики L, расширяющие логику $S4$.

Фрейм $\mathcal{F} := \langle F, R \rangle$ есть пара, где F – непустое множество и R – бинарное отношение на F. Содержательно W представляет множество всех "возможных" миров, R – отношение перехода из одного мира в другой. Далее базисное множество и сам фрейм будем обозначать одной и той же буквой. Т.к. мы рассматриваем логики, расширяющие $S4$, отношение достижимости R на фреймах считаем рефлексивным и транзитивным.

Моделью называем тройку $\mathcal{M} := \langle F, R, V \rangle$, где $\langle F, R \rangle$ – фрейм, и *означивание* V есть отображение множества пропозициональных переменных в множество 2^F всех подмножеств множества F. Означивание V ставит в соответствие каждой переменной множество "миров"$V(p)$, в которых переменная p истинна. Обозначим истинность переменной p в точке $x \in F$ при заданном означивании V как $(F, x) \models_V p$. В тех случаях, когда базисное множество (фрейм) ясно из контекста, истинность переменной будем записывать как $x \models_V p$.

Истинность формулы α в точке $x \in F$ при заданном означивании V индуктивно определяется следующим образом:

- $x \models_V p \iff x \in V(p)$;
- $x \models_V \neg\alpha \iff x \not\models_V \alpha$;
- $x \models_V \alpha \vee \beta \iff x \models_V \alpha$ или $x \models_V \beta$;
- $x \models_V \alpha \wedge \beta \iff x \models_V \alpha$ и $x \models_V \beta$;
- $x \models_V \alpha \rightarrow \beta \iff x \not\models_V \alpha$ или $x \models_V \beta$;
- $x \models_V \Box\alpha \iff \forall\, y \in F\ (xRy \Longrightarrow y \models_V \alpha)$;
- $x \models_V \Diamond\alpha \iff \exists\, y \in F\ (xRy\ \&\ y \models_V \alpha)$;

Формула A истинна на модели $\mathcal{M} = \langle F, R, V \rangle$ (обозначение $\mathcal{M} \models A$ или $F \models_V A$), если данная формула A истинна на каждом элементе модели $\mathcal{M}$ при означивании V. *Формула A истинна на фрейме* F (обозначение $F \models A$), если она истинна на любой модели $\mathcal{M}$, порожденной F, т.е. истинна при любом означивании на F.

Подмножество X заданной модели $\mathcal{M}$ называется *формульным (определимым)*, если существует формула α такая, что $\forall z \in \mathcal{M}\bigl[z \models_V \alpha \iff z \in X\bigr]$. Соответственно, *элемент* $z \in \mathcal{M}$ *является формульным*, если множество $\{z\}$ формульное. Означивание V *определимо (формульное)* в модели $\mathcal{M}$, если для любой переменной p из области V, множество $V(p)$ формульное.

Модель $\mathcal{M} = \langle F, R, V\rangle$ называется *адекватной* для логики L (L-моделью), если любая формула, доказуемая в логике L, истинна на данной модели. Соответственно, фрейм $\langle F, R\rangle$ *адекватен* для логики L, если на нем истинны все доказуемые формулы логики L. Класс фреймов K называется *характеристическим* для логики L, если любой фрейм из данного класса адекватен для L и для любой формулы, не доказуемой в L, найдется фрейм из класса K, на котором опровергается данная формула. Для заданного класса фреймов $\mathcal{K}$, *логика* $L(\mathcal{K})$*, порожденная* $\mathcal{K}$, есть множество всех формул, истинных на всех фреймах из $\mathcal{K}$. В данном случае говорим, что логика $L(\mathcal{K})$ порождена классом фреймов $\mathcal{K}$.

Напомним, что если $\langle W, R\rangle$ – некоторый фрейм, то множество $C \subseteq W$ называется *сгустком*, если: 1) для любых x, y из C выполняется xRy; 2) для любых $x \in C$ и $y \in W$ $(xRy \& yRx) \Longrightarrow y \in C$. Сгусток называется *собственным* если $|C| > 1$; в противном случае – *одноэлементным или вырожденным.* Для элемента $a \in F$ через $C(a)$ обозначим сгусток, порожденный элементом a.

Любое множество попарно несравнимых по отношению R сгустков фрейма F называется *антицепью.* Антицепь $\mathcal{A}$ называется *нетривиальной*, если $\mathcal{A}$ состоит по крайней мере из двух различных сгустков, в противном случае – *тривиальной.* Для любого элемента $a \in F$ обозначим $a^R = \{z \mid aRz\}$ и $a^{<R} = a^R \setminus C(a)$ и будем говорить, что элемент *a порождает как корень* подфрейм a^R фрейма F. Фрейм $\mathcal{F}$ – *корневой*, если существует элемент $a \in \mathcal{F}$ такой, что $\forall b \in \mathcal{F}\ aRb$. Данный элемент a называем также *корнем* $\mathcal{F}$. Множество $X^R := \bigcup\{z^R \mid z \in X\}$ называется *открытым подфреймом*, порожденным X. Понятия корневой модели, подмодели и открытой подмодели определяются аналогичным образом.

Сгусток $C(a)$ из F есть *ко-накрытие* для множества (или антицепи) $X \subseteq F$, если $a^R \backslash C(a) = X^R$. Говорим, что *элемент a есть ко-накрытие* для $X \subseteq F$, если одноэлементный сгусток $C(a)$ образует ко-накрытие для X. Под *ко-накрытием* далее понимаем одноэлементный сгусток, являющийся ко-накрытием. Пусть L – модальная логика, *L-ко-накрытием* называем ко-накрытие, порождающее как корень L-фрейм. Говорим, что фрейм $\mathcal{F}$ является *L-фреймом*, если все теоремы логики L истинны на $\mathcal{F}$ при любом означивании переменных. Соответственно, $L(\mathcal{F})$ – множество формул, истинных на $\mathcal{F}$ – есть логика, порожденная фреймом $\mathcal{F}$.

Глубиной элемента z модели (фрейма) $\mathcal{F}$ называется максимальное число сгустков в цепях сгустков, начинающихся со сгустка, содержащего z. Множество всех элементов фрейма (модели) $\mathcal{F}$ глубины не более чем n будем обозначать $S_{\leq n}(\mathcal{F})$, а множество элементов глубины n обозначим $S_n(\mathcal{F})$.

Для заданного фрейма $\mathcal{F}$, заданного означивания V и правила вывода $r := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k/\beta\}$, говорим что *r истинно на* $\mathcal{F}$ *при означивании* V (обозначаем $\mathcal{F} \models_V r$), если как только $\forall z \in \mathcal{F} \forall i\ (z \models_V \alpha_i)$, то $\forall z \in \mathcal{F}\,(z \models_V \beta)$. *Правило r истинно на* $\mathcal{F}$, если r истинно на $\mathcal{F}$ при любом означивании V (обозначаем

$\mathcal{F} \models r$). Аналогично определяется *истинность правила на заданной модели*: r истинно на $\mathcal{M}$, если как только $\forall z \in \mathcal{M}\, \forall i\ (z \models_V \alpha_i)$, то $\forall z \in \mathcal{M}\ (z \models_V \beta)$.

Отображение f фрейма $\mathcal{F} = \langle W_{\mathcal{F}}, R\rangle$ во фрейм $\mathcal{F}_1 = \langle W_{\mathcal{F}_1}, R_1\rangle$ называется *p−морфизмом*, если: (i) $\forall a, b \in W_{\mathcal{F}}(aRb \Longrightarrow f(a)R_1f(b))$;

(ii) $\forall a, b \in W_{\mathcal{F}}(f(a)R_1f(b) \Longrightarrow (\exists c \in W_{\mathcal{F}} : aRc)$ и $f(c) = f(b)))$.

Правило вывода $\alpha_1(p_1, \dots, p_n), \dots, \alpha_k(p_1, \dots, p_n)/\beta(p_1, \dots, p_n)$ называется *допустимым* в логике L [обозначаем $r \in Ad(L)$], если для любых формул $\delta_1, \dots, \delta_n$ из $(\forall j\ \ \alpha_j(\delta_1, \dots, \delta_n) \in L)$ следует $\beta(\delta_1, \dots, \delta_n) \in L$. Для произвольного правила вывода $r = \alpha_1(p_1, \dots, p_n), \dots, \alpha_k(p_1, \dots, p_n)/\beta(p_1, \dots, p_n)$ обозначим посылку $\alpha_1(p_1, \dots, p_n), \dots, \alpha_k(p_1, \dots, p_n)$ правила как $Pr(r)$, соответсвенно заключение $\beta(p_1, \dots, p_n)$ как $Con(r)$.

Допустимые правила пропозициональной модальной (суперинтуиционистской) логики L имеют алгебраическое описание – им соответствуют квазитождества, истинные на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(L)$ многообразия алгебр $Var(L)$, соответствующего данной логике, т.е. справедливо

Утверждение 2.1. *[гл. 3, [1]] Правило вывода*

$$r = \{\alpha_1(p_1, \dots, p_n), \dots, \alpha_k(p_1, \dots, p_n)/\beta(p_1, \dots, p_n)\}$$

допустимо в логике L если и только если на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(L)$ из многообразия алгебр $Var(L)$ истинно квазитождество

$$r^* = \{\alpha_1(p_1, \dots, p_n) = 1 \& \dots \& \alpha_k(p_1, \dots, p_n) = 1 \Longrightarrow \beta(p_1, \dots, p_n) = 1\}.$$

Правило r называется *следствием правил $r_1, \dots, r_k$ в логике L*, если заключение r выводимо из посылок r с помощью теорем L, правил $r_1, \dots, r_k$ и постулированных правил вывода L. Множество $Ad^*(L)$ допустимых правил логики L называем *базисом допустимых правил*, если для любого допустимого правила r найдутся правила $r_1, \dots, r_k \in Ad^*(L)$ такие, что r выводимо из $r_1, \dots, r_k$ в логике L.

Модель Крипке $\langle F, R, V\rangle$, где $V : P_n \to 2^F$ и $P_n = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, называется *n-характеристической для логики* L тогда и только тогда, когда для любой формулы $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ от переменных $p_1, \dots, p_n$, $\alpha \in L \iff \langle F, R, V\rangle \models \alpha$.

В нашем исследовании существенно будет использоваться строение n-характеристической модели для финитно аппроксимируемых логик, расширяющих логику $S4$, с помощью которой будет описана допустимость правил вывода в этих логиках.

Следуя гл. 3, [1], опишем конструкцию этой модели. Пусть задана финитно аппроксимируемая логика λ, расширяющая логику $S4$. И пусть задано множество пропозициональных переменных $P_n = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Первый слой данной модели $S_1(C_n(\lambda))$ состоит из множества всех попарно неизоморфных как модели сгустков со всевозможными означиваниями V переменных из множества P_n, которые не имеют дублирующих элементов с тем же самым означиванием. Предположим, что $S_{\leq m}(C_n(\lambda))$ уже построен. Слой $S_{m+1}(C_n(\lambda))$ глубины $m + 1$ получим следующим образом. Выберем произвольную антицепь сгустков $\mathcal{X} \subset S_{\leq m}(C_n(\lambda))$, содержащую хотя бы один сгусток глубины m и добавим сгусток C из $S_1(C_n(\lambda))$ как ко-накрытие для антицепи $\mathcal{X}$ при условии:

(i) фрейм $C^R = \mathcal{X}^R \cup \{C\}$ является λ-фреймом;

(ii) если $\mathcal{X} = \{C_1\}$, то сгусток C не изоморфен подмодели сгустка C_1.

Продолжая описанную процедуру, в итоге получим модель $C_n(\lambda)$. Свойства полученной модели сформулируем в следующих утверждениях.

Утверждение 2.2 (гл. 3, [1])**.** *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4$, модель $C_n(\lambda)$ является n-характеристической, и каждый элемент данной модели – формульный.*

Утверждение 2.3 (гл. 3, [1])**.** *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4$, правило вывода r допустимо в λ если и только если r истинно на фрейме $C_n(\lambda)$ для любого n и при любом формульном означивании переменных.*

3. **Основной результат**

Говорим, что логика λ, расширяющая логику $S4$, имеет **слабое свойство ко-накрытий**, если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathcal{F} = b^R$ и произвольной антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $\mathcal{F} \setminus \{b\}$, фрейм $\mathcal{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного рефлексивного ко-накрытия ко фрейму $\bigcup_{c \in \mathcal{X}^R} c^R$, также является λ-фреймом. Логику со слабым свойством ко-накрытий будем называть WCP-логикой.

Говорим, что логика λ является табличной, если существует конечный фрейм (или алгебра) $\mathcal{F}$ такой, что $\lambda = \lambda(\mathcal{F})$. Логика λ предтабличная, если она не таблична, но все ее расширения табличные.

В статье изучаются предтабличные логики над $S4$ и их расширения. В [9] было доказано, что над $S4$ существует точно 5 предтабличных логик $PT1 - PT5$. Известно, что логики $PT1,\ PT4,\ PT5$ имеют конечный базис для допустимых правил вывода (теорема 4.3.33 [1]), и следовательно имеют независимый базис. Логики $PT2, PT3$ не имеют конечного базиса для допустимых правил. Независимый бесконечный базис для допустимых правил логик $PT2, PT3$ впервые был получен в [8].

Логики $PT2, PT3$ определяются следующим образом:

$$PT2 := \lambda(\{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} - \text{конечный корневой чум глубины не более } 2\})$$

$$PT3 := \lambda(\{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} - \text{конечный корневой чум глубины} \leq 3 \,\&\, \exists m \in \mathcal{F} \forall x \in \mathcal{F}(xRm)\}).$$

Напомним, что отношение достижимости R в частично упорядоченном множестве $\mathcal{F}$ является рефлексивным ($\forall x \in \mathcal{F}\ xRx$), транзитивным ($\forall x, y, z \in \mathcal{F}\ xRy \& yRz \implies xRz$) и антисимметричным ($\forall x, y \in \mathcal{F}\ xRy \,\&\, yRx \implies x = y$). В частности, все сгустки такого фрейма являются одноэлементными.

Лемма 1. *Логики $PT2, PT3$ и их табличные расширения имеют слабое свойство ко-накрытий.*

Для доказательства достаточно заметить, что в произвольном конечном корневом $PT2$-фрейме глубины 2 (корневые фреймы глубины 3 и больше не адекватны логике $PT2$, корневой $PT2$-фрейм глубины 1 состоит из единственного рефлексивного элемента и добавление снизу R-предшественника снова дает $PT2$-фрейм), ко-накрытие произвольной антицепи сгустков первого слоя снова является корневым фреймом глубины 2, т.е. $PT2$-фреймом. В случае корневого $PT3$-фрейма любая нетривиальная антицепь принадлежит второму слою этого фрейма (случаи глубины 1 и 2 тривиальны как в случае $PT2$, фреймы глубины большей 3 не адекватны логике $PT3$). Тогда, сжимая p-морфно все сгустки второго слоя, не входящие в эту антицепь, с R-наибольшим элементом, получим p-морфизм, переводящий корень исходного фрейма в ко-накрытие выбранной антицепи. В табличном случае рассуждения аналогичны. ∎

Для всех чисел $n > 1,\ 1 \le i, j \le n;\ n \in N$, определим формулы:

$$\pi_i := p_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg p_j; \quad A_n := \bigwedge_{1 \le i \le n} \Diamond \pi_i;$$

$$A_{n,1} := \Box\big[\bigwedge_{1 \le i \le n} (p_i \to \neg \Diamond q)\big]; \quad B := q \vee \neg \Diamond q.$$

Определим также для натуральных $n > 1$ последовательность правил вывода:

$$\mathcal{R}_n := \frac{\Box\big(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B)\big)}{\Box \neg A_n};\ n = 2, 3, \ldots .$$

Теорема 3.1. *Правила $\mathcal{R}_n,\ n \in N$, допустимы в любой финитно аппроксимируемой логике λ, расширяющей $S4$, имеющей слабое свойство ко-накрытий.*

Доказательство Предположим, что для некоторого $n > 1$ правило вывода $\mathcal{R}_n$ не допустимо в логике λ. Тогда существует формульное означивание V переменных правила $\mathcal{R}_n$, при котором правило $\mathcal{R}_n$ опровергается на некоторой k-характеристической модели $C_k(\lambda)$. Итак, справедливо:

$$C_k(\lambda) \models_V \Box\big(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B)\big)\ \&\ C_k(\lambda) \not\models_V \Box\neg A_n. \qquad (\mathbf{1})$$

Следовательно, существует элемент $a \in C_k(\lambda)$ такой, что $a \not\models_V \Box\neg A_n$, откуда вытекает $\exists a_1 : aRa_1\ \&\ a_1 \models_V A_n$. Тогда найдутся элементы $b_1, \ldots, b_n \in C_k(\lambda)$ такие, что $a_1 R b_i\ \&\ b_i \models_V \pi_i$. По слабому свойству ко-накрытий, существует рефлексивный элемент $b \in C_k(\lambda)$, являющийся ко-накрытием для антицепи R-наименьших элементов множества $\{b_1, \ldots, b_n\}$ или такой уже есть в этом множестве, т.е.

$$\{b\}^R := \{b\} \cup \bigcup_{1 \le i \le n} (b_i)^R.$$

По выбору элемента b выполняется $b \models_V A_n$. По ($\mathbf{1}$) выполняется $b \models_V A_{n,1}$. Т.к. b является ко-накрытием для антицепи R-наименьших элементов множества $\{b_1, \ldots, b_n\}$, легко проверить, что формула B выполняется на элементе b при означивании V. Действительно, $b_i \models_V p_i$ и по ($\mathbf{1}$) справедливо $b_i \models_V A_{n,1}$, откуда следует $\forall i \le n,\ b_i \models_V \neg\Diamond q$. Имеем $b \models_V q$, или $b \models_V \neg q$, что влечет $b \models_V \neg\Diamond q$. Таким образом, выполнено $b \models_V A_n \wedge B$, что противоречит $b \models_V \Box\neg(A_n \wedge B)$ по предположению ($\mathbf{1}$). ■

Отсюда и леммы 1 вытекает следующая

Теорема 3.2. *Правила $\{\mathcal{R}_n,\ n > 1\}$, допустимы в логиках $PT2, PT3$, и во всех табличных расширениях логик $PT2$, $PT3$.*

Покажем теперь, что все допустимые правила логики $PT3$ выводятся из множества правил $\{\mathcal{R}_n,\ n > 1, n \in N\}$. В остальных случаях доказательство будет повторять проведенные рассуждения в более простом случае.

Теорема 3.3. *Правила $\{\mathcal{R}_n,\ n > 1, n \in N\}$, образуют базис допустимых правил вывода логики $PT3$.*

Доказательство Пусть некоторое допустимое в $PT3$ правило вывода r не выводится из множества правил $\{\mathcal{R}_n,\ n > 1, n \in N\}$. Тогда существует алгебра $\mathcal{A} \in Var(PT3)$ такая, что $\mathcal{A} \models_V \mathcal{R}_n,\ n > 1, n \in N;\ \ \mathcal{A} \not\models_V r$ при некотором означивании V. Т.к. логика $PT3$ локально-конечна, то алгебра $\mathcal{A}$

конечно-порожденная и значит, конечна, т.е. $\mathcal{A} = \mathcal{F}^+$ для некоторого конечного $PT3$-фрейма $\mathcal{F}$.

Таким образом, имеем

$$\mathcal{F} \models_V \mathcal{R}_n,\ n > 1; \quad \mathcal{F} \not\models_V r. \tag{2}$$

Отсюда заключаем (см. также [8]):

- **можем считать, что $\mathcal{F}$ имеет единственный R-максимальный элемент.**

  Т.к. любой конечный $PT3$-фрейм есть прямое объединение подфреймов с R-максимальным элементом.
- **глубина фрейма $\mathcal{F}$ равна 3.**

  Если глубина $\mathcal{F}$ (состоящего из одной компоненты по первому пункту) равна 1 или 2, то существует p-морфизм из фрейма n-характеристической модели $C_n(PT3)$ на $\mathcal{F}$ для достаточно большого n. Т.к. правило r опровергается на $\mathcal{F}$, то оно не будет истинно на $C_n(PT3)$, и значит не допустимо в логике $PT3$.
- **существуют нетривиальные антицепи $\mathcal{Z}, \mathcal{Y} \subseteq S_2(\mathcal{F})$ такие, что:**

  $$\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}\ \&\ \exists w \in \mathcal{F}(w^R = \{w\} \cup \mathcal{Z}^R)\ \&\ \forall x \in \mathcal{F}(x^R \neq \{x\} \cup \mathcal{Y}^R), \tag{3}$$

  т.е. антицепь $\mathcal{Z}$ имеет ко-накрытие в $\mathcal{F}$, но ее подмножество $\mathcal{Y}$ не имеет ко-накрытия (существует нетривиальная антицепь $\mathcal{Y}$ без ко-накрытия в $\mathcal{F}$, имеющая R-предшественника – ко-накрытие для $\mathcal{Z}$).

Действительно, предположим, что для произвольной нетривиальной антицепи $\mathcal{Y}$ из $\mathcal{F}$ выполняется: как только $\mathcal{Y}$ имеет R-предшественника в $\mathcal{F}$, то $\mathcal{Y}$ также имеет ко-накрытие в $\mathcal{F}$. Тогда существует p-морфизм из фрейма n-характеристической модели $C_n(PT3)$ на $\mathcal{F}$ для достаточно большого n. Как в предыдущем пункте приходим к недопустимости правила r в логике $PT3$.

Рассмотрим третий пункт более подробно. Предположим, что задан конечный $PT3$-фрейм $\mathcal{F}$ такой, что: 1) $\mathcal{F}$ состоит из единственной компоненты; 2) первый слой фрейма $S_1(\mathcal{F})$ состоит из единственного одноэлементного сгустка; 3) для любой нетривиальной антицепи $\mathcal{Y} \subset S_2(\mathcal{F})$, если $\mathcal{Y}$ имеет R-предшественника в $\mathcal{F}$, то $\mathcal{Y}$ имеет ко-накрытие в $\mathcal{F}$. Напомним также, что n-характеристическая модель $C_n(PT3)$ порождает свободную алгебру ранга n из многообразия $Var(PT3)$, конечна и состоит из прямого объединения конечных компонент μ_j. Покажем, что в таком случае существует p-морфизм фрейма $C_n(PT3)$ на фрейм $\mathcal{F}$.

Если любая нетривиальная антицепь сгустков второго слоя $\mathcal{Y} \subset S_2(\mathcal{F})$ имеет ко-накрытие в $\mathcal{F}$, то выберем наименьшее n так, чтобы фрейм $\mathcal{F}$ был открытым подфреймом компоненты μ_j фрейма $C_n(PT3)$, и определим p-морфизм на фрейм $\mathcal{F}$:

(i) на подфрейме выбранной компоненты μ_j модели $C_n(PT3)$, изоморфном $\mathcal{F}$, p-морфизм определяем как тождественный. Остальные элементы второго слоя выбранной компоненты μ_j отображаем на элемент первого слоя, оставшиеся сгустки третьего слоя отображаем на ко-накрытия образов достижимых из них антицепей.

(ii) остальные компоненты μ_i модели $C_n(PT3)$ отображаем на элемент первого слоя $\mathcal{F}$.

Рассмотрим теперь случай, когда некоторые антицепи сгустков второго слоя не имеют ко-накрытия в $\mathcal{F}$. Выберем все антицепи сгустков второго слоя, имеющие ко-накрытия в $\mathcal{F}$, максимальные по мощности т.е. добавление к такой антицепи любого сгустка второго слоя (не входящего в эту антицепь) порождает антицепь, не имеющую ко-накрытия в $\mathcal{F}$. И пусть сгустки $C_1, C_2, \dots, C_t$ – все ко-накрытия таких антицепей. Понятно, что фрейм $\mathcal{F}$ есть р-морфный образ прямого объединения открытых подфреймов $C_j^R, 1 \leq j \leq t$, и по нашему предположению любая антицепь сгустков второго слоя подфрейма $C_j^R, 1 \leq j \leq t$, имеет ко-накрытие в C_j^R. Подберем теперь наименьшее число n так, чтобы фреймы $C_j^R, 1 \leq j \leq t$, были открытыми подфреймами различных компонент μ_j фрейма $C_n(PT3)$. Тогда, как в предыдущем случае определяем р-морфизм компоненты μ_j на соответствующий фрейм $C_j^R, 1 \leq j \leq t$, а все остальные компоненты модели $C_n(PT3)$ отображаем на элемент первого слоя подфрейма C_1^R. Тогда композиция этих р-морфизмов дает требуемый р-морфизм на фрейм $\mathcal{F}$. ■

Продолжим доказательство теоремы 3.3. Пусть для определенности антицепь $\mathcal{Y}$ состоит из n элементов $c_1, c_2, \dots c_n \in S_2(\mathcal{F})$. Зафиксируем эту антицепь. Определим означивание переменных правила $\mathcal{R}_n$ на $\mathcal{F}$ следующим образом:

$$V(p_i) := c_i,\ 1 \leq i \leq n; \quad V(q) := S_2(\mathcal{F} \setminus \mathcal{Y}). \qquad (\mathbf{4})$$

Лемма 2. *Правило $\mathcal{R}_n$ опровергается на фрейме $\mathcal{F}$ при означивании V, определенном в* (**4**).

Доказательство. Непосредственно из определения (**4**) означивания V вытекает: $\forall e \in S_2(\mathcal{F} \backslash \mathcal{Y})\ e \models_V \Diamond q$; $\forall e \in \mathcal{Y}^R\ e \models_V \neg\Diamond q$; $\forall x \in \mathcal{F}\ (x \models_V \pi_i \iff x = c_i)$. Далее, т.к. элементы 2-го слоя фрейма $\mathcal{F}$ несравнимы по отношению R, то по определению (**4**) означивания переменных p_i и q выполнено

$$\forall x \in \mathcal{F} \quad x \not\models_V \bigvee_{1 \leq i \leq n} p_i \wedge \Diamond q.$$

Имеем $\forall x \in \mathcal{F}\ x \models_V \Box A_{n,1}$.

Как только для некоторого элемента $e \in \mathcal{F}$ выполняется $e \models_V A_n$, то из него достижима антицепь сгустков $\mathcal{Y}$, следовательно, $e \in S_3(\mathcal{F})$ и этот элемент не является ко-накрытием для $\mathcal{Y}$ по выбору данной антицепи. Тогда из элемента e достижим по отношению R хотя бы один из элементов $y \in S_2(\mathcal{F} - \mathcal{Y})$ и по (**4**) $\forall y \in S_2(\mathcal{F} - \mathcal{Y})$ справедливо $y \models_V q$, Следовательно, если $e \models_V A_n$, то по определению $V(q)$ имеем $e \models_V \neg q \wedge \Diamond q$, откуда $e \models_V \neg(A_n \wedge B)$. Если $e \models_V \neg A_n$, заключаем $e \models_V \neg(A_n \wedge B)$. Таким образом, получили $\forall x \in \mathcal{F}\ x \models_V \neg(A_n \wedge B)$.

Итак, мы показали, что при таком определении означивания посылка правила истинна на всех элементах фрейма $\mathcal{F}$. Т.к. элемент w (ко-накрытие для антицепи $\mathcal{Z}$) является R-предшественником антицепи $\mathcal{Y} = \{c_1,\ c_2,\ \dots, c_n\}$ и $\forall\ c_i \in \mathcal{Y}$ выполняется $c_i \models_V \pi_i$, следовательно $w \models_V \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Diamond\pi_i$, т.е. $w \models_V A_n$. Откуда заключаем $w \not\models_V \Box\neg A_n$, что доказывает опровержимость правила $\mathcal{R}_n$ на фрейме $\mathcal{F}$ при данном означивании V. ■

Теорема 3.4. *Правила $\{\mathcal{R}_n,\ n \in N\}$, образуют независимый базис допустимых правил вывода логики $PT3$.*

Доказательство. Из ранее доказанных теорем следует, что множество правил $\{\mathcal{R}_n,\ n \in N\}$, образует базис допустимых правил вывода логики $PT3$. Покажем его независимость.

Определим $PT3$-фрейм $\mathcal{F}$, разделяющий правила $\mathcal{R}_n$, следующим образом. Первый слой данного фрейма состоит из единственного рефлексивного элемента a_0, т.е. $S_1(\mathcal{F}) := \{a_0\}$. Второй слой этого фрейма образует антицепь из $n+1$ рефлексивных элементов: $S_2(\mathcal{F}) := \{a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n, a_{n+1}\}$. Для построения третьего слоя выбираем все нетривиальные антицепи, отличные от антицепи $\{a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n\}$, и к каждой такой антицепи приписываем снизу рефлексивный элемент как ко-накрытие. В результате построения любая нетривиальная антицепь сгустков второго слоя, отличная от антицепи $\{a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n\}$, имеет ко-накрытие в $\mathcal{F}$.

Определим на $\mathcal{F}$ означивание V, опровергающее правило $\mathcal{R}_n$, следующим образом:

$$V(p_i) := a_i,\ a_i \in S_2(\mathcal{F}),\ 1 \le i \le n; \quad V(q) := a_{n+1}.$$

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 2, несложно показать, что при таком означивании правило $\mathcal{R}_n$ опровергается на фрейме $\mathcal{F}$. Действительно, по определению означивания выполняется $\forall i \le n\ a_i \models_V \pi_i$. По построению фрейма $\mathcal{F}$ найдется элемент $b \in \mathcal{F}$, являющийся R-предшественником антицепи $\{a_1,\ a_2, \dots, a_n\} \in S_2(\mathcal{F})$ (например, ко-накрытие для антицепи $\{a_1,\ a_2, \dots, a_{n+1}\}$). Следовательно $b \models_V A_n$, т.е. заключение правила $\mathcal{R}_n$ опровергается на этом элементе.

Остается показать, что при заданном означивании V посылка правила $\mathcal{R}_n$ истинна на всем фрейме $\mathcal{F}$. По определению означивания $\forall i \le n\ a_i^R \not\models_V q\ \&\ a_i \models_V p_i$, следовательно для этих элементов a_i выполнено $a_i \models_V A_{n,1}$. Для всех остальных $z \in \mathcal{F} \setminus \{a_1,\ a_2, \dots, a_n\ |a_i \in S_2(\mathcal{F})\}$ по определению означивания $\forall i \le n\ z \not\models p_i$ и следовательно, также заключаем $z \models_V A_{n,1}$. Таким образом, для всех элементов $z \in \mathcal{F}$ получим $z \models_V A_{n,1}$, т.е. данная формула истинна на фрейме $\mathcal{F}$.

Возьмем теперь произвольный элемент $z \in \mathcal{F}$ и предположим $z \models_V A_n$. Следовательно, по построению фрейма $\mathcal{F}$, элемент z – ко-накрытие нетривиальной антицепи $\{a_1, \dots a_n, a_{n+1}\} = S_2(\mathcal{F})$, т.к. антицепь $\{a_1,\ a_2, \dots, a_n\} \in S_2(\mathcal{F})$ не имеет ко-накрытия по построению фрейма $\mathcal{F}$. Кроме того $a_{n+1} \models_V q$. Отсюда заключаем, что $z \models_V \neg q\ \&\ z \models_V \Diamond q$. Следовательно $z \not\models_V q \vee \neg\Diamond q$, т.е. $z \not\models_V B$. Таким образом выполняется $\mathcal{F} \models_V \neg(A_n \wedge B)$ и посылка правила истинна на фрейме $\mathcal{F}$ при означивании V.

Пусть теперь при $k \neq n$ правило $\mathcal{R}_k$ опровергается на $\mathcal{F}$. Т.е. найдется элемент $c \in \mathcal{F}$ такой, что $c \not\models_V \Box\neg A_k$. Тогда существуют элементы $e_1, \dots, e_k\ :\ cRe_j\ \&\ e_j \models_V \pi_j$. По построению фрейма $\mathcal{F}$ антицепь R-минимальных элементов во множестве $\{e_1, \dots, e_k\}$ имеет ко-накрытие в $\mathcal{F}$, т.к. она отлична от зафиксированной выше антицепи $\{a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n\}$. Легко проверить (как это было сделано при доказательстве теоремы 3.1), что на данном ко-накрытии посылка правила не выполняется. Таким образом, при $k \neq n$ правило $\mathcal{R}_k$ истинно на $\mathcal{F}$ и значит независимо от правила $\mathcal{R}_n$. ■

Аналогичным образом с некоторыми упрощениями доказывается:

Теорема 3.5. *Правила $\{\mathcal{R}_n, n > 1\ n \in N\}$, образуют независимый базис допустимых правил вывода логики $PT2$.*

Рассмотрим теперь табличные расширения логик $PT3$ и $PT2$. В этом случае логики порождаются конечными фреймами некоторой конечной ширины t. Соответственно, ко-накрытия могут иметь только антицепи, состоящие не более чем из t элементов. В таком случае по аналогии с ранее доказанным легко показать:

Теорема 3.6. *Правила* $\{\mathcal{R}_n,\ 1 \leq n \leq t-1\}$ *образуют конечный независимый базис допустимых правил вывода произвольной табличной логики ширины* t, *расширяющей* $PT2$ *или* $PT3$.

По теореме 3.2 эти правила допустимы. Докательство базисности воспроизводит доказательство теоремы 3.3. Предположив противное, получим опровержимость правила r на конечном фрейме $\mathcal{F}$ такой же структуры, как и раньше. В частности, найдутся нетривиальные антицепи $\mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ с известными свойствами. Однако, т.к. ширина логики равна t и антицепь $\mathcal{Z}$ имеет ко-накрытие в $\mathcal{F}$, то мощность антицепи $\mathcal{Y}$ строго меньше t. Как и ранее, на фрейме $\mathcal{F}$ опровергнется правило $\mathcal{R}_n,\ 1 \leq n \leq t-1$. Доказательство независимости воспроизводит доказательство теоремы 3.4.

В статьях [13], [14] было введено понятие глобально допустимого правила вывода логики L и базиса таких правил. Говорим, что правило r **глобально допустимо в логике** L, если r допустимо во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих логику L. Набор правил вывода $\mathcal{R}$ называется **базисом глобально допустимых правил логики** L, если (i) каждое правило из $\mathcal{R}$ глобально допустимо в L; (ii) любое глобально допустимое в L правило выводится из $\mathcal{R}$ во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих L. Базис $\mathcal{R}$ глобально допустимых в L правил называется **независимым**, если $\forall\ \lambda(\supseteq L)\ \forall\ q \in \mathcal{R} \quad (\mathcal{R} - \{q\} \not\vdash_\lambda q)$ (т.е. независим во всех логиках $\lambda \supseteq L$).

Из доказанных выше утверждений следует:

Теорема 3.7. *Правила* $\{\mathcal{R}_n,\ n > 1\ n \in N\}$, *образуют базис глобально допустимых правил вывода логик* $PT2$ *и* $PT3$.

Действительно, по теореме 3.2 для всех $n > 1$ правила $\mathcal{R}_n$ глобально допустимы в данных логиках. По теоремам 3.3, 3.5, 3.6 любое глобально допустимое в них правило выводится из заданного множества правил $\mathcal{R}_n$.

Заметим, что логика $PT2, PT3$ не имеет конечного базиса для допустимых правил, в то время как все ее расширения – имеют. Отсюда следует вполне очевидное наблюдение: расширения логик $S4, PT2, PT3$ не наследуют бесконечность базиса для допустимых правил.

Напомним, что расширение логики $S4$ ($K4$) сохраняет допустимые правила логики $S4$ ($K4$) если и только если расширение имеет свойство ко-накрытий (см. например [10], [12]). В связи с этим возникает вопрос: *когда расширения логики с конечным (или независимым) базисом для допустимых правил сохраняют конечность (или независимость) базиса допустимых правил?*

Список литературы

[1] V.V. Rybakov, *Admissibility of logical inference rules,* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier Sci. Publ., New-York – Amsterdam, **136** (1997). MR1454360

[2] V.V. Rybakov, M. Terziler, V.V. Remazki, *Basis in Semi-Redused Form for the Admissible Rules of the Intuitionistc Logic IPC*, Mathematical Logic Quarterly, **46**:2 (2000), 207–218. MR1755810

[3] V.V. Rybakov, *Construction of an Explicit Basis for Rules admissible in Modal system S4*, Mathematical Logic Quarterly, **47**:4 (2001), 441–451. MR1865763
[4] R. Iemhoff, *On the admissible rules of Intuitionistic Propositional Logic*, Journal of Symbolic Logic, **66**:2 (2001), 281–294. MR1825185
[5] E. Jeřábek, *Admissible rules of modal logics*, Journal of Logic and Computation, **15**:4 (2005), 411–431. MR2157725
[6] E. Jeřábek, *Independent bases of admissible rules*, Logic Journal of the IGPL, **16**:3 (2008), 249–267. MR2426605
[7] В.В. Римацкий, *Явный базис допустимых правил вывода логик конечной ширины*, Журнал СФУ, Сер. математика и физика, **1** (2008), 85–93.
[8] Рыбаков В.В., В. Р. Кияткин, М. Терзилер. *Независимый базис для допустимых правил в предтабличных логиках*, Алгебра и логика, **39**:2 (2000), 119–130. MR1778318
[9] Максимова Л.Л. *Предтабличные расширения системы Льюиса* $S4$, Алгебра и логика, **14**:1 (1975), 28–55. MR0396226
[10] Rybakov V.V., Gencer G., Oner T. *Description of modal logics inheiting admissible rules for S4*. Logic J. of IGPL, **7**:5 (1999), 655–663.
[11] В.В. Рыбаков, *Критерий допустимости правил вывода в модальной системе* $S4$ *и интуиционистской логики* H, Алгебра и логика, **23**:5 (1984), 369–384.
[12] Руцкий А.Н., Федоришин Б.Р.*Критерий наследования допустимых правил вывода K4*, Сибирский математический журнал, **43**:6 (2002), 1350–1361.
[13] Rimatski V.V., Rybakov V.V. *A note on globally admissible Inference rules for modal and superintuitionistic logics*, Bulletin of the Section of Logic, **34**:2 (2005), 93–99.
[14] Римацкий В.В. *Таблично допустимые правила вывода*, Алгебра и логика, **48**:3 (2009), 400–414.

Виталий Валентинович Римацкий
Сибирский Федеральный Университет,
Институт математики
пр. Свободный 79,
660041, Красноярск, Россия
E-mail address: Gemmeny@rambler.ru

Владимир Ростиславович Кияткин
Сибирский Федеральный Университет,
Институт математики
пр. Свободный 79,
660041, Красноярск, Россия