S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 90–108 (2013) УДК 514.8, 517.983, 519.6
MSC 44A30

СРАВНЕНИЕ ДВУХ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ ТОМОГРАФИИ

И.Е. СВЕТОВ, А.П. ПОЛЯКОВА

Abstract. We compare two algorithms for reconstruction the vector fields from the known values of the ray transforms. The first algorithm is based on the least square method, approximating sequence is constructed with using the B-splines. The second algorithm is based on the method of singular value decomposition of operators of ray transforms, basis vector fields are constructed with using the harmonic polynomials and Jacobi polynomials.

Keywords: vector tomography, solenoidal field, potential field, approximation, ray transforms, least square method, B-splines, singular value decomposition, orthogonal polynomials.

1. Введение

Суть томографических (неразрушающих) методов состоит в многократных измерениях физического поля, “пропущенного” через объект исследования, и в дальнейшей математической обработке и интерпретации результатов. Конечной целью являются как можно более полные сведения о структуре и внутренних свойствах объекта. В математике такого типа задачи принято называть обратными. Наряду со скалярными свойствами объектов искомыми величинами могут быть векторные и тензорные поля. Математические формулировки задач восстановления векторных и тензорных полей возникли сравнительно

Svetov, I.E., Polyakova, A.P., Comparison of two algorithms for the numerical solution of the two-dimensional vector tomography.

© 2013 Светов И.Е., Полякова А.П.

Работа осуществлена при частичной поддержке РФФИ (проекты №12-01-31178 мол_а, №11-07-00447-а), СО РАН (проект фундаментальных исследований, выполняемых совместно со сторонними научными организациями, проект СО РАН и УрО РАН №2012-32).

Поступила 25 августа 2012 г., опубликована 15 февраля 2013 г.

недавно (см., например, монографию В.Г. Романова [1]). Современные постановки используют аппарат интегральной геометрии векторных и тензорных полей на римановом многообразии [2]. Отметим обзор Т. Шустера [3], посвященный наиболее важным теоретическим и численным достижениям в области векторной томографии за последние два десятилетия.

Под термином "задача векторной томографии" в данной работе подразумевается следующая постановка. Пусть некоторая ограниченная область плоскости заполнена средой, с прямолинейным характером распространения лучей. В среде распределено некоторое векторное поле v. По известным продольным и (или) поперечным лучевым преобразованиям требуется найти векторное поле.

Целью данной работы является сравнение двух алгоритмов численного решения задачи двумерной векторной томографии. В обоих алгоритмах построение базисных последовательностей векторных полей основано на возможности представления соответствующих полей с использованием потенциалов.

Первый алгоритм основан на методе наименьших квадратов (МНК) с аппроксимирующей последовательностью, построенной с использованием двумерных B-сплайнов. Ранее этот алгоритм хорошо себя зарекомендовал в задачах эмиссионной [4], векторной [5] и 2-тензорной томографии [6]. Выбор аппроксимирующей последовательности полей на основе многочленов сменился B-сплайновыми аппроксимирующими последовательностями [7]–[9].

Второй алгоритм основан на методе сингулярного разложения (SV-разложения) операторов лучевых преобразований векторных полей с базисами построенными с использованием гармонических функций и классических ортогональных полиномов. Суть метода заключается в том, что оператор представляется в виде ряда по сингулярным числам и базисным элементам в пространстве образов, тогда обратный оператор будет представлять собой ряд со схожей структурой, где задействованы прообразы этих базисных элементов и те же сингулярные числа. Решение задачи в скалярном случае хорошо известно, в работах [10]–[14] построено разложение оператора Радона действующего на функции. В то время как разложения операторов лучевых преобразований векторных полей появились сравнительно недавно [15], [16].

Проведено всестороннее тестирование алгоритмов предложенных в работах [9] (МНК с использованием B-сплайнов) и [16] (SV-разложение операторов лучевых преобразований) с целью сравнения точностей восстановления векторных полей с их использованием. Исследовано влияние на точность восстановления таких факторов, как гладкость восстанавливаемого векторного поля, уровень и характер шума, внесенного в исходные данные.

2. Определения и постановка задачи

Пусть $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$ — единичный круг с центром в начале прямоугольной декартовой системы координат, а $\partial\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ его граница. Введем обозначение для цилиндра $Z = \{(\alpha, s) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in [0, 2\pi), s \in (-1, 1)\}$.

Основные используемые пространства. Мы будем использовать гильбертовы пространства Соболева $H^k(\mathbb{B})$, с целыми $k \geqslant 0$, состоящие из интегрируемых в квадрате функций, заданных в $\mathbb{B}$ и имеющих производные вплоть до k-го порядка из $L_2(\mathbb{B})$. Подпространства $H_0^k(\mathbb{B})$ — подмножества функций из $H^k(\mathbb{B})$, обращающихся в нуль на $\partial\mathbb{B}$ вместе со всеми производными вплоть до

$(k-1)$-го порядка. Скалярное произведение определяется формулой

$$(f,g)_{H^k(\mathbb{B})} = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k} \int\limits_{\mathbb{B}} D^\alpha f D^\alpha g \, dx,$$

где α — мультииндекс, а D^α — оператор производной по мультииндексу.

Множество векторных полей $w(x) = (w_i(x)) = (w^i(x))$, определенных в $\mathbb{B}$, обозначается $S^1(\mathbb{B})$. Скалярное произведение в $S^1(\mathbb{B})$ вводится формулой

$$\langle u(x), v(x)\rangle = u_i(x)v^i(x),$$

где по повторяющимся сверху и снизу одноименным индексам подразумевается суммирование от 1 до 2. Напомним, что в евклидовом пространстве с заданной в нем декартовой прямоугольной системой координат различия между контравариантными и ковариантными компонентами нет. Обычно мы будем пользоваться ковариантными компонентами.

Функциональное пространство $L_2(S^1(\mathbb{B}))$ состоит из интегрируемых в квадрате векторных полей, определенных в $\mathbb{B}$. Скалярное произведение двух векторных полей u и v из пространства $L_2(S^1(\mathbb{B}))$ задается формулой:

$$(u,v)_{L_2(S^1(\mathbb{B}))} = \int\limits_{\mathbb{B}} \langle u(x), v(x)\rangle dx.$$

Пространства Соболева для векторных полей обозначим через $H^k(S^1(\mathbb{B}))$, $H_0^k(S^1(\mathbb{B}))$.

Кроме того мы будем использовать весовые пространства $L_2(Z,\rho)$ и $H^k(Z,\rho)$, где $\rho(s) > 0$ задана на Z. Скалярное произведение функций f и g из $L_2(Z,\rho)$ задается формулой:

$$(f,g)_{L_2(Z,\rho)} = \int\limits_{Z} f(x)g(x)\rho(x)dx.$$

Через $H^1(Z)$ будем обозначать пространство Соболева $H^1(Z,1)$, скалярное произведение в котором может быть определено следующей формулой

$$(f,g)_{H^1(Z)} = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} (1+k^2+l^2)c_{k,l}(f)\overline{c_{k,l}(g)}, \tag{1}$$

где $c_{k,l}(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{Z} f(\alpha,s)e^{-i(k\alpha+ls)}\,d\alpha\,ds$ — коэффициенты разложения f в ряд Фурье.

Дифференциальные операторы. Операторы *внутреннего дифференцирования* d и *внутреннего* $\perp$*-дифференцирования* $\mathrm{d}^\perp$

$$\mathrm{d}, \mathrm{d}^\perp : H^k(\mathbb{B}) \to H^{k-1}(S^1(\mathbb{B}))$$

определяются формулами

$$(\mathrm{d}\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \qquad (\mathrm{d}^\perp\varphi)_i = (-1)^i\frac{\partial\varphi}{\partial x_{3-i}}.$$

Наряду с этими операторами нам понадобится оператор *дивергенции*

$$\delta : H^k(S^1(\mathbb{B})) \to H^{k-1}(\mathbb{B}),$$

который определяется формулой

$$(\delta v) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}.$$

Векторное поле $w \in H^k(S^1(\mathbb{B}))$ называется *потенциальным*, если существует функция $\varphi \in H^{k+1}(\mathbb{B})$ такая, что $w = \mathrm{d}\varphi$. Векторное поле $w \in H^k(S^1(\mathbb{B}))$ называется *соленоидальным*, если $\delta w = 0$. Нетрудно проверить, что поле $\mathrm{d}^\perp\psi$ является соленоидальным для $\psi \in H^{k+1}(\mathbb{B})$.

Любое векторное поле $w \in H_0^k(S^1(\mathbb{B}))$ единственным образом представимо в виде [17]

$$w = \mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}^\perp\psi, \qquad \varphi\big|_{\partial\mathbb{B}} = 0.$$

В данной работе будут рассматриваться только те векторные поля, потенциалы потенциальной и соленоидальной частей которого обращаются в нуль на $\partial\mathbb{B}$.

Преобразование Радона и лучевые преобразования. Единичные векторы $\xi = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\eta = \xi^\perp = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ и вещественное число $s \in \mathbb{R}$ задают прямую $L_{\xi,s}$: $x_i = s\xi^i + t\eta^i$.

Преобразование Радона

$$\mathcal{R} : H^k(\mathbb{B}) \to H^k(Z, \rho(s))$$

функции $f \in H^k(\mathbb{B})$ определяется формулой:

$$(\mathcal{R}f)(s,\alpha) = \int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s\xi + t\eta)dt. \tag{2}$$

Продольное лучевое преобразование $\mathcal{P}$ и *поперечное лучевое преобразование* $\mathcal{P}^\perp$

$$\mathcal{P}, \mathcal{P}^\perp : H^k(S^1(\mathbb{B})) \to H^k(Z, \rho(s))$$

векторного поля $\omega \in H^k(S^1(\mathbb{B}))$ задаются формулами

$$[\mathcal{P}\omega](s,\alpha) = \int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \eta^i\omega_i(s\xi + t\eta)dt, \tag{3}$$

$$[\mathcal{P}^\perp\omega](s,\alpha) = \int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \xi^i\omega_i(s\xi + t\eta)dt. \tag{4}$$

В отличие от преобразования Радона, лучевые преобразования векторных полей обладают нетривиальными ядрами. В ядре оператора $\mathcal{P}$ лежат все потенциальные векторные поля $u = \mathrm{d}\varphi$, $\varphi \in H_0^{k+1}(\mathbb{B})$. Поэтому по известным значениям продольного лучевого преобразования можно восстановить лишь соленоидальные векторные поля $\mathrm{d}^\perp\psi$. Ядро оператора $\mathcal{P}^\perp$ состоит из всех соленоидальных векторных полей $u = \mathrm{d}^\perp\psi$, $\psi \in H_0^{k+1}(\mathbb{B})$. Поэтому по известным значениям поперечного лучевого преобразования можно восстановить лишь потенциальные векторные поля $\mathrm{d}\varphi$.

Для потенциалов $\varphi \in H_0^1(\mathbb{B})$ имеют место следующие равенства:

$$[\mathcal{P}^\perp\mathrm{d}\varphi] = [\mathcal{P}\mathrm{d}^\perp\varphi] = \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathcal{R}\varphi\right). \tag{5}$$

Эти равенства следуют непосредственно из определений преобразования Радона и лучевых преобразований.

Для преобразования Радона известна оценка устойчивости

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{B})} \leqslant C_{\mathcal{R}} \|\mathcal{R}f\|_{H^1(Z)}.$$

С использованием этой оценки и равенств (5) можно получить оценки для лучевых преобразований

$$\|\mathrm{d}^{\perp}\psi\|_{L_2(S^1(\mathbb{B}))} \leqslant C_{\mathcal{P}} \|\mathcal{P}w\|_{H^1(Z)}, \qquad \|\mathrm{d}\varphi\|_{L_2(S^1(\mathbb{B}))} \leqslant C_{\mathcal{P}^{\perp}} \|\mathcal{P}^{\perp}w\|_{H^1(Z)}. \tag{6}$$

Постановка задачи векторной томографии. Пусть некоторое векторное поле w задано в единичном круге. По известным значениям продольного и (или) поперечного лучевых преобразований требуется восстановить соленоидальную и (или) потенциальную часть векторного поля w.

В данной работе для численного решения поставленной задачи будут использоваться два алгоритма. Первый алгоритм основан на методе наименьших квадратов (МНК), а в качестве аппроксимирующей последовательности выступают соленоидальные и потенциальные векторные поля, построенные на основе двумерных B-сплайнов. Второй алгоритм основан на методе сингулярного разложения (SV-разложения) операторов продольного и поперечного лучевых преобразований векторных полей. Ортонормированные соленоидальные и потенциальные базисы строятся на основе полиномов Якоби и гармонических многочленов.

3. Схемы МНК и метода SV-разложения

Пусть H, K — гильбертовы пространства, и пусть $A : H \to K$ — линейный ограниченный оператор. Задача состоит в том, чтобы найти решение операторного уравнения

$$Af = g \tag{7}$$

с заданным элементом $g \in K$ и искомым $f \in H$.

3.1. **Общая схема метода наименьших квадратов.** Пусть H_1 — гильбертово пространство, вложение $H_1 \subset H$ непрерывно, и пространство H_1 плотно в H. Для теоретического обоснования МНК необходимо предположить, что оператор A удовлетворяет оценке $\|f\|_{H_1} \leqslant C\,\|Af\|_K$ и, в частности, A инъективен. Предполагая, что для некоторого $g \in K$ уравнение (7) разрешимо, но при этом известно лишь приближенное значение g_δ правой части g, удовлетворяющее неравенству

$$\|g_\delta - g\|_K = \|g_\delta - Af\|_K < \delta, \tag{8}$$

мы приходим к стандартной в теории некорректных задач постановке [18]. Именно, для заданного приближения g_δ правой части g требуется найти аппроксимацию f_δ искомого элемента f.

В пространстве H_1 выберем предельно плотную последовательность подпространств (как известно [19], последовательность подпространств называется предельно плотной в пространстве Z, если для любого элемента $z \in Z$ последовательность ортогональных проекций на эти подпространства сходится к z при $n \to \infty$), задаваемых множествами линейно независимых элементов

$$Q_n = \{\varphi_{nk}\}_{k=1}^{n^2}. \tag{9}$$

Так как H_1 плотно в H, то последовательность подпространств, задаваемых множествами (9), предельно плотна и в H. В силу инъективности оператора A элементы множества

$$U_n = \{\psi_{nk} = A\varphi_{nk}\}_{k=1}^{n^2} \tag{10}$$

линейно независимы для любого n. Заметим, что при этом, если оператор не сюръективен, последовательность (10) может и не быть полной в K.

Пусть задан элемент $g_\delta \in K$, удовлетворяющий условию (8). Фиксируя некоторое n, положим $g_{\delta n} = \sum\limits_{k=1}^{n^2} c_k^{(n)} \psi_{nk}$. Если мы определили коэффициенты $c_k^{(n)}$, доставляющие минимум норме $\|g_\delta - g_{\delta n}\|_K$, то, в силу линейности оператора A и способа построения последовательности (10), получим

$$g_{\delta n} = \sum_{k=1}^{n^2} c_k^{(n)} \psi_{nk} = \sum_{k=1}^{n^2} c_k^{(n)} A\varphi_{nk} = A\Big(\sum_{k=1}^{n^2} c_k^{(n)} \varphi_{nk}\Big) = Af_{\delta n}, \tag{11}$$

где $f_{\delta n} = \sum\limits_{k=1}^{n^2} c_k^{(n)} \varphi_{nk}$. Аппроксимация $f_{\delta n}$ сходится к точному решению f уравнения (7), то есть $\|f - f_{\delta n}\|_H \to 0$ при $\delta \to 0,\ n \to \infty$. Обоснование этого дано в [4].

Решение задачи минимизации нормы $\|g_\delta - g_{\delta n}\|_K$ приводит к известной системе линейных алгебраических уравнений с матрицей Грама, определитель которой отличен от нуля при любых n,

$$\sum_{k=1}^{n^2} c_k^{(n)} (\psi_{nk}, \psi_{nm})_K = (g_\delta, \psi_{nm})_K, \qquad m = \overline{1, n^2}. \tag{12}$$

3.2. **Общая схема метода SV-разложения.** *Сингулярным разложением (SV-разложением)* оператора A называется его представление

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (f, f_k)_H g_k, \tag{13}$$

где (f_k), (g_k) — нормированные ортогональные системы в пространствах H и K соответственно, а величины $\sigma_k > 0$ называются *сингулярными числами* оператора A.

Теорема 1. *Если оператор A допускает сингулярное разложение (13), то*

$$A^{-1} g = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1} (g, g_k)_K f_k.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [20]. Согласно этой теореме, оператор A^{-1} не ограничен в том и только в том случае, если $\sigma_{k_j} \to 0$ для некоторой последовательности $k_j \to \infty$. Тогда оператор A^{-1} можно регуляризовать с помощью *усеченного сингулярного разложения*,

$$A_\gamma^{-1} g = \sum_{k \leqslant 1/\gamma} \sigma_k^{-1} (g, g_k)_K f_k. \tag{14}$$

Число γ называется *параметром регуляризации*. От выбора этого параметра в значительной мере зависит качество регуляризации. Подходящее значение всегда можно подобрать эмпирическим способом.

4. SV-разложения операторов лучевых преобразований

SV-разложения для операторов продольного $\mathcal{P}$ и поперечного $\mathcal{P}^{\perp}$ лучевых преобразований построены в работе [16]. Приведем основные результаты.

Напомним, оператор поперечного лучевого преобразования $\mathcal{P}^{\perp}$ мы рассматриваем для восстановления потенциальных векторных полей $u = \mathrm{d}\varphi$, оператор продольного лучевого преобразования $\mathcal{P}$ — для восстановления соленоидальных векторных полей $v = \mathrm{d}^{\perp}\psi$, с потенциалами $\varphi, \psi \in H_0^1(\mathbb{B})$.

Базисные векторные поля в исходном пространстве $L_2(S^1(\mathbb{B}))$ будем строить методом потенциалов, т.е. выбираем некоторую систему функций в пространстве потенциалов $H_0^1(\mathbb{B})$ и далее путем применения дифференциальных операторов d (для потенциальных полей) или $\mathrm{d}^{\perp}$ (для соленоидальных полей) образуем из нее векторные потенциальный и соленоидальный базисы в исходном пространстве $L_2(S^1(\mathbb{B}))$.

За основу исходной базисной системы потенциалов выбираются полиномы следующего вида

$$\begin{aligned} F_{k,n}^{\cos}(x_1,x_2) &= \lambda_{k,n}\left(1-|x|^2\right) H_k^{\cos}(x_1,x_2) P_n^{(k+2,k+1)}(|x|^2), \quad k,n \geqslant 0, \\ F_{k,n}^{\sin}(x_1,x_2) &= \lambda_{k,n}\left(1-|x|^2\right) H_k^{\sin}(x_1,x_2) P_n^{(k+2,k+1)}(|x|^2), \quad k \geqslant 1,\ n \geqslant 0, \end{aligned} \tag{15}$$

или то же самое в полярной системе координат,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{k,n}^{\cos}(r,\varphi) &= \lambda_{k,n}\left(1-r^2\right) r^k \cos k\varphi P_n^{(k+2,k+1)}(r^2), \qquad k,n \geqslant 0, \\ \tilde{F}_{k,n}^{\sin}(r,\varphi) &= \lambda_{k,n}\left(1-r^2\right) r^k \sin k\varphi P_n^{(k+2,k+1)}(r^2), \qquad k \geqslant 1, \qquad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Здесь $H_k^{\cos}$, $H_k^{\sin}$ — гармонические полиномы степени k, а $P_n^{(p,q)}$ — полиномы Якоби степени n с индексами p, q, определенные на отрезке $[0,1]$. Появление множителя $(1-r^2)$ не случайно и связано с краевыми условиями, предъявляемыми к потенциалам. Отметим так же, что $F_{0,n}^{\sin}(x_1,x_2) \equiv 0$, поэтому эти полиномы в базисной системе потенциалов не участвуют.

Заметим, что в пространстве $H_0^1(\mathbb{B})$ система (15) не является ортогональной, но это и не требуется. Применяя к нашим потенциалам оператор d, получим семейство потенциальных векторных полей,

$$(\mathbf{F}_{k,n}^{\cos,\sin})^{\mathrm{pot}}(x_1,x_2) := \mathrm{d}F_{k,n}^{\cos,\sin}(x_1,x_2), \tag{16}$$

а применение оператора $\mathrm{d}^{\perp}$ дает семейство соленоидальных векторных полей,

$$(\mathbf{F}_{k,n}^{\cos,\sin})^{\mathrm{sol}}(x_1,x_2) := \mathrm{d}^{\perp}F_{k,n}^{\cos,\sin}(x_1,x_2). \tag{17}$$

Константу $\lambda_{k,n}$ выбираем так, чтобы поля $(\mathbf{F}_{k,n}^{\cos,\sin})^{\mathrm{pot}}$, $(\mathbf{F}_{k,n}^{\cos,\sin})^{\mathrm{sol}}$ имели единичную норму:

$$\lambda_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{C_{n+k}^k}{n+1}\sqrt{\dfrac{k+2n+2}{2\pi}}, & k \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}}, & k = 0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Системы потенциальных (16) и соленоидальных (17) векторных полей являются ортогональными в пространстве $L_2(S^1(\mathbb{B}))$.*

Доказательство. Рассмотрим потенциалы

$$\widetilde{F}^{\cos}_{k,n}(r,\varphi) = \lambda_{k,n}\left(1-r^2\right) r^k \cos(k\varphi) P_n^{(k+2,k+1)}(r^2),$$
$$\widetilde{F}^{\cos}_{l,m}(r,\varphi) = \lambda_{l,m}\left(1-r^2\right) r^l \cos(l\varphi) P_m^{(l+2,l+1)}(r^2).$$

Вычислив скалярное произведение соответствующих потенциальных векторных полей $\langle \mathrm{d}\widetilde{F}^{\cos}_{k,n}, \mathrm{d}\widetilde{F}^{\cos}_{l,m}\rangle$, получим, что подынтегральное выражение имеет вид

$$I = F(r^2)\cos(k\varphi)\cos(l\varphi) + G(r)\cos((k-l)\varphi),$$

где функция F зависит только от r^2, а G зависит только от r. В случае, когда $k \neq l$, после интегрирования по φ от 0 до 2π получим нуль, то есть потенциальные векторные поля $\mathrm{d}\widetilde{F}^{\cos}_{k,n}$ и $\mathrm{d}\widetilde{F}^{\cos}_{l,m}$ ортогональны в $L_2(S^1(\mathbb{B}))$ для любых m, n и $k \neq l$.

Рассмотрим случай, когда $k = l$, $n \neq m$. Для краткости обозначим $P_n := P_n^{(k+2,k+1)}(r^2)$, $P_m := P_m^{(k+2,k+1)}(r^2)$, и $H_k := r^k\cos(k\varphi)$. После замены переменной $t = r^2$, вычислив скалярное произведение $\langle \mathrm{d}\widetilde{F}^{\cos}_{k,n}, \mathrm{d}\widetilde{F}^{\cos}_{k,m}\rangle$, получим, что подынтегральное выражение имеет вид:

$$\begin{aligned} I = \lambda_{k,n}\lambda_{k,m}\Big[&(H_k)^2\big(4t-4k(1-t)\big)P_nP_m + k^2(1-t)^2t^{k-1}P_nP_m \\ &+ (H_k)^2(1-t)\big(-4t+2k(1-t)\big)\big(P_n(P_m)' + (P_n)'P_m\big) \\ &+4(H_k)^2t(1-t)^2(P_n)'(P_m)'\Big]. \end{aligned}$$

Поскольку только $(H_k)^2 = t^k\cos^2(k\varphi)$ зависит от φ, имеем, что

$$\int_0^{2\pi} I d\varphi = \begin{cases} \lambda_{k,n}\lambda_{k,m}\pi\big(f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)\big), & k \geqslant 1, \\ 2\lambda_{0,n}\lambda_{0,m}\pi\big(f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)\big), & k = 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= 2t^{k-1}\big(2t^2 - 2kt(1-t) + k^2(1-t)^2\big)P_nP_m, \\ f_2 &= t^k(1-t)\big(-4t+2k(1-t)\big)\big(P_nP_m\big)', \\ f_3 &= 4t^{k+1}(1-t)^2(P_n)'(P_m)'. \end{aligned}$$

Интегрируя f_2 по t от 0 до 1 по частям, а затем складывая с f_1, получим

$$\int_0^1 (f_1+f_2)\,dt = 4(k+1)\int_0^1 (1-t)t^kP_n^{(k+2,k+1)}(t)P_m^{(k+2,k+1)}(t)dt.$$

Для $n \neq m$ этот интеграл равен нулю, так как полиномы Якоби $P_n^{(p,q)}(t)$, $P_m^{(p,q)}(t)$ ортогональны на интервале $[0,1]$ с весом $(1-t)^{p-q}t^{q-1}$.

Наконец рассмотрим оставшийся член $f_3 = 4t^{k+1}(1-t)^2(P_n)'(P_m)'$. Пользуясь формулой $\left(P_n^{(p,q)}\right)' = -\frac{n(n+p)}{q}P_{n-1}^{(p+2,q+1)}$ и ортогональностью полиномов Якоби, получим, что интеграл

$$\int_0^1 f_3\,dt = \frac{4nm(n+k+2)(m+k+2)}{(k+1)^2}\int_0^1 (1-t)^2t^{k+1}P_{n-1}^{(k+4,k+2)}(t)P_{m-1}^{(k+4,k+2)}(t)dt$$

также равен нулю.

Ортогональность потенциальных векторных полей $\mathrm{d}\widetilde{F}^{\sin}_{k,n}$ и $\mathrm{d}\widetilde{F}^{\sin}_{l,m}$, $\mathrm{d}\widetilde{F}^{\sin}_{k,n}$ и $\mathrm{d}\widetilde{F}^{\cos}_{l,m}$ доказывается аналогично. Ортогональность соленоидальных векторных полей следует из свойства $\langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}g\rangle = \langle \mathrm{d}^{\perp}f, \mathrm{d}^{\perp}g\rangle$ для любых f, g. $\square$

Далее для двумерного случая мы сформулируем результат, полученный в работе [11] для произвольной размерности пространства. Он важен для построения SV-разложения операторов лучевых преобразований.

Предложение 3. *Пусть* $k, n \geqslant 0$, $\Psi(\varphi, s) = (1-s^2)^{3/2}|s|^{-k}C^{(2)}_{k+2n}(s)H_k(|s|,\varphi)$, *где* $C^{(\mu)}_{k+2n}(s)$ *— полиномы Гегенбауэра, а* $H_k(r,\varphi)$ *— гармонические полиномы. Тогда* $\Phi = \mathcal{R}^{-1}\Psi$ *задается формулой*

$$\Phi(\varphi, r) = c(k,n)(1-r^2)P_n^{(k+2,k+1)}(r^2)H_k(r,\varphi),$$

где $P_n^{(p,q)}$ *— полиномы Якоби степени* n *с индексами* p, q, *и* $c(k,n) = \frac{(k+2n+3)!}{8(n+1)(k+2n)!}$.

Теорема 4. *Функции*

$$\begin{aligned}
&\left[\mathcal{P}^{\perp}(\mathbf{F}^{\cos}_{k,n})^{\mathrm{pot}}\right](\alpha, s) = \left[\mathcal{P}(\mathbf{F}^{\cos}_{k,n})^{\mathrm{sol}}\right](\alpha, s)\\
&\qquad = a(k,n)\sqrt{1-s^2}C^{(1)}_{k+2n+1}(s)\cos k\alpha =: \Psi^{\cos}_{k,n}(\alpha, s), \qquad k, n \geqslant 0,\\
&\left[\mathcal{P}^{\perp}(\mathbf{F}^{\sin}_{k,n})^{\mathrm{pot}}\right](\alpha, s) = \left[\mathcal{P}(\mathbf{F}^{\sin}_{k,n})^{\mathrm{sol}}\right](\alpha, s)\\
&\qquad = a(k,n)\sqrt{1-s^2}C^{(1)}_{k+2n+1}(s)\sin k\alpha =: \Psi^{\sin}_{k,n}(\alpha, s), \qquad k \geqslant 1,\ n \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

где $a(k,n) = (-1)^{n+1}\frac{2\sqrt{2}}{\pi(k+2n+2)}$, *образуют ортогональную систему в пространстве* $L_2(Z, (1-s^2)^{-1/2})$ *образов поперечного (продольного) лучевого преобразования, с нормой*

$$\|\Psi^{\cos,\sin}_{k,n}\|^2_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} = \frac{4\pi}{k+2n+2}. \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая Предложение 3, образы потенциалов (15) при преобразовании Радона без учета констант имеют вид

$$(1-s^2)^{3/2}|s|^{-k}C^{(2)}_{k+2n}(s)H_k(|s|,\alpha). \tag{20}$$

Поскольку $F_{k,n}(x,y) = 0$ на ∂B, то

$$\left[\mathcal{P}^{\perp}(\mathrm{d}F^{\cos,\sin}_{k,n})\right] = \left[\mathcal{P}(\mathrm{d}^{\perp}F^{\cos,\sin}_{k,n})\right] = \frac{\partial(\mathcal{R}F^{\cos,\sin}_{k,n})}{\partial s}.$$

Дифференцируя по s выражение (20) и используя свойства полиномов Гегенбауэра, получим:

$$\begin{aligned}
J_{k,n} &:= \frac{\partial}{\partial s}\Big((1-s^2)^{3/2}|s|^{-k}C^{(2)}_{k+2n}(s)H_k(|s|,\alpha)\Big)\\
&= -(k+2n+3)(1-s^2)^{1/2}|s|^{-k}\big(sC^{(2)}_{k+2n}(s) - C^{(2)}_{k+2n-1}(s)\big)H_k(|s|,\alpha)\\
&= -\frac{(k+2n+1)(k+2n+3)}{2}(1-s^2)^{1/2}|s|^{-k}C^{(1)}_{k+2n+1}(s)H_k(|s|,\alpha).
\end{aligned}$$

Далее, учитывая ортогональность полиномов Гегенбауэра $C^{(1)}_m$ на $(-1,1)$ с весом $(1-s^2)^{-1/2}$ и тригонометрических функций $\cos k\alpha$, $\sin k\alpha$ на $[0, 2\pi]$, получим, что скалярное произведение функций $J_{k,n}, J_{l,m}$ в $L_2(Z, (1-s^2)^{-1/2})$ при $k \neq l$ или $n \neq m$ равно нулю.

Выражения для константы $a(k,n)$ и нормы (19) нетрудно получить, пользуясь результатами Теоремы 2, Предложения 4, формулой (15) и выражением для вычисления нормы полиномов Гегенбауэра. □

Таким образом, мы получили, что система функций

$$\begin{aligned}
G^{\cos}_{k,n}(\alpha,s) &:= \sqrt{\frac{k+2n+2}{4\pi}}\Psi^{\cos}_{k,n}(\alpha,s)\\
&= (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{1-s^2}C^{(1)}_{k+2n+1}(s)\cos k\alpha, \qquad k,n\geqslant 0,\\
G^{\sin}_{k,n}(\alpha,s) &:= \sqrt{\frac{k+2n+2}{4\pi}}\Psi^{\sin}_{k,n}(\alpha,s)\\
&= (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{1-s^2}C^{(1)}_{k+2n+1}(s)\sin k\alpha, \qquad k\geqslant 1,\ n\geqslant 0,
\end{aligned}$$

является ортонормированной в пространстве $L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})$ и имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{P}^{\perp}(\mathbf{F}^{\cos}_{k,n})^{\mathrm{pot}}\right](\alpha,s) &= \left[\mathcal{P}(\mathbf{F}^{\cos}_{k,n})^{\mathrm{sol}}\right](\alpha,s) = \sigma_{k,n}G^{\cos}_{k,n}(\alpha,s), \qquad k,n\geqslant 0,\\
\left[\mathcal{P}^{\perp}(\mathbf{F}^{\sin}_{k,n})^{\mathrm{pot}}\right](\alpha,s) &= \left[\mathcal{P}(\mathbf{F}^{\sin}_{k,n})^{\mathrm{sol}}\right](\alpha,s) = \sigma_{k,n}G^{\sin}_{k,n}(\alpha,s), \qquad k\geqslant 1,\ n\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Числа $\sigma_{k,n} = 2\sqrt{\frac{\pi}{k+2n+2}}$ — сингулярные числа операторов $\mathcal{P}^{\perp}$ и $\mathcal{P}$. Таким образом мы получили следующие результаты.

Теорема 5. *Сингулярное разложение оператора $\mathcal{P}^{\perp}$ имеет вид*

$$[\mathcal{P}^{\perp}u] = \sum_{k,n=0}^{\infty}\sigma_{k,n}\big(u,(\mathbf{F}^{\cos}_{k,n})^{\mathrm{pot}}\big)_{L_2(S^1(\mathbb{B}))}G^{\cos}_{k,n} + \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{\infty}\sigma_{k,n}\big(u,(\mathbf{F}^{\sin}_{k,n})^{\mathrm{pot}}\big)_{L_2(S^1(\mathbb{B}))}G^{\sin}_{k,n},$$

где $\sigma_{k,n} = 2\sqrt{\frac{\pi}{k+2n+2}}$ — сингулярные числа. Искомое потенциальное векторное поле u вычисляется с использованием обратного оператора $(\mathcal{P}^{\perp})^{-1}$ по формуле

$$\begin{aligned}
u = (\mathcal{P}^{\perp})^{-1}g \quad &= \sum_{k,n=0}^{\infty}\sigma^{-1}_{k,n}\big(g,G^{\cos}_{k,n}\big)_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}(\mathbf{F}^{\cos}_{k,n})^{\mathrm{pot}}\\
&+ \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{\infty}\sigma^{-1}_{k,n}\big(g,G^{\sin}_{k,n}\big)_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}(\mathbf{F}^{\sin}_{k,n})^{\mathrm{pot}}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Теорема 6. *Сингулярное разложение оператора $\mathcal{P}$ имеет вид*

$$[\mathcal{P}v] = \sum_{k,n=0}^{\infty}\sigma_{k,n}\big(v,(\mathbf{F}^{\cos}_{k,n})^{\mathrm{sol}}\big)_{L_2(S^1(\mathbb{B}))}G^{\cos}_{k,n} + \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{\infty}\sigma_{k,n}\big(v,(\mathbf{F}^{\sin}_{k,n})^{\mathrm{sol}}\big)_{L_2(S^1(\mathbb{B}))}G^{\sin}_{k,n},$$

где $\sigma_{k,n} = 2\sqrt{\frac{\pi}{k+2n+2}}$ — сингулярные числа. Искомое соленоидальное векторное поле v вычисляется с использованием обратного оператора $(\mathcal{P})^{-1}$ по формуле

$$\begin{aligned}
v = (\mathcal{P})^{-1}g \quad &= \sum_{k,n=0}^{\infty}\sigma^{-1}_{k,n}\big(g,G^{\cos}_{k,n}\big)_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}(\mathbf{F}^{\cos}_{k,n})^{\mathrm{sol}}\\
&+ \sum_{\substack{k=1\\n=0}}^{\infty}\sigma^{-1}_{k,n}\big(g,G^{\sin}_{k,n}\big)_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}(\mathbf{F}^{\sin}_{k,n})^{\mathrm{sol}}.
\end{aligned} \tag{22}$$

5. Алгоритмы восстановления векторных полей

5.1. **Алгоритм, основанный на МНК.** Данный алгоритм является модифицированной версией алгоритма, предложенного в [4] и развитого далее в [5]–[9].

Укажем функциональные пространства, в рамках которых реализован алгоритм МНК численного решения задачи векторной томографии. В качестве пространства H выбрано пространство Соболева $H^1(S^1(\mathbb{B}))$, пространством H_1 является $L_2(S^1(\mathbb{B}))$. В качестве пространства K выбирается пространство Соболева $H^1(Z)$. Если ставится задача о восстановлении соленоидальной части векторного поля, тогда оператор A, описанный в общей схеме алгоритма, определяется формулой (3). Если же ставится задача о восстановлении потенциальной части векторного поля, тогда оператор A определяется формулой (4). Оценки (6) обосновывают правомерность использования МНК при решении поставленной задачи.

Элементы предельно плотной последовательности подпространств задаются множествами (9), состоящими из соленоидальных векторных полей, построенных на основе двумерных B-сплайнов (для восстановления соленоидальной части векторного поля по продольным лучевым преобразованиям), или потенциальных векторных полей, построенных на основе двумерных B-сплайнов (для восстановления потенциальной части векторного поля по поперечным лучевым преобразованиям). Подробнее о построении базисных полей ниже.

1) Дискретизация значений переменных α, s. Задавая натуральное L, получаем дискретные последовательности α_i, $i = 0, 1, \ldots, 4L-1$; s_j, $j = -L+1, \ldots, L-1$, $\Delta\alpha = \pi/2L$, $\Delta s = 1/L$, $\alpha_0 = s_0 = 0$, для переменных α, s. Задание α_i, s_j означает фиксацию векторов $\xi_i = (\cos\alpha_i, \sin\alpha_i)$ и $\eta_i = (-\sin\alpha_i, \cos\alpha_i)$ и точки

$$x_{ij} = \left(\cos\alpha_i s_j + \sin\alpha_i\sqrt{1-s_j^2}, \sin\alpha_i s_j - \cos\alpha_i\sqrt{1-s_j^2}\right) \in \partial\mathbb{B},$$

из которой "выпускается" луч в направлении η_i, причем $\langle \eta_i, \nu(x_{ij})\rangle < 0$. Натуральное L выбиралось в соответствии с требованиями, налагаемыми процедурой БПФ. В численных экспериментах использовалась дискретизация 256×128 по α, s.

2) Приближенное вычисление интегралов вдоль лучей, для восстанавливаемого векторного поля. Интегралы вдоль лучей могут быть вычислены аналитически или численно. Эта часть является основой для следующих этапов алгоритмов восстановления векторного поля, и поэтому при численном вычислении интегралов расчеты проводились с высокой степенью точности. При вычислении лучевых преобразований (3) и (4) для восстанавливаемого поля, заключающемся в интегрировании вдоль прямой, использовалась квадратурная формула Боде высокой степени точности $O\left(h^6\right)$,

$$\int\limits_{t_0}^{t_4} F(t)\,dt \approx \Delta t\left(e_0F_0 + e_1F_1 + e_2F_2 + e_1F_3 + e_0F_4\right), \tag{23}$$

где $e_0 = 14/45,\ e_1 = 64/45,\ e_2 = 24/45,\ F_i = F(t_i),\ i = 0,\ \ldots,\ 4$. На каждом шаге вычисления преобразований (3) и (4) контролировались условия выхода луча за пределы единичного круга $\mathbb{B}$ и условия постоянства шага Δt на текущем промежутке $[t_l, t_{l+4}]$ в квадратурной формуле Боде (23).

3) Задание векторных полей, построенных на основе B-сплайнов. Выбор шага Δ_n равномерной сетки на интервале $[-1,1]$, ячейки которой служат носителями B-сплайнов, определяет количество сплайнов и, тем самым, размерность конечномерных подпространств как самих базисных векторных полей, так и их образов под действием лучевых преобразований. Мы ограничиваемся использованием сплайнов невысоких степеней ($1 \leqslant m \leqslant 5$) по равномерному разбиению Δ_n.

Напомним определение B-сплайнов. Пусть на отрезке $[-1,1]$ задано равномерное разбиение $\Delta_n : -1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ с шагом $h = x_i - x_{i-1} = 2/n$. Через B_m^i будем обозначать одномерный B-сплайн m-й степени с серединой отрезка-носителя в точке $x_{i+\frac{m+1}{2}}$. B-сплайн 1-й степени определяется формулой

$$B_1^i(x) = \begin{cases} (x - x_i)/h & \text{для } x \in [x_i, x_{i+1}), \\ (x_{i+2} - x)/h & \text{для } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}), \\ 0 & \text{для } x \notin [x_i, x_{i+2}). \end{cases}$$

Значения B-сплайнов более высоких степеней вычисляются по рекуррентным формулам

$$B_m^i(x) = \frac{x - x_i}{mh} B_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{mh} B_{m-1}^{i+1}(x).$$

При проведении экспериментов использовались явные формулы.

Тензорное произведение одномерных сплайнов $B_m^i(x^1)$ и $B_m^j(x^2)$ представляет собой двумерный B-сплайн $B_m^{ij}(x) = B_m^i(x^1) \times B_m^j(x^2)$ степени m по равномерному разбиению $\Delta_n \times \Delta_n$. Известно (см. [21]), что одномерные B-сплайны степени m, заданные на равномерной сетке с шагом h, линейно независимы и любой потенциал ψ может быть ими аппроксимирован. Очевидно, это свойство переносится и на двумерные B-сплайны B_m^{ij}, и на их производные $\partial B_m^{ij}/\partial x^k$, для всех i, j, k при $m \geqslant 1$.

При решении задачи по восстановлению соленоидальной (потенциальной) части векторного поля по его известным продольным (поперечным) лучевым преобразованиям, базисные соленоидальные (потенциальные) векторные поля B_{ms} (B_{mp}) строятся на основе B-сплайнов по формулам

$$B_{ms}(x) = \Big(-\frac{\partial B_m}{\partial x^2}, \frac{\partial B_m}{\partial x^1} \Big), \qquad B_{mp}(x) = \Big(\frac{\partial B_m}{\partial x^1}, \frac{\partial B_m}{\partial x^2} \Big). \tag{24}$$

При численной реализации в базис включаются только те векторные поля, носитель которых полностью лежит внутри круга. Таким образом, коэффициенты, соответствующие B-сплайнам, носитель которых полностью или частично лежит вне круга $\mathbb{B}$, полагаются равными нулю.

4) Вычисление интегралов вдоль лучей для базисных полей. В работе [22] были получены аналитические выражения для вычисления образов двумерных B-сплайнов под действием преобразования Радона. Используя этот результат и равенства (5), были получены точные формулы для вычисления

лучевых преобразований (3) и (4) для базисных полей $B_{ms}(x)$ и $B_{mp}(x)$, соответственно. Приведем формулы для того случая, когда центр носителя векторных полей $B_{ms}(x)$ и $B_{mp}(x)$ находится в начале координат

$$\big[\mathcal{P}B_{ms}\big](\alpha,s) = \big[\mathcal{P}^{\perp}B_{mp}\big](\alpha,s) = K_m(\alpha)\sum_{i,j=1}^{m+2} C_{ij}^m \chi_{ij}^m(\alpha,s),$$

где

$$\begin{aligned} K_m(\alpha) &= \frac{-1}{(2m)!\,h^{2m}(\cos\alpha\,\sin\alpha)^{m+1}};\\ C_{ij}^m &= (-1)^{i+j}C_{m+1}^{i-1}C_{m+1}^{j-1};\\ \chi_{ij}^m(\alpha,s) &= \begin{cases}(p_{ij}^m(\alpha)-s)^{2m}, & \text{при } p_{ij}^m(\alpha)-s>0,\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}\\ p_{ij}^m(\alpha) &= h(((m+3)/2-i)\cos\alpha + ((m+3)/2-j)\sin\alpha). \end{aligned}$$

5) Дискретизация скалярного произведения в пространстве $H^1(Z)$. Возможны различные способы дискретизации скалярного произведения (1). В качестве его дискретного аналога был выбран следующий вариант

$$\langle f,q\rangle = \sum_{k,l=0}^{M-1}[1+(k-N/2)^2+(l-N/2)^2]c_{k,l}(f)\overline{c_{k,l}(q)},$$

который в сочетании с известными свойствами ДПФ [23], позволяет вдвое сократить размер основного массива, в котором размещены элементы матрицы Грама.

6) Решение системы линейных уравнений. Для решения системы использовался метод Холецкого. Обозначим матрицу Грама через J, через (a_{ij}) — ее элемент, а через b — правую часть системы ($b_m = (q_\delta, \psi_{nm})_{H^1(Z)}$). Применяя алгоритм специального LU-разложения матрицы J, приводим ее к виду $J = LL^T$. Тогда решение системы $Jc^{(n)} = b$ сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами: $Lz = b$, $L^Tc^{(n)} = z$. Коэффициенты матрицы $L = (l_{ij})$ находятся по формулам

$$l_{ii} = \Big(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1}(l_{ik})^2\Big)^{1/2}, \qquad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}}\Big(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}\Big),$$

где $j = 1,\dots,i-1$, $i = 1,\dots,p$. Вычислив $c_k^{(n)}$, получим $f_{\delta n} = \sum_{k=1}^{p} c_k^{(n)}\varphi_{nk}$.

5.2. **Алгоритм, основанный на методе SV-разложения.** Укажем функциональные пространства, в рамках которых реализован алгоритм, основанный на SV-разложении операторов лучевых преобразований векторных полей. В качестве пространства H выбрано пространство $L_2(S^1(\mathbb{B}))$, пространством K выбирается пространство $L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})$. Если ставится задача о восстановлении соленоидальной части векторного поля, тогда оператор A, описанный в общей схеме алгоритма, определяется формулой (3). Если же ставится задача о восстановлении потенциальной части векторного поля, тогда оператор A определяется формулой (4).

1)-2) Дискретизация значений переменных α, s и приближенное вычисление интегралов вдоль лучей, для восстанавливаемого векторного поля проводились аналогично с одноименными этапами реализации алгоритма, основанного на МНК.

3) Усеченное SV-разложение. Выбор максимальной степени N потенциалов, участвующих при построении базисных полей, ограничивает выражения (21) и (22) конечным числом слагаемых. Методом усеченного сингулярного разложения получаем полиномиальное приближение для обратных операторов

$$u = (\mathcal{P}^{\perp})^{-1} g \approx \sum_{k,n=0}^{k+2n\leqslant N} \sqrt{\frac{k+2n+2}{4\pi}} \big(g, G_{k,n}^{\cos}\big)_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} (\mathbf{F}_{k,n}^{\cos})^{\mathrm{pot}}$$

$$+ \sum_{\substack{k=1\\ n=0}}^{k+2n\leqslant N} \sqrt{\frac{k+2n+2}{4\pi}} \big(g, G_{k,n}^{\sin}\big)_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} (\mathbf{F}_{k,n}^{\sin})^{\mathrm{pot}}, \tag{25}$$

$$v = (\mathcal{P})^{-1} g \approx \sum_{k,n=0}^{k+2n\leqslant N} \sqrt{\frac{k+2n+2}{4\pi}} \big(g, G_{k,n}^{\cos}\big)_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} (\mathbf{F}_{k,n}^{\cos})^{\mathrm{sol}}$$

$$+ \sum_{\substack{k=1\\ n=0}}^{k+2n\leqslant N} \sqrt{\frac{k+2n+2}{4\pi}} \big(g, G_{k,n}^{\sin}\big)_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} (\mathbf{F}_{k,n}^{\sin})^{\mathrm{sol}}. \tag{26}$$

При вычислении скалярных произведений $(g, G_{k,n}^{\cos,\sin})_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}$ (двойных интегралов по Z) используются формулы Симпсона численного интегрирования по α, s.

6. Численные эксперименты

В данном разделе приводятся описания и результаты численных экспериментов. Исходными данными в тестах являются значения функций $[\mathcal{P}w](s,\alpha)$ и $[\mathcal{P}^{\perp}w](s,\alpha)$, вычисленные в узлах сетки при дискретизации 256×128 по α, s.

Проведена серия численных экспериментов по исследованию влияния на относительную погрешность (%, в норме $L_2(S^1(\mathbb{B}))$) восстановления векторного поля таких факторов, как гладкость восстанавливаемого поля, уровень и характер вносимого в исходные данные шума. Относительная погрешность восстановления векторного поля вычислялась по формуле

$$\frac{\|f - f_\delta\|_{L_2(S^1(\mathbb{B}))}}{\|f\|_{L_2(S^1(\mathbb{B}))}} \cdot 100\%,$$

где f — восстанавливаемое векторное поле, а f_δ — его аппроксимация. Для восстановления каждого из модельных векторных полей использовались оба предлагаемых алгоритма.

При реализации алгоритма, основанного на МНК, базисные поля строились с использованием B-сплайнов 4-ой степени (для краткости будем его называть “Алгоритм I”). В качестве параметра шага сетки $h = 2/n$ использовались нечетные n. Через n_{opt} будем обозначать оптимальный параметр для Алгоритма I, такой что для любого $n > n_{opt}$ относительная погрешность восстановления больше либо равна относительной погрешности восстановления при n_{opt}.

При реализации алгоритма, основанного на SV-разложении (“Алгоритм II”), использовались значения параметра N (максимальная степень потенциалов)

усеченного сингулярного разложения кратные 10-ти. Через N_{opt} будем обозначать оптимальный параметр для Алгоритма II, такой что для любого $N > N_{opt}$ относительная погрешность восстановления больше либо равна относительной погрешности восстановления при N_{opt}.

5.1 Первый эксперимент поставлен с целью исследования зависимости точности восстановления от гладкости восстанавливаемого потенциального векторного поля. Восстанавливалось потенциальное поле с потенциалом

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} x_1 x_2 (0.64 - |x|^2)^p, & \text{при } |x| \leqslant 0.8, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где p из множества $\{1, 2, 3\}$. В таблице 1 приведена зависимость относительной ошибки ε_{opt} восстановления от p, а также значения n_{opt} и N_{opt}.

Таблица 1.

p	1	2	3
Алгоритм I, ε_{opt}	17.05	0.89	0.06
Алгоритм I, n_{opt}	63	63	63
Алгоритм II, ε_{opt}	11.27	0.31	0.01
Алгоритм II, N_{opt}	170	140	120

Из таблицы видно, что с ростом p относительная ошибка восстановления уменьшается. Точность восстановления Алгоритмом II лучше для всех p. Значение параметра n_{opt} Алгоритма I одинаковое для всех p. В то время как параметр N_{opt} Алгоритма II уменьшается с ростом p, то есть для хорошего восстановления гладких полей требуется меньшее количество базисных элементов. На рисунке 1 приведены компоненты тестового поля и его лучшие аппроксимаций двумя алгоритмами при $p = 1$.

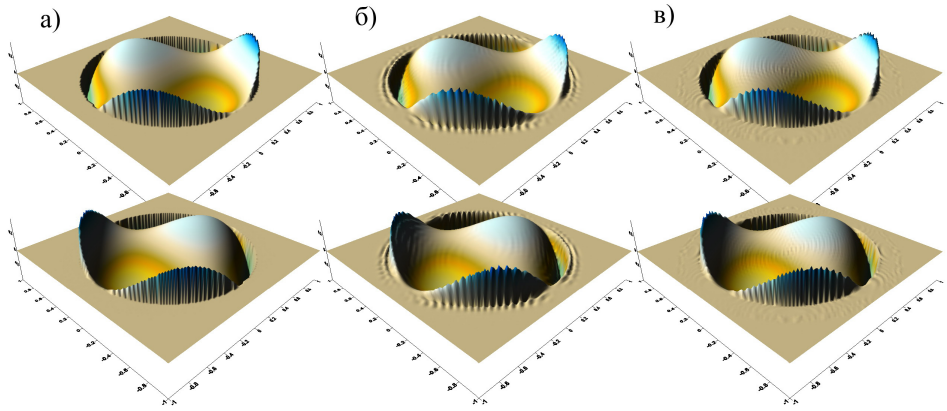

Рис. 1. Компоненты восстанавливаемого потенциального векторного поля при $p = 1$ (столбец а) и компоненты его аппроксимаций Алгоритмом I (б) и Алгоритмом II (в).

5.2 Следующий эксперимент поставлен с целью исследования зависимости точности восстановления векторного поля от характера и уровня вносимого

шума. Восстанавливалось гладкое соленоидальное векторное поле с потенциалом

$$\begin{aligned}\psi(x) = {} & 7\exp\{-100((x_1-0.4)^2+x_2^2)\} - 3\exp\{-100((x_1+0.4)^2+x_2^2)\} \\ & - 4\exp\{-100((x_1-0.2)^2+(x_2+\sqrt{3}/5)^2)\} \\ & + 6\exp\{-100((x_1+0.2)^2+(x_2+\sqrt{3}/5)^2)\} \\ & - 4\exp\{-100((x_1-0.2)^2+(x_2-\sqrt{3}/5)^2)\} \\ & + 6\exp\{-100((x_1+0.2)^2+(x_2-\sqrt{3}/5)^2)\}.\end{aligned}$$

В таблице 2 приведены значения параметров n_{opt} и N_{opt} при различном уровне и характере шума. Именно при этих значениях параметров на рисунке 2 приведены относительные погрешности восстановления двумя предлагаемыми алгоритмами.

Таблица 2.

равн. шум (%)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Алгоритм I, n_{opt}	63	41	37	35	35	35	31	31	29	29	29
Алгоритм II, N_{opt}	70	50	50	50	50	50	50	40	40	40	40
L_2-шум (%)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Алгоритм I, n_{opt}	63	37	35	33	31	29	29	29	29	29	29
Алгоритм II, N_{opt}	70	50	50	50	40	40	40	40	40	40	40

Из графиков на рисунке 2 видно, что относительная погрешность восстановления при внесении L_2-шума (шум с нормальным распределением с параметрами (0,1)) выше чем при внесении равномерного шума. При одинаковом уровне и характере внесенного в исходные данные шума относительная погрешность восстановления Алгоритмом I меньше чем для Алгоритма II. При увеличении уровня шума параметры n_{opt} и N_{opt} уменьшаются.

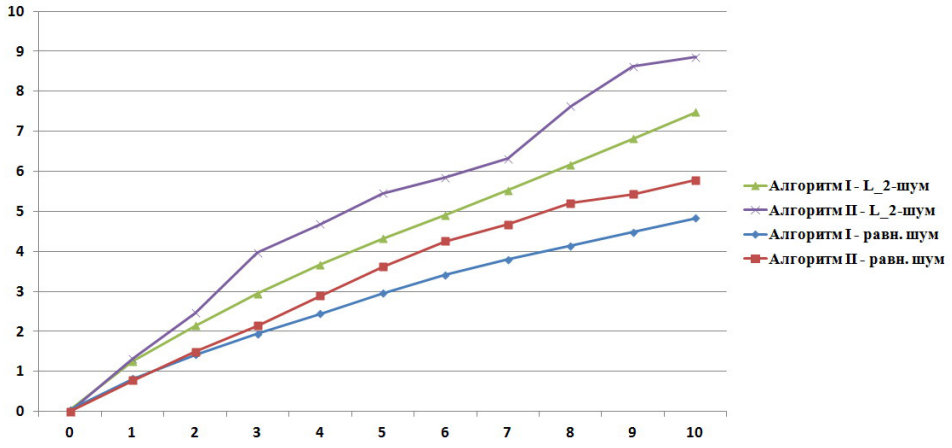

Рис. 2. Зависимость относительной погрешности восстановления соленоидального векторного поля (вертикальная ось, %) от характера и уровня вносимого в данные шума (горизонтальная ось, %).

7. Заключительные замечания и выводы

В данной работе численно решалась задача восстановления соленоидальной (потенциальной) части векторного поля, заданного в единичном круге, по известному продольному (поперечному) лучевому преобразованию. Среда с прямолинейным характером распространения лучей. Для решения задачи использовались два алгоритма. Первый алгоритм основан на методе наименьших квадратов с аппроксимирующей последовательностью, построенной с использованием двумерных B-сплайнов (алгоритм I). Второй алгоритм основан на методе сингулярного разложения (SV-разложения) операторов лучевых преобразований векторных полей с базисами построенными с использованием гармонических функций и классических ортогональных полиномов (Алгоритм II).

Алгоритм I может быть применен и для решения задачи векторной томографии в рефрагирующих средах [9]. В то время как Алгоритм II применим лишь для решения задачи, поставленной в среде без рефракции. В случае рефрагирующей среды возможно построение лишь конечномерного сингулярного разложения.

На основе проведенных численных экспериментов по восстановлению соленоидальных и потенциальных векторных полей можно сделать следующие предварительные выводы.

При использовании точных исходных данных относительная погрешность восстановления Алгоритмом II меньше по сравнению с Алгоритмом I. Особенно явно это преимущество видно при восстановлении разрывных полей.

Внесение шума в исходные данные приводит к росту относительной ошибки восстановления и уменьшению оптимального количества базисных элементов для обоих используемых алгоритмов. Относительная погрешность восстановления при внесении L_2-шума выше чем при внесении равномерного шума. При одинаковом уровне и характере внесенного в исходные данные шума относительная погрешность восстановления Алгоритмом I меньше чем для Алгоритма II.

Список литературы

[1] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, Наука, Москва, 1984. MR0759893

[2] V. A. Sharafutdinov, *Integral Geometry of Tensor Fields*, VSP, Utrecht, 1994. MR1374572

[3] T. Schuster, *20 years of imaging in vector field tomography: a review*, In Mathematical Methods in Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Radiation Therapy (IMRT), Y. Censor, M. Jiang, A. K. Louis (Eds.), Series: Publications of the Scuola Normale Superiore, CRM Series, Birkhäuser, **7** (2008), 389–424. MR2454389

[4] E. Yu. Derevtsov, A. G. Kleshchev, V. A. Sharafutdinov, *Numerical solution of the emission $2D$-tomography problem for a medium with absorption and refraction*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **7** (1999), №1, 83–103. MR1681260

[5] Е. Ю. Деревцов, И. Г. Кашина, *Численное решение задачи векторной томографии с помощью полиномиальных базисов*, Сибирский Журнал Вычислительной Математики, **5** (2002), №3, 233–254. Zbl 1027.65176

[6] Е. Ю. Деревцов, И. Г. Кашина, *Приближенное решение задачи реконструкции тензорного поля второй валентности с помощью полиномиальных базисов*, Сибирский Журнал Индустриальной Математики, **5** (2002), №1, 39–62. MR1964602

[7] Е. Ю. Деревцов, И. Е. Светов, Ю. С. Волков, *Использование B-сплайнов в задаче эмиссионной $2D$-томографии в рефрагирующей среде*, Сибирский Журнал Индустриальной Математики, **11** (2008), №3, 45–60. MR2535293

[8] И. Е. Светов, А. П. Полякова, *Восстановление 2-тензорных полей, заданных в единичном круге, по их лучевым преобразованиям на основе МНК с использованием B-сплайнов*, Сибирский Журнал Вычислительной Математики, **13** (2010), №2, 183–199. Zbl 1212.65511

[9] E. Yu. Derevtsov, I. E. Svetov, Yu. S. Volkov, T. Schuster, *Numerical B-spline solution of emission and vector 2D-tomography problems for media with absorbtion and refraction*, Proceedings 2008 IEEE Region 8 International Conference on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering SIBIRCON-08, Novosibirsk Scientific Center, Novosibirsk, Russia, July 21–25 (2008), 212–217.

[10] M. E. Davison, *A singular value decomposition for the Radon transform in n-dimensional Euclidean space*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **3** (1981), 321–340. MR0629949

[11] A. K. Louis, *Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, **15** (1984), 621–633. MR0740700

[12] E. T. Quinto, *Singular value decomposition and inversion methods for the exterior Radon transform and a spherical transform*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **95** (1985), 437–448.

[13] P. Maass, *The X-ray transform: Singular value decomposition and resolution*, Inverse problems, **3** (1987), 727–741. MR0928050

[14] A. K. Louis, *Incomplete Data Problems in X-Ray Computerized Tomography. I: Singular Value Decomposition of the Limited Angle Transform*, Numerische Mathematik, **48** (1986), 251–262. MR0826468

[15] E. Yu. Derevtsov, S. G. Kazantsev, T. Schuster, *Polynomial bases for subspaces of vector fields in the unit ball. Method of ridge functions*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **15** (2007), №1, 1–38. MR2313505

[16] E. Yu. Derevtsov, A. V. Efimov, A. K. Louis, T. Schuster, *Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **19** (2011), №4–5, 689–715. MR2853118

[17] H. Weyl, *The method of orthogonal projection in potential theory.* Duke Mathematical Journal, **7** (1940), 411–444. MR0003331

[18] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, Москва, 1980. MR0591674

[19] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, Москва, 1980.

[20] Ф. Наттерер, *Математические аспекты компьютерной томографии*, Мир, Москва, 1990. MR1082347

[21] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн функций*, Наука, Москва, 1980. MR0614595

[22] А. П. Полякова, *О получении аналитических выражений для образов B-сплайнов при преобразовании Радона и их использовании в задачах скалярной томографии*, Сибирские Электронные Математические Известия, **7** (2010), Труды Первой международной молодежной школы-конференции “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”, Часть I, 248–257.

[23] *Статистические методы для ЭВМ / Под редакцией К. Энслейна, Э. Рэлстона, Г. С. Уилфа*, Наука, Москва, 1986. Zbl 0732.62005

Иван Евгеньевич Светов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: svetovie@math.nsc.ru

Анна Петровна Полякова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: anna.polyakova@ngs.ru