

S@MR

ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.1–С.171 (2014)

ТРУДЫ
В МЕЖДУНАРОДНОЙ МОЛОДЕЖНОЙ
ШКОЛЫ-КОНФЕРЕНЦИИ
“ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ”

Под редакцией С. И. Кабанихина и М. А. Шишленина

2014

Содержание

М. А. Бектемесов, С. И. Кабанихин, Д. Б. Нурсеитов, С. Е. Касенов <i>Численное решение начально-краевой задачи для уравнения Гельмгольца</i>	C.4
А. С. Белоносов, М. А. Шишленин <i>Задача продолжения для параболического уравнения с данными на части границы</i>	C.22
Н. Ю. Зятьков, А. А. Айзенберг, Е.Ж. Ракшаева, А.М. Айзенберг <i>Прототип высокоптимизированного пакета TWSM для дифракционного моделирования сейсмических волновых полей с адаптацией под GPU-клuster</i>	C.35
А. И. Ильин, С. И. Кабанихин, Д. А. Воронов <i>Универсальный подход к решению обратной задачи фармакокинетики в случае произвольного количества камер</i>	C.41
А. И. Ильин, С. И. Кабанихин, Д. А. Воронов <i>Численное решение задачи фармакокинетики для трехкамерной фармакокинетической модели с внутрисосудистым способом введения препарата</i>	C.51
А.И. Ильин, С.И. Кабанихин, О.И. Криворотко <i>Об определении параметров моделей, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений</i>	C.62
S.I. Kabanikhin, I.V. Marinin, O.I. Krivorotko <i>3D Modeling of Integrated Natural and Man-made Hazards and Source Determination Problem</i>	C.76
С.И. Кабанихин, Д.Б. Нурсеитов, Б. Шолпанбаев <i>Задача продолжения электромагнитного поля в сторону залигания неоднородностей</i>	C.85
С.И. Кабанихин, О.И. Криворотко, К.С. Бобоев, Н.Ю. Зятьков <i>Построение фундаментального решения системы уравнений теории упругости</i>	C.103
О.И. Krivorotko <i>Fast algorithm for calculation of the moving tsunami wave height</i>	C.115

O.I. Krivorotko

Optimization approach to combined inverse tsunami problem С.121

Н.С. Новиков

*Сравнительный анализ численных методов решения
двумерного аналога уравнения Гельфанд-Левитана* С.132

Д.Б. Нурсеитов, М.А. Шишленин, Б.Б. Шолпанбаев

Двумерные линеаризованные обратные задачи электродинамики С.145

V.G. Cherednichenko

On solvability of interpolation problem for rational functions С.156

М.А. Шишленин

Матричный метод в задачах определения источников колебаний С.161

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.4–С.21 (2014)

УДК 519.63

MSC 65L09

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

М.А. Бектемесов, С.И. Кабанихин, Д.Б. Нурсеитов, С.Е. Касенов

ABSTRACT. We discuss continuation problem for the Helmholtz equation. Numerical algorithm and regularization method based on singular-value decomposition are presented. Comparative analysis of Tikhonov regularization method and Godunov's approach are presented.

Keywords: continuation problem, regularization problem, comparative analysis, numerical methods, Godunov methods

1. ВВЕДЕНИЕ

В акустике рассматриваются только малые колебания среды, и поэтому рассматриваются звуковые волны с малыми амплитудами. Полная система линейных общих уравнений акустики для давления и скорости частиц имеет вид:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p = 0 \\ \beta \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla v = 0 \end{cases}$$

где ρ — плотность среды, v — скорость частиц, p — давление волны и β — сжимаемость среды. Любое частное решение систем уравнения есть свободная волна.

Приведем полную систему уравнений акустики к одному-единственному уравнению относительно величины p . Рассмотрим неоднородную среду и пусть плотность среды $\rho = \rho(x, y)$ зависит от координат. Продифференцируем второе уравнение по времени и представим порядок дифференцирования скорости по

БЕКТЕМЕСОВ, М.А., КАВАНИХИН, С.И., НУРСЕИТОВ, Д.Б., КАСЕНОВ, С.Ю., NUMERICAL SOLUTION OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE HELMHOLTZ EQUATION.

© 2014 Бектемесов М.А., Каванихин С.И., Нурсеитов Д.Б., Касенов С.Ю.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта СО РАН 122 и Министерства образования и науки Российской Федерации.

Поступила 6 апреля 2014 г., опубликована 20 декабря 2014 г.

времени и по координату и заменим величину $\frac{\partial v}{\partial t}$ величину на ее значения из первого уравнения [1].

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p = 0 \\ \beta \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla v = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \\ \beta \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla v) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \\ \beta \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\beta \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = 0$$

$$\beta \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla (\nabla p) = 0$$

$$\beta \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\nabla \rho}{\rho^2} \nabla p - \frac{1}{\rho} \Delta p = 0$$

$$\beta \rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\nabla \rho}{\rho} \nabla p - \Delta p = 0$$

$$c^{-2}(x, y) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p - \nabla \ln(\rho(x, y)) \nabla p$$

где $c^{-2} = \beta \rho$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение акустики [2] в области $Q = \Omega \times (0, +\infty)$, где $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$:

$$(1) \quad c^{-2}(x, y) U_{tt} = \Delta U - \nabla \ln(\rho(x, y)) \nabla U \quad (x, y, t) \in Q$$

В теории колебаний гармоническая зависимость от времени играет важную роль. В частности, это связано с тем, что гармоническая зависимость сохраняется при прохождении колебаний через линейные колебательные системы с постоянными параметрами — резонаторы, фильтры и т.п.: эти системы дают гармонический отклик на гармоническое воздействие. Так как линейных системах принцип суперпозиции справедлив, то в них оказывается удобными рассматривать колебания с любой зависимостью от времени при помощи разложение Фурье, т.е. представлять их в виде суперпозиции колебаний с единственным, гармоническим видом зависимости от времени.

В акустике гармоническая зависимость от времени имеет аналогичные преимущества: для сред, в которых волны удовлетворяют линейным уравнениям, синусоидальная зависимость от времени сохраняется при распространении волны, при ее отражении и преломлении, при рассеянии от препятствий и т.п. Волны с другой зависимостью от времени таким свойствам не обладают. Так как, кроме того, для линейных уравнений акустики справедлив принцип суперпозиции, то волну с практически любой зависимостью от времени можно представить в виде суперпозиции гармонических волн разных частот. Такое представление позволяет вместо волн с любой зависимостью от времени изучать волны с одной единственной зависимостью — гармонической, что удобно именно ввиду сохранения этими волнами своей временной зависимости. Такое разложение волн на гармонические составляющие называют спектральным

разложением Фурье. В зависимости от того, периодична или нет исходная волна, приходим соответственно к ряду или к интегралу Фурье. Обратное преобразование позволяет восстановить исходную волну по ее спектру. Поэтому зная поведение гармонических волн разных частот в тех или иных условиях распространения, можно методом Фурье найти поведение волн любого типа [1].

Предположим, что в Ω установился гармонический режим колебаний:

$$(2) \quad U(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega t}, \quad (x, y, t) \in Q$$

Подставляя (2) в (1) получим уравнение Гельмгольца:

$$-\omega^2 c^{-2} u = \Delta u - \nabla \ln(\rho(x, y)) \nabla u, \quad (x, y) \in \Omega$$

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$(3) \quad -\omega^2 c^{-2} u = \Delta u - \nabla \ln(\rho(x, y)) \nabla u, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$(4) \quad u(0, y) = h_1(y), \quad y \in [0, 1],$$

$$(5) \quad u(x, 0) = h_2(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$(6) \quad u_x(0, y) = f_1(y), \quad y \in [0, 1],$$

$$(7) \quad u_y(x, 0) = f_2(x), \quad x \in [0, 1].$$

Задача (3) — (7) является некорректной. Для численного решения задачи мы сначала сведем ее к обратной задаче $Aq = f$ по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче. Далее мы сведем решение операторного уравнения $Aq = f$ к задаче минимизации целевого функционала $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$. После вычисление градиента $J'q$ целевого функционала, мы применяем метод по координатного спуска для его минимизации [3, 9, 8, 7, 10].

3. ТЕОРЕМА УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u(0, y) = f_1(y), \quad y \in [0, 1],$$

$$u(x, 0) = f_2(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u_x(0, y) = h_1(y), \quad y \in [0, 1],$$

$$u_y(x, 0) = h_2(x), \quad x \in [0, 1].$$

Задачу разделим на две задачи:

Задача 1

$$\Delta u = 0,$$

$$u(0, y) = f_1(y),$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u_x(0, y) = h_1(y),$$

$$u_y(x, 0) = 0.$$

Задача 2

$$\Delta u = 0,$$

$$u(0, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = f_2(x),$$

$$u_x(0, y) = 0,$$

$$u_y(x, 0) = h_2(x).$$

Задача 1 мы продолжим поле по оси x , тогда границу при $y = 1$ можно взять ноль. А также, задача 2 мы продолжим поле по оси y , тогда границу при $x = 1$ можно взять ноль. Пусть $h_2(x) = 0, h_1(y) = 0$.

Задача 1

$$\begin{aligned} (8) \quad & \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ (9) \quad & u(0, y) = f_1(y), & y \in [0, 1], \\ (10) \quad & u(x, 0) = 0, & x \in [0, 1], \\ (11) \quad & u_x(0, y) = 0, & y \in [0, 1], \\ (12) \quad & u(x, 1) = 0, & x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Задача 2

$$\begin{aligned} (13) \quad & \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ (14) \quad & u(0, y) = 0, & y \in [0, 1], \\ (15) \quad & u(x, 0) = f_2(x), & x \in [0, 1], \\ (16) \quad & u(1, y) = 0, & y \in [0, 1], \\ (17) \quad & u_y(x, 0) = 0, & x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Theorem 1 (условной устойчивости). *Пусть для $f_1 \in L_2(0, 1)$ и существует решение $u \in L_2(\Omega)$ задачи (8) — (12). Тогда верна следующая оценка условной устойчивости*

$$(18) \quad \int_0^1 u^2(x, y) dy \leq \left(\int_0^1 f_1^2(y) dy \right)^{1-x} \left(\int_0^1 u^2(1, y) dy \right)^x.$$

Theorem 2 (условной устойчивости). *Пусть для $f_2 \in L_2(0, 1)$ и существует решение $u \in L_2(\Omega)$ задачи (13) — (17). Тогда верна следующая оценка условной устойчивости*

$$(19) \quad \int_0^1 u^2(x, y) dx \leq \left(\int_0^1 f_2^2(x) dx \right)^{1-y} \left(\int_0^1 u^2(x, 1) dx \right)^y.$$

4. СВЕДЕНИЕ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ

Покажем, что решение исследуемой задачи (3) — (7) можно свести к решению обратной задачи по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче.

В качестве прямой задачи будем рассматривать следующую

$$\begin{aligned} (20) \quad & -\omega^2 c^{-2} u = \Delta u - \nabla \ln(\rho(x, y)) \nabla u, & (x, y) \in \Omega, \\ (21) \quad & u(0, y) = h_1(y), & y \in [0, 1], \\ (22) \quad & u(x, 0) = h_2(x), & x \in [0, 1], \\ (23) \quad & u(1, y) = q_1(y), & y \in [0, 1], \\ (24) \quad & u(x, 1) = q_2(x), & x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Обратная задача к задаче (20) — (24) заключается в определении функции $q_1(x), q_2(y)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи.

$$\begin{aligned} u_x(0, y) &= f_1(y), & y \in [0, 1], \\ u_y(x, 0) &= f_2(x), & x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Введем оператор

$$A: (q_1, q_2) \mapsto (u_x(0, y), u_y(x, 0)).$$

Тогда обратную задачу можно записать в операторной форме

$$Aq = f.$$

Введем целевой функционал

$$(25) \quad J(q_1, q_2) = \int_0^1 [u_x(0, y; q_1, q_2) - f_1(y)]^2 dy + \int_0^1 [u_y(x, 0; q_1, q_2) - f_2(x)]^2 dx.$$

Будем минимизировать квадратичный функционал (25) методом Ландвебера. Пусть известно приближение q^n . Последующее приближение определим из:

$$(26) \quad q^{n+1} = q^n - \alpha J'(q^n)$$

здесь $\alpha \in (0, ||A||^{-2})[2]$.

Алгоритм решения обратной задачи

Опишем кратко алгоритм решения обратной задачи на основе по координатного спуска методом итерации Ландвебера.

- (1) Выбираем начальное приближение $q^0 = (q_1^0, q_2^0)$;
- (2) Предположим, что q_n известно, тогда численно решаем прямую задачу

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} - \left(\frac{\rho_x}{\rho} u_x + \frac{\rho_y}{\rho} u_y \right) + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 u &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u(0, y) &= h_1(y), & y \in [0, 1], \\ u(x, 0) &= h_2(x), & x \in [0, 1], \\ u(1, y) &= q_1^n(y), & y \in [0, 1], \\ u(x, 1) &= q_2^n(x), & x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

- (3) Численно решаем сопряженную задачу по первому компоненту

$$\begin{aligned} \psi_{xx} + \psi_{yy} + \left(\frac{\rho_x}{\rho} \psi \right)_x + \left(\frac{\rho_y}{\rho} \psi \right)_y + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \psi &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \psi(0, y) &= 2(u_x(0, y; q_1, q_2) - f_1(y)), & y \in [0, 1], \\ \psi(x, 0) &= 0, & x \in [0, 1], \\ \psi(1, y) &= 0, & y \in [0, 1], \\ \psi(x, 1) &= 0, & x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

- (4) Вычисляем градиент функционала $J'(q_1^n) = -\psi_x(1, y)$;
- (5) Вычисляем следующее приближение q_1^{n+1} по формуле (26);
- (6) Численно решаем прямую задачу

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} - \left(\frac{\rho_x}{\rho} u_x + \frac{\rho_y}{\rho} u_y \right) + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 u &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u(0, y) &= h_1(y), & y \in [0, 1], \\ u(x, 0) &= h_2(x), & x \in [0, 1], \\ u(1, y) &= q_1^{n+1}(y), & y \in [0, 1], \\ u(x, 1) &= q_2^n(x), & x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

(7) Численно решаем сопряженную задачу по второму компоненту

$$\begin{aligned} \psi_{xx} + \psi_{yy} + \left(\frac{\rho_x}{\rho}\psi\right)_x + \left(\frac{\rho_y}{\rho}\psi\right)_y + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\psi &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \psi(1, y) &= 0, & y \in [0, 1], \\ \psi(x, 1) &= 0, & x \in [0, 1], \\ \psi(0, y) &= 0, & y \in [0, 1], \\ \psi(x, 0) &= 2(u_y(x, 0; q_1, q_2) - f_2(x)), & x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

(8) Вычисляем градиент функционала $J'(q_2^n) = -\psi_y(x, 1)$;

(9) Вычисляем следующее приближение q_2^{n+1} по формуле (26).

(10) Вычисляем значение функционала

$$J(q_{n+1}) = \int_0^1 [u_x(0, y; q_1^{n+1}, q_2^{n+1}) - f_1(y)]^2 dy + \int_0^1 [u_y(x, 0; q_1^{n+1}, q_2^{n+1}) - f_2(x)]^2 dx;$$

(11) Если значение целевого функционала не достаточно мало, тогда переходим шагу 2;

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Сначала рассматриваем исходную задачу в дискретной постановке. Проводим численное исследование устойчивости задачи в дискретной постановке.

Дискретизация исходной задачи

Соответствующая разностная задача для исходной задачи (3) — (7) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \\ & - \frac{\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j}}{2h\rho_{i,j}} \cdot \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \\ & - \frac{\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1}}{2h\rho_{i,j}} \cdot \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u_{i,j} = 0, \quad i, j = \overline{1, N-1}, \\ & u_{0,j} = h_1^j, \quad j = \overline{0, N}, \\ & u_{i,0} = h_2^i, \quad i = \overline{0, N}, \\ & u_{1,j} = h_1^j + h \cdot f_1^j, \quad j = \overline{0, N}, \\ & u_{i,1} = h_2^i + h \cdot f_2^i, \quad i = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

Для удобства введем новые обозначения $a_{i,j} = 1 + \frac{\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j}}{4\rho_{i,j}}$,

$$b_{i,j} = 1 + \frac{\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1}}{4\rho_{i,j}}, \quad c = -4 + \left(\frac{\omega \cdot h}{c}\right)^2,$$

$$d_{i,j} = 1 - \frac{\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j}}{4\rho_{i,j}}, \quad e_{i,j} = 1 - \frac{\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1}}{4\rho_{i,j}}.$$

$$(27) \quad a_{i,j}u_{i-1,j} + b_{i,j}u_{i,j-1} + cu_{i,j} + d_{i,j}u_{i,j+1} + e_{i,j}u_{i+1,j} = 0, \quad i, j = \overline{1, N-1},$$

$$(28) \quad u_{0,j} = h_1^j, \quad j = \overline{0, N},$$

$$(29) \quad u_{i,0} = h_2^i, \quad i = \overline{0, N},$$

$$(30) \quad u_{1,j} = h_1^j + h \cdot f_1^j,$$

$$(31) \quad u_{i,1} = h_2^i + h \cdot f_2^i, \quad i = \overline{0, N}.$$

Построим систему разностных уравнений [4, с.379]

$$(32) \quad A \cdot X = B.$$

Здесь A — матрица размером $(N+1)^2$, X — неизвестный вектор вида

$$X = (u_{0,0}, u_{0,1}, \dots, u_{0,N}, u_{1,0}, u_{1,1}, \dots, u_{1,N}, \dots, u_{N,0}, u_{N,1}, \dots, u_{N,N}),$$

B — вектор данных (границные и дополнительные условия).

Исследование устойчивости матрица исходной задачи

Описание численного эксперимента $c = 1$, $\omega = 0.5$

$$\begin{aligned} h_1(y) &= \frac{1 - \cos(8\pi y)}{4}, & h_2(x) &= \frac{1 - \cos(8\pi x)}{4}, \\ q_1(y) &= \frac{1 - \cos(8\pi y)}{4}, & q_2(x) &= \frac{1 - \cos(8\pi x)}{4}, \\ \rho(x, y) &= e^{-\frac{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}{2b^2}}, & b &= 0.1. \end{aligned}$$

В таблице 1 представлены результаты сингулярного разложения матрицы исходной задачи A и прямой задачи A_T для значений $N = 50$.

Матрицы	$\sigma_{max}(A)$	$\sigma_{min}(A)$	$\mu(A)$	$\ A\ $
A_T	743.404	0.015	47056.2	8404.42
A	743.404	$9.07 \cdot 10^{-19}$	$8.19 \cdot 10^{20}$	8404.42

ТАБЛИЦА 1. Сингулярные разложение матриц с размером $(N + 1)^2$

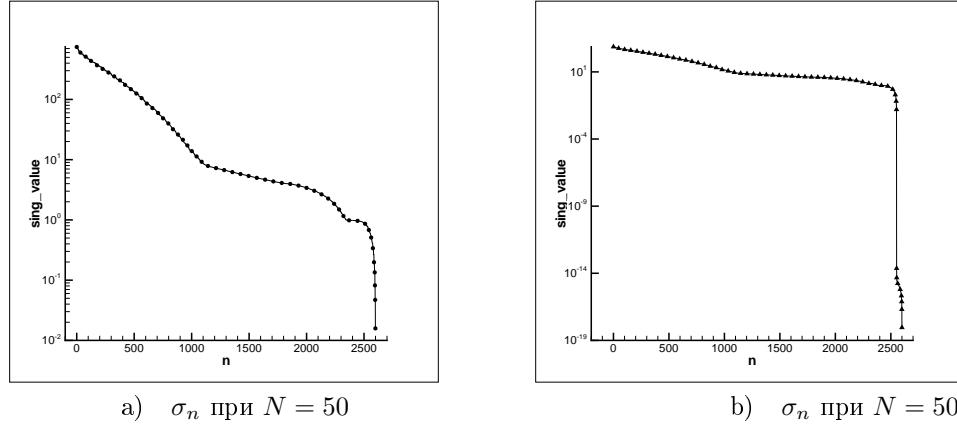


Рис. 1. а) Значение сингулярных чисел матрица A_T с размером $(N + 1)^2$, б) Значение сингулярных чисел матрица A с размером $(N + 1)^2$

Матрица исходной задачи имеет плохую обусловленность [5]. Что подтверждается быстрым убыванием сингулярных чисел на рисунке 1 б).

Численные результаты обратной задачи методом Ландвебера

В данном разделе для решения двумерной прямой задачи для уравнения Гельмгольца, используется метод конечных элементов. Проведена триангуляция с числом треугольников — N_t ; вершин — N_v ; и с числом точек на границе — N . Задача решена с вычислительной пакетом FreeFEM++.

Описание численного эксперимента $c = 1$, $\omega = 0.5$

$$\begin{aligned} h_1(y) &= \frac{1 - \cos(8\pi y)}{4}, & h_2(x) &= \frac{1 - \cos(8\pi x)}{4}, \\ q_1(y) &= \frac{1 - \cos(8\pi y)}{4}, & q_2(x) &= \frac{1 - \cos(8\pi x)}{4}, \\ \rho(x, y) &= e^{-\frac{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}{2b^2}}, & b &= 0.1. \end{aligned}$$

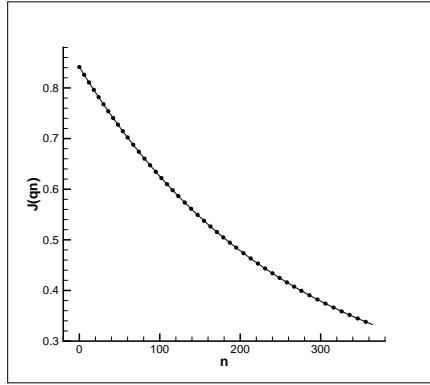
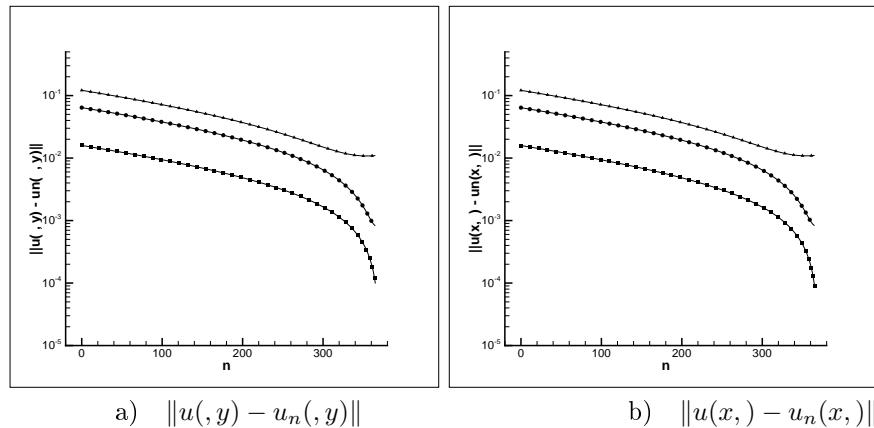


Рис. 2. Значение функционала $J(q_n)$ по итерации

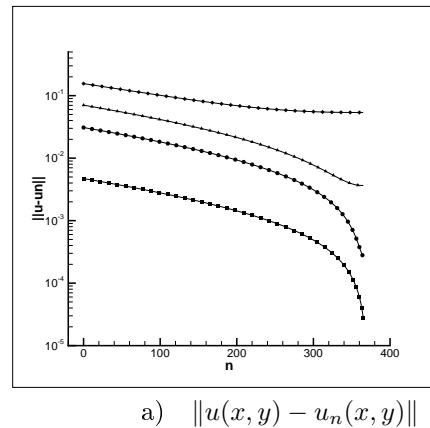
Число итераций, n	$J(q)$	$\ u_T - \tilde{u}\ $
10	0.8158	0.1491
100	0.6254	0.1013
300	0.3788	0.0553
365	0.3323	0.0538

ТАБЛИЦА 2. Результаты решения методом итерации Ландвебера без шума



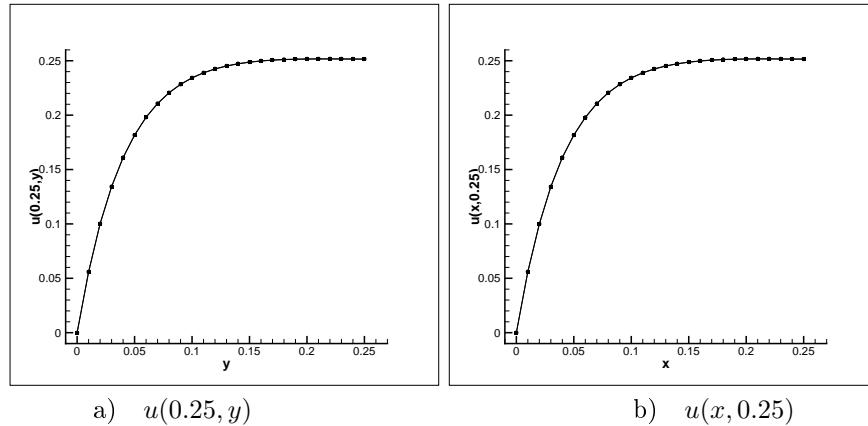
Обозначения: (Знак ■) — при значении $x = 0.25$ и $y = 0.25$, (знак ●) — при значении $x = 0.5$ и $y = 0.5$, (знак ▼) — при значении $x = 0.75$ и $y = 0.75$

Рис. 3. а) Норма разности точной решения границы и восстановленной решении границы, б) Норма разности точной решения границы и восстановленной решении границы



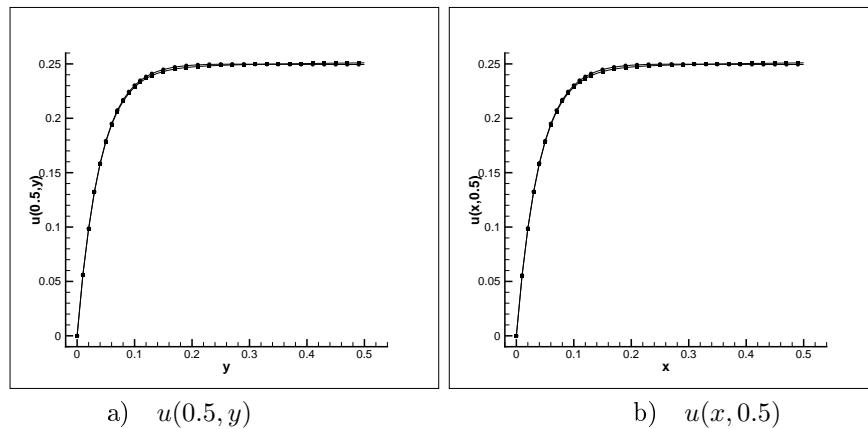
Обозначения: (Знак ■) — при значении $0 \leq x, y \leq 0.25$, (знак ●) — при значении $0 \leq x, y \leq 0.5$, (знак ▼) — при значении $0 \leq x, y \leq 0.75$

Рис. 4. а) Норма разности точной решения и восстановленной решении



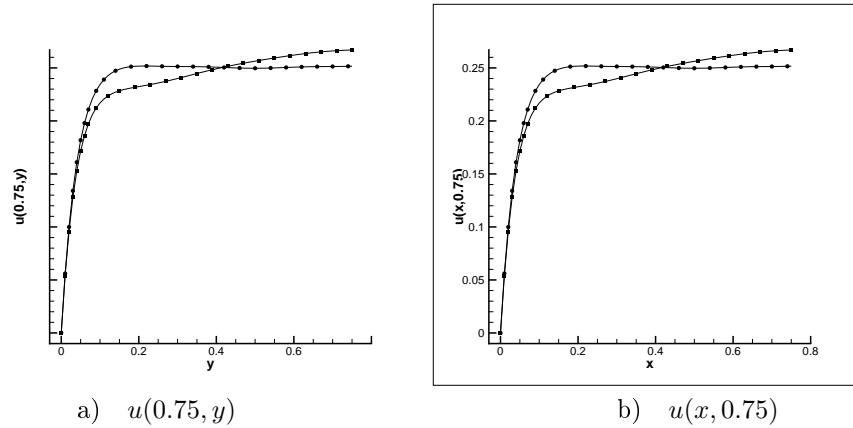
Обозначения: (Знак ■) — решение методом Ландвебера, (знак ●) — точное решение

Рис. 5. На рисунке а) сравнение границ $u(x, y)$ при $x = 0.25$, на рисунке б) сравнение границ $u(x, y)$ при $y = 0.25$



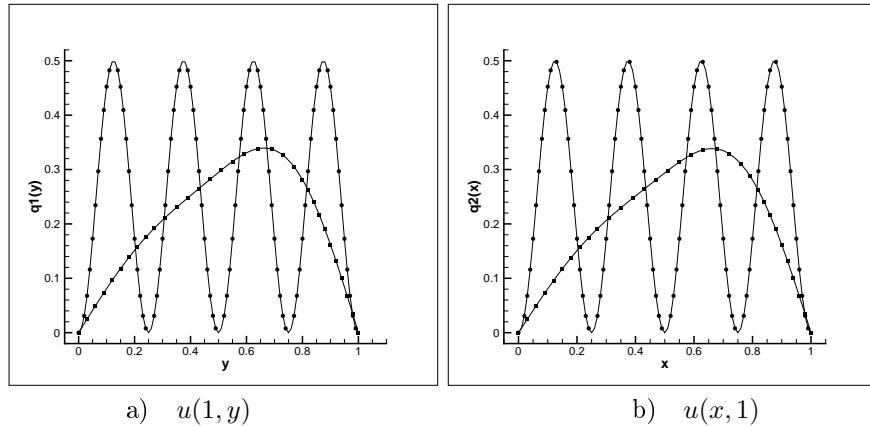
Обозначения: (Знак ■) — решение методом Ландвебера, (знак ●) — точное решение

Рис. 6. На рисунке а) сравнение границ $u(x, y)$ при $x = 0.5$, на рисунке б) сравнение границ $u(x, y)$ при $y = 0.5$



Обозначения: (Знак ■) — решение методом Ландвебера, (знак ●) — точное решение

Рис. 7. На рисунке а) сравнение границ $u(x, y)$ при $x = 0.75$, на рисунке б) сравнение границ $u(x, y)$ при $y = 0.75$



Обозначения: (Знак ■) — решение методом Ландвебера, (знак ●) — точное решение

Рис. 8. На рисунке а) сравнение границ $u(x, y)$ при $x = 1$, на рисунке б) сравнение границ $u(x, y)$ при $y = 1$

Вычислительный эксперимент с 1% шумом ($\varepsilon = 0.01$)

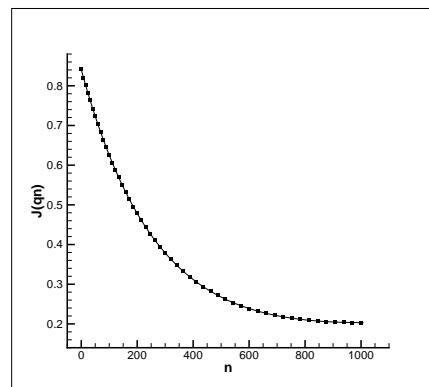
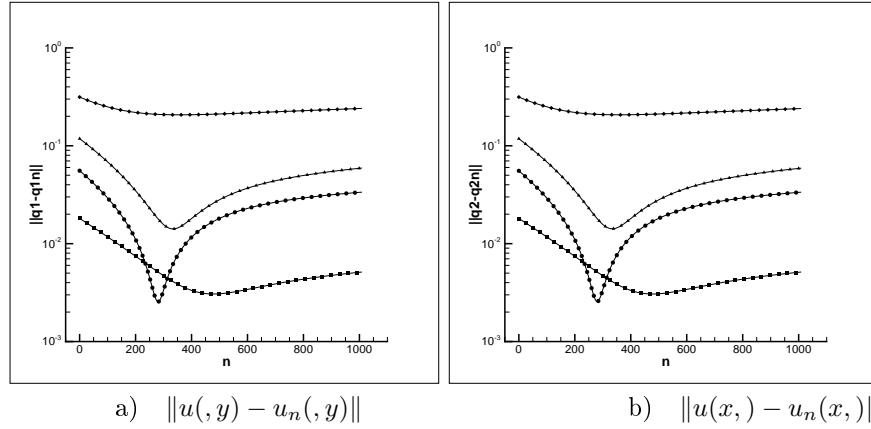


Рис. 9. Значение функционала $J(q_n)$ по итерации

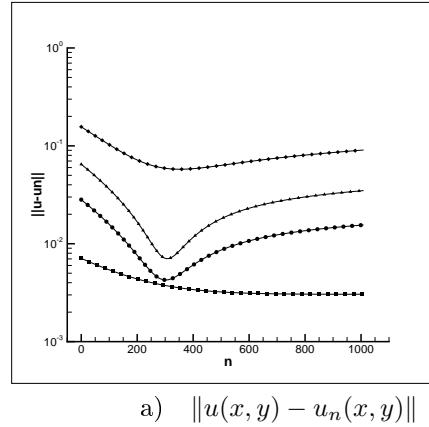
Число итераций, n	$J(q)$	$\ u_T - \tilde{u}\ $
10	0.8158	0.1499
100	0.6254	0.1028
1000	0.2032	0.0906

ТАБЛИЦА 3. Результаты решения методом итерации Ландвебера без шума



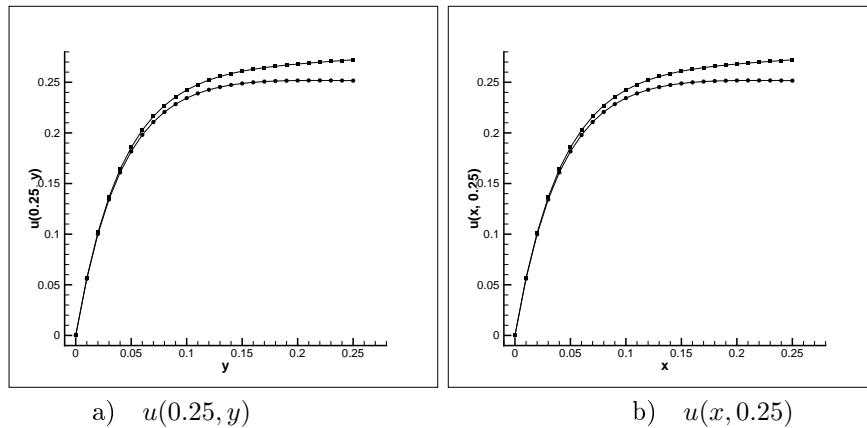
Обозначения: (Знак ■) — при значении $x = 0.25$ и $y = 0.25$, (знак ●) — при значении $x = 0.5$ и $y = 0.5$, (знак ▼) — при значении $x = 0.75$ и $y = 0.75$

Рис. 10. а) Норма разности точной решения границы и восстановленной решении границы, б) Норма разности точной решения границы и восстановленной решении границы



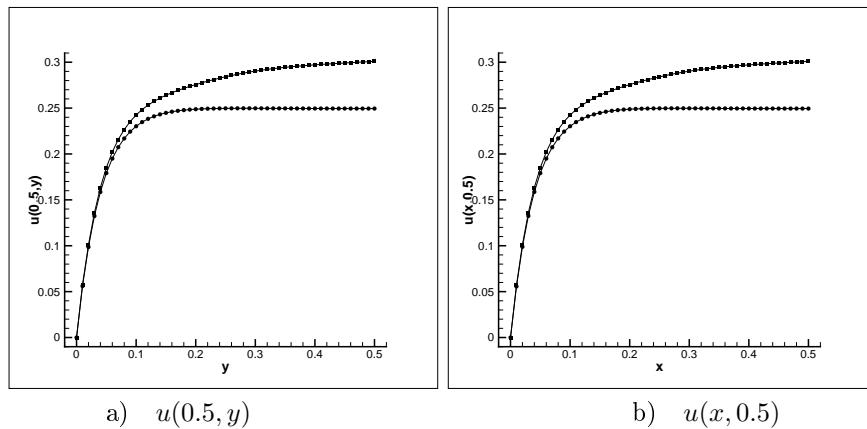
Обозначения: (Знак ■) — при значении $0 \leq x, y \leq 0.25$, (знак ●) — при значении $0 \leq x, y \leq 0.5$, (знак ▼) — при значении $0 \leq x, y \leq 0.75$

Рис. 11. а) Норма разности точной решения и восстановленной решения



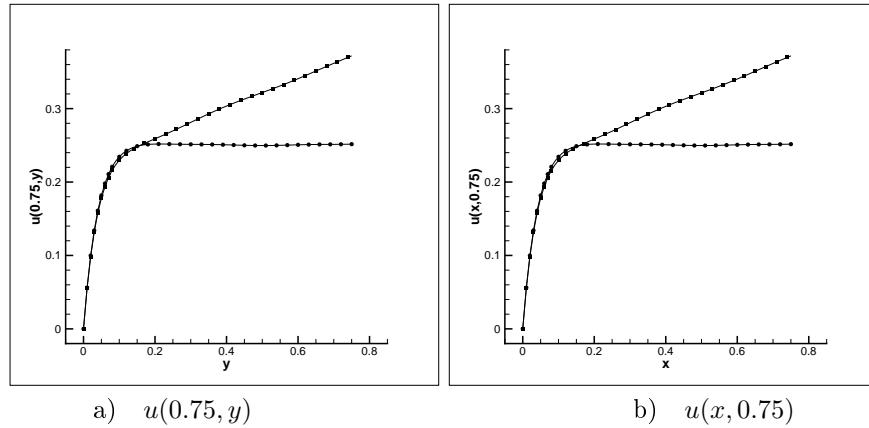
Обозначения: (Знак ■) — решение методом Ландвебера, (знак ●) — точное решение

Рис. 12. На рисунке а) сравнение границ $u(x, y)$ при $x = 0.25$, на рисунке б) сравнение границ $u(x, y)$ при $y = 0.25$



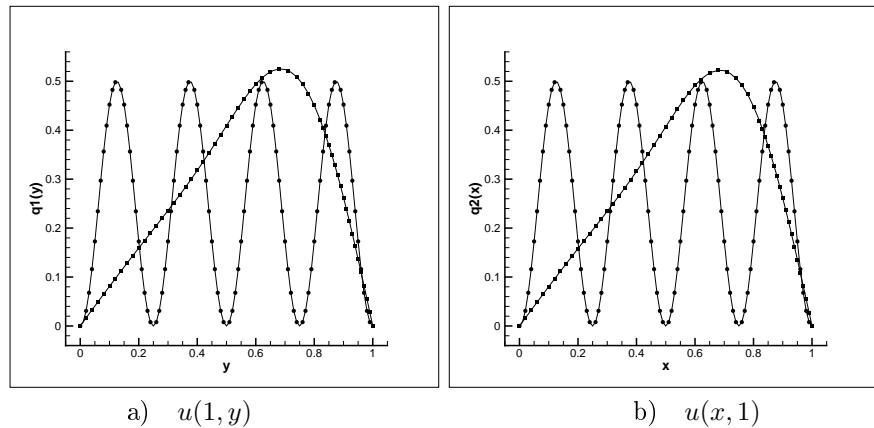
Обозначения: (Знак ■) — решение методом Ландвебера, (знак ●) — точное решение

Рис. 13. На рисунке а) сравнение границ $u(x, y)$ при $x = 0.5$, на рисунке б) сравнение границ $u(x, y)$ при $y = 0.5$



Обозначения: (Знак ■) — решение методом Ландвебера, (знак ●) — точное решение

Рис. 14. На рисунке а) сравнение границ $u(x, y)$ при $x = 0.75$, на рисунке б) сравнение границ $u(x, y)$ при $y = 0.75$



Обозначения: (Знак ■) — решение методом Ландвебера, (знак ●) — точное решение

Рис. 15. На рисунке а) сравнение границ $u(x, y)$ при $x = 1$, на рисунке б) сравнение границ $u(x, y)$ при $y = 1$

REFERENCES

- [1] М.А. Исакович. Общая акустика. Москва, Наука, Москва 1973, 496 стр.
- [2] С.И. Кабанихин. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, Сибирское научное издательство, 2008, 460 стр.
- [3] М.А.Бектемесов, Д.Б. Нурсеитов С.Е. Касенов Численное решение двумерной обратной задачи акустики// Вестник КазНПУ Серия “Физико-математические науки”. 2012. №1(37). стр 47–53.
- [4] А.А. Самарский, А.В. Гулин. Численные методы. Москва: Наука. 1989.
- [5] С.К. Годунов. Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002, 202 стр.
- [6] Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсеитова А.Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. — Алматы-Новосибирск: ОФ “Международный фонд обратных задач”, 2006.
- [7] S.I. Kabanikhin and M.A. Shishlenin and D.B. Nurseitov and A.T. Nurseitova and S.E. Kasenov. *Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation*. Journal of Applied Mathematics, 2014, (2014), <http://dx.doi.org/10.1155/2014/786326>, 7 pages.
- [8] S.I. Kabanikhin and Y.S. Gasimov and D.B. Nurseitov and M.A. Shishlenin and B.B. Sholpanbaev and S. Kasenov. *Regularization of the continuation problem for elliptic equations*. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013 / Vol. 21 6, pp. 871–884.
- [9] S.I. Kabanikhin and D.B. Nurseitov and M.A. Shishlenin and B.B. Sholpanbaev. *Inverse problems for the ground penetrating radar*. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013. Vol. 21 6, pp. 885–892.
- [10] М.А. Шишленин. *Матричный метод в задачах определения источников колебаний*. Сибирские электронные математические известия, 11 (2014), стр. С.161–С.171.

BEKTEMESOV MAKTAGALI A.
 AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY,
 AV. AL-FARABI, 71,
 050038, ALMATY, KAZAKHSTAN
E-mail address: maktagali@mail.ru

KABANIKHIN SERGEY I.
 INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB RAS,
 PROSPECT AKADEMIKA LAVRENTJEVA, 6,
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 PIROGOVA STR., 2,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

NURSEITOV DANIYAR B.
 NATIONAL OPEN RESEARCH LABORATORY OF INFORMATION AND SPACE TECHNOLOGIES KAZNTU,
 AV. SATPAEV, 22,
 050013, ALMATY, KAZAKHSTAN
E-mail address: d.nurseitov@norlist.kz

KASENOV SYRYM Y.
 NATIONAL OPEN RESEARCH LABORATORY OF INFORMATION AND SPACE TECHNOLOGIES KAZNTU,
 AV. SATPAEV, 22,
 050013, ALMATY, KAZAKHSTAN
E-mail address: s.kasenov@norlist.kz

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯSiberian Electronic Mathematical Reports
<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.22–С.34 (2014)

УДК 519.633

MSC 65L09

ЗАДАЧА ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ С ДАННЫМИ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

А.С. Белоносов, М.А. Шишленин

Аннотация. Исследуется задача продолжения решения параболического уравнения с данными на части границы. Задача продолжения сформулирована в виде обратной задачи. Построен численный метод решения на основе метода конечных разностей и метода сингулярного разложения. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: задача продолжения, параболическое уравнение.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу продолжения для параболического уравнения

$$(1.1) \quad u_t = a(x, t)u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$(1.2) \quad u|_{x=0} = f(t), \quad u_x|_{x=0} = g(t), \quad t > 0.$$

Требуется определить функцию $u(x, t)$ по заданным $f(t)$ и $g(t)$.

Задача продолжения (1.1), (1.2) является некорректной [5].

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть в полуполосе $\Pi = \{(x, t) : x \geq 0, 0 \leq t \leq 1\}$ дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$[a(x, t)u_{xx} - u_t]^2 \leq k_1 u^2 + k_2 u_x^2, \quad (1)$$

© 2014 Белоносов А.С., Шишленин М.А.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-01-00773), Министерства образования и науки Российской Федерации, совместного проекта СО РАН и НАН Украины.

Поступила 10 июня 2014 г., опубликована 20 декабря 2014 г.

где k_1, k_2 - некоторые положительные константы, а коэффициент $a(x, t)$ в области Π является непрерывно дифференцируемой функцией, причем $a(x, t) > 0$ при $(x, t) \in \Pi$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Если

$$u(0, t) < e^{-\frac{1}{\eta(t)}}, \quad u_x(0, t) < e^{-\frac{1}{\eta(t)}},$$

где $\frac{\eta(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, то $u(x, 0) \equiv 0$ при $x \geq 0$.

Теорема 2. Пусть

$$\begin{aligned} 0 < a_0 < a(x, t) \leq 1, \quad |a_x(x, t)| \leq 1, \quad |a_t(x, t)| \leq 1, \\ \max\{|u(x, t)|, |u_x(x, t)|, |u_t(x, t)|\} \leq \text{const} < \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

при $(x, t) \in \Pi$, $\int_0^\infty |a_t(\xi, t)| d\xi \leq \text{const} < \infty$ при $t \in [0, 1]$. Пусть положительная монотонно возрастающая последовательность x_n удовлетворяет условию

$$x_n \leq \text{const} \cdot n^\mu, \quad \text{где } \mu < \frac{1}{2}.$$

Тогда если $u(x_n, t) = 0$ при $t \in [0, 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то $u \equiv 0$ в области Π .

Теорема 1 является усилением соответствующего утверждения Е. М. Ландинса, доказанного в работе [1]. Теорема 2 дает достаточное условие (которое следует наложить на последовательность x_n) единственности задачи продолжения решения дифференциального неравенства (1) с бесконечной последовательности отрезков $\{(x_n, t) : 0 \leq t \leq 1\}$. Доказательство теорем 1 и 2 вытекает из свойств оценки решения задачи Коши для дифференциального неравенства (1) с данными на времениподобной поверхности. В работе [4] доказано, что эта оценка имеет степенной характер. Нас будет интересовать ее зависимость от размеров области и расстояния до границы. Так же, как и в работе [4], при выводе оценки мы используем методику Карлемана.

3. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

Введем некоторые обозначения. Пусть

$$\begin{aligned} V &= \{(x, t) : 0 \leq x \leq h, -T_0 \leq t \leq T_0\}, \quad \text{где } h > 0, 0 < T_0 < 1, \\ \varepsilon &= \max_{t \in [-T_0, T_0]} \{|u(0, t)|, |u_x(0, t)|\}, \\ \lambda &= \max_{t \in [-T_0, T_0]} \left\{ \int_0^h |a_t(\xi, t)| d\xi \right\} + 1, \\ M &= \max_{(x, t) \in V} \{|u(x, t)|, |u_x(x, t)|, |u_t(x, t)|\} + 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Лемма 1. Пусть в области V дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству (1), коэффициент $a(x, t)$ которого удовлетворяет в области V условиям (2). Пусть $\rho \in (0, h)$, $r = h - \rho$. Тогда существуют такие константы C_1, C_2 , зависящие от a_0, k_1, k_2 , что если

$$\varepsilon < \exp\{-C_1(h+1)^2 \lambda^2 [T_0^{-1} + r^{-2} + \ln M]\},$$

то

$$|u(\rho, 0)| < \exp\{-C_2(h+1)^2 \lambda^2 [T_0^{-1} + r^{-2} + \ln M]r\}. \quad (4)$$

Для доказательства леммы 1 с помощью подходящей замены переменных переведем неравенство (1) в неравенство с постоянными коэффициентами при старших производных. С этой целью положим

$$\begin{aligned} y(x, t) &= 1 - \frac{a_0^{\frac{1}{2}}}{h} \int_x^h a^{-\frac{1}{2}}(\xi, t) d\xi, \\ \tau(t) &= \frac{a_0}{h^2} t. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку, как легко заметить (учитывая условия (2)),

$$0 \leq \frac{x}{h} \leq y(x, t) \leq 1 - a_0^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{x}{h}) \leq 1$$

и τ не зависит от x , то область V при этой замене перейдет в криволинейную трапецию \tilde{V} , содержащуюся в прямоугольнике

$$\{(y, \tau) : 0 \leq y \leq 1, -T_1 \leq \tau \leq T_1\}, \text{ где } T_1 = \frac{a_0}{h^2} T_0,$$

с вершинами в точках $y(0, -T_0)$, $y(0, T_0)$, $y(h, T_0)$ и $y(h, -T_0)$, левая сторона которой описывается уравнением

$$\gamma(\tau) = 1 - \frac{a_0^{\frac{1}{2}}}{h} \int_0^h a^{-\frac{1}{2}}(\xi, t(\tau)) d\xi.$$

Учитывая условия (2), из неравенства (1) легко получить, что в области \tilde{V} функция $u(y, \tau)$ удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству:

$$(u_{yy} - u_\tau)^2 \leq \tilde{k}_1 u^2 + \tilde{k}_2 u_y^2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= 2h^4 a_0^{-2} k_1, \\ \tilde{k}_2 &= \frac{h^2}{2a_0^2} [(1 + \frac{\lambda}{a_0})^2 + 2k_2], \end{aligned} \quad (7)$$

а λ определяется равенством (3). Точка $(\rho, 0)$ при замене (5) перейдет в точку $(\tilde{\rho}, 0) = (1 - \tilde{r}, 0)$, где

$$\tilde{r} = \frac{a_0^{\frac{1}{2}}}{h} \int_{h-r}^h a^{-\frac{1}{2}}(\xi, t) d\xi.$$

Положим

$$\phi(y, \tau) = y + \tau^2 T_1^{-2} + 1.$$

Пусть (P_r) – связная часть линии уровня функции $\phi(y, \tau)$, проходящей через точку $(\tilde{\rho}, 0)$, принадлежащая \tilde{V} и содержащая точку $(\tilde{\rho}, 0)$, где $(P_r) \subset \{(y, \tau) \in \tilde{V} : y + \tau^2 T_1^{-2} = \tilde{\rho}\}$, \tilde{V}_r – часть области \tilde{V} , ограниченная куском параболы P_r и левой границей (γ) области \tilde{V} , $(\gamma_r) = \partial \tilde{V}_r$, (P_r) – часть кривой (γ) , являющаяся дополнением (P_r) до границы $\partial \tilde{V}_r$ области \tilde{V}_r . (рис. 1). Таким образом, $\tilde{V}_{r_2} \subset \tilde{V}_{r_1}$ при $r_1 < r_2$.

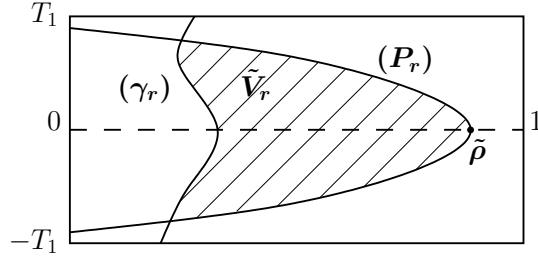


Рисунок 1

Оценим выражение

$$\int_{\partial \tilde{V}_r} \phi^{-2\nu}(y, \tau) u^2(y, \tau) \cos(\vec{n}, y) ds,$$

где $\nu > 0$ - некоторый параметр, \vec{n} означает направление внешней нормали к контуру $\partial \tilde{V}_r$, ds - элемент длины дуги. Используя формулу Грина и тот факт, что $1 \leq \phi(y, \tau) \leq 3$ при $(y, \tau) \in \tilde{V}$, получаем

$$\int_{\partial \tilde{V}_r} \phi^{-2\nu} u^2 \cos(\vec{n}, y) ds \leq \int_{\tilde{V}_0} \phi^{-2\nu} u_y^2 dy d\tau \quad (8)$$

(считая $\nu \geq \frac{3}{2}$). Положим

$$\Phi(y, \tau) = \phi^{-\nu}(y, \tau), \quad v(y, \tau) = \Phi(y, \tau)u(y, \tau).$$

Тогда

$$\Phi[u_{yy} - u_\tau] = v_{yy} - gv_y + bv - v_\tau, \quad (9)$$

где

$$g = 2\Phi^{-1}\Phi_y, \quad b = 2\Phi^{-2}\Phi_y^{-2} - \Phi^{-1}\Phi_{yy} + \Phi^{-1}\Phi_\tau.$$

Используя (6), (9) и формулу Грина, имеем

$$\begin{aligned} & \iint_{\tilde{V}_0} \Phi^2 [\tilde{k}_1 u^2 + \tilde{k}_2 u_y^2] dy d\tau \geq \\ & \geq \iint_{\tilde{V}_0} [v_{yy} - bv]^2 dy d\tau + \iint_{\tilde{V}_0} [v_\tau + gv_y]^2 dy d\tau - \iint_{\tilde{V}_0} 2gv_y v_{yy} dy d\tau - \\ & - \iint_{\tilde{V}_0} 2gbvv_y dy d\tau - \iint_{\tilde{V}_0} 2v_\tau v_{yy} dy d\tau - \iint_{\tilde{V}_0} 2bvv_\tau dy d\tau \geq \\ & \geq \iint_{\tilde{V}_0} \frac{\partial g}{\partial y} v^2 dy d\tau + \iint_{\tilde{V}_0} \left[\frac{\partial b}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} (g \cdot b) \right] v^2 dy d\tau - \\ & - \int_{\partial \tilde{V}_0} [gv_y^2 + g \cdot bv^2 + 2v_y v_\tau] \cos(\vec{n}, y) ds + \int_{\partial \tilde{V}_0} [v_y^2 - bv^2] \sin(\vec{n}, y) ds. \end{aligned}$$

Перейдем от v к u . Используя формулу Грина, имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{V}_0} \frac{\partial g}{\partial y} v_y^2 dy d\tau &= \iint_{\tilde{V}_0} \Phi^2 \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) u_y^2 dy d\tau - \\ &- \iint_{\tilde{V}_0} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \Phi \Phi_y + \frac{\partial g}{\partial y} \Phi \Phi_{yy} \right] u^2 dy d\tau + \int_{\partial \tilde{V}_0} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) \Phi \Phi_y u^2 \cos(\vec{n}, y) ds. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{V}_0} \Phi^2 [\tilde{k}_1 u^2 + \tilde{k}_2 u_y^2] dy d\tau &\geq \iint_{\tilde{V}_0} \Phi^2 \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) u_y^2 dy d\tau + \\ &+ \iint_{\tilde{V}_0} \left\{ \Phi^2 \left[\frac{\partial b}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} (b \cdot g) \right] - \left[\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \Phi \Phi_y + \frac{\partial g}{\partial y} \Phi \Phi_{yy} \right] \right\} u^2 dy d\tau + \\ &+ \int_{\partial \tilde{V}_0} \left\{ \frac{\partial g}{\partial y} \Phi \Phi_y u^2 - g(\Phi_y u + \Phi u_y)^2 - b \cdot g(\Phi u)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2(\Phi_y u + \Phi u_y)(\Phi_\tau u + \Phi u_\tau) \right\} \cos(\vec{n}, y) ds + \\ &+ \int_{\partial \tilde{V}_0} \{(\Phi_y u + \Phi u_y)^2 - b(\Phi u)^2\} \sin(\vec{n}, y) ds. \end{aligned}$$

Обозначим для удобства

$$p = \Phi^{-1} \Phi_y, \quad q = \Phi^{-1} \Phi_\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g &= 2p, \quad b = p^2 - p_y + q \quad \text{и} \\ \iint_{\tilde{V}_0} \Phi^2 [\tilde{k}_1 u^2 + \tilde{k}_2 u_y^2] dy d\tau &\geq \iint_{\tilde{V}_0} 2p_y \Phi^2 u_y^2 dy d\tau + \\ &+ \iint_{\tilde{V}_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} (p^2 - p_y + q) + 2 \frac{\partial}{\partial y} (p^3 - pp_y + q) - \right. \\ &\quad \left. - 2pp_y - 2p_y(p^2 + p_y) \right\} \Phi^2 u^2 dy d\tau + \\ &+ \int_{\partial \tilde{V}_0} \Phi^2 \{2pp_y u^2 - 2p(pu - u_y)^2 - 2(p^3 - pp_y + pq)u^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2(pu + u_y)(qu - u_\tau)\} \cos(\vec{n}, y) ds + \\ &+ \int_{\partial \tilde{V}_0} \Phi^2 \{u_y^2 + 2puu_y + (p_y - q)u^2\} \sin(\vec{n}, y) ds. \end{aligned}$$

Подставив значения выражений

$$\begin{aligned} p &= \nu \phi^{-1}, \quad q = -\nu \phi^{-1} \phi_\tau, \quad p_y = \nu \phi^{-2}, \\ p_{yy} &= -2\nu \phi^{-3}, \quad q_y = p_\tau = \nu \phi^{-2} \phi_\tau, \\ p_{y\tau} &= -2\nu \phi^{-3} \phi_\tau, \quad q_\tau = -\nu [\phi^{-1} \phi_{\tau\tau} - \phi^{-2} \phi_\tau^2] \end{aligned}$$

и приведя подобные члены, получим

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\tilde{V}_0} [2\nu\phi^{-2} - \tilde{k}_2] \Phi^2 u_y^2 dy d\tau + \\
 & + \iint_{\tilde{V}_0} \{4\nu^3\phi^{-4} - \nu^2(12\phi^{-4} + 6\phi^{-3}\phi_\tau) + \nu\phi^{-1}\phi_{\tau\tau} - \tilde{k}_1\} \Phi^2 u^2 dy d\tau \leq \\
 & \quad \int_{\partial\tilde{V}_0} \Phi^2 \{-2\nu\phi^{-2}u_y^2 - 4[\nu^3\phi^{-3} - \nu^2(\phi^{-2}\phi_\tau + \phi^{-3})]u^2 - \\
 & \quad -(4\nu^2\phi^{-2} - 2\nu\phi^{-1}\phi_\tau)u \cdot u_y - 2\nu\phi^{-1}u \cdot u_\tau + 2u_y u_\tau\} \cos(\vec{n}, y) ds + \\
 & \quad \int_{\partial\tilde{V}_0} \Phi^2 \{-u_y^2 + 2\nu\phi^{-1}u \cdot u_y - \nu(\phi^{-2} + \phi^{-1}\phi_\tau)u^2\} \sin(\vec{n}, y) ds.
 \end{aligned}$$

Оценив по модулю правую часть последнего неравенства и принимая во внимание выражения (7) для \tilde{k}_1, \tilde{k}_2 , а также учитывая, что $1 \leq \phi(y, \tau) \leq 3$, $0 \leq \phi_\tau(y, \tau) \leq 2T_1^{-1}$, $\phi_{\tau\tau}(y, \tau) = 2T_1^{-1}$ при $(y, \tau) \in \tilde{V}$, заключаем, что существует некоторая константа C , зависящая от a_0, k_1, k_2 , и некоторая абсолютная константа const такие, что при $\nu \geq C[T_1^{-1} + (h+1)^2\lambda^2]$ справедливо неравенство

$$\iint_{\tilde{V}_0} \phi^{-2\nu} u_y^2 dy d\tau \leq \text{const} \cdot \int_{\partial\tilde{V}_0} \phi^{-2\nu} \{u_y^2 + \nu|u \cdot u_y| + \nu^2 u^2 + |u \cdot u_\tau| + \nu^{-1}|u_y \cdot u_\tau|\} ds.$$

Обозначив через Q выражение в фигурных скобках в последнем неравенстве, получаем теперь из (8):

$$\int_{P_r} \phi^{-2\nu} u^2 \cos(\vec{n}, y) ds \leq \text{const} \left\{ \int_{\partial\tilde{V}_0} \phi^{-2\nu} Q ds + \int_{(\gamma)} \phi^{-2\nu} u^2 ds \right\} \leq$$

(так как $\phi(y, \tau) = 2$ при $(y, \tau) \in (P_0)$, $\phi(y, \tau) \geq 1$ в области \tilde{V})

$$\leq \text{const} \{2^{-2\nu} \max_{(y, \tau) \in \tilde{V}} \{Q\} \int_{-T_1}^{T_1} [1 + (\frac{\partial\phi}{\partial\tau})^2]^{1/2} d\tau + \max_{(y, \tau) \in (\gamma)} \{Q\} \int_{-T_1}^{T_1} [1 + (\frac{\partial\gamma}{\partial\tau})^2]^{1/2} d\tau\}.$$

Далее, поскольку

$$|u(y, \tau)| \leq M, \quad |u_y(y, \tau)| \leq h a_0^{-1/2} M, \quad |u_\tau(y, \tau)| \leq h^3 a_0^{-3} M$$

при $(y, \tau) \in \tilde{V}$,

$$|u(y, \tau)| \leq \varepsilon, \quad |u_y(y, \tau)| \leq h a_0^{-1/2} \varepsilon$$

при $(y, \tau) \in (\gamma)$,

$$\cos(\vec{n}, y) \geq (1 + 4T_1^{-2}), \quad \phi(y, \tau) = 2 - \tilde{r}$$

при $(y, \tau) \in (P_r)$, а также

$$\left[1 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2\right]^{1/2} \leq (1 + 4T_1^{-2})^{1/2}$$

при $\tau \in [-T_1, T_1]$, то заключаем, что существует некоторая константа $C = C(a_0, k_1, k_2)$ такая, что при $\nu \geq C[T_1^{-1} + (h+1)^2\lambda^2]$ справедливо неравенство

$$\int_{(P_r)} u^2 ds \leq \text{const} \cdot M^2 \nu^4 \{2^{-2\nu} + \varepsilon\} (2 - \tilde{r})^{2\nu}.$$

Положим $\nu = -\frac{\ln \varepsilon}{2 \ln 2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{(P_r)} u^2 ds &\leq \text{const} \cdot M^2 (-\ln \varepsilon)^4 \cdot \exp \left\{ -\ln \varepsilon \cdot \ln \left(1 - \frac{\tilde{r}}{2}\right) \right\} \leq \\ &\leq \text{const} \cdot M^2 (-\ln \varepsilon)^4 \exp \left\{ \frac{\tilde{r}}{2} \ln \varepsilon \right\}. \text{(так как } \tilde{r} > 1). \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду того, что $T_1 = \frac{a_0}{h^2} T_0$, $\tilde{r} \geq \frac{a_0^{1/2}}{h} r$, получаем, что существуют константы $C_1 = C_1(a_0, k_1, k_2)$, $C_2 = C_2(a_0, k_1, k_2)$ такие, что если $(-\ln \varepsilon) > C_1(h+1)^2 \lambda^2 [T_0^{-1} + r^{-2} + \ln M]$, то верно неравенство

$$\int_{(P_r)} u^2 ds \leq \exp \{-C_2(h+1)\lambda^2 [T_0^{-1} + r^{-2} + \ln M] r\} = E.$$

Получим отсюда неравенство (4). Пусть $N = \{(y, \tau) \in (P_r) : |u(y, \tau)| > E^{1/4}\}$. Тогда мера $\mu(N)$ множества N меньше $E^{1/4}$. Действительно, допустим противное. Тогда

$$E \geq \int_{(P_r)} u^2 ds \geq \int_N u^2 ds \geq E^{1/2} \mu(N) \geq E^{3/4}, \text{ но } E < 1.$$

Так как на концах кривой (P_r) $|u| \leq \varepsilon < E^{1/4}$ и $\mu(N) < E^{1/4}$, то на кривой (P_r) найдется точка (y_0, τ_0) такая, что $|u(y_0, \tau_0)| < E^{1/4}$ и расстояние между точками (\tilde{r}, τ_0) и (y_0, τ_0) меньше $E^{1/4}$. Поскольку производная функции $u(y, \tau)$ по любому направлению не превосходит величины $\max_{(y, t) \in \tilde{V}} \{|u_y(y, \tau)| + |u_\tau(y, \tau)|\} \leq 2Mh^3a_0^{-3}$, то с помощью теоремы о среднем получаем неравенство

$$|u(\tilde{r}, 0)| \leq (2Mh^3a_0^{-3} + 1)E^{1/4},$$

из которого сразу следует утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 И 2

Утверждение теоремы 1 вытекает из следующего более сильного утверждения.

Лемма 2. Пусть в области $V = \{(x, t) : 0 \leq x \leq h, 0 \leq t \leq 1\}$ функция $u(x, t) \in C_2(V)$ удовлетворяет неравенству (1) и выполняются условия (2). Тогда существует такая константа C_0 , зависящая от a_0, k_1, k_2, h , что если $\max\{|u(0, t)|, |u_x(0, t)|\} < e^{-C_0/t}$, то $u(x, 0) \equiv 0$ при $x \in [0, h]$.

Доказательство. Пусть $M = \max_{(x, t) \in V} \{|(u(x, t)|, |u_x(x, t)|, |u_t(x, t)|\} + 1$, $\rho \in (0, h)$, $r = h - \rho$. В области $\{(x, t) : 0 \leq x \leq h, 0 \leq t \leq 2t_0\}$ выполняются условия леммы 1, поэтому существуют $C_1(a_0, k_1, k_2)$, $C_2(a_0, k_1, k_2)$ такие, что если

$$\varepsilon = \max_{t \in [0, 2t_0]} \{|u(0, t)|, |u_x(0, t)|\} < \exp \{-C_1(h+1)^2 \lambda^2 [t_0^{-1} + r^{-2} + \ln M]\}, \quad (10)$$

то

$$|u(\rho, t_0)| < \exp\{-C_2(h+1)\lambda^2(t_0^{-1} + r^{-2} + \ln M)r\}. \quad (11)$$

Возьмем $C_0 = C_1(h+1)^2\lambda^2 + 1$. Тогда при достаточно малых t_0 будет выполнено неравенство (10) и, следовательно, неравенство (11), правая часть которого стремится к нулю при $t_0 \rightarrow 0$. Лемма 2 доказана.

Для доказательства теоремы 2 нам кроме леммы 1 потребуется три вспомогательных утверждения.

Лемма 3 Пусть в области $V = \{(x, t) : 0 \leq x \leq \delta, 0 \leq t \leq 1\}$ функция $u(x, t) \in C_2(V)$ удовлетворяет неравенству (1) и выполнены условия (2), а также $\max_{(x,t) \in V} \{|u(x, t)|, |u_x(x, t)|\} \leq M$. Тогда если $u(0, t) = u(\delta, t) = 0$ (при $t \in [0, 1]$), то

$$\int_0^\delta u^2(x, t) dx \leq M^2 \delta \cdot \exp\left\{-t\left[a_0 \delta^{-2} - \left(\frac{k_2 + 2}{a_0} + \frac{k_1 a_0}{k_2}\right)\right]\right\} = \varepsilon.$$

Если при этом $\varepsilon < 1$, то при $(x, t) \in V$

$$|u(x, t)| \leq (M + 1)\varepsilon^{1/4}. \quad (12)$$

Доказательство. Сделаем замену

$$y = \frac{x}{\delta}, \quad \tau = \frac{t}{\delta^2}.$$

Тогда в области $\{(y, \tau) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq \tau \leq \delta^{-2}\}$ функция $u(x, t)$ будет удовлетворять дифференциальному неравенству

$$(au_{yy} - u_\tau)^2 \leq k_1 \delta^4 u^2 + k_2 \delta^2 u_y^2, \quad (13)$$

где

$$0 < a_0 \leq a(y, \tau) \leq 1, \quad |a_y(y, \tau)| \leq \delta, \quad (14)$$

а также условиям:

$$|u(y, \tau)| \leq M, \quad |u_y(y, \tau)| \leq \delta M$$

и, кроме того,

$$u(0, \tau) = u(1, \tau) = 0 \text{ для всех } \tau \in [0, \delta^{-2}]. \quad (15)$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\int_0^1 u^2(y, \tau) dy \right) &= \int_0^1 2au_{yy} dy - \int_0^1 2u(au_{yy} - u_\tau) dy = \\ &= \int_0^1 2a \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot u_y) dy - \int_0^1 2au_y^2 dy - \int_0^1 2u(au_{yy} - u_\tau) dy \leq \end{aligned}$$

(применяя к первому интегралу формулу интегрирования по частям и используя условия (13), (14), (15))

$$\begin{aligned} &\leq -2a_0 \int_0^1 u_y^2 dy + \int_0^1 \delta [\chi^{-2} u^2 + \chi^2 u_y^2] dy + \int_0^1 \{\eta^{-2} u^2 + \eta^2 \times \\ &\quad \times [k_1 \delta^4 u^2 + k_2 \delta^2 u_y^2]\} dy = \end{aligned}$$

(где χ, η - любые отличные от нуля константы. Положив $\chi^2 = \frac{a_0}{2\delta}$, $\eta^2 = \frac{a_0}{k_2\delta^2}$, продолжим равенство)

$$= -\frac{a_0}{2} \int_0^1 u_y^2 dy + \int_0^1 \frac{2\delta^2}{a_0} u^2 dy + \int_0^1 \left[\frac{k_2\delta^2}{a_0} + \frac{k_1\delta^2 a_0}{k_2} \right] u^2 dy.$$

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^2(y, \tau) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^y u_y(\xi, \tau) d\xi \right)^2 dy \leq \\ &\leq \int_0^1 y dy \int_0^1 u_y^2(y, \tau) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 u_y^2(y, \tau) dy, \end{aligned}$$

то, окончательно получаем

$$\frac{d}{d\tau} \left(\int_0^1 u^2(y, \tau) dy \right) \leq - \left\{ a_0 - \delta^2 \left[\frac{k_2+2}{a_0} + \frac{k_1 a_0}{k_2} \right] \right\} \int_0^1 u^2(y, \tau) dy \quad (16)$$

(для всех $\tau \in [0, \delta^{-2}]$). Положим

$$f(\tau) = \int_0^1 u^2(y, \tau) dy, \quad P = a_0 - \delta^2 \left[\frac{k_2+2}{a_0} + \frac{k_1 a_0}{k_2} \right], \quad \phi(\tau) = f(\tau) e^{P\tau}.$$

Тогда, в силу (16), имеем:

$$\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = e^{P\tau} \left[\frac{df(\tau)}{d\tau} + Pf(\tau) \right] \leq 0 \text{ при } \tau \in [0, \delta^{-2}].$$

Следовательно, $\phi(\tau) \leq \phi(0)$ при $\tau \in [0, \delta^{-2}]$, либо

$$\int_0^1 u^2(y, \tau) dy \leq \left(\int_0^1 u^2(y, 0) dy \right) \exp \left\{ -\tau \left[a_0 - \delta^2 \left(\frac{k_2+2}{a_0} + \frac{k_1 a_0}{k_2} \right) \right] \right\},$$

или в переменных x, t :

$$\begin{aligned} \int_0^\delta u^2(x, t) dx &\leq \left(\int_0^\delta u^2(x, 0) dx \right) \exp \left\{ -t \left[a_0 \delta^{-2} - \left(\frac{k_2+2}{a_0} + \frac{k_1 a_0}{k_2} \right) \right] \right\} \leq \\ &\leq M^2 \delta \cdot \exp \left\{ -t \left[a_0 \delta^{-2} - \left(\frac{k_2+2}{a_0} + \frac{k_1 a_0}{k_2} \right) \right] \right\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Если $\varepsilon < 1$, то, применяя те же рассуждения, которые проводились на последнем этапе доказательства леммы 1, нетрудно получить оценку (12).

Лемма 4. Пусть в области $V = \{(x, t) : 0 \leq x \leq \delta, 0 \leq t \leq 1\}$ функция $u(x, t) \in C_2(V)$ удовлетворяет неравенству (1), выполнены условия (2), а также $\max_{(x, t) \in V} \{|(u(x, t)|, |u_x(x, t)|\} \leq M$. Тогда если

$$\max_{(x, t) \in V} \{|(u(0, \delta)|, |u(\delta, t)|, |u(x, 0)|\} \leq \varepsilon,$$

то в любой подобласти

$$V_\sigma = \{(x, t) : \sigma \leq x \leq \delta - \sigma, \sigma \leq t \leq 1\}, \quad 0 < 2\sigma < \min(1, \delta)$$

справедливо неравенство

$$|u_x(x, t)| < C(\delta + \sigma^{-2})\varepsilon, \quad (17)$$

где C - некоторая константа, зависящая от a_0, k_1, k_2 и от M .

Доказательство оценки (17) проводится совершенно аналогично доказательству С. Н. Кружкова априорной оценки модуля производной решения параболического уравнения второго порядка (данному в работах [2], [3]). Тот факт, что мы рассматриваем случай дифференциального неравенства, в данном случае не вносит существенных изменений в доказательство, поэтому мы его опускаем.

Лемма 5 Пусть x_n - положительная монотонно возрастающая последовательность. Если $x_n < Cn^\mu$ и $\mu < \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(x_n + x_{n-1}) = 0$.

Доказательство Предположим, что существует номер m такой, что для каждого $n \geq m$ справедливо неравенство

$$x_n(x_n - x_{n-1}) \geq n^{\mu+\delta+1}, \text{ где } 0 < \delta < 1 - 2\mu.$$

Тогда для любого $n \geq m$ верно и неравенство

$$(x_n - x_{n-1}) \geq \frac{1}{C} n^{\delta+\mu+1}.$$

Далее

$$\begin{aligned} x_n &= x_m + (x_{m+1} - x_m) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) > \\ &> \frac{1}{C} \sum_{k=m+1}^n k^{\delta+\mu+1} > \frac{1}{2C} \int_{m+1}^n x^{\delta+\mu+1} dx > -\frac{(m+1)^{\delta+\mu}}{2C(\delta+\mu)} + \frac{n^{\delta+\mu}}{2C(\delta+\mu)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\frac{x_n}{n^\mu} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что противоречит условию. Итак, существует последовательность n_k такая, что

$$x_{n_k}(x_{n_k} - x_{n_k-1}) \leq n_k^\mu n_k^{\delta+\mu+1} \rightarrow 0,$$

(так как $\delta + 2\mu < 1$), т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(x_n + x_{n-1}) = 0$.

Доказательство теоремы 2. Выберем произвольные $\rho > 0$, $0 < t_0 < \frac{1}{3}$ и докажем, исходя из условий теоремы, что $u(\rho, 2t_0) = 0$.

Принимая во внимание утверждение леммы 5, сразу предположим, что $x_n(x_n - x_{n-1}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Будем считать n настолько большим, что

$$h_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} > \rho, \quad \delta_n = x_n - x_{n-1} < t_0.$$

Положим $\varepsilon = \max_{t_0 \leq t \leq 3t_0} \{|u(h_n, t)|, |u_x(h_n, t)|\}$. Применяя лемму 1 к области $\{(x, t) : 0 \leq x \leq h_n, t_0 \leq t \leq 3t_0\}$, заключаем, что существует константы $C_1(a_0, k_1, k_2)$, $C_2(a_0, k_1, k_2)$ такие, что если

$$\varepsilon < \exp\{-C_1(x_n + 1)^2 \lambda_n^2 (t_0^{-1} + r^{-2} + \ln M)\}, \quad (18)$$

то

$$|u(\rho, 2t_0)| < \exp\{-C_2(h_n + 1) \lambda_n^2 (t_0^{-1} + r^{-2} + \ln M)r\}. \quad (19)$$

Покажем, что при достаточно больших n выполнено условие (18). Тем самым теорема 2 будет доказана, поскольку правая часть (19) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

В силу леммы 3, в области $D_n = \{(x, t) : x_{n-1} \leq x \leq x_n, \frac{t_0}{2} \leq t \leq 1\}$ справедливо неравенство

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} u^2(x, t) dx \leq M^2 \delta_n \exp \left\{ -\frac{t_0}{2} \left[a_0 \delta_n^{-2} - \left(\frac{k_2+2}{a_0} + \frac{k_1 a_0}{k_2} \right) \right] \right\} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0.$$

Тогда согласно второму утверждению леммы 3 при достаточно больших n в области D_n справедлива оценка

$$|u(x, t)| \leq \exp \left\{ -\frac{t_0 a_0}{8} \delta_n^{-2} \right\}. \quad (20)$$

Применяя наконец лемму 4 с $\delta = \delta_n, \sigma = \frac{\delta_n}{2}$ к области D_n , заключаем, что

$$|u_x(h_n, t)| \leq C(a_0, k_1, k_2, M)(\delta_n + 4\delta_n^{-2}) \exp \left\{ -\frac{t_0 a_0}{8} \delta_n^{-2} \right\}. \quad (21)$$

Ввиду того, что $\delta_n x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, \lambda_n \leq \text{const} \leq \infty$, из (20) и (21) следует, что при достаточно больших n выполнено неравенство (18). Теорема (2) доказана.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Для численного решения задачи продолжения, рассмотрим постановку прямой задачи

$$(4.1) \quad u_t = a(x, t)u_{xx}, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T);$$

$$(4.2) \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in (0, L);$$

$$(4.3) \quad u_x|_{x=0} = g(t), \quad u|_{x=L} = q(t), \quad t \in (0, T).$$

Рассмотрим задачу продолжения как обратную задачу определения функции $q(t)$ по заданной дополнительной информации

$$(4.4) \quad u|_{x=0} = f(t), \quad t \in (0, T).$$

Пусть $h_x = T/N_x$ — шаг сетки по переменной x , h_t — шаг сетки по времени выбирается из условия устойчивости. Заменим производные конечно-разностными аналогами и перейдем к решению прямой дискретной задачи:

$$\frac{v_i^{k+1} - v_i^k}{h_t} = a_i^k \frac{v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{h_x^2}, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad k = \overline{0, N_t - 1};$$

$$v_i^0 = \varphi_i, \quad i = \overline{0, N_x}.$$

Из аппроксимации граничных условий со вторым порядком по времени получаем соотношение

$$v_0^{k+1} = v_0^k + \frac{2a_0^k h_t}{h_x^2} [v_1^k - v_0^k - h_x g^k],$$

$$v_{N_x}^{k+1} = v_{N_x}^k + \frac{2a_{N_x}^k h_t}{h_x^2} [v_{N_x-1}^k - v_{N_x}^k].$$

Задача продолжения численно решалась двумя методами.

1. Метод обращения разностной схемы. Задача продолжения заменялась конечно-разностным аналогом и слой за слоем восстанавливалось поле внутри области

$$v_{i+1}^k = 2v_i^k - v_{i-1}^k + \frac{h_x^2}{a_i^k h_t} [v_i^{k+1} - v_i^k], \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad k = \overline{i, N_t - i};$$

$$v_0^k = f^k, \quad k = \overline{0, N_t};$$

$$v_1^k = f^k + h_x g^k + \frac{h_x^2}{a_0^k} [f']^k, \quad k = \overline{0, N_t}.$$

2. Метод сингулярного разложения. Дискретная задача продолжения сводилась к системе линейных алгебраических уравнений [6, 7, 8, 9]

$$Av = f,$$

где $v = (v_0^0, \dots, v_{N_x}^0, v_0^1, \dots, v_{N_x}^1, \dots, v_0^{N_t}, \dots, v_{N_x}^{N_t})$.

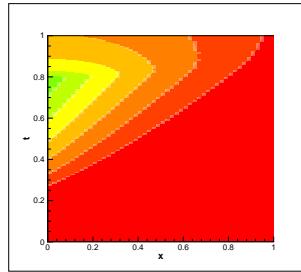


Рис. 4.1. Решение прямой задачи

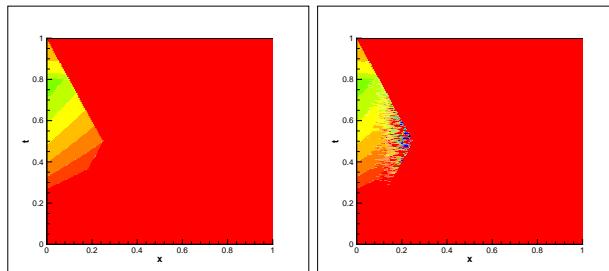


Рис. 4.2. Решение задачи продолжения МОРС. Слева — точные данные. Справа — шум в данных 1%

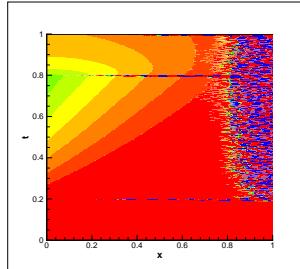


Рис. 4.3. Решение задачи продолжения с граничными условиями $u_t|_{t=0} = u_t|_{t=T} = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Ландис Е.М.* Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений. // УМН, т.14, вып 1(85), 1959, с.21-85.
- [2] *Кружков С.Н.* Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными.// Труды Московского математического общества, т.16, 1967, с.329-346.
- [3] *Кружков С.Н.* Априорная оценка для производной решения параболического уравнения.// Вестник МГУ. Математика-механика, № 2, 1967, с.41-48.
- [4] *Амонов Б.К., Шишленин С.П.* Априорная оценка решения задачи Коши с данными на времениподобной поверхности для параболического уравнения II порядка и связанные с нею теоремы единственности.// ДАН СССР, т.206, № 1, 1972, с.11-12.
- [5] S.I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, Berlin: Gruyter, 2011.
- [6] S.I. Kabanikhin and M.A. Shishlenin and D.B. Nursetov and A.T. Nursetova and S.E. Kasenov. Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation. Journal of Applied Mathematics, 2014, (2014), <http://dx.doi.org/10.1155/2014/786326>, 7 pages.
- [7] S.I. Kabanikhin and Y.S. Gasimov and D.B. Nursetov and M.A. Shishlenin and B.B. Sholpanbaev and S. Kasenov. Regularization of the continuation problem for elliptic equations. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013. Vol. 21 **6**, pp. 871-884.
- [8] S.I. Kabanikhin and D.B. Nursetov and M.A. Shishlenin and B.B. Sholpanbaev. Inverse problems for the ground penetrating radar. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013. Vol. 21 **6**, pp. 885-892.
- [9] М.А. Шишленин. Матричный метод в задачах определения источников колебаний. Сибирские электронные математические известия, 11 (2014), стр. С.161–С.171.

АНДРЕЙ СЕРГЕЕВИЧ БЕЛОНОСОВ

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,
ПР-Т ЛАВРЕНТЬЕВА 6,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: white@sscc.ru

МАКСИМ АЛЕКСАНДРОВИЧ ШИШЛЕНИН

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОВОЛЕВА СО РАН,
ПР-Т АК. КОПТОУГА, 4,
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
УЛ. ПИРОГОВА 2,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: mshishlenin@ngs.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.35–С.40 (2014)

УДК 550.34.013.4

MSC 65C20

ПРОТОТИП ВЫСОКООПТИМИЗИРОВАННОГО ПАКЕТА TWSM ДЛЯ ДИФРАКЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ С АДАПТАЦИЕЙ ПОД GPU-КЛАСТЕР

Н.Ю. Зятьков, А.А. Айзенберг, Е.Ж. Ракшаева, А.М. Айзенберг

ABSTRACT. We represent a new highly-optimized TWSM algorithm adapted for GPU cluster. We show the scheme of parallelization of the TWSM for several GPUs. Accuracy, stability and efficiency of the algorithm are illustrated by numerical examples for transmission through the W-shaped salt overhang and reflection from smooth interface with strong contrast.

Keywords: seismic modeling, diffraction modeling, high-performance computing, GPU.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 2008 году в работе [1] был представлен метод аналитического описания каскадной дифракции, обобщающий метод наложения концевых волн (TWSM) для областей с границами сложной формы. Первый прототип высокооптимизированного алгоритма TWSM для дифракционного моделирования был представлен в работе [2]. В данной работе представлен улучшенный высокооптимизированный алгоритм, адаптированный для GPU-клUSTERа. Описывается схема распараллеливания TWSM для нескольких GPU. Точность, стабильность

ZYATKOV, N.Y., AYZENBERG, A.A., RAKSHAEVA, E.Z., AIZENBERG, A.M., PROTOTYPE OF HIGHLY-OPTIMIZED TWSM-PACKAGE FOR DIFFRACTION MODELING OF SEISMIC WAVEFIELDS WITH ADAPTATION FOR GPU-CLUSTER.

© 2014 Зятьков Н.Ю., Айзенберг А.А., Ракшаева Е.Ж., Айзенберг А.М.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

Поступила 22 апреля 2014 г., опубликована 20 декабря 2014 г.

и эффективность метода демонстрируется численными примерами преломления волнового поля через W-образный соляной навес и отражения от гладкой границы.

2. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА TWSM

Реализацию алгоритма в общем случае можно разделить на реализацию трёх основных блоков:

- (1) Реализация вектора падающего волнового поля источника на границу с учётом каскадной дифракции;
- (2) Реализация распространение поля от последней границы в приёмники, с учётом каскадной дифракции;
- (3) Реализация распространения поля от предыдущей границы к следующей, в соответствии с некоторым волновым кодом, с учётом каскадной дифракции.

Посредством комбинирования трёх основных блоков программы, алгоритм позволяет моделировать распространение поля источника в произвольной слоистой среде, в соответствии с волновым кодом поля. Более подробная информация об алгоритме TWSM дана в работе [2].

Реализация алгоритма распространения поля в слоистой среде с произвольными границами сводится к реализации процедуры перемножения матрицы больших размеров (порядка 150 Гб памяти) на вектор волнового поля для каждой дискретной частоты ω_k из набора $\omega_1 \dots \omega_K$ (задача была решена в частотной области). На рис. 1 показана схема реализации матрично-векторного преобразования TWSM на графических ускорителях. Каждому устройству назначается соответствующая полоса (или набор полос) матрицы. После этого каждый GPU осуществляет матрично-векторное преобразование для соответствующей полосы матрицы для каждой дискретной частоты ω_k и получает некоторые наборы частей искомых векторов $F_s^{\omega_1} \dots F_s^{\omega_K}$. После этого результаты всех GPU объединяются в преобразованный набор векторов $F_s^{\omega_1} \dots F_s^{\omega_K}$.

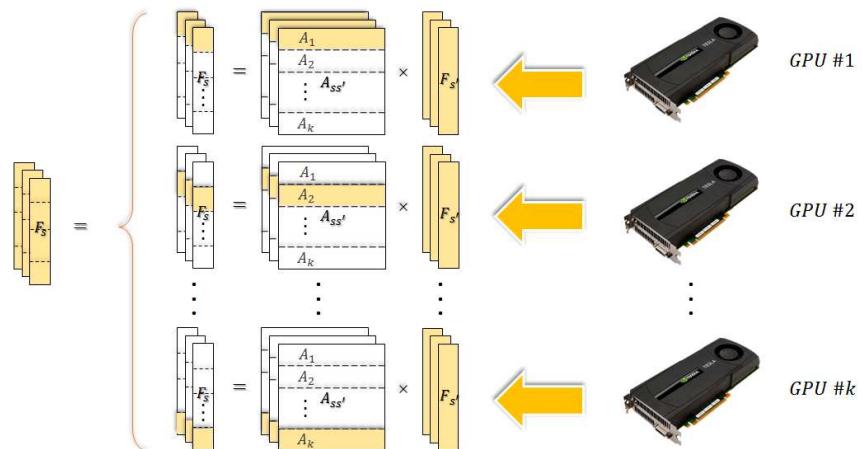


Рис. 1. Схема реализации матрично-векторного преобразования TWSM на графических ускорителях.

3. ТЕСТ 1: ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ W-ОБРАЗНУЮ ГРАНИЦУ

Для анализа результатов и тестирования алгоритма была рассмотрена W-образная граница, состоящая из четырёх граней и четырёх острых рёбер порождающие многократную дифракцию (рис. 2). Верхняя и вторая грани определяются формулами $z = \pm 0.41(4 - x)$ и образуют ребро с $x = 4$ км и $z = 0$ км. Третья и нижняя грани определяются формулами $z = \pm 0.41(4 - x) - 1$ и образуют ребро с $x = 4$ км и $z = -1$ км. Было проведено моделирование для двух однородных областей: седиментов (снаружи двуклинной границы) с постоянными скоростью в среде 2.0 км/с и плотностью 2.0 г/см³ и соляного тела W-образной формы с постоянными скоростью 4.0 км/с и плотностью 3.0 г/см³ в среде. Источник был расположен в точке ($x = 4$ км, $y = 0$ км, $z = 1$ км), излучающий сферическую Р-волну представленную в виде скалярного потенциала, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца. Импульс источника имел косинусоидальную форму $e^{-(2\tau)^2} \cos(2\pi\tau)$, где $\tau = t/T - 2$. $T = 0.032$ с — период, соответствующий длине волны в 0.064 км. Модуль спектра имел максимум на доминирующей частоте в 38.25 Гц. 101 приёмник были расположены вдоль линии Профиль 1 ($y = 0$ км и $z = -2$ км) от $x = 3.25$ км до $x = 4.75$ км с шагом $\Delta x = 0.015$ км. Также были использованы вспомогательные приёмники Профиль 2 ($y = 0$ км и $z = 0$ км) и Профиль 3 ($y = 0$ км и $z = -1$ км) расположенные вдоль оси Ox от $x = 2.0$ км до $x = 3.5$ км с шагом $\Delta x = 0.015$ км.

На рис. 3 представлена суперпозиция физически реализуемой прямой волны, распространяющаяся по седиментам, и волнового поля, дважды преломленного через верхнюю и нижнюю грани W-границы разделов седименты-соль-седименты в приёмниках Профиль 1. Эти волны представлены раздельно на рис. 4 и рис. 5. На Рис. 4 представлено волновое поле, дважды преломленное через верхнюю и нижнюю грани W-границы разделов седименты-соль-седименты в приёмниках Профиль 1. На сейсмограмме видно 2 волны. Волна, пришедшая по времени раньше, преломилась, пройдя от источника по седиментам, через верхнюю грань W-образной границы, прошла по соли и затем преломилась через нижнюю грань, далее распространяясь по седиментам в приёмники Профиль 1. Волна, пришедшая по времени позднее, преломилась, пройдя от источника по седиментам, через верхнюю грань W-образной границы, прошла по соли и затем преломилась через вторую грань, распространяясь далее по седиментам в приёмники Профиль 1, порождая дифракцию на ребре $x = 4$ км и $z = 0$ км. На рис. 5 представлена физически реализуемая прямая волна, распространяющаяся по седиментам в приёмники Профиль 1 с учётом дифракции от рёбер W-образной границы. Данный тест подробно описан в работе [2]. На рис. 6 показано однократно преломленное из седиментов в соль поле источника через верхнюю грань W-образной границы в приёмниках Профиль 2. Первая волна с сильными амплитудами представляет собой чистую преломленную волну. Вторая волна — краевая, распространяющаяся от верхнего ребра W-образной границы вдоль приёмников Профиль 2. На рис. 7 показано однократно преломленное из седиментов в соль поле источника через верхнюю грань W-образной границы в приёмниках Профиль 3. Волновое поле на сейсмограмме представляет собой суперпозицию преломленной волны и дифрагированных волн различной кратности.

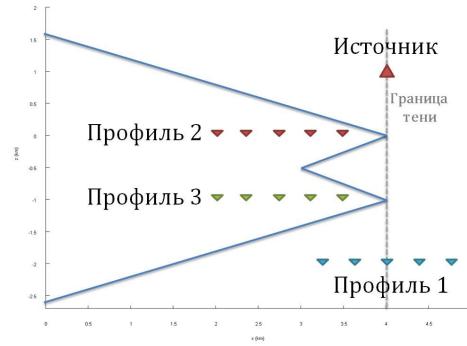


Рис. 2. Модель с границей W-формы.

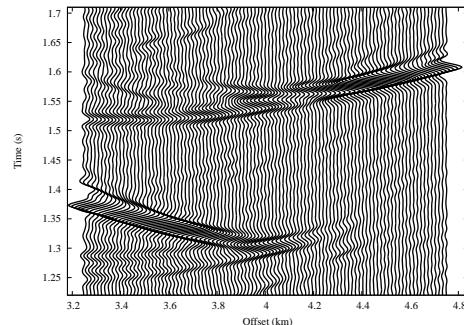


Рис. 3. Суперпозиция волн в приёмниках Профиль 1.

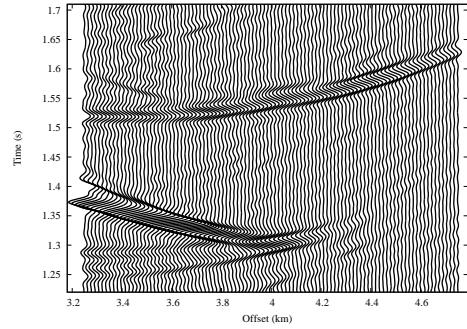


Рис. 4. Дважды преломленная волна в приёмниках Профиль 1.

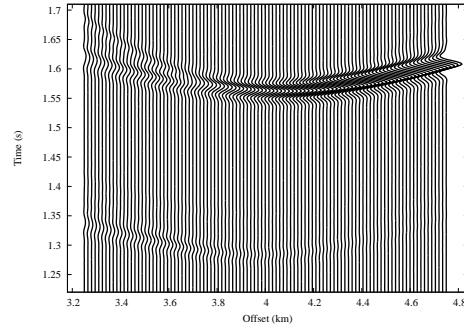


Рис. 5. Физически реализуемая прямая волна в приёмниках Профиль 1.

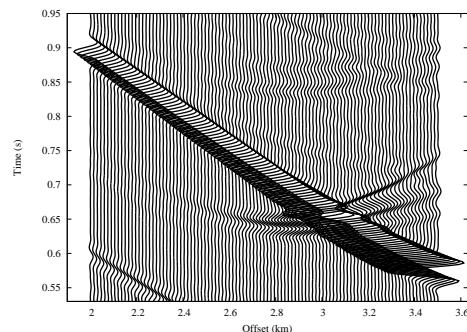


Рис. 6. Однократно преломленная волна в приёмниках Профиль 2.

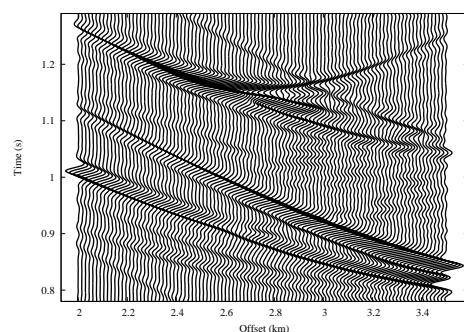


Рис. 7. Однократно преломленная волна в приёмниках Профиль 3.

4. ТЕСТ 2: ОТРАЖЁННАЯ И ГОЛОВНАЯ ВОЛНЫ ОТ ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЫ

Алгоритм также тестировался для модели отражения волнового поля от гладкой границы, являющейся разделом двух сред с сильными контрастами

скоростей и плотностей (рис. 8). Верхнее полупространство имело следующие параметры среды: скорость — 2.0 км/с, плотность — 1.8 г/см³, нижнее имело скорость 2.8 км/с, плотность 2.1 г/см³. Источник был расположен в точке с координатой ($x = -1.25$ км, $y = 0$ км, $z = 0$ км), 80 приёмников были расположены вдоль прямой линии ($y = 0$ км и $z = 0$ км) от $x = -1.25$ км до $x = 0.725$ км с шагом $\Delta x = 0.025$ км. Была использована та же самая форма импульса источника, как и в Тесте 1. Волновое поле на сейсмограмме (рис. 9) представлено в виде чистой отражённой волны с сильными амплитудами и головной волны со слабыми амплитудами, которая видна от $x = -0.5$ км до $x = 0.725$ км. Существование головной волны — результат применения алгоритмом TWSM эффективных коэффициентов отражения (ЭКО) [3]. Использованная версия ЭКО явно учитывает две главные кривизны границы [4].

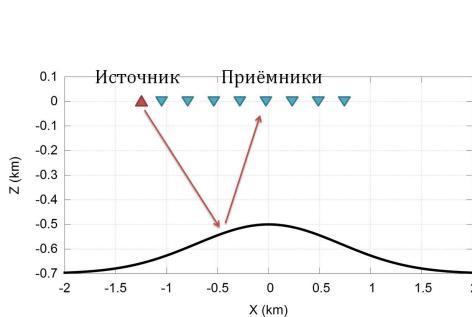


Рис. 8. Модель отражения от гладкой границы.

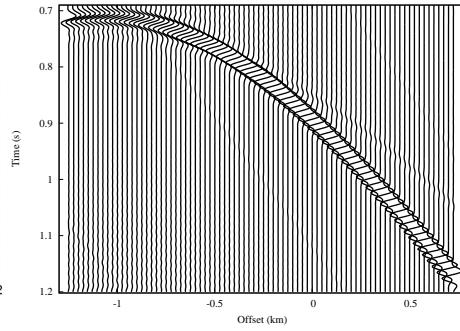


Рис. 9. Отражённая и головная волны.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был представлен прототип высокооптимизированного пакета TWSM адаптированного для GPU-клUSTERA. Пакет предназначен для моделирования каскадной дифракции в терминах матриц распространения — поглощения и ЭКО. Точность, стабильность и эффективность алгоритма подтверждается численными тестами с W-образной и гладкой границами. Авторы надеются, что данный алгоритм адаптированный для GPU-ускорителей или его части могут быть использованы в качестве моделирующего ядра в оптимизационных методах интерпретации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.М. Айзенберг, А.А. Айзенберг, *Фундаментальное решение акустического волнового уравнения в полупространстве, удовлетворяющее интегральному условию поглощения на регулярной границе*, Тезисы Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия (2008), с. 89.
- [2] N. Zyatkov, A. Ayzenberg, A.M. Aizenberg, and A. Romanenko, *Highly-optimized TWSM Algorithm for Modeling Cascade Diffraction in Terms of Propagation-absorption Matrices*, Proceedings of the 75th Conference and Exhibition, European Association of Geoscientists & Engineers, London, England (2013), Th-P02-11.

- [3] А.М. Aizenberg, M.A. Ayzenberg, and K.D. Klem-Musatov, *Seismic diffraction modeling with the tip-wave superposition method*, Proceedings of the 73th Conference and Exhibition, European Association of Geoscientists & Engineers, Vienna, Austria (2011), B018.
- [4] Е.Ж. Ракшаева, Н.Ю. Зятьков, Т.В. Нефедкина, А.М. Айзенберг, *3D моделирование волновых полей, отражённых от криволинейных границ, методом МНКВ с модифицированным эффективным коэффициентом отражения*, Сборник материалов Международной выставки и конгресса «Интерэкско Гео-Сибирь-2014», Новосибирск, Россия, **2** (2014).

НИКОЛАЙ ЮРЬЕВИЧ ЗЯТЬКОВ
 НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
 ул. Пирогова 2,
 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: nikolay.zyatkov@gmail.com

АЛЁНА АРКАДЬЕВНА АЙЗЕНБЕРГ
 NORWEGIAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY,
 HOGSKOLERINGEN, 1,
 7491, TRONDHEIM, NORWAY
E-mail address: alena.ayzenberg@ntnu.no

ЕКАТЕРИНА ЖИМБЕЕВНА РАКШАЕВА
 НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
 ул. Пирогова 2,
 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: rcatherine89@gmail.com

АРКАДИЙ МАРКОВИЧ АЙЗЕНБЕРГ
 ИНСТИТУТ НЕФТЕГАЗОВОЙ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ им. А.А. ТРОФИМУКА СО РАН,
 пр. Академика Коптиуга 3,
 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: AizenbergAM@ipgg.sbras.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.41–С.49 (2014)

УДК 512.5

MSC 13A99

**УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ
ЗАДАЧИ ФАРМАКОКИНЕТИКИ В СЛУЧАЕ
ПРОИЗВОЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА КАМЕР**

А.И. Ильин, С.И. Кабанихин, Д.А. Воронов

Аннотация. В данной статье описывается комплексный подход к решению обратной задачи фармакокинетики для линейных камерных моделей в случае произвольного количества камер. Ставится проблема идентифицируемости камерных моделей. Описан алгоритм поиска подходящей замены переменных, сводящей исходную камерную модель к идентифицируемой. Разработан алгоритм решения обратной задачи в общем случае.

Ключевые слова: фармакокинетика, камера, идентифицируемость, теория графов, репараметризация, градиент.

Содержание

1. Идентифицируемость в фармакокинетике и ее значение. Описание алгоритма поиска идентифицируемой замены переменных.	C.43
2. Разработка алгоритма решения обратной задачи фармакокинетики в общем случае (произвольного количества камер). Постановка прямой и обратной задачи. Вычисление градиента функционала с помощью введения сопряженной задачи	C.45
ПРИЛОЖЕНИЕ I. Понятия из теории графов.	C.47
Список литературы	C.48

**1. ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ В ФАРМАКОКИНЕТИКЕ И ЕЕ ЗНАЧЕНИЕ.
ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА ПОИСКА ИДЕНТИФИЦИРУЕМОЙ ЗАМЕНЫ
ПЕРЕМЕННЫХ.**

Проблема идентифицируемости параметров имеет ключевое значение при анализе динамических систем дифференциальных уравнений, в частности, систем, описывающих фармакокинетические процессы в организме [12, 13].

Анализ идентифицируемости параметров для динамических систем обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет ответить на вопрос, какие неизвестные параметры можно вычислить по известным данным на входе и выходе. В фармакокинетике в качестве данных на выходе обычно выступают результаты данных концентрации препарата в крови и/или моче. В качестве данных на входе используются данные о препарате (дозировка, способ введения, количество приемов лекарственного средства). Строгое понятие идентифицируемости описывается следующим определением:

Определение. Если параметры модели имеют единственное или конечное число значений, дающих величины входа-выхода данных, тогда будем говорить, что модель и ее параметры являются идентифицируемыми. Если же какое-нибудь подмножество параметров может принимать бесконечное количество значений, дающих те же самые данные входа-выхода, то данная модель и это множество параметров называется неидентифицируемыми. В таком случае обычно ставится вопрос о поиске подходящей замены переменных, сводящей исходную модель к идентифицируемой. Такая замена называется идентифицируемой (идентифицируемая репараметризация).

Существуют разные подходы к поиску таких замен. Например, с использованием рядов Тейлора [3], преобразованием подобия [4], а также подходы, основанные на использовании методов дифференциальной алгебры [5]. Мы же будем стараться искать замену переменных, наиболее подходящую именно для фармакокинетического моделирования, а именно - рациональную репараметризацию. Рассмотрим две, на первый взгляд, идентичные четырехкамерные фармакокинетические модели:

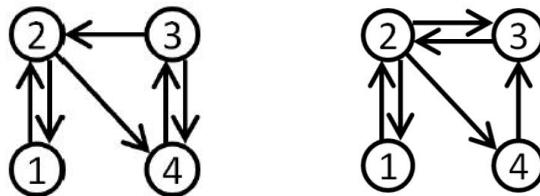


Рис. 1.1. Две четырехкамерные фармакокинетические модели.

Разница между ними состоит лишь в одном переходе между камерами. Т.е. с точки зрения физиологии это равносильно отсутствию обратного потока лекарственного препарата, например, из печени в почки. Тем не менее, несмотря на кажущуюся схожесть представленных моделей, для первой модели не существует необходимой нам замены переменных. Вторая же модель, изначально

неидентифицируемая, допускает рациональную замену переменных, приводящую ее к идентифицируемой. После чего уже можно приступать к решению обратной задачи, вычисляя константы скорости, либо некоторые их комбинации, полученные после репараметризации.

С другой стороны, используя фундаментальные математические подходы (в т.ч. теорию графов, высшую математику, математический анализ и др.), можно заранее определить, будет ли данная модель идентифицируемой. И, более того, в случае неидентифицируемости модели в некоторых случаях удается подобрать «удобную» замену переменных, приводящую исходную модель к идентифицируемой. Следует отметить, что фармакокинетические модели в общем случае всегда неидентифицируемы (за исключением однокамерной модели).

Опишем алгоритм, который по данной системе линейных дифференциальных уравнений определяет, является ли она идентифицируемой. И в случае неидентифицируемой модели выдает рациональную замену переменных, приводящую данную систему к идентифицируемой.

Определения терминам из теории графов, которые в будущем будут использоваться для поиска подходящих замен, можно посмотреть в ПРИЛОЖЕНИИ I.

Немного подробней остановимся на определении двойного характеристического полиномиального отображения. В теории линейных камерных моделей у нас есть граф G с n вершинами и m дугами. Пространство параметров $\theta \subseteq \mathbb{R}^{2n-1}$ состоит из таких матриц, чья структура индуцируется графом G , положительными внедиагональными элементами, отрицательными диагональными элементами и строгим диагональным преобладанием. Отображение $c : \theta \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ сопоставляет матрице $A \subseteq \theta$ вектор $(c_1(A), \dots, c_n(A), d_1(A), \dots, d_{n-1}(A))$, составленный из коэффициентов при характеристических многочленах.

Отображение $c : \theta \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ называется двойным характеристическим полиномиальным отображением.

Итак, вернемся к описанию алгоритма поиска рациональной замены переменных. Во-первых, следует сказать, что данной схеме для камерной модели можно сопоставить граф. На рисунке 1.2 справа представлена четырехкамерная фармакокинетическая модель, а слева соответствующий ей граф с четырьмя вершинами.

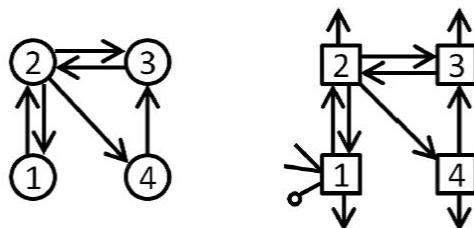


Рис. 1.2. Справа – четырех камерная фармакокинетическая модель; Слева – соответствующий ей граф.

По данному графу G с n вершинами и $m \leq 2n - 2$ дугами, полученному из конкретной модели, мы либо указываем конкретную замену, которая свидет нашу модель к идентифицируемой, либо говорим, что такой замены не существует.

На первом этапе алгоритма мы вычисляем $d = \dim(Imc)$ – размерность образа двойного характеристического полиномиального отображения. Если $d \neq m + 1$, то не существует замены переменных в необходимом для нас виде (рациональная замена переменных). Иначе:

а) Ищем оствовное дерево T из графа G с вершинами $j_1 \rightarrow i_1, \dots, j_{n-1} \rightarrow i_{n-1}$

б) Формируем матрицу E с помощью перестановки столбцов матрицы смежности $E(G)$ таким образом, что первые $n - 1$ столбцов отвечают ребрам T и вычеркиванием первой строки. Другими словами, $E = (E_1 E_2)$, где E_1 – $n - 1$ на $n - 1$ матрица, отвечающая ребрам T

в) Определяем мономиальное масштабирование: $X_i = f_i(A)x_i$. Положим $f_1(A) = 1$. Пусть также $r_i = (r_{1,i}, \dots, r_{n-1,i})^T$ – i -ый столбец матрицы $C_1 = E^{-1}$. Тогда $f_{i+1}(A) = a_{i_1 j_1}^{r_{1,1}} \dots a_{i_{n-1} j_{n-1}}^{r_{n-1,1}}$.

г) Заменяем элементы a_{ij} матрицы A на элементы $\frac{a_{ij} f_i(A)}{f_j(A)}$.

Сделаем некоторые замечания по описанному алгоритму. Во-первых, d может быть вычислено как с помощью определения ранга матрицы Якоби отображения c в общей точке, так и с помощью поиска обнуляющего идеала образа отображения c , используя базисы Грёбнера. Также следует отметить, что в некоторых случаях этот шаг можно пропустить: если G является индуктивно сильно связным графом, то условие $d = m + 1$ автоматически выполняется, и нет необходимости вычислять d трудоемкими методами.

В случае существования идентифицируемой замены переменных, новая матрица будет иметь $n - 1$ элементов, отвечающих оствовному дереву T , равных единице, и оставшиеся внедиагональные элементы (их $m - n + 1$) понимаются как новые параметры в репараметризованной системе. Эти новые параметры являются идентифицируемыми в новой модели (но неидентифицируемыми в исходной).

2. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФАРМАКОКИНЕТИКИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ (ПРОИЗВОЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА КАМЕР). ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА ФУНКЦИОНАЛА С ПОМОЩЬЮ ВВЕДЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ

После сделанной замены переменных мы получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{X} = QX + u \\ X(0) = X_0 \\ y = X_1 \end{cases}$$

Данная модель и ее параметры уже являются идентифицируемыми.

Постановка прямой задачи. В прямой задаче по известной начальной концентрации требуется определить функции X_1, \dots, X_n , каждая из которых описывает поведение концентрации лекарственного препарата в соответствующей камере.

Постановка обратной задачи. Предположим, что нам известны данные измерений концентрации в центральной камере $y = X_1$ в некоторых точках $f = (X_1(t_1), \dots, X_1(t_M))$. По этим данным измерений требуется определить параметры модели – матрицу Q , состоящую из констант скорости.

Для решения этой задачи введём функционал:

$$J(Q) = \sum_{k=1}^M (X_1(t_k; Q) - f_k)^2.$$

и будем его минимизировать. Здесь $X_1(t_k; Q)$ – решение прямой задачи. Для поиска градиента введенного функционала распишем разность:

$$\begin{aligned} J(Q) - J(Q + \delta Q) &= \sum_{k=1}^M (X_1(t_k; Q) - f_k)^2 - \sum_{k=1}^M (X_1(t_k; Q + \delta Q) - f_k)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^M \delta X_1(t_k; Q) 2(X_1(t_k; Q) - f_k) = \int_0^T \delta X_1(t; Q) \sum_{k=1}^M 2(X_1(t_k; Q) - f_k) \delta(t - t_k) dt. \end{aligned}$$

Сейчас рассмотрим сопряженную задачу с начальными данными на правом конце:

$$\begin{cases} \psi_t + Q^* \psi = g \\ \psi(T) = 0, \end{cases}$$

где $g = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^M 2(X_1(t_k; Q) - f_k) \delta(t - t_k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогда наша разность представима в виде:

$$\int_0^T \delta X_1(t_k; Q) [\psi_t + Q^* \psi] dt.$$

Пусть теперь \bar{X} – решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \bar{X}_t = (Q + \delta Q)\bar{X} + u(t) \\ \bar{X}(0) = X_0 \end{cases}$$

Тогда $\delta X = \bar{X} - X$ будет решением следующей задачи с нулевыми начальными данными:

$$\begin{cases} \dot{\delta X} \approx Q\delta X + \delta Q X \\ \delta X(0) = 0 \end{cases}$$

Тогда, применяя интегрирование по частям в последнем интеграле, получаем:

$$\begin{aligned} (2.1) \quad \int_0^T &\left[-(\dot{\delta X}, \psi) + (\delta X, Q^* \psi) \right] dt = \\ &= \int_0^T \left[-(\dot{\delta X}, \psi) + (Q\delta X, \psi) - (Q\delta X, \psi) + (\delta X, Q^* \psi) \right] dt. \end{aligned}$$

Выражение $-(Q\delta X, \psi) + (\delta X, Q^* \psi) = 0$ из определения сопряженного оператора.

Теперь заменяем $\dot{\delta X} \approx Q\delta X + \delta Q X$. Получаем:

$$\int_0^T - (Q\delta X + \delta QX, \psi) + (Q\delta X, \psi) dt = \int_0^T - (\delta QX, \psi) dt.$$

Таким образом, пренебрегая членами второго порядка малости получили следующее равенство:

$$J(Q) - J(Q + \delta Q) \approx \int_0^T - (\delta QX, \psi) dt$$

Теперь для получения градиента введем скалярное произведение в пространстве квадратных матриц $M_n(R)$ размера n следующим образом:

Для матриц A и B скалярное произведение вычисляется по правилу:

$\langle A \bullet B \rangle = \sum_{j=1}^n A_j \cdot B_j$, где $A_j \cdot B_j$ - скалярное произведение j -ой строки матрицы A и j -ой строки матрицы B . Проеверим, что введеная операция удовлетворяет свойствам склярного произведения:

$$\begin{aligned} \langle \alpha A_1 + \beta A_2 \bullet A_3 \rangle &= \sum_{j=1}^n (\alpha A_1 + \beta A_2)_j \cdot (A_3)_j = \sum_{j=1}^n (\alpha A_{1j} + \beta A_{2j}) \cdot (A_3)_j = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n A_{1j} \cdot A_{3j} + \beta \sum_{j=1}^n A_{2j} \cdot A_{3j} = \alpha \langle A_1 \bullet A_3 \rangle + \beta \langle A_2 \bullet A_3 \rangle \end{aligned}$$

Свойства симметричности и положительной определенности введеного склярного произведения тривиальным образом следуют из определения склярного произведения векторов.

Используя определение склярного произведения для матриц, преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \int_0^T - (\delta QX, \psi) dt &= - \int_0^T (\delta Q_{11}x_1 + \delta Q_{12}x_2 + \dots + \delta Q_{1n}x_n) \psi_1 dt - \\ &\quad - \int_0^T (\delta Q_{21}x_1 + \delta Q_{22}x_2 + \dots + \delta Q_{2n}x_n) \psi_2 dt - \dots \\ &\quad - \int_0^T (\delta Q_{n1}x_1 + \delta Q_{n2}x_2 + \dots + \delta Q_{nn}x_n) \psi_n dt = \\ &= - \sum_{j=1}^n \int_0^T \delta Q_{1j} \psi_1 X_j - \dots - \sum_{j=1}^n \int_0^T \delta Q_{nj} \psi_n X_j = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^T -\psi_i X_i dt \right) \cdot (\delta Q)_i. \end{aligned}$$

В итоге, мы получили следующее выражение:

$$J(Q) - J(Q + \delta Q) \approx \langle J'(Q) \bullet \delta Q \rangle$$

где матрица $J'(Q)$ - градиент целевого функционала $(J'(Q))_{ij} = - \int_0^T \psi_i X_j dt$.

ПРИЛОЖЕНИЕ I. Понятия из теории графов.

Вершина - точка, где могут сходиться/выходить рёбра и/или дуги. Множество вершин графа G обозначается $V(G)$.

Дуга - это ориентированное ребро.

Граф - включает множество вершин и множество рёбер, являющееся подмножеством декартова квадрата множества вершин (то есть каждое ребро соединяет ровно две вершины).

Остовное дерево (остов) (неориентированного) связного графа — всякий частичный граф, являющийся деревом.

Остовной подграф — подграф, содержащий все вершины.

Матрица смежности графа — это матрица, значения элементов которой характеризуются смежностью вершин графа. При этом значению элемента матрицы присваивается количество рёбер, которые соединяют соответствующие

вершины (то есть которые инцидентны обеим вершинам). Петля считается сразу двумя соединениями для вершины, то есть к значению элемента матрицы в таком случае следует прибавлять 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] John G. Wagner, *Linear Pharmacokinetic Equations Allowing Direct Calculation of Many Needed Pharmacokinetic Parameters from the Coefficients and Exponents of Polyexponential Equations Which Have Been Fitted to the Data*, Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics, Vol. 4, No. 5, 1976
- [2] S. Audoly and L.D'Angio, *On the identifiability of linear compartmental systems: a revisited transfer function approach based on topological properties*, Math. Biosci. 66(2) (1983) 201-228
- [3] N.D. Evans and M.J. Chappell, *Extensions to a procedure for generating locally identifiable reparametrisations of unidentifiable systems*, Math. Biosci 168 (2000) 137-159
- [4] M.J. Chappell and R.N. Gunn, *A procedure for generating locally identifiable reparametrisations of identifiable non-linear systems by the similarity transformation approach*, Math. Biosci 148 (1998) 21-41
- [5] N. Meshkat, M. Eisenberg, and J.J. Distefano III, *An algorithm, for finding globally identifiable parameter combinations of nonlinear ODE models using Gr?bner Bases*, Math. Biosci. 222 (2009) 61-72
- [6] Ilyin A., Kabanikhin S. I. , Nursetoit D. B., Nursetova A. T., Asanova N. A., Voronov D. A., Bakytov D. *Analysis of ill-posedness and numerical methods of solving a nonlinear inverse problem in pharmacokinetics for the two-compartmental model with extravascular drug administration*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, Volume 20, Issue 1, Pages 39–64, ISSN (Online) 1569-3945, ISSN (Print) 0928 -0219, DOI: 10.1515/jip-2012-0202, March 2012.
- [7] Anders Kallen, *Computational Pharmacokinetics*, Chapman, Hall Crc Biostatistics Series 2007
- [8] C. Cobelli, E. Carson, *Introduction to Modeling in Physiology and Medicine*, The Netherlands: Academic Press, Elsevier, 2008.
- [9] J. F. Staub, E. Foos, B. Courtin, R. Jochemsen and A. M. Perault-Staub, 8) *A nonlinear compartmental model of Sr metabolism. I. Non-steady-state kinetics and model building*, Am J Physiol Regul Integr Comp Physiol 284:R819-R834, 2003. First published 7 November 2002; doi: 10.1152/ajpregu.00227.2002
- [10] H.W. Engl, C. Flamm, P. Kugler, J. Lu, S. Muller, P. Schuster, *Inverse problems in systems biology*, Inverse Problems, **25**, № 12, 123014, 2009.
- [11] С.И. Кабанихин, *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, Berlin: Gruyter, 2011.
- [12] А.И. Ильин, С.И. Кабанихин, Д.А. Воронов. Численное решение обратной задачи фармакокинетики для трехкамерной фармакокинетической модели с внутрисосудистым способом введения препарата, Сибирские электронные математические известия, 11 (2014), стр. С.51–С.61.
- [13] А.И. Ильин, С.И. Кабанихин, О.И. Криворотко. Об определении параметров моделей, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений, Сибирские электронные математические известия, 11 (2014), стр. С.62–С.75.

Каванихин Сергей Игоревич

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр-т Лаврентьева 6,

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,

630090, Новосибирск, Россия

E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

Воронов Дмитрий Андреевич

Новосибирский государственный университет,

ул. Пирогова 2,

630090, Новосибирск, Россия

E-mail address: dmitriy.vorono.89@gmail.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.51–61 (2014)

УДК 512.5

MSC 13A99

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФАРМАКОКИНЕТИКИ ДЛЯ ТРЕХКАМЕРНОЙ ФАРМАКОКИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ВНУТРИСОСУДИСТЫМ СПОСОБОМ ВВЕДЕНИЯ ПРЕПАРАТА

А.И. Ильин, С.И. Кабанихин, Д.А. Воронов

Аннотация. В данной статье описан камерный подход к моделированию фармакокинетических процессов в организме человека. Была рассмотрена трехкамерная фармакокинетическая модель. Нелинейная обратная задача решалась методами простой итерации и Ньютона-Канторовича. Приведены результаты численных экспериментов. Проведен анализ стратегий выбора начального приближения. Показана связь фармакокинетических показателей препарата с выбором начальных приближений.

Ключевые слова: фармакокинетика, камера, метод Ньютона-Канторовича, метод простой итерации, основные фармакокинетические показатели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Камерный подход к моделированию фармакокинетических процессов. Понятие камеры. Линейные и нелинейные модели. Устойчивость камерных моделей. Примеры. Для начала дадим определение камеры, опишем камерный подход к моделированию фармакокинетических процессов, рассмотрим линейные и нелинейные камерные модели. Под камерой будем

© 2014 Ильин А.И., Кабанихин С.И., Воронов Д.А.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00773), интеграционного проекта СО РАН 122 и Министерства образования и науки Российской Федерации.

Поступила 4 мая 2014 г., опубликована 20 декабря 2014 г.

понимать количество вещества, которое ведет себя, словно оно кинетически однородно и идеально перемешено. Камерная модель состоит из конечного набора камер со специальными связями между ними. Эти связи представляют собой поток вещества, что физиологически означает перемещение из одного места в другое или химическое преобразование, либо то и другое одновременно. Пример камерной модели изображен на рисунке снизу, где камеры изображены кругами, а связи между ними – стрелками. Фактически, многокамерными

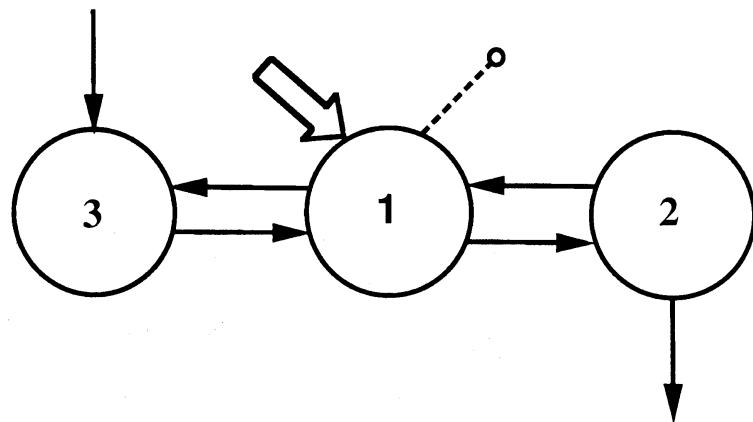


Рис. 1.1. Трёхкамерная модель. Сначала вещество попадает в камеру 3. Из камеры 2 вещество необратимо покидает систему. Обмен вещества между камерами изображен стрелками. Камера 1 является доступной (для измерений): входные параметры и данные измерений изображены большой стрелкой и пунктирной линией соответственно.

моделями в фармакокинетике называется следующий процесс: исследуемый препарат вступает в различные состояния и выходит из них. Также это может быть биохимическое изменение лекарства. В таких моделях ключевая вещь состоит в том, что поток выхода препарата из камеры пропорционален количеству вещества в камере. Перед тем, как дать понятия кинетической однородности и объяснить, что значит “перемешано идеально”, полезно понять, что можно использовать в качестве камер. Плазма – кандидат на роль камеры. Такое вещество, как глюкоза плазмы также может быть камерой. Цинк в kostях может быть камерой, как и тироксин в щитовидной железе. В некоторых экспериментах может быть несколько камер, отвечающих за плазму: каждая камера соответствует определенному веществу в плазме. Такой подход относится не только к плазме. Например, глюкозо-6-фосфат и глюкоза могут быть двумя различными камерами в клетке печени. Также следует разделить камеры на доступные для измерений и недоступные. С пониманием того, что может быть использовано в качестве камеры, легче дать описание кинетической однородности и понятия идеальной перемешанности. “Вещество перемешано идеально” означает, что любые две пробы, взятые из одной камеры в одно время, будут иметь одинаковую концентрацию изучаемого вещества и по этой причине будут одинаково репрезентативны. Это определение показывает однородность информации в отдельной камере. Кинетическая однородность же

означает, что каждая частица в камере имеет равную вероятность покинуть ее. Понятие камеры позволяет свести сложную физиологическую систему к конечному набору камер, связанных между собой. Количество необходимых камер зависит как от изучаемой системы, так и от разнообразия экспериментальных возможностей. Очевидно, что камерная модель уникальна для каждой изучаемой модели.

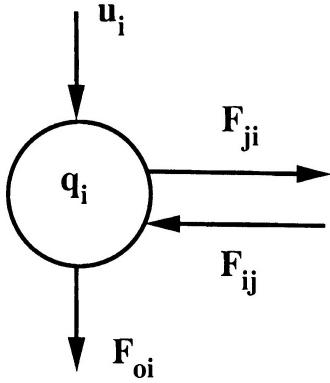


Рис. 1.2. i -ая камера в системе

На рисунке 1.2 изображена изображена i -ая камера n -камерной модели. $q_i \geq 0$ обозначает массу камеры. Стрелки показывают потоки внутрь и вне системы. $u_i \geq 0$ – поток в камеру; F_{0i} – выход из камеры; поток из камеры i в j - F_{ji} , $F_{ji} > 0 \forall i, j$. Общие уравнения для камерных уравнений получаются из закона сохранения массы:

$$\begin{cases} \frac{dq_i(t)}{dt} = \sum_{j \neq i} F_{ij} - \sum_{j \neq i} F_{ji} - F_{0i} + u_i \\ q_i(0) = q_{i0}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Потоки u_i , вообще говоря, константы либо функции, зависящие только времени. Функции F_{ji} , F_{ij} и F_{0i} могут быть функциями от q_1, \dots, q_n (иногда и от времени, но мы не будем рассматривать этот случай). Обычно эти функции можно записать в виде:

$$F_{ji}(q) = k_{ji}(q)q_j, \quad (1.2)$$

где $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ – вектор, состоящий из масс каждой из камер. Таким образом, систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \frac{dq_i(t)}{dt} = \sum_{j \neq i} k_{ij}(q)q_j - \left(\sum_{j \neq i} k_{ji}(q) - F_{0i} \right) q_i + u_i \\ q_i(0) = q_{i0} \end{cases} \quad (1.3)$$

Элементы k_{ij} называются константами скорости. Нужно иметь в виду, что название константы достаточно условно, т.к. k_{ij} могут быть функциями как от масс, так и от времени. Данная система нелинейных дифференциальных уравнений описывает **нелинейную камерную модель фармакокинетики** [8, 9]. Если коэффициенты k_{ij} не зависят от масс q_i и от времени, то модель

называется *линейной фармакокинетической моделью*. Вводя обозначение:

$$k_{ji} = - \left(\sum_{j \neq i} k_{ji} + k_{0i} \right), \quad (1.4)$$

можно записать систему в виде

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \sum_j k_{ij}(q)q_j + u_i \\ q_i(0) = q_{io} \end{cases}, \quad (1.5)$$

или в операторном виде:

$$\begin{cases} \dot{q} = K(q)q + u \\ q(0) = q_0 \end{cases}, \quad (1.6)$$

Где K – оператор, а u – вектор, отвечающий за входящие потоки препарата извне.

В линейном случае, оператор K – матрица, состоящая из констант скорости. Тогда наша система представляет собой неоднородную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Чтобы данная система имела физический смысл необходимо, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{aligned} k_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, j \\ k_i &\geq \sum_{i \neq j} k_{ij} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Другие свойства матрицы можно посмотреть в ПРИЛОЖЕНИИ I.

K - матрица с диагональным преобладанием, что важно, т.к. свойства устойчивости камерных моделей тесно связаны с диагональным преобладанием камерных матриц. Например, для такой линейной модели можно показать, что все собственные числа матрицы системы имеют отрицательную вещественную часть, и среди них нет чисто мнимых значений. Это означает ограниченность решений. Качественная теория линейных и нелинейных камерных моделей есть в работах *Jacquez и Simon* [1993], где представлены сведения об устойчивости нелинейных моделей. Линейная модель крайне полезна в приложениях. Линейные камерные модели в сочетании с опытами с меченными атомами широко применяются в изучении распределения вещества в живом организме, в конкретном органе и на клеточном уровне. Примеры можно найти у *Carson*[1983] и у *Jacquez*[1996]. Интересное приложение линейных камерных моделей (в случае с конкретным органом) – описание обмена вещества между кровью, тканевой жидкостью и клеткой ткани из данных многокомпонентного химического индикатора. Эти модели рассматриваются в работах *Jacquez*[1985]. Пример же модели, описывающей перемещение глюкозы и метаболизм в мышечном скелете человека можно найти в работе *Saccocciani* и коллег [1996].

2. ТРЕХКАМЕРНАЯ ФАРМАКОКИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С ВНУТРИСОСУДИСТЫМ ВВЕДЕНИЕМ ПРЕПАРАТА

Цель нашей работы состоит в разработке, а также анализе применяемых численных методов решения возникающих обратных задач. При численном решении прикладных задач неминуемо встает вопрос о выборе начальных приближений. В случае, когда в нашей системе количество камер не превышает

четырех, мы всегда можем выписать аналитическую формулу для решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. В этом случае можно явно вычислить градиент функционала невязки и проводить анализ применения различных численных алгоритмов. Например, для двухкамерной фармакокинетической модели с внесосудистым способом введения препарата такого плана анализ представлен в нашей статье [2] В рамках данного исследования рассмотрим трехкамерную модель. На примере конкретной модели попытаемся найти связь между выбором начальных приближений и фармакокинетическими свойствами препарата и опишем сложности, возникающие при таком подходе. Итак, рассмотрим трехкамерную фармакокинетическую модель с внутрисосудистым способом введения препарата и элиминацией только из центральной камеры. В качестве центральной камеры выбрана плазма крови. Препарат вводится также только центральную камеру. На рисунке 2.1 представлена схема такой модели.

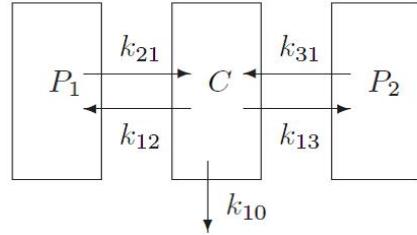


Рис. 2.1. Схема трёхкамерной фармакокинетической модели с центральной элиминацией

По описанному алгоритму составляется система дифференциальных уравнений из трёх уравнений. Для рассматриваемой трехкамерной модели функция, описывающая поведение концентрации в плазме (центральная камера) выглядит следующим образом:

$$C_{i.v.}(t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t} + A_3 e^{-\lambda_3 t} \quad (2.1)$$

Параметры, присутствующие в функции $C_{i.v.}$ будем называть макроконстантами. Вообще говоря, решение системы ОДУ, соответствующее центральной камере выглядит следующим образом:

$$(2.2) \quad C_{i.v.}(t) = \frac{D_{i.v.}}{V_p} \left[\frac{(k_{21} - \lambda_1)(k_{31} - \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{(k_{21} - \lambda_2)(k_{31} - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} + \frac{(k_{21} - \lambda_3)(k_{31} - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{-\lambda_3 t} \right]$$

Параметры, которые появляются при таком способе записи той же самой функции, будем называть микроконстантами. Нужно понимать, что при численном решении мы восстанавливаем макроконстанты. Основные фармакокинетические величины же вычисляются через микроконстанты. Поэтому, для того чтобы, при таком подходе выявить связь свойств препарата и начальными приближениями для итерационного метода необходимо будет по макроконстантам

считать микроконстанты и обратно. Что, конечно, не очень удобно. Также следует отметить, что нахождение параметров для нашего уравнения – процесс, не зависящий от конкретной модели. Тем не менее, нужно отдавать себе отчет в том, что показатели у экспонент должны быть отделены друг от друга (например, более чем вдвое-впятеро), чтобы можно было говорить о достоверности полученных данных.

2.1. Постановка обратной задачи. В качестве точного решения зададим следующий набор микроконстант [1]: $k_{12} = 3, k_{21} = 2, k_{13} = 1, k_{31} = 0.5, k_{10} = 0.1, D_{i.v.} = 500000, V_p = 5000$

Подставляя данный набор в формулу для концентрации, получаем следующую функцию, соответствующую точному решению:

$$C_{i.v.}(t) = 21.2e^{-0.02t} + 9.3e^{-0.8t} + 69.6e^{-5.8t}$$

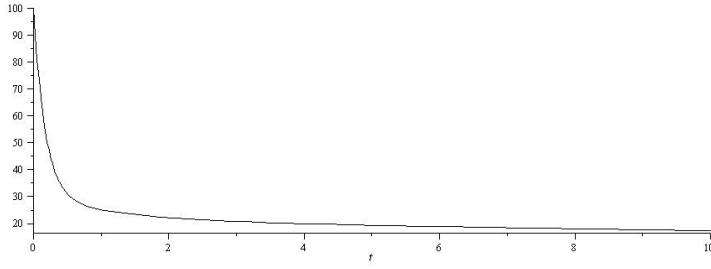


Рис. 2.2. Точное решение

Искомых параметров обратной задачи (макроконстант) 6, тогда, согласно нашим предшествующим исследованиям [2], подтвержденных рядом зарубежных статей (например, [1]) оптимальным количество измерений будет около 20. Возьмем пробы с шагом, например, $\frac{1}{2}$. Рассматриваем операторное уравнение: $A(q) = f$, где $A : R^6 \rightarrow R^{21}$ – нелинейный оператор. Отметим, что сингулярное число μ матрицы $A'(q)$ в окрестности точного решения $\mu(A'(q)) \approx 4716$.

Таким образом, в такой постановке нелинейная **обратная задача** состоит в поиске 6 параметров $q = (A_1, A_2, A_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ по данным измерений $f = (f_1, \dots, f_{21})$.

3. Численные результаты.

3.1. Метод простой итерации. На первом этапе данная задача решалась методом простой итерации (МПИ). По итогам компьютерных вычислений, можно заключить, что практически для любых начальных приближений можно восстановить функцию, достаточно близкую к точному решению. На рисунке 3.1 приведен типичный результат применения метода простой итерации.

Таким образом, если ставится задача о поиске кривой, отвечающей за концентрацию препарата в центральной камере, то МПИ вполне годится. Но если ставится задача о поиске констант скорости и основных фармакокинетических величин, то у МПИ можно выделить ряд недостатков. Во-первых, для многих начальных приближений сами макроконстанты вычисляются с невысокой степенью точности, соответственно, нельзя утверждать, что получаемые фармакокинетические показатели соответствуют реальным данным. Во-вторых, при

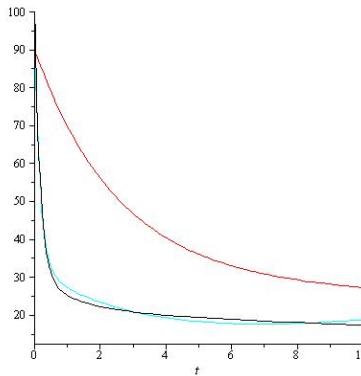


Рис. 3.1. Типичный результат применения МПИ. Чёрным - точное решение, красным - начальное приближение, бирюзовым - МПИ, 50к итераций, параметр МПИ $\alpha = 0.0000035$

применении МПИ можно близко восстановить функцию концентрации, но при этом будет наблюдаться сходимость к «ложному» минимуму (такие примеры подробно описаны в нашей статье [2]), а, значит, получить фармакокинетические параметры невозможно.

3.2. Метод Ньютона-Канторовича. Анализ стратегий выбора начальных приближений. Данную задачу будем решать методом Ньютона-Канторовича (в дальнейшем - МНК). В данном исследовании попробуем ответить на вопрос, какие начальные приближения лучше выбирать. А также попробуем выявить связь между начальными приближениями и физическими свойствами исследуемого процесса. Возьмем в качестве начального приближения функцию с близкими к точному решению значениями констант в показателях экспонент и с произвольными перед экспонентами:

$$C_{i.a.}(t) = 100e^{-0.03t} + 100e^{-0.9t} + 100e^{-6t}$$

В дальнейшем чёрным цветом на графиках будет указываться точное решение, красным – приближение итерационным методом. Для данного начального приближения уже четвертая итерация метода Ньютона-Канторовича дает в точности искомое решение. К слову, уже первая итерация практически повторяет искомую кривую. Первая итерация изображена на рисунке 3.2.

$$C_{1it}(t) = 21.16e^{-0.027737t} + 9.19e^{-0.888637tt} + 69.75e^{-5.839105t}$$

Т.е. всего *одна* итерация МНК дает результат несравненно лучше, чем 100000 итераций МПИ, не говоря уже о времени работы.

Возьмем точные значения у экспонент, но неточные в показателях: $C_{i.a.}(t) = 21e^{-0.004t} + 9e^{-0.04t} + 60e^{-0.4t}$. В этом случае кривая подходила достаточно близко к решению при использовании МПИ. В случае применения МНК число обусловленности у обращаемой матрицы на первой итерации равно 53537176, на второй – метод уже полностью «разваливается». Это говорит о том, что следует аккуратно подходить к выбору начального приближения.

Теперь возьмем начальное приближение с точными константами, но неточными показателями: $C_{i.a.}(t) = 21.2e^{-2t} + 9.3e^{-4t} + 69.6e^{-6t}$. На второй итерации

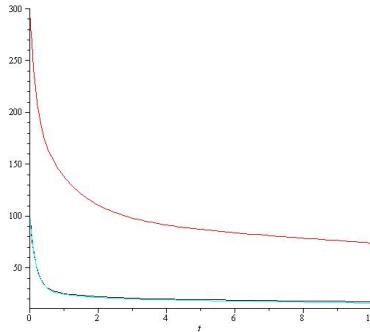


Рис. 3.2. Результат применения МНК – первая итерация(бирюзовым цветом)

λ_1	0,000001	0,01	0,05	0,08	0,09	0,1	>0,1
сходимость	+	+	+	+	+	-	-

ТАБЛИЦА 1. Зависимость сходимости МНК от λ_1

метод разваливается, что подтверждает «чувствительность» МНК к выбору начальных приближений.

Можно предположить, что в выборе начальных приближений для МНК значения в показателях экспонент должны быть достаточно близки, в то время, как коэффициенты у экспонент могут быть произвольными. Давайте проверим эту гипотезу. Возьмем какое-нибудь начальное приближение, удовлетворяющее этим критериям:

$C_{i.a.}(t) = 1e^{-0.02t} + 201e^{-0.8t} + 12e^{-5.8t}$. За одну итерацию мы получаем точный результат: $21.2e^{-0.02t} + 9.3e^{-0.8t} + 69.6e^{-5.8t}$.

Теперь немного изменим это начальное приближение, добавив небольшой случайный шум к показателям экспонент: $C_{i.a.}(t) = 1e^{-0.03t} + 201e^{-0.81t} + 12e^{-5.81t}$. При таком начальном приближении метод уже разваливается. Теперь попробуем коэффициенты при экспонентах взять более близкими к точному решению: $C_{i.a.}(t) = 18e^{-0.03t} + 12e^{-0.81t} + 55e^{-5.81t}$. Уже за 4 итерации МНК дает точное решение. Попробуем теперь ещё больше «пощевелить» показатели у экспонент, добавив случайный шум: $C_{i.a.}(t) = 18e^{-0.06t} + 12e^{-0.9t} + 55e^{-5.5t}$. За пять итераций мы получаем точное решение. Таким образом, наша первоначальная гипотеза о том, что коэффициенты при экспонентах могут быть абсолютно любыми, а главное – показатели не подтверждается. И нужно варьировать коэффициенты более «равномерно».

Сейчас попытаемся выяснить вклад какой из экспонент больше влияет на сходимость. В качестве констант A_1, A_2, A_3 возьмем точные значения и последовательно будем менять значения у одной из экспонент. Начнем менять значение у первой из экспонент: $C_{i.a.}(t) = 21.2e^{-xt} + 9.3e^{-0.8t} + 69.6e^{-5.8t}$.

Будем варьировать значение x, записывая в таблицу результат в виде:

“+” – метод сходится к точному решению;

“-” – метод «разваливается»

λ_2	$<0,23$	$0,4$	$0,7$	$1,3$	$>1,3$
сходимость	-	+	+	+	-

ТАБЛИЦА 2. Зависимость сходимости МНК от λ_2

Результаты данного исследования отображены в таблице 1. Таким образом, для сходимости, параметр λ_1 должен принимать значения в диапазоне: $[0, 0,1)$ Результаты аналогичного исследования для λ_2 представлены в таблице 2. Откуда видно, что для сходимости метода параметр λ_2 должен принимать значения в диапазоне: $[0, 23, 1,3]$.

Для сходимости метода значения для параметра λ_3 должны принадлежать отрезку $[3,8, 6]$ при фиксированных остальных значениях. Для других параметров (при фиксированных остальных) получаются следующие значения:

$$A_1 \in R \setminus \{0\}, A_2 \in R, A_3 \in R$$

В итоге, при прочих точных значениях констант значения для A_i действительно могут быть любые за исключением равенства нулю A_1 . В процессе перебора значений для λ_1 и λ_2 одновременно область допустимых несколько сужается, причем более аккуратно нужно выбирать параметр λ_1 .

3.3. Связь с фармакокинетическими свойствами препарата. Таким образом, продемонстрирован подход к анализу начальных приближений для итерационных методов.

Попробуем теперь выбирать начальное приближение, основываясь на физических свойствах описываемого процесса. Выбирать начальные приближения, варьируя константы скорости, процесс достаточно неудобный, т.к. для пересчета макроконстант каждый раз требуется решать кубическое уравнение. Таким образом, попробуем построить алгоритм выбора начального приближения на основе физических данных о процессе, а не на основе "сухих" чисел. В ПРИЛОЖЕНИИ II выписаны явные формулы, связывающие основные фармакокинетические показатели с микроконстантами. Давайте обратим внимание, например, на параметр $t_{\frac{1}{2}}$, отвечающий за период полувыведения препарата. У точного решения период полувыведения равен $t_{\frac{1}{2}} = \log \frac{2}{\lambda_1} = \frac{\ln 2}{0,02} \approx 34,67$. Выше мы определили, что если параметр $\lambda_1 > 0,1$, то МНК расходится. При $\lambda_1 = 0,1$, значение $t_{\frac{1}{2}} = 6,9$. Значит, мы можем заключить следующее:

Если период полувыведения начального приближения принадлежит интервалу: $[0, \frac{\ln 2}{0,1}]$, то МНК для таких начальных приближений «разваливается».

4. Выводы

Таким образом, из заранее известных фармакокинетических данных можно получать данные о сходимости метода для конкретных начальных приближений.

По итогам численных экспериментов можно сделать следующий вывод: В случае, когда нас интересует только профиль функции концентрации, логичным выходом является применение МПИ. Когда же ставится задача о поиске фармакокинетических показателей (см. ПРИЛОЖЕНИЕ II) следует применять МНК.

Но следует крайне осторожно подходить к выбору начальных приближений. МНК работает превосходно в случае хорошего начального приближения.

И через макроконстанты можно найти необходимые фармакокинетические показатели не просто близкие к точным, а очень высокой точностью. А также в случае, когда имеются некоторые данные о препарате (например, $t_{\frac{1}{2}}$), можно ограничить множество, из которого следует брать начальные приближения для применяемого алгоритма.

Чтобы избежать трудностей с выбором начального приближения логичным выходом является применение метода Левенберга-Марквардта, который является комбинацией этих двух методов.

ПРИЛОЖЕНИЕ I. Свойства матрицы K .

Теорема 1. Если матрица K неразложима, тогда она вырождена тогда и только тогда, когда выполняется равенство: $k_i = \sum_{j \neq i} k_{ij}$

Теорема 2. Если матрица K неразложима и вырождена, тогда 0 – простое собственное число. Ранг матрицы K не может быть меньше $n-1$

Теорема 3. Если матрица K разложима и вырождена, тогда она может быть представлена в виде:

$$\begin{pmatrix} K_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & K_m \end{pmatrix}$$

где K_1, \dots, K_m – неразложимые матрицы, и только матрица K_m – вырождена. Это верно как для линейного, так и для нелинейного случая.

ПРИЛОЖЕНИЕ II. Вычисление основных фармакокинетических величин через параметры модели (микроконстанты).

Для начала введем обозначения:

$$(4.1) \quad S_1 = A_1 + A_2 + A_3;$$

$$(4.2) \quad S_2 = \frac{A_1}{\lambda_1} + \frac{A_2}{\lambda_2} + \frac{A_3}{\lambda_3};$$

$$(4.3) \quad S_3 = \frac{A_1}{\lambda_1^2} + \frac{A_2}{\lambda_2^2} + \frac{A_3}{\lambda_3^2};$$

$$(4.4) \quad S_4 = \frac{A_1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{A_2}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} + \frac{A_3}{\lambda_3} e^{-\lambda_3 t};$$

$$(4.5) \quad S_5 = \frac{A_1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}) + \frac{A_2}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}) + \frac{A_3}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 t});$$

Используя введенные обозначения, запишем некоторые независимые от модели фармакокинетические показатели:

Клиренс плазмы - $CL_p = \frac{D_{i.v.}}{S_2} = \frac{D_{i.v.}}{AUC_{0 \rightarrow \infty}}$;

Объем камеры плазмы - $V_p = \frac{D_{i.v.}}{S_1}$;

Объем распределения в равновесном состоянии - $V_{dss} = \frac{D_{i.v.} S_3}{S_2^2}$;

Период полувыведения - $t_{\frac{1}{2}} = \ln 2 / \lambda_1$;

Количество вещества, метаболизированное или выведенное к времени t - $A_e = \frac{D_{i.v.} S_5}{S_2} = \frac{D * AUC_{t \rightarrow \infty}}{AUC_{0 \rightarrow \infty}}$. Следует заметить, что предыдущее уравнение математически верно лишь в случае элиминации только из центральной камеры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] John G. Wagner, *Linear Pharmacokinetic Equations Allowing Direct Calculation of Many Needed Pharmacokinetic Parameters from the Coefficients and Exponents of Polyexponential Equations Which Have Been Fitted to the Data*, Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics, Vol. 4, No. 5, 1976
- [2] Ilyin A., Kabanikhin S. I. , Nursetov D. B., Nursetova A. T., Asanova N. A., Voronov D. A., Bakytov D. *Analysis of ill-posedness and numerical methods of solving a nonlinear inverse problem in pharmacokinetics for the two-compartmental model with extravascular drug administration*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, Volume 20, Issue 1, Pages 39–64, ISSN (Online) 1569-3945, ISSN (Print) 0928-0219, DOI: 10.1515/jip-2012-0202, March 2012.
- [3] Anders Kallen, *Computational Pharmacokinetics*, Chapman, Hall Crc Biostatistics Series 2007
- [4] C. Cobelli, E. Carson, *Introduction to Modeling in Physiology and Medicine*, The Netherlands: Academic Press, Elsevier, 2008.
- [5] J. F. Staub, E. Foos, B. Courtin, R. Jochemsen and A. M. Perault-Staub, 8) *A nonlinear compartmental model of Sr metabolism. I. Non-steady-state kinetics and model building*, Am J Physiol Regul Integr Comp Physiol 284:R819-R834, 2003. First published 7 November 2002; doi: 10.1152/ajpregu.00227.2002
- [6] H.W. Engl, C. Flamm, P. Kugler, J. Lu, S. Muller, P. Schuster, *Inverse problems in systems biology*, Inverse Problems, **25**, № 12, 123014, 2009.
- [7] С.И. Кабанихин, *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, Berlin: Gruyter, 2011.
- [8] А.И. Ильин, С.И. Кабанихин, Д.А. Воронов. Универсальный подход к решению обратной задачи фармакокинетики в случае произвольного количества камер, Сибирские электронные математические известия, 11 (2014), стр. С.41–С.50.
- [9] А.И. Ильин, С.И. Кабанихин, О.И. Криворотко. Об определении параметров моделей, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений. Сибирские электронные математические известия, 11 (2014), стр. С.62–С.75.

ИЛЬИН АЛЕКСАНДР ИВАНОВИЧ
 АО “Научный центр противоинфекционных препаратов”,
 пр.АЛЬ-ФАРАБИ, 75В,
 050060 г. Алматы, Казахстан
E-mail address: aiilin@mail.ru

КАБАНИХИН СЕРГЕЙ ИГОРЕВИЧ
 Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
 пр-т ЛАВРЕНТЬЕВА 6,
 Новосибирский государственный университет,
 ул. Пирогова 2,
 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

ВОРОНОВ ДМИТРИЙ АНДРЕЕВИЧ
 Новосибирский государственный университет,
 ул. Пирогова 2,
 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: dmitriy.voronov.89@gmail.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.62–С.76 (2014)

УДК 512.5

MSC 13A99

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ СИСТЕМАМИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.И. Ильин, С.И. Кабанихин, О.И. Криворотько

Аннотация. В работе рассматривается численный алгоритм решения обратной задачи для нелинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка $\dot{X} = P(X(t), \Theta)$. Здесь $X(t)$ – вектор-функция, которая описывает состояние системы (концентрацию препарата в организме, иммунных составляющих, количество заболевших в процессе распространения эпидемии и т.п.), Θ – набор неотрицательных параметров $\Theta_m \geq 0$, $m = 1, 2, \dots, M$, характеризующие исследуемую модель. Предполагается, что относительно решения задачи Коши известна дополнительная информация вида $X(t_k) = \Phi^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, K$. Начальное состояние системы $X(0) = X^0$ предполагается известным. В обратной задаче требуется определить функции Θ по дополнительной информации $\Phi^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Обратная задача сводится к задаче минимизации целевого функционала $J(\Theta) = \sum_{k=0}^K |X(t_k; \Theta) - \Phi^{(k)}|^2$, приближение которого вычисляется градиентными методами. Для вычисления градиента функционала используется решение соответствующей сопряженной задачи. В качестве примеров рассмотрены обратные задачи фармакокинетики [22, 23], иммунологии, динамики ВИЧ-инфекции, распространения эпидемии туберкулеза.

Ключевые слова: нелинейная система дифференциальных уравнений, обратные задачи, иммунология, фармакокинетика, эпидемиология, оптимизация, градиентные методы.

ВВЕДЕНИЕ

Большинство математических моделей биологических процессов (фармакокинетика, иммунология, процесс распространения эпидемии и т.п.) описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений. В последнее время активно развивается математическое моделирование биологических систем, основанное на численном решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (Г.И. Марчук, 1991, [1]; А.А. Романюха, А.И. Яшин, 2003, [2]; А.А. Романюха, С.Г. Руднев, С.М. Зуев, 2005, [3]; С. Cobelli, E. Carson, 2008, [4]; H.T. Waaler et all., 1962 - 1970, [5, 6, 7, 8] и другие). Тип исследуемой модели определяет количество уравнений в системе, которое варьируется от двух и до десятков уравнений. В общем случае, разработанные биологические модели характеризуются своими параметрами, которые описывают патоген, особенности иммунитета заболеваемого, фармакокинетические коэффициенты, особенности окружающей среды и т.п. Эти параметры индивидуальны в каждом конкретном случае. Поэтому необходимо идентифицировать эти параметры для получения информации о характере заболевания, об иммунном ответе, о восприимчивости организма к конкретному виду лекарств, о скорости эпидемии болезни и т.д. Для идентификации параметров модели используется подход, предлагаемый в теории решения обратных задач, основанный на определении неизвестных параметров модели по экспериментальным данным (наблюдениям).

В работе рассматривается численный алгоритм решения обратной задачи для нелинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка $\dot{X} = P(X(t), \Theta)$. Здесь $X(t)$ – вектор-функция, которая описывает состояние системы (концентрацию препарата в организме, иммунных составляющих, количество заболевших в процессе распространения эпидемии и т.п.), Θ – набор неотрицательных параметров $\Theta_m \geq 0$, $m = 1, 2, \dots, M$, характеризующие исследуемую модель. В разделе 1 описана постановка прямой задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка и приведены примеры биологических систем, описываемые данной прямой задачей Коши. В разделе 2 приведена постановка обратной задачи, которая заключается в определении набора параметров Θ по дополнительной информации вида $X(t_k) = \Phi^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, K$. Начальное состояние системы $X(0) = X^0$ предполагается известным. В разделе 3 обратная задача сводится к задаче минимизации целевого функционала $J(\Theta) = \sum_{k=0}^K |X(t_k; \Theta) - \Phi^{(k)}|^2$, приближение которого вычисляется градиентными методами (алгоритм приведен в разделе 4). Для вычисления градиента функционала используется решение соответствующей сопряженной задачи. В качестве примеров рассмотрены обратные задачи фармакокинетики, иммунологии, динамики ВИЧ-инфекции, распространения эпидемии туберкулеза.

1. ПОСТАНОВКА ПРЯМЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим задачу Коши для системы нелинейных ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = P(X(t), \Theta), & t \in (0, T), T > 0, \\ X(0) = X^0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Обозначения, используемые в (1.1), описаны ниже:

$X(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))^T$ – вектор переменных модели размерности $N \in \mathbb{N}$,

$\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_M)^T \in \mathcal{P}$ – вектор параметров модели размерности $M \in \mathbb{N}$,

$\mathcal{P} := \{p \in \mathbb{R}^M : p_m \geq 0, m = 1, \dots, M\}$ – пространство рассматриваемых параметров,

$P(X(t), \Theta) = (P_1(X(t), \Theta), \dots, P_N(X(t), \Theta))^T$ – вектор-функция, где $P_n(X(t), \Theta) : C(0, T) \rightarrow C(0, T)$, $n = 1, \dots, N$,

$X^0 = (X_1^0, \dots, X_N^0)^T$ – вектор начальных данных задачи.

Прямая задача состоит в определении вектора $X(t)$ из системы (1.1) по заданным параметрам Θ модели, функции P и начальным данным X^0 .

Для удобства будем обозначать зависимость решения прямой задачи $X(t)$ от вектора параметров Θ как $X(t) = X(t; \Theta)$. Известно, что решение задачи Коши (1.1) существует в классе $C^r(0, T)$ ($r \geq 1$) и единственno.

Приведем несколько постановок задач биологии, описываемых моделью (1.1).

1. Многокамерная нелинейная модель фармакокинетики. В общем случае, скорость изменения концентрации в камере с номером i может быть записана следующим образом:

$$\frac{dC_i}{dt} = \sum_{j \neq i} k_{ij}(C_i - C_j) \cdot C_i. \quad (1.2)$$

Здесь C_i – концентрация препарата в камере i , k_{ij} – кинетические коэффициенты, которые в литературе называются кинетическими константами в случае, когда $k_{ij} = \text{const}$.

В частности, система уравнений, описывающая распространение глюкозы и инсулина в организме, имеет вид (C. Cobelli, E. Carson, 2008, [4]):

$$\begin{cases} \frac{dQ(t)}{dt} = \text{NHGB}(t) - R_d(t), & Q(0) = Q_b + D; \\ \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} = -k_3\tilde{I}(t) + k_2(I(t) - I_b), & \tilde{I}(0) = 0; \\ G(t) = \frac{Q(t)}{V}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь $Q(t)$ – масса глюкозы, Q_b – базальное (основное, в нормальных условиях) значение глюкозы в организме, D – доза глюкозы, поступающей извне, NHGB – чистый печеночный баланс глюкозы, R_d – скорость элиминации глюкозы в плазме, $\tilde{I}(t)$ – концентрация инсулина (отклонение от базального уровня) вне плазмы (тканевой жидкости, где происходит передача сигнала для действия инсулина), $I(t)$ – концентрация инсулина в плазме, I_b – ее базальное значение, $G(t)$ – концентрация глюкозы в плазме, V – значение распределения. Схема модели (1.3) изображена на Рисунке 1.1.

Модель (1.3) основывается на уравнениях баланса масс, записанных для глюкозы и инсулина в крови. Модель (1.3) неидентифицируема, т.е. определить все константы k_i невозможно. В работе C. Cobelli, E. Carson, 2008, [4] получена идентифицируемая модель

$$\begin{cases} \frac{dQ(t)}{dt} = -(p_1 + Z(t))Q(t) + p_1Q_b, & Q(0) = Q_b + D; \\ \frac{dZ(t)}{dt} = -p_2Z(t) + p_3(I(t) - I_b), & Z(0) = 0; \\ G(t) = \frac{Q(t)}{V}; \end{cases} \quad (1.4)$$

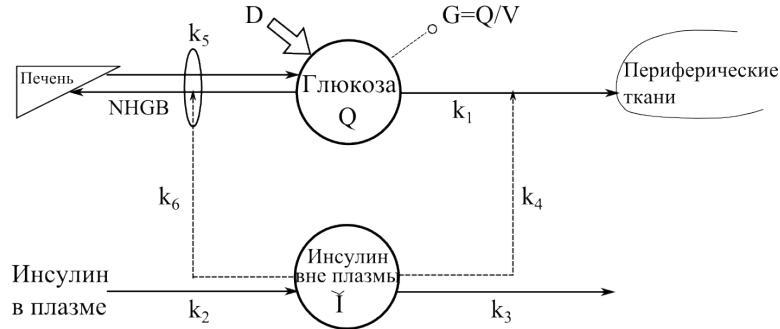


Рис. 1.1. Схема распространения глюкозы и инсулина. Константы k_i , $i = 1, \dots, 6$, характеризуют либо материальные потоки (сплошные линии) или управляющие воздействия (пунктирные линии).

с помощью замены переменных

$$\begin{aligned} Z(t) &= (k_4 + k_6)\tilde{I}(t), \\ p_1 &= k_1 + k_5, \quad p_2 = k_3, \quad p_3 = k_2(k_4 + k_6). \end{aligned}$$

Отметим, большинство систем уравнений, возникающих в фармакокинетике, описываются моделью (1.1).

2. Модель иммунной системы, предложенная Г.И. Марчуком в 1980 году [1], описывается следующей системой ОДУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV(t)}{dt} = (\beta - \gamma F(t))V(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} = \alpha(\tau)\xi(m)F(t)V(t) - \mu_C(C(t) - C^*(\tau)), \\ \frac{dF(t)}{dt} = \rho C(t) - (\mu_f + \eta\gamma V(t))F(t), \\ \frac{dm(t)}{dt} = \sigma V(t) - \mu_m m(t). \end{array} \right. \quad (1.5)$$

$$V(0) = V^0, \quad C(0, \tau) = C^*(\tau), \quad F(0, \tau) = \frac{\rho C^*(\tau)}{\mu_f}, \quad m(0) = 0. \quad (1.6)$$

Здесь $V(t)$ – концентрация патогенных размножающихся антигенов, $F(t)$ – концентрация антител (под антителами понимаются субстраты иммунной системы, нейтрализующие антигены (иммуноглобулины, рецепторы клеток)), $C(t)$ – концентрация плазматических клеток (популяция носителей и продуцентов антител (иммуно-компетентные клетки и иммуноглобулинопродуценты)), $m(t)$ – относительная характеристика пораженного органа.

Первое уравнение системы (1.5) описывает изменение числа антигенов в организме. Коэффициент размножения антигенов обозначается β , γ – коэффициент, связанный с вероятностью нейтрализации антигена антителами при встрече с ним. Второе уравнение описывает рост плазматических клеток, τ – возраст инфицируемого, α – коэффициент, учитывающий вероятность встречи антиген – антитело, возбуждение каскадной реакции и число образующихся новых клеток, μ_C – коэффициент, равный обратной величине времени жизни плазматических клеток, C^* – постоянный уровень плазмоклеток в здоровом

организме в возрасте τ . Ясно, что при сильном поражении жизненно важных органов производительность выработки антител падает. За это отвечает функция $\xi(m)$, которая в интервале $0 \leq m \leq m^*$ равна единице (работоспособность иммунологических органов в этом интервале не зависит от тяжести болезни), а при $m^* \leq m \leq 1$ функция $\xi(m)$ убывает (производительность выработки антител падает). Третье уравнение описывает баланс числа антител, реагирующих с антигеном, ρ – скорость производства антител одной плазматической клеткой, μ_f – коэффициент, обратно пропорциональный времени распада антител, η – количество антител, необходимых для нейтрализации одного антигена. Четвертое уравнение описывает относительную характеристику поражения органа-мишени, σ – скорость поражения органов-мишеней антигеном, μ_m – скорость регенерации органов-мишеней.

Начальные условия (1.6) означают, что в начальный момент времени $t = 0$ произошло заражение здорового организма ($m(0) = 0$) дозой V^0 . Здоровый организм характеризуется нормальным уровнем иммунокомpetентных клеток $C^* > 0$ со своими рецепторами $F(0, \tau)$, способными вызвать иммунную реакцию.

Существуют различные вариации модели (1.5)-(1.6), более детально описывающие внутриклеточные взаимодействия (противовирусный и противобактериальный иммунные ответы), состоящие из 7, 10 и более обычных дифференциальных уравнений, изучаемых в работах М.А. Nowak, Р.М. May, 2000, [9]; J.E. Wigginton, D. Kirschner, 2001, [10]; А.А. Романюха, С.Г. Руднев, С.М. Зуев, 2005 г., [3]; Т.Е. Санникова, 2008 г., [11]; Т.Е. Санникова, Г.И. Марчук., А.А. Романюха, А.И. Яшин., 2003 г., [12] и другие. Все эти модели описываются системой (1.1).

3. Модель динамики ВИЧ инфекции в ВИЧ-инфицированных пациентах с антиретровирусной терапией описывается следующей динамической системой (A.S. Perelson, P.W. Nelson, 1999, [13]; Y. Huang, D. Liu, H. Wu, 2006, [14]; H. Miao, X. Xia, A.S. Perelson, H. Wu, 2011, [15]):

$$\begin{cases} \frac{dT_U(t)}{dt} = \lambda - \rho T_U(t) - \eta T_U(t)V(t), \\ \frac{dT_I(t)}{dt} = \eta T_U(t)V(t) - \delta T_I(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \mathcal{N}\delta T_I(t) - cV(t). \end{cases} \quad (1.7)$$

Здесь $T_U(t)$ – концентрация неинфицированных клеток-мишеней в момент времени t , $T_I(t)$ – концентрация инфицированных клеток, $V(t)$ – вирусная нагрузка, λ – начальные уровень неинфицированных Т-клеток, ρ – коэффициент, отвечающий за смертность неинфицированных Т-клеток, η – уровень инфекции в организме, который выражается функцией противовирусного лечения, δ – коэффициент, отвечающий за смертность инфицированных клеток, c – иммунный клиренс (почечная фильтрация комплексов антиген-антитело) свободных вирионов (полноценные вирусные частицы, представляющие собой конгломерат органических кристаллов), \mathcal{N} – среднее количество вирионов, производимых одной инфицированной клеткой в течение ее срока жизни.

В работах D.S. Callaway, A.S. Perelson, 2001, [16] и B.M. Adams, H.T. Banks, M. Davidian, Hee-Dae Kwon, H.T. Tran, S.N. Wynne, E.S. Rosenberg, 2005, [17], на основе модели (1.7) исследуются более сложные системы, описывающие динамику ВИЧ инфекции, учитывающие, например, динамику двух со-циркулирующих

популяций клеток-мишеней, представляющих CD4 Т-лимфоциты (T_1) и макрофаги (T_2) ($T_1(t) + T_2(t) := T_U(t)$).

4. «Упрощенная модель» развития эпидемии туберкулеза, не испытывающей воздействия какой-либо лечебной программы, описывается следующей системой дифференциальных уравнений (S.M. Blower, A.R. McLean, T.C. Porco, P.M. Small, P.C. Hopewell, M.A. Sanchez, A.R. Moss, 1995, [18]):

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Pi - \beta\mathcal{T}(t)S(t) - \mu S(t), \\ \frac{dL(t)}{dt} = (1-p)\beta\mathcal{T}(t)S(t) - \delta L(t) - \mu L(t), \\ \frac{d\mathcal{T}(t)}{dt} = \delta L(t) + p\beta\mathcal{T}(t)S(t) - (\mu + \mu_T)\mathcal{T}(t). \end{cases} \quad (1.8)$$

Здесь $S(t)$ – количество чувствительных в момент времени t , $L(t)$ – количество инфицированных в момент времени t , $\mathcal{T}(t)$ – количество заразных больных в момент времени t , Π – приток молодежи в модельную популяцию, μ – средняя смертность от причин, не связанных с туберкулезом, p – вероятность быстрого прогрессирования болезни, δ – константа скорости реактивации туберкулезной инфекции, μ_T – дополнительная смертность, вызываемая активным туберкулезом, β – «коэффициент передачи» туберкулезной инфекции.

Главные отличия этой модели от исходной модели, впервые описанной в работе H.T. Waaler, A. Geser, S. Andersen, 1962, [5], состоят в учете возможности быстрого прогрессирования болезни (инфицирование чувствительного индивида с вероятностью p переводит его в группу больных и с вероятностью $(1-p)$ – в группу латентно-инфицированных) и в отсутствии возможности спонтанного самоизлечения для индивидов из группы T .

В работе К.К. Авилова и А.А. Романюхи 2007 года [19] описана «подробная» модель развития эпидемии туберкулеза, отличающаяся от «упрощенной» модели (1.8) разделением больных индивидов на два класса: инфекционные больные индивиды (T_i) и неинфекционные больные индивиды (T_n). Кроме того, вводится группа спонтанно самоизлечившихся индивидов (R), моделирующая процессы спонтанного самоизлечения активных форм туберкулеза с возможным рецидивом болезни. Также в работе [19] и ссылках в ней рассматриваются более сложные модели эпидемиологии, описываемые системой (1.1).

2. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Обратная задача (1.1), (2.1) заключается в определении вектора параметров Θ по заданной функции P и дополнительной информации о векторе $X(t; \Theta)$:

$$X_n(t_k; \Theta) = \Phi_n(t_k), \quad t_k \in (0, T), \quad k = 1, \dots, K_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

Здесь $\Phi_n(t_k) := \Phi_n^{(k)} = (\Phi_n^{(1)}, \dots, \Phi_n^{(K_n)})^T$ – вектор данных обратной задачи размерности $K := K_1 + \dots + K_N$. В задачах иммунологии вектор $X(t; \Theta)$, в большинстве случаев, описывает концентрацию вирусов, параметров иммунной системы (плазматических клеток, антител, макрофагов и т. п.), характеристику поражения органа-мишени и прочее, в задачах эпидемиологии – количество носителей инфекции, количество неинфекционных больных и другие, в задачах фармакокинетики – концентрацию лекарств, глюкозы, инсулина в крови, плазме. Вектор $\Phi = (\Phi_1^{(1)}, \dots, \Phi_1^{(K_1)}, \dots, \Phi_N^{(1)}, \dots, \Phi_N^{(K_N)})^T$ определяется по данным анализа крови, мочи в моменты времени t_k , $k = 1, \dots, K$.

В работе H.W. Engl, C. Flamm, P. Kugler, J. Lu, S. Muller, P. Schuster, 2009, [20] обратная задача (1.1)-(2.1) была численно исследована на корректность градиентными методами (Левенберга-Макварда и Гаусса-Ньютона), в численных расчетах была применена регуляризация А.Н. Тихонова. В данной работе будет приведен оптимационный алгоритм решения обратной задачи (1.1), (2.1), основанный на решении сопряженной задачи, а также будет получена явная формула для вычисления градиента целевого функционала.

3. МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ

Определим оператор обратной задачи (1.1), (2.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} A : \quad \mathcal{P} &\rightarrow \mathbb{R}^K \\ \Theta &\mapsto X(t_k; \Theta). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Таким образом, обратная задача (1.1), (2.1) может быть записана в операторном виде:

$$A(\Theta) = \Phi. \tag{3.2}$$

Решение обратной задачи (3.2) будем искать, минимизируя целевой функционал:

$$J(\Theta) = \|A(\Theta) - \Phi\|^2 = \sum_{k=0}^K |X(t_k; \Theta) - \Phi^{(k)}|^2, \tag{3.3}$$

т.е. решение задачи (3.2) сводится к решению задачи $\min_{\Theta \in \mathcal{P}} J(\Theta)$.

Используем градиентные методы для решения задачи $\min_{\Theta \in \mathcal{P}} J(\Theta)$, которые заключаются в определении приближенного решения

$$\Theta_{j+1} = \Theta_j - \alpha_j J'(\Theta_j), \quad \alpha_j > 0, \quad \Theta_0 \in \mathcal{P}.$$

Здесь α_j – параметр оптимизации, который классифицирует градиентные методы (С.И. Кабанихин, 2009 г., [21]), $J'(\Theta) \in \mathbb{R}^m$ – градиент целевого функционала (3.3).

Теорема 1. Градиент целевого функционала $J(\Theta)$ определяется следующим соотношением:

$$J'(\Theta) = - \int_0^T \Psi(t)^T P_\Theta(X(t), \Theta) dt. \tag{3.4}$$

Здесь $\Psi(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ – решение сопряженной задачи

$$\begin{cases} \frac{d\Psi(t)}{dt} = -P_X^T(X(t), \Theta)\Psi(t) + 2 \sum_{k=1}^K (X(t; \Theta) - \Phi(t))\delta(t - t_k), & t \in (0, T), \\ \Psi(T) = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ – пространство обобщенных функций в \mathbb{R}^N , $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $P_X(X(t), \Theta) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ и $P_\Theta(X(t), \Theta) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ – соответствующие

матрицы Якоби:

$$P_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial X_1} & \frac{\partial P_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial X_N} \\ \frac{\partial P_2}{\partial X_1} & \frac{\partial P_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial P_2}{\partial X_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_N}{\partial X_1} & \frac{\partial P_N}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial P_N}{\partial X_N} \end{pmatrix}, \quad P_\Theta = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \Theta_1} & \frac{\partial P_1}{\partial \Theta_2} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial \Theta_M} \\ \frac{\partial P_2}{\partial \Theta_1} & \frac{\partial P_2}{\partial \Theta_2} & \cdots & \frac{\partial P_2}{\partial \Theta_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_N}{\partial \Theta_1} & \frac{\partial P_N}{\partial \Theta_2} & \cdots & \frac{\partial P_N}{\partial \Theta_M} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для вычисления градиента $J'(\Theta)$ воспользуемся определением производной Фреше:

$$J(\Theta + \delta\Theta) - J(\Theta) = \langle J'(\Theta), \delta\Theta \rangle + o(\|\delta\Theta\|). \quad (3.6)$$

Здесь $\delta\Theta$ – вариация параметров модели, $\langle \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов.

Распишем левую часть соотношения (3.6), используя определение $J(\Theta)$ (3.3) и правило раскрытия разности квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$\begin{aligned} \delta J &= J(\Theta + \delta\Theta) - J(\Theta) = \sum_{k=0}^K |X(t_k; \Theta) + \delta X(t_k; \Theta) - \Phi^{(k)}|^2 - \\ &- \sum_{k=0}^K |X(t_k; \Theta) - \Phi^{(k)}|^2 = \sum_{k=0}^K \delta X(t_k; \Theta) (2X(t_k; \Theta) - 2\Phi^{(k)} + \delta X(t_k; \Theta)) = \\ &= \sum_{k=0}^K \langle \delta X(t_k; \Theta), 2(X(t_k; \Theta) - \Phi^{(k)}) \rangle + \sum_{k=0}^K |\delta X(t_k; \Theta)|^2. \end{aligned}$$

Здесь $\delta X(t; \Theta)$ является решением возмущенной задачи:

$$\begin{cases} \frac{d\delta X(t)}{dt} = \delta P(t, \Theta), & t \in (0, T), \\ \delta X(0) = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $\delta P(t, \Theta) = P_X(t, \Theta)\delta X + P_\Theta(t, \Theta)\delta\Theta$ – вариация функции $P(t, \Theta)$.

В численных расчетах малыми величинами ($o(\|\delta\Theta\|)$ и $\sum_{k=0}^K |\delta X(t_k; \Theta)|^2$) будем пренебречь и полагать, что

$$\delta J \cong \langle J'(\Theta), \delta\Theta \rangle \cong \sum_{k=0}^K \langle \delta X(t_k; \Theta), 2(X(t_k; \Theta) - \Phi^{(k)}) \rangle.$$

В последнем соотношении перейдем к интегралу, воспользовавшись свойством дельта-функции:

$$\langle J'(\Theta), \delta\Theta \rangle \cong \int_0^T \langle \delta X(t; \Theta), 2 \sum_{k=0}^K (X(t; \Theta) - \Phi(t)) \delta(t - t_k) \rangle dt.$$

Используя первое уравнение системы (3.5), заменим сумму в последнем выражении

$$\begin{aligned} \langle J'(\Theta), \delta\Theta \rangle &\cong \int_0^T \langle \delta X(t; \Theta), \frac{d\Psi(t)}{dt} + P_X^\top(X(t), \Theta)\Psi(t) \rangle dt = \\ &= \int_0^T \left(\langle \delta X(t; \Theta), \frac{d\Psi(t)}{dt} \rangle + \langle \delta X(t; \Theta), P_X^\top(X(t), \Theta)\Psi(t) \rangle \right) dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Распишем первое слагаемое выражения (3.8), используя метод интегрирования по частям и задачи Коши (3.7) и (3.5):

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \delta X(t; \Theta), \frac{d\Psi(t)}{dt} \rangle dt &= \sum_{n=1}^N \int_0^T \delta X_n(t; \Theta) \frac{d\Psi_n(t)}{dt} dt = \\ &= \sum_{n=1}^N \delta X_n(t; \Theta) \Psi_n(t)|_0^T - \sum_{n=1}^N \int_0^T \frac{d\delta X_n(t; \Theta)}{dt} \Psi_n(t) dt = \\ &= - \int_0^T \langle P_X(t, \Theta) \delta X(t; \Theta), \Psi(t) \rangle dt - \int_0^T \langle P_\Theta(t, \Theta) \delta \Theta, \Psi(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Второе слагаемое выражения (3.8) преобразуется следующим образом:

$$\int_0^T \langle \delta X(t; \Theta), P_X^T(X(t), \Theta) \Psi(t) \rangle dt = \int_0^T \langle P_X(X(t), \Theta) \delta X(t; \Theta), \Psi(t) \rangle dt.$$

Таким образом, выражение (3.8) переписывается в следующем виде:

$$\langle J'(\Theta), \delta \Theta \rangle \cong - \int_0^T \Psi^T(t) P_\Theta(t, \Theta) \delta \Theta dt,$$

откуда получаем выражение для градиента функционала $J(\Theta)$ вида (3.4). \square

Замечание. Отметим, что обобщенная задача Коши (3.5) эквивалентна следующей задаче Коши с фиксированными разрывами первого рода искомого решения $\Psi(t)$ в точках t_k , $k = 1, \dots, K$:

$$\begin{cases} \frac{d\Psi(t)}{dt} = -P_X^T(X(t), \Theta) \Psi(t), & t \in \bigcup_{k=0}^K (t_k, t_{k+1}), t_0 = 0, t_{K+1} = T; \\ \Psi(T) = 0, \\ [\Psi]_{t=t_k} = 2(X(t_k; \Theta) - \Phi^{(k)}), & k = 1, \dots, K. \end{cases} \quad (3.9)$$

3.1. Некоторые постановки обратных задач. Приведем явные выражения для градиента (3.4) целевого функционала некоторых постановок задач фармакокинетики, иммунологии, ВИЧ-инфекции и эпидемиологии туберкулеза.

1. В разделе 1 приведена система уравнений, описывающая распространение глюкозы и инсулина в организме (1.4):

$$\begin{cases} \frac{dQ(t)}{dt} = -(p_1 + Z(t))Q(t) + p_1 Q_b, & Q(0) = Q_b + D; \\ \frac{dZ(t)}{dt} = -p_2 Z(t) + p_3(I(t) - I_b), & Z(0) = 0; \\ G(t) = \frac{Q(t)}{V}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Предположим, что в моменты времени t_k о функциях $Q(t)$ и $Z(t)$ получена дополнительная информация вида

$$Q(t_k) = Q_k, \quad k = 1, \dots, K_1, \quad Z(t_k) = Z_k, \quad k = 1, \dots, K_2. \quad (3.11)$$

В обратной задаче (3.10)-(3.11) требуется определить вектор из пяти параметров $\Theta := (p_1, p_2, p_3, Q_b, I_b)^T \in \mathbb{R}^5$ по дополнительной информации $\Phi := (Q_1, \dots, Q_{K_1}, Z_1, \dots, Z_{K_2})^T \in \mathbb{R}^K$, $K := K_1 + K_2$, о решении прямой задачи.

Используя Теорему 1, выпишем явный вид градиента целевого функционала $J(\Theta)$ для обратной задачи (3.10)-(3.11). В обозначениях раздела 3 имеем:

$$\begin{aligned} N = 2, \quad M = 5, \quad X(t, \Theta) &= (Q(t), Z(t))^T, \\ P_X &= \begin{pmatrix} -p_1(1 + Z(t)) & -p_1 Q(t) \\ 0 & -p_2 \end{pmatrix}, \\ P_\Theta &= \begin{pmatrix} -Q(t)(1 + Z(t)) + Q_b & 0 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & -Z(t) & I(t) - I_b & 0 & -p_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тогда выражение (3.4) для задачи (3.10)-(3.11) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} J'(\Theta) &= - \left(\int_0^T \Psi_1(t) a_1(t) dt, - \int_0^T \Psi_2(t) Z(t) dt, \int_0^T \Psi_2(t) a_2(t) dt, \right. \\ &\quad \left. \int_0^T p_1 \Psi_1(t) dt, - \int_0^T p_3 \Psi_2(t) dt \right); \\ a_1(t) &= -Q(t)(1 + Z(t)) + Q_b, \quad a_2(t) = I(t) - I_b. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $\Psi(t) := (\Psi_1(t), \Psi_2(t))^T$ – решение сопряженной задачи (3.9) при заданных (3.12).

2. Модель иммунной системы, приведенная в разделе 1, при $\xi(m) \equiv 1$ описывается следующей системой ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = (\beta - \gamma F(t))V(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} = \alpha(\tau)F(t)V(t) - \mu_C(C(t) - C^*(\tau)), \\ \frac{dF(t)}{dt} = \rho C(t) - (\mu_f + \eta\gamma V(t))F(t), \\ \frac{dm(t)}{dt} = \sigma V(t) - \mu_m m(t). \end{cases} \quad (3.14)$$

Предположим, что в моменты времени t_k о функциях $V(t)$, $C(t)$, $F(t)$ и $m(t)$ получена дополнительная информация вида

$$\begin{aligned} V(t_k) &= V_k, \quad k = 1, \dots, K_1, \quad C(t_k) = C_k, \quad k = 1, \dots, K_2, \\ F(t_k) &= F_k, \quad k = 1, \dots, K_3, \quad m(t_k) = m_k, \quad k = 1, \dots, K_4. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В обратной задаче (3.14)-(3.15) требуется определить вектор из десяти параметров $\Theta := (\beta, \gamma, \alpha, \mu_C, C^*, \rho, \mu_f, \eta, \sigma, \mu_m)^T \in \mathbb{R}^{10}$ для заданного возраста инфицируемого τ по дополнительной информации о решении прямой задачи

$$\Phi := \left(\{V_k\}_{k=0}^{K_1}, \{C_k\}_{k=0}^{K_2}, \{F_k\}_{k=0}^{K_3}, \{m_k\}_{k=0}^{K_4} \right)^T \in \mathbb{R}^K, \quad K := K_1 + K_2 + K_3 + K_4.$$

Используя Теорему 1, выпишем явный вид градиента целевого функционала $J(\Theta)$ для обратной задачи (3.14)-(3.15). В обозначениях раздела 3 имеем:

$$N = 4, M = 10, \quad X(t, \Theta) = (V(t), C(t), F(t), m(t))^T,$$

$$P_X = \begin{pmatrix} -\beta - \gamma F(t) & 0 & -\gamma V(t) & 0 \\ \alpha(\tau)F(t) & -\mu_C & \alpha(\tau)V(t) & 0 \\ \eta\gamma F(t) & \rho & -\mu_C + \eta\gamma V(t) & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & -\mu_m \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$P_{\Theta_{1,1}} = P_{\Theta_{4,9}} = V(t), \quad P_{\Theta_{1,2}} = -P_{\Theta_{2,3}} = -F(t)V(t),$$

$$P_{\Theta_{2,4}} = C^*(\tau) - C(t), \quad P_{\Theta_{2,5}} = \mu_C, \quad P_{\Theta_{3,2}} = \eta F(t)V(t),$$

$$P_{\Theta_{3,6}} = C(t), \quad P_{\Theta_{3,7}} = -F(t), \quad P_{\Theta_{3,8}} = \gamma F(t)V(t), \quad P_{\Theta_{4,10}} = -m(t).$$

Остальные компоненты матрицы Якоби P_Θ нулевые.

Тогда выражение (3.4) для задачи (3.14)-(3.15) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} J'_1(\Theta) &= - \int_0^T \Psi_1(t)V(t) dt, & J'_2(\Theta) &= - \int_0^T (\eta b_1(t)\Psi_3(t) - b_1(t)\Psi_1(t)) dt, \\ J'_3(\Theta) &= - \int_0^T b_1(t)\Psi_2(t) dt, & J'_4(\Theta) &= - \int_0^T b_2(t)\Psi_2(t) dt; \\ J'_5(\Theta) &= - \int_0^T \mu_C\Psi_2(t) dt, & J'_6(\Theta) &= - \int_0^T C(t)\Psi_3(t) dt; \\ J'_7(\Theta) &= \int_0^T F(t)\Psi_3(t) dt, & J'_8(\Theta) &= - \int_0^T \gamma b_1(t)\Psi_3(t) dt; \\ J'_9(\Theta) &= - \int_0^T V(t)\Psi_4(t) dt, & J'_{10}(\Theta) &= \int_0^T m(t)\Psi_4(t) dt; \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$b_1(t) = V(t)F(t), \quad b_2(t) = C^*(\tau) - C(t).$$

Здесь $\Psi(t) := (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \Psi_3(t), \Psi_4(t))^T$ – решение сопряженной задачи (3.9) при заданных (3.16).

3. Модель динамики ВИЧ инфекции в ВИЧ-инфицированных пациентах с антиретровирусной терапией, приведенная в разделе 1, описывается следующей динамической системой:

$$\begin{cases} \frac{dT_U(t)}{dt} = \lambda - \rho T_U(t) - \eta T_U(t)V(t), \\ \frac{dT_I(t)}{dt} = \eta T_U(t)V(t) - \delta T_I(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \mathcal{N}\delta T_I(t) - cV(t). \end{cases} \quad (3.18)$$

Предположим, что в моменты времени t_k о функциях $T_U(t)$, $T_I(t)$ и $V(t)$ получена дополнительная информация вида

$$\begin{aligned} T_U(t_k) &= T_{U_k}, \quad k = 1, \dots, K_1, & T_I(t_k) &= T_{I_k}, \quad k = 1, \dots, K_2, \\ V(t_k) &= V_k, \quad k = 1, \dots, K_3. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В обратной задаче (3.18)-(3.19) требуется определить вектор из шести параметров $\Theta := (\lambda, \rho, \eta, \delta, \mathcal{N}, c)^T \in \mathbb{R}^6$ по дополнительной информации о решении прямой задачи

$$\Phi := \left(\{T_{U_k}\}_{k=0}^{K_1}, \{T_{I_k}\}_{k=0}^{K_2}, \{V_k\}_{k=0}^{K_3} \right)^T \in \mathbb{R}^K, \quad K := K_1 + K_2 + K_3.$$

Используя Теорему 1, выпишем явный вид градиента целевого функционала $J(\Theta)$ для обратной задачи (3.18)-(3.19). В обозначениях раздела 3 имеем:

$$\begin{aligned} N = 3, \quad M = 6, \quad X(t, \Theta) &= (T_U(t), T_I(t), V(t))^T, \\ P_X &= \begin{pmatrix} -\rho - \eta V(t) & 0 & -\eta T_U(t) \\ \eta V(t) & -\delta & \eta T_U(t) \\ 0 & \mathcal{N}\delta & -c \end{pmatrix}, \\ P_\Theta &= \begin{pmatrix} 1 & -T_U(t) & -T_U(t)V(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_U(t)V(t) & -T_I(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{N}T_I(t) & \delta T_I(t) & -V(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Тогда выражение (3.4) для задачи (3.18)-(3.19) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} J'_1(\Theta) &= - \int_0^T \Psi_1(t) dt, & J'_2(\Theta) &= \int_0^T T_U(t)\Psi_1(t) dt, \\ J'_3(\Theta) &= - \int_0^T c_1(t)(\Psi_2(t) - \Psi_1(t)) dt, & J'_5(\Theta) &= - \int_0^T \delta T_I(t)\Psi_3(t) dt, \\ J'_4(\Theta) &= - \int_0^T T_I(t)(\mathcal{N}\Psi_3(t) - \Psi_2(t)) dt, & J'_6(\Theta) &= \int_0^T V(t)\Psi_3(t) dt. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Здесь $c_1(t) = T_U(t)V(t)$, $\Psi(t) := (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \Psi_3(t))^T$ – решение сопряженной задачи (3.9) при заданных (3.20).

4. «Упрощенная модель» развития эпидемии туберкулеза, не испытывающей воздействия какой-либо лечебной программы, приведенная в разделе 1, описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Pi - \beta\mathcal{T}(t)S(t) - \mu S(t), \\ \frac{dL(t)}{dt} = (1-p)\beta\mathcal{T}(t)S(t) - \delta L(t) - \mu L(t), \\ \frac{d\mathcal{T}(t)}{dt} = \delta L(t) + p\beta\mathcal{T}(t)S(t) - (\mu + \mu_T)\mathcal{T}(t). \end{cases} \quad (3.22)$$

Предположим, что в моменты времени t_k о функциях $S(t)$, $L(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ получена дополнительная информация вида

$$\begin{aligned} S(t_k) &= S_k, \quad k = 1, \dots, K_1, & L(t_k) &= L_k, \quad k = 1, \dots, K_2, \\ \mathcal{T}(t_k) &= T_k, \quad k = 1, \dots, K_3. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В обратной задаче (3.22)-(3.23) требуется определить вектор из шести параметров $\Theta := (\Pi, \beta, \mu, p, \delta, \mu_T)^T \in \mathbb{R}^6$ по дополнительной информации о решении прямой задачи

$$\Phi := \left(\{S_k\}_{k=0}^{K_1}, \{L_k\}_{k=0}^{K_2}, \{T_k\}_{k=0}^{K_3} \right)^T \in \mathbb{R}^K, \quad K := K_1 + K_2 + K_3.$$

Используя Теорему 1, выпишем явный вид градиента целевого функционала $J(\Theta)$ для обратной задачи (3.22)-(3.23). В обозначениях раздела 3 имеем:

$$\begin{aligned} N &= 3, \quad M = 6, \quad X(t, \Theta) = (S(t), L(t), \mathcal{T}(t))^T, \\ P_X &= \begin{pmatrix} -\beta\mathcal{T}(t) - \mu & 0 & -\beta S(t) \\ (1-p)\beta\mathcal{T}(t) & -\delta - \mu & (1-p)\beta S(t) \\ p\beta\mathcal{T}(t) & \delta & p\beta S(t) - (\mu - \mu_T) \end{pmatrix}, \\ P_\Theta &= \begin{pmatrix} 1 & -\mathcal{T}(t)S(t) & -S(t) & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)\mathcal{T}(t)S(t) & L(t) & -\beta\mathcal{T}(t)S(t) & -L(t) \\ 0 & p\mathcal{T}(t)S(t) & -\mathcal{T}(t) & \beta\mathcal{T}(t)S(t) & L(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Тогда выражение (3.4) для задачи (3.22)-(3.23) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} J'_1(\Theta) &= - \int_0^T \Psi_1(t) dt, \quad J'_4(\Theta) = \int_0^T d_2(t)(\Psi_2(t) - \Psi_3(t)) dt, \\ J'_2(\Theta) &= \int_0^T d_1(t)(\Psi_1(t) - (1-p)\Psi_2(t) - p\Psi_3(t)) dt, \\ J'_3(\Theta) &= \int_0^T (S(t)\Psi_1(t) - L(t)\Psi_2(t) + \mathcal{T}(t)\Psi_3(t)) dt, \\ J'_5(\Theta) &= \int_0^T L(t)(\Psi_2(t) - \Psi_3(t)) dt, \quad J'_6(\Theta) = - \int_0^T \mathcal{T}(t)\Psi_3(t) dt, \\ d_1(t) &= \mathcal{T}(t)S(t), \quad d_2(t) = \beta d_1(t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь $\Psi(t) := (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \Psi_3(t))^T$ – решение сопряженной задачи (3.9) при заданных (3.24).

4. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В качестве разностного метода решения прямой и сопряженной задач используем метод Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации. Опишем схему метода для произвольной системы ОДУ на промежутке $(t^{(1)}, t^{(2)})$. Рассмотрим задачу Коши для системы ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = F(t, Y(t)), \quad t \in (t^{(1)}, t^{(2)}); \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь $Y = (Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(M)})^T \in \mathbb{R}^M$ – вектор неизвестных, $Y_0 = (Y_0^{(1)}, \dots, Y_0^{(M)})^T \in \mathbb{R}^M$ – вектор начальных данных, $F = (F_1, \dots, F_M)^T$ – вектор-функция.

Построим разбиение области $(t^{(1)}, t^{(2)})$: $t_n = t^{(1)} + nh_t$, $n = 0, 1, \dots, N_t$, $h_t = \frac{t^{(2)} - t^{(1)}}{N_t}$ – шаг сетки по переменной t . Введем обозначение вектора $Y_n := Y(t_n)$.

Используем метод Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации для системы (4.1), который состоит в определении приближенного решения системы из соотношений

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^{(i)} &= Y_n^{(i)} + \frac{1}{6} \left(\mathbf{k}_1^{(i)} + 2\mathbf{k}_2^{(i)} + 2\mathbf{k}_3^{(i)} + \mathbf{k}_4^{(i)} \right), \quad i = 1, \dots, M; \\ \mathbf{k}_1^{(i)} &= h_t \cdot F(t_n, Y_n), \quad \mathbf{k}_2^{(i)} = h_t \cdot Y(t_n + \frac{h_t}{2}, Y_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3^{(i)} &= h_t \cdot Y(t_n + \frac{h_t}{2}, Y_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_4^{(i)} = h_t \cdot Y(t_n + h_t, Y_n + \mathbf{k}_3). \end{aligned}$$

Оптимизационный алгоритм решения обратной задачи (1.1)-(2.1) состоит в следующем:

1. Задаем начальное приближение $\Theta_0 \in \mathcal{P}$.
2. Решаем прямую задачу (1.1) для заданного набора параметров методом Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации, описанным выше. Определяем $X(t_k; \Theta_j) = \Phi^{(k)}$, $k = 1, \dots, N$.
3. Решаем сопряженную задачу (3.9) на промежутках (t_k, t_{k+1}) , $k = 0, 1, \dots, K$, $t_0 = 0$, $t_{K+1} = T$, описанным выше методом Рунге-Кутты, учитывая в точках t_k разрывы решения задачи Коши (3.9).
4. Определяем по формуле (3.4) градиент целевого функционала $J(\Theta_j)$.
5. Руководствуясь типом градиентного метода, определяем параметр оптимизации $\alpha_j > 0$ и следующую итерацию, согласно соотношению

$$\Theta_{j+1} = \Theta_j - \alpha_j J'(\Theta_j).$$

Затем снова переходим к пункту 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г.И. Марчук, *Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты*, Москва: Наука, 3-е изд., 1991.
- [2] A. Romanyukha, A. Yashin, *Age related changes in population of peripheral T cells: towards a model of immunosenescence*, Mechanisms of Ageing and Development, **123**, Pp. 433-443, 2003.
- [3] А.А. Романюха, С.Г. Руднев, С.М. Зуев, *Анализ данных и моделирование инфекционных заболеваний*, В кн.: Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Т. 2. Математическое моделирование (под ред. В.П. Дымникова), Москва: Наука, С. 352-404, 2005.
- [4] C. Cobelli, E. Carson, *Introduction to Modeling in Physiology and Medicine*, The Netherlands: Academic Press, Elsevier, 2008.
- [5] H.T. Waaler, A. Geser, S. Andersen, *The use of mathematical models in the study of the epidemiology of tuberculosis*, The American Journal of Public Health, **52** Pp. 1002–1013, 1962.
- [6] H.T. Waaler, *A dynamic model for the epidemiology of tuberculosis*, American Review of Respiratory Disease, **98** Pp. 591–600, 1968.
- [7] H.T. Waaler, M.A. Piot, *The use of an epidemiological model for estimationg the effectiveness of tuberculosis control measures. Sensitivity of the effectiveness of tuberculosis control measures to the coverage of the population*, Bulletin of the World Health Organization, **41** Pp. 75–93, 1969.
- [8] H.T. Waaler, M.A. Piot, *Use of an epidemiological model for estimating the eEffectiveness of tuberculosis control measures. Sensitivity of the effectiveness of tuberculosis control measures to the social time preference*, Bulletin of the World Health Organization, **43** Pp. 1–16, 1970.
- [9] M. Nowak, R. May, *Virus Dynamics: Mathematical Principles of Immunology and Virology*, Oxford: Oxford University Press, 2000.
- [10] J.E. Wigginton, D. Kirschner, *A model to predict cell-mediated immune regulatory mechanisms during human infection with Mycobacterium tuberculosis*, The Journal of Immunology, **166** Pp. 1951-1967, 2001.
- [11] T. Sannikova, *Analysis of infectious mortality by means of the individualized risk model*, Mathematical Modeling of Biological Systems: Epidemiology, Evolution and Ecology, Immunology, Neural Systems and the Brain, and Innovative Mathematical Methods, **2** Pp. 169-181, 2008.
- [12] Т.Е. Санникова, Г.И. Марчук, А.А. Романюха, А.И. Яшин, *Старение системы иммунитета и динамика смертности. Анализ роли антигенной нагрузки*, Успехи геронтологии, **12** Pp. 91-98, 2003.
- [13] A.S. Perelson, P.W. Nelson, *Mathematical analysis of HIV-1 dynamics in vivo*, SIAM Review, **41**, Pp. 3–44, 1999.

- [14] Y. Huang, D. Liu, H. Wu, *Hierarchical Bayesian methods for estimation of parameters in a longitudinal HIV dynamic system*, Biometrics, **62**, Pp. 413–423, 2006.
- [15] H. Miao, X. Xia, A.S. Perelson, H. Wu, *On identifiability of nonlinear ODE models and applications in viral dynamics*, SIAM Review, **53**, № 1, Pp. 3–39, 2011.
- [16] D.S. Callaway, A.S. Perelson, *HIV-1 infection and low steady state viral loads*, Bulletin of Mathematical Biology, **64**, Pp. 29–64, 2001.
- [17] B.M. Adams, H.T. Banks, M. Davidian, Hee-Dae Kwon, H.T. Tran, S.N. Wynne, E.S. Rosenberg, *HIV dynamics: Modeling, data analysis, and optimal treatment protocols*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **184**, Pp. 10–49, 2005.
- [18] S.M. Blower, A.R. McLean, T.C. Porco, P.M. Small, P.C. Hopewell, M.A. Sanchez, A.R. Moss, *The intrinsic transmission dynamics of tuberculosis epidemics*, Nature Medicine, **1**, № 8 Pp. 815–821, 1995.
- [19] К.К. Авилов, А.А. Романюха, *Математические модели распространения и контроля туберкулеза*, Математическая биология и биоинформатика, **2**, № 2, Pp. 188–318, 2007.
- [20] H.W. Engl, C. Flamm, P. Kugler, J. Lu, S. Muller, P. Schuster, *Inverse problems in systems biology*, Inverse Problems, **25**, № 12, 123014, 2009.
- [21] С.И. Кабанихин, *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, Berlin: Gruyter, 2011.
- [22] А.И. Ильин, С.И. Кабанихин, Д.А. Воронов. Универсальный подход к решению обратной задачи фармакокинетики в случае произвольного количества камер, Сибирские электронные математические известия, 11 (2014), стр. С.41–С.50.
- [23] А.И. Ильин, С.И. Кабанихин, Д.А. Воронов. Численное решение обратной задачи фармакокинетики для трехкамерной фармакокинетической модели с внутрисосудистым способом введения препарата, Сибирские электронные математические известия, 11 (2014), стр. С.51–С.61.

АЛЕКСАНДР ИВАНОВИЧ ИЛЬИН
 АО "Научный центр противоинфекционных препаратов",
 пр. аль-ФАРАБИ, 75B,
 050060, Алматы, Казахстан
E-mail address: scaid@scайд.kz

СЕРГЕЙ ИГОРЕВИЧ КАБАНИХИН
 Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
 пр-т ЛАВРЕНТЬЕВА 6,
 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

ОЛЬГА ИГОРЕВНА КРИВОРОТЬКО
 Новосибирский государственный университет,
 ул. Пирогова 2,
 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.76–С.84 (2014)
519.633.2

УДК

MSC 13A99

3D MODELING OF INTEGRATED NATURAL AND MAN-MADE HAZARDS AND SOURCE DETERMINATION PROBLEM

S.I. KABANIKHIN, I.V. MARININ, O.I. KRIVOROTKO

ABSTRACT. The World Agency of Planetary Monitoring and Earthquake Risk Reduction (WAPMERR) in cooperation with Informap software development department and the Institute of computational mathematics and mathematical geophysics SB RAS developed the Integrated Tsunami Research and Information System (ITRIS) for the purposes of reducing risk due to natural and man-made hazards and for rescue planning after disasters.

These goals are achieved by advancing methods of real-time modeling and loss assessment, by estimating the extent of future disasters in scenario mode, by calculating of risks, by characterizing the nature of the building stock in cities at risk, and through monitoring by satellite images.

Basic functions of ITRIS:

- The global-area coverage;
- The full three-dimensionality and manipulation with 3D models of buildings;
- The possibility for the Earth surface zooming at any point;
- The digital cartographic base design with the use of satellite images, digital; elevation and bathymetry models;
- The possibility for manipulation with the point, raster and vector data layers;
- The availability of data analyzing and processing plug-ins;
- The software for numerical modeling of geophysical processes and phenomena;
- The software for loss assessment from natural and man-made hazards;

© 2014 S.I. Kabanikhin, I.V. Marinin, O.I. Krivorotko.

This work is partially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation.

Поступила 15 июня 2014 г., опубликована 20 декабря 2014 г.

- The database management system intended for visualization and handling of historical data for hazards.

Keywords: Natural hazards, 3D GIS, numerical modeling, loss assessment, historical data collection, source determination.

1. INTRODUCTION

The Integrated Tsunami Research and Information System (ITRIS) was developed and is being maintained by WAPMERR in collaboration with Informap software development department, laboratory of Mathematical Modeling of Tsunami Waves and laboratory of Mathematical Problems of Geophysics of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of the Siberian Branch of Russian Academy of Sciences. The special scientific plug-in components are embedded in a specially developed GIS-type graphic shell for easy data retrieval, visualization and processing. The shell operates on Windows platforms with no additional co-located software required. The open source models can be easily integrated with the current system. A 3D GIS Real Time Monitoring System was created using high resolution QBIRD satellite imagery and spatial multi-media mapping on a scale of 1:5000. In Fig. 1.1 a graphic-shell window presenting a district of the east coast of India is shown. Fig. 1.2 presents an example of the urban district map (Dubai, UAE) visualization with deep zooming ability.

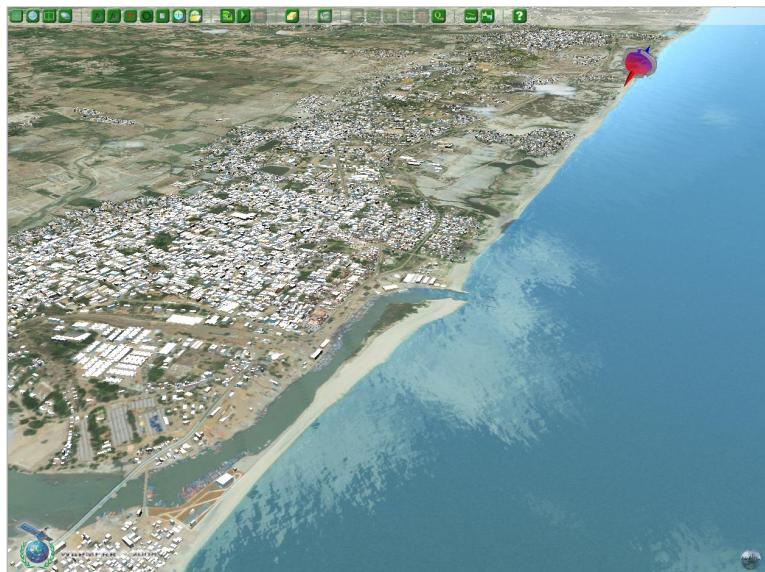


РИС. 1.1. A graphic-shell window presenting a district of the east coast of India.

We use numerical simulation for modeling long waves propagation in soil and water, tsunami run-up, solving inverse problems that consist in source vibrating determination, estimation of risk and losses. New mathematical approaches and software allowed to arrange database management and the entire destruction scenario visualization. New approaches and strategies as well as mathematical tools and software are to be shown.



Рис. 1.2. The urban district map (Dubai, UAE) visualization with deep zooming ability.

2. HISTORICAL DATA IN ITRIS

The presented software can be used for analysis and research of various natural and man-made hazards. There are built-in catalogues with set of interfaces for data managing. Fig. 2.1 presents visualization of earthquake epicenters around Japan. In the simplest case it is enough to know the coordinates of the epicenter and the magnitude of the earthquake. More accurate calculations require specific parameters of the tectonic shift such as size of the fault plane and its angles, but this data do not appear immediately. We can consider the most pessimistic variant knowing only the magnitude, latitude and longitude of the epicenter, when the fault occurs at right angles. It entails the greatest deviation of the water level. It is also very important to have accurate values of the bathymetry, the more precise is the better. Simulation of the flooding event with rough data, of course, will not give precise results. Various map projections can be used for visualization of geography and geophysical data (Fig. 2.2).

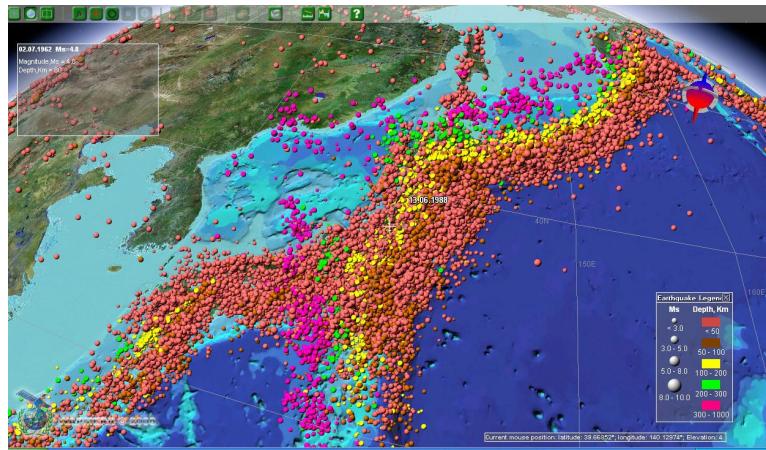


Рис. 2.1. Visualization of the available seismic data.

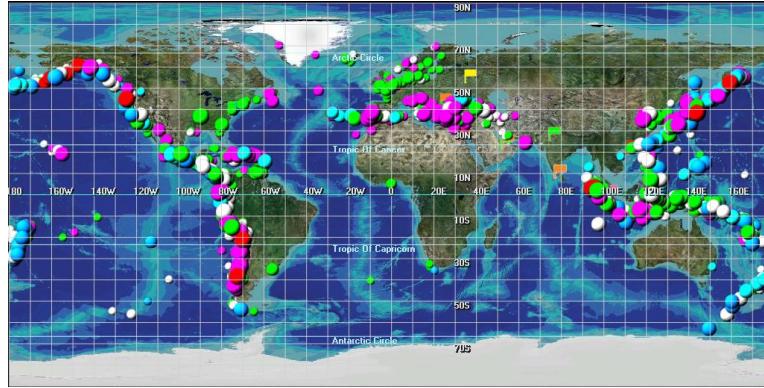


Рис. 2.2. Using geographical projection for visualization of the historical tsunami source locations.

3. TSUNAMI PROPAGATION MODULE AND RUN-UP

The concept of ITRIS is based on the integration of historical data, numerical models, processing and analysing tools along with mapping software. Any mathematical tool for tsunami modelling can be easily incorporated in build-in models. The approach to the long-term tsunami hazard assessment, which implemented in the ITRIS software, is based on the statistical analysis of historical run-up observations.

While interacting with bottom surface, the initial wave is deformed and to get more or less reliable data it is necessary to simulate the fluid motion. Calculations on a small-celled mesh will last relatively long, and to reduce the calculation time some parallelizing techniques must be utilized.

Sequence of actions for calculation of tsunami caused by a tectonic shift in the first approximation is as follows:

3.1. Getting data about the earthquake. Basically there was published some data about the earthquakes:

- http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/eqarchives/epic/epic_global.php;
- <http://www.globalcmt.org/CMTsearch.html>.

3.2. Calculation of tsunami propagation. Being generated by an event as large as an earthquake, the wavelength of the tsunami is huge 200 kilometers is typical (in contrast with wind waves, whose wavelengths are typically closer to 100 meters). In particular, the wavelength of the tsunami is far greater than the depth of the ocean (which is typically 2-3 kilometers). As such, even in the deep ocean, the dynamics of tsunamis are essentially governed by the shallow water equations which are written in conservative form:

$$(3.1) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S,$$

$$\text{where } Q = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(s_{0_x} - s_{f_x}) \\ gh(s_{0_y} - s_{f_y}) \end{pmatrix}.$$

Here Q —the vector of conservative variables, F and G —vectors of flow in x and y directions, respectively, h —height of liquid column, u and v —the average horizontal component of velocity in x and y directions, respectively, S —right-hand vector contains the terms responsible for the hydraulic friction and roughness of the bottom, g —the acceleration of gravity.

Numerical method that is currently developed will be able to calculate run-up and accurately handle the topography thanks to triangular and nested meshes.

One of the main tool the numerical modeling is the Finite Volume Method (FVM). Advantages of FVM over finite difference method in application to tsunami modeling are the stability, high calculation speed and easy using of triangular meshes [1]. First of all FVM by default satisfies the property of mass conservation. Besides that, it is very simple to incorporate any kind of TVD (Total Variation Diminishing) technique into a finite volume code for tsunami propagation (when the waves enter shallow water regions, numerical oscillations may occur and affect modeling results) [2]. Also in FVM the cells of calculation domain are usually numbered with one-dimensional indexes, this fact makes the process of parallelization clear and obvious. One more advantage of FVM is no restriction on mesh topology (triangular, rectangular and other meshes). Even if the bathymetry data is rough, triangular meshes are much more efficient from the point of accurate topology mapping. When the problem size is relatively big (tsunami movement across the ocean for example), there is no noticeable differences between the usage of rectangular and triangular meshes, but when the run up heights near the city are calculated, this property of FVM comes to play.

The offered scheme has the second order of approximation on time and on space and can be used for calculations of the liquid movement in areas with any topography.

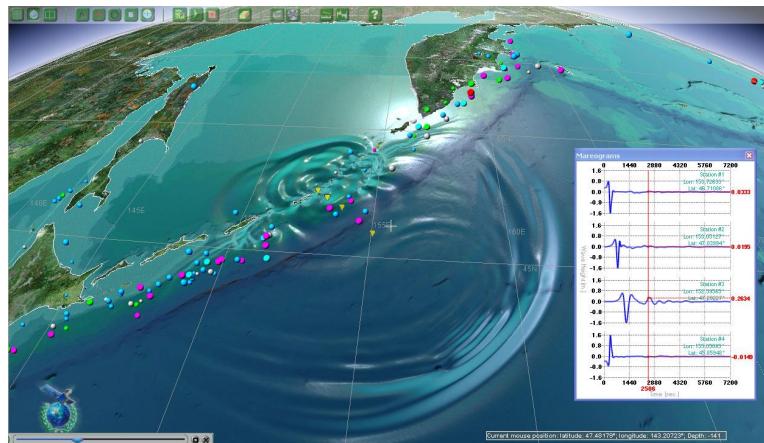


Рис. 3.1. Numerical modeling of the Simushir tsunami 13.01.2007 using the built-in software.

The use of non-structured grids allows to condense splitting of the computation domain in the regions which have the large differences in elevation of the bottom surface and adequately to describe nuances of the bathymetry. Fig. 3.1 shows the results of numerical tsunami modeling of 13.01.2007 propagation.

After performing all the needed calculations it will be possible to estimate maximum wave heights, to create flood and run-up maps, to combine them with coordinates of cities and towns and issue the wave travel times.

3.3. Evaluation of results [3]. We compare the numerical results with the data from the website of NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration). Large-scale laboratory experiments were performed at Coastal Engineering Research Center, Vicksburg, Mississippi, in a 30 m-wide, 25 m-long, and 60 cm-deep wave basin. The detailed experiments are described elsewhere in greater detail [4].

In the physical model, a 62.5 cm-high, 7.2 m toe-diameter, and 2.2 m crest-diameter circular island with a 1:4 slope was located in the basin.

Experiments were conducted at two different water depths, 32 cm and 42 cm, but presented here with dimensionless solitary wave heights equal to 0.045, 0.091, and 0.181 at 32 cm. For this calculation the area of 26 by 27.6 meters (x and y directions, respectively) was covered with a triangular mesh linearly condensing as we approach to the island center. The maximum cell size was 0.2 m, the minimum was 0.05 m. Fig. 3.2 shows the solitary wave at the moment of interaction with the island.

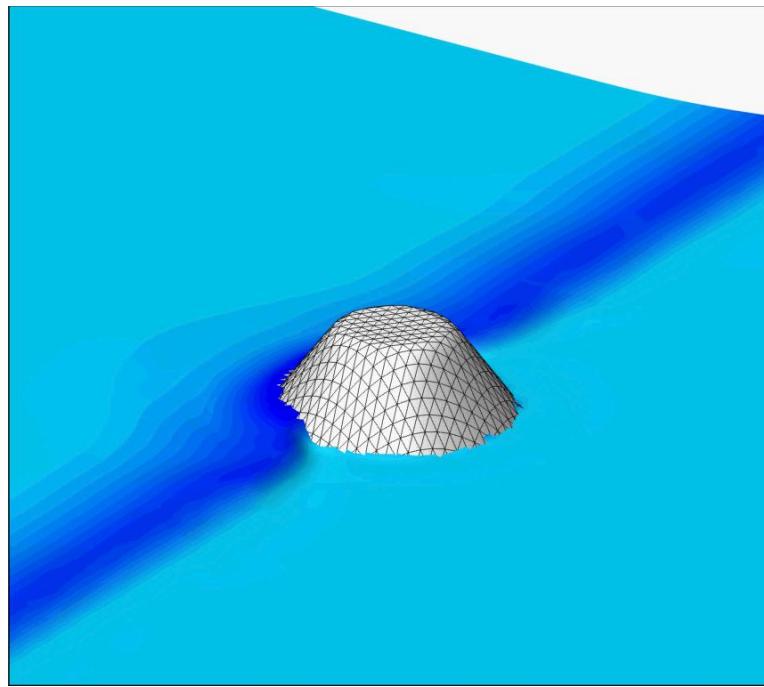


Рис. 3.2. There is a run-up on the island from the NOAA experiment.

The deviation of the fluid from rest is fixed at three points, which are located close to the dividing line. The first point is located in front of the incident wave to

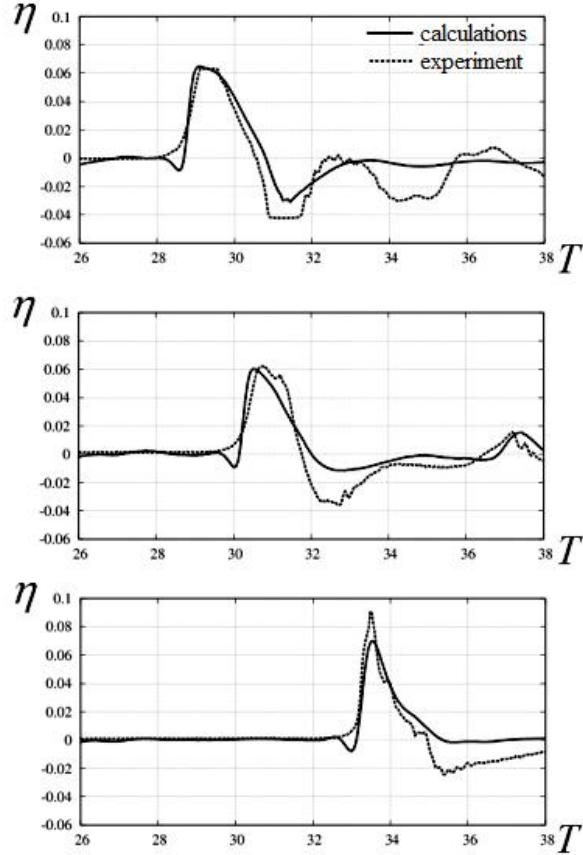


Рис. 3.3. Comparison of the calculated values of the deviations the liquid level from the rest with the experimental data in the above three points. Y-axis corresponds to the deflection of the liquid from the unperturbed state, the x-axis - time.

the side of the island of 2.6 meters in front of the center, the second - 2.6 meters from the side, the third - a 2.6 meters behind the center (Fig. 3.3).

3.4. Tsunami source determination problem. The tsunami source determination problem is a state-of-art problem to reducing risk due to natural hazards. At the present time people do not have such systems that are able to predict with high accuracy the source characteristics (size, velocity of the wave, arrival time of waves on the shore, the degree of risk), using data from the initial earthquake, or heights of the waves going in the deep ocean.

Using an explicit finite-difference scheme of the second order of approximation and various optimization methods (Landweber iteration, conjugate gradient method, etc.) we solved the model inverse problem of determining the water surface oscillations in a reservoir after perturbations of the bottom of the reservoir in the simplest case [5]. In the near future, we want to use the methods described in article for

solving the inverse problem with real data. We also plan to add the inverse problem solution module to the software (ITRIS) based on simulation natural and man-made hazards such as tsunamis, earthquakes etc.

4. TSUNAMI RISK-RELATED PRODUCTS: INUNDATION MAPS AND RISK ASSESSMENT

All items that are related to tsunami risks and risk reduction strategies are the ultimate goal of the project [6]. GIS methods will be used to create and combine the different inundation and flooding map components, which will be practically GIS-layers containing bathymetric, topographic, land use and inundation projections [7, 8] (Fig. 4.1). Contour lines will be digitized to produce a GIS-layer containing bathymetric data around the application area.

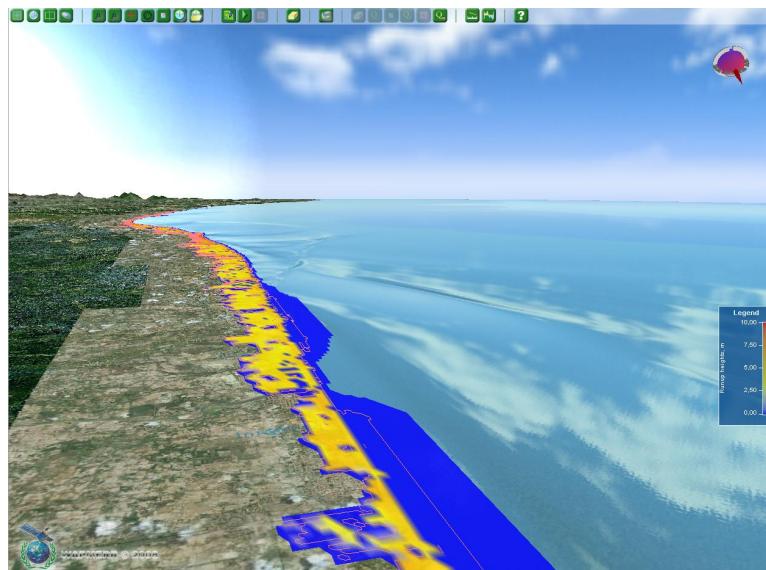


Рис. 4.1. Flooding map of Nagapattinam, India.

Affected areas can be defined if the variation in topography is known with sufficient accuracy. This analysis requires the development of a Digital Elevation Model (DEM). DEM will be derived from satellite data (Fig. 4.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S.F. Banford, B.F. Sanders, *Finite-volume model for shallow-water flooding on arbitrary topography*, Journal of Hydraulic Engineering, **128**(3), Pp. 289-298, 2002.
- [2] H. Yu, Y.P. Liu, *A second-order accurate, component-wise TVD scheme for nonlinear, hyperbolic conservation laws*, Journal of Computational Physics, **173**, Pp. 1-16, 2001.
- [3] An. Marchuk, I. Marinin, V. Komarov, O. Krivorotko, A. Karas, D. Khidasheli, *3D GIS Integrated Natural and Man-made Hazards Research and Information System*, Proceedings of The Joint International Conference on Human-Centered Computer Environments (HCCE) 2012 ORGANIZATION = "Aizu-Wakamatsu & Hamamatsu, Japan, pp. 225-229, 2012.
- [4] M.J. Briggs, C.E. Synolakis, G.S. Harkins, D.R. Green, *Laboratory experiments of Tsunami run-up on a circular island*, Pure and Applied Geophysics, **144**, Pp. 569-593, 1995.



Рис. 4.2. Detailed representation of buildings for a risk estimation of destruction.

- [5] S.I. Kabanikhin, M.A. Bektemesov, D.B. Nursetov, O.I. Krivorotko, A.N. Alimova, *An optimization method in the Dirichlet problem for the wave equation*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **20**(2), Pp. 193-211, 2012.
- [6] S.I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, Berlin: Gruyter, 2011.
- [7] S.I. Kabanikhin, I.V. Marinin, V. Komarov, O.I. Krivorotko, A. Karas, D. Khidasheli, *New methods of earthquakes and tsunami sources determining, simulation, modeling and visualization*, Abstracts of World forum “Natural cataclysm & global problems of the modern civilization” GEOCATACLYSM-2011, Istanbul, Turkey, September 19-21, 2011. Pp. 59-60.
- [8] M.A. Шишленин. *Матричный метод в задачах определения источников колебаний*, Сибирские электронные математические известия, 11 (2014), стр. С.161–С.171.

SERGEY I. KABANIKHIN

INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB RAS,
PROSPECT AKADEMIKA LAVRENTJEVA, 6,
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
PIROGOVA STREET 2,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

IGOR I. MARININ

INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB RAS,
PROSPECT AKADEMIKA LAVRENTJEVA, 6,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: igor.marinin@inbox.ru

OLGA I. KRIVOROTKO

NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
PIROGOVA STREET 2,
INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB RAS,
PROSPECT AKADEMIKA LAVRENTJEVA, 6,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.85–С.102 (2014)

УДК 519.62

MSC 65M32

ЗАДАЧА ПРОДОЛЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СТОРОНУ ЗАЛЕГАНИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

С.И.Кабанихин, Д.Б. Нурсеитов, Б.Б.Шолпанбаев

ABSTRACT. В работе рассматриваются задачи продолжения решений гиперболических уравнений с части границы области. К этим задачам относятся задача Коши для гиперболического уравнения с данными на времениподобной поверхности. Во многих обратных задачах искомые неоднородности расположены на некоторой глубине, параметры среды которой известны (в геофизике это, как правило, однородные или слоистые среды). В этом случае важным инструментом для практиков являются задачи продолжения геофизических полей с земной поверхности в сторону залегания неоднородностей. Задача продолжения сводится к обратной задаче, которая формулируется в виде операторного уравнения $Aq = f$. Рассмотрены вопросы существования, единственности и устойчивости решения прямой задачи. Задачи продолжения решений уравнений математической физики с части границы являются некорректными задачами в классах функций конечной гладкости. Для решения задачи продолжения применяются градиентные методы минимизации целевого функционала $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$. Целевой функционал минимизирован методом Ландвебера. Вычислен градиент функционала и приведен алгоритм решения обратной задачи. На основе оценок условной устойчивости исследована скорость сходимости градиентных методов. Для численного решения задачи приведен конечно-разностный алгоритм решения задачи. Расчеты проведены для трех различных сред: с одной неоднородностью, с двумя неоднородностями и тремя

КАБАНИХИН С.И., NURSEITOV D.B., SHOLPANBAEV B.B., THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC FIELD CONTINUATION IN THE DIRECTION TO INHOMOGENEITIES.

© 2014 Кабанихин С.И., Нурсеитов Д.Б., Шолпанбаев Б.Б.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, совместного проекта СО РАН и НАН Украины и интеграционного проекта СО РАН 122.

Поступила 12 апреля 2014 г., опубликована 20 декабря 2014 г.

неоднородностями, расположенными на глубине 6 м. Представлены результаты численных расчетов.

Keywords: обратная задача, уравнение электродинамики, задача продолжения, оптимизационный метод, сопряжённая задача, функционал невязки.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе предложен метод регуляризации задачи продолжения электромагнитного поля. Впервые итерационный метод был предложен в работе В.А. Козлова, В.Г. Мазья, А.В. Фомина в 1991 году для уравнения Лапласа [6]. В нашей работе мы приводим строгое математическое обоснование оценок скорости сходимости по функционалу градиентных методов и сильной сходимости, используя оценки условной устойчивости. Разработанные алгоритмы были применены для решения задачи продолжения электромагнитного поля.

Задачи определения параметров математических моделей электродинамики возникают в геофизике, медицине и других областях приложения математики. К основным параметрам моделей электродинамики относятся диэлектрическая и магнитная проницаемость и проводимость. Для нахождения или уточнения указанных параметров моделей используют дополнительную информацию об электромагнитных процессах. Такие задачи относятся к обратным задачам математической физики, основы теории которой были заложены в работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, а также их учеников и последователей. Во многих обратных задачах искомые неоднородности расположены на некоторой глубине под слоем среды, параметры которой известны (в геофизике это, как правило, однородные или слоистые среды). В этом случае важным инструментом для практиков являются задачи продолжения геофизических полей с земной поверхности в сторону залегания неоднородностей. Задачи продолжения решений уравнений математической физики с части границы во многих случаях являются сильно некорректными задачами в классах функций конечной гладкости. К этим задачам относятся задачи Коши для гиперболического уравнения с данными Коши на временнеподобной поверхности, для уравнения теплопроводности с данными Коши на части границы и для уравнения Лапласа. В данной работе мы рассмотрим методы регуляризации задачи продолжения основанные на градиентных методах и методе сингулярного разложения.

2. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ.

Основным физическим примером будет двумерная задача электродинамики. Рассмотрим систему уравнений Maxwella

$$\operatorname{rot} H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + j,$$

$$\operatorname{rot} E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Здесь положительные функции $\varepsilon(x, y, z)$, $\sigma(x, y, z)$ и $\mu(x, y, z)$ диэлектрическая проницаемость, проводимость и магнитная проницаемость среды соответственно.

Считаем, что электромагнитные колебания до момента времени $t = 0$ отсутствуют:

$$(E, H)|_{t<0} \equiv 0, \quad j|_{t<0} \equiv 0,$$

а затем индуцируются внешним током $j(x, y, z, t)$.

Рассмотрим один из простейших вариантов задачи, когда ε, σ и μ зависят только от глубины x и одной горизонтальной переменной y , а источником стоящего тока является достаточно длинный кабель, расположенный по центру и протянутый вдоль оси z :

$$j(x, y, z, t) = (0, 0, 1)^T g_v(x) g_h(y) r(t).$$

Здесь функции g_v и g_h описывают поперечные размеры источника.

В этом случае, пренебрегая влиянием концов кабеля, в системе уравнений Максвелла ненулевые останутся только три компоненты E_z, H_x, H_y и система будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} + \sigma E_z + g_v(x) g_h(y) r(t) &= 0, \\ \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} &= 0, \\ \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

После исключения из первого уравнения частных производных компонент H_x и H_y , получим относительно E_z уравнение второго порядка

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) - g_v(x) g_h(y) r'(t),$$

к которому добавим начальное условие

$$E_z|_{t<0} \equiv 0.$$

Обозначим $v = E_z(x, y, t)$, $\varepsilon = const$, $\mu = const$ и получим следующее уравнение:

$$\varepsilon v_{\tau\tau} + \sigma v_\tau = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Введем новую переменную $t = \frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Для функции $u(x, y, t) = v(x, y, \tau)$ получим,

$$u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_t = \Delta u$$

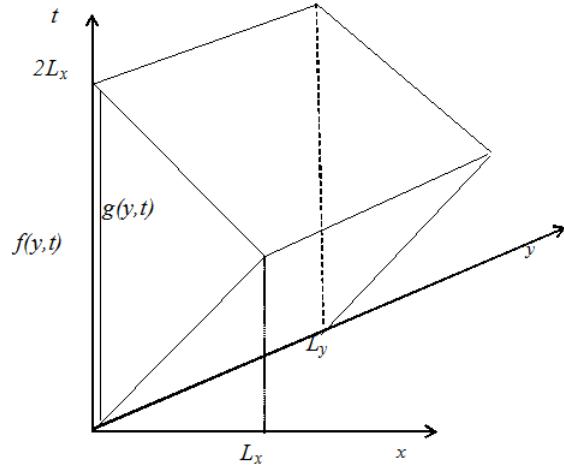
3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ

Рассмотрим задачу продолжения в области $\Omega = \Delta(L_x) \times (0, L_y)$, где $\Delta(L_x) = \{(x, t) : x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$ (см. рис.1):

$$(1) \quad u_{tt} + \left(\frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

$$(2) \quad u_x(0, y, t) = g(y, t),$$

$$(3) \quad u(0, y, t) = f(y, t),$$

Рис. 1. Область Ω .

Физическая постановка задачи (1)-(3). Пусть на границе среды $x = 0$ исследуемой области Ω включается источник электромагнитных волн (2) в момент времени $t = 0$. Отклик среды (3) измеряется на поверхности $x = 0$ в течении времени $t \in (0, 2L_x)$.

Предполагаем, что функция источника $g(y, t)$ финитна и ее носитель лежит внутри $(0, L_y)$ и L_y достаточно большое, чтобы:

$$(4) \quad u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0.$$

3.1. Пример Адамара некорректности задачи продолжения. Задача продолжения (1)–(3) некорректна по Адамару. Пусть $\sigma \equiv 0$. Тогда решение задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \\ u(0, y, t) = \frac{1}{k} \cos(k\sqrt{2}y) \cos(kt), \quad u_x(0, y, t) = 0. \end{cases}$$

единственно, но не является устойчивым к возмущениям данных Коши [1]. В самом деле, при $k \rightarrow \infty$ данные $u_k(0, y, t) = \frac{1}{k} \cos(k\sqrt{2}y) \cos(kt)$ стремятся к нулю, в то время как решение

$$u_k(x, y, t) = \frac{1}{k} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \cos(k\sqrt{2}y) \cos(kt)$$

бесконечно возрастает в любой окрестности плоскости $x = 0$.

3.2. Сведение задачи продолжения к обратной задаче. Рассмотрим некорректную задачу (1) — (4) как обратную к следующей прямой (корректной) задаче. В области $\Omega = \Delta(L_x) \times (0, L_y)$ требуется определить $u(x, y, t)$ по заданным

$q(x, y)$ и $g(y, t)$ из соотношений:

$$(5) \quad u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, t) \in \Delta(L_x)$$

$$(6) \quad u_x(0, y, t) = g(y, t), \quad y \in (0, L_y), t \in (0, 2L_x);$$

$$(7) \quad u(x, y, x) = q(x, y), \quad x \in (0, L_x), y \in (0, L_y);$$

$$(8) \quad u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0, \quad (x, t) \in \Delta(L_x).$$

В **прямой задаче** (5) — (8) требуется определить $u(x, y, t)$ по заданным $q(x, y)$ и $g(y, t)$.

Прямая задача (5)–(8) является корректной задачей [1]. Отметим, что решив прямую задачу (5)–(8) мы тем самым найдем решение задачи продолжения (1)–(4).

Обратная задача заключается в определении функции $q(x, y)$ из соотношении (5)–(8) по дополнительной информации:

$$(9) \quad u(0, y, t) = f(y, t).$$

Обозначим $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y) \times (0, T)$.

Функция $u(x, y, t) \in C^2(\Omega) \cap C^1((0, L_x) \times (0, L_y) \times [0, T)) \cap C([0, L_x] \times [0, L_y] \times (0, T))$ и удовлетворяющая соотношениям (5) — (8) внутри области Ω называется *классическим решением* прямой задачи (5) — (8).

Определение 1. Пусть $q(x, y) \in H^1((0, L_x) \times (0, L_y))$, $g(y, t) \in H^1((0, L_y) \times (0, 2L_x))$. Функцию $u \in H^1(\Omega)$ будем называть обобщенным решением прямой задачи (5) — (8), если для любых $v \in H^1(\Omega)$ таких, что

$$(10) \quad v(x, y, 2L_x - x) = 0, \quad y \in (0, L_y), x \in (0, L_x)$$

$$(11) \quad v(x, 0, t) = v(x, L_y, t) = 0, \quad (x, t) \in \Delta(L_x),$$

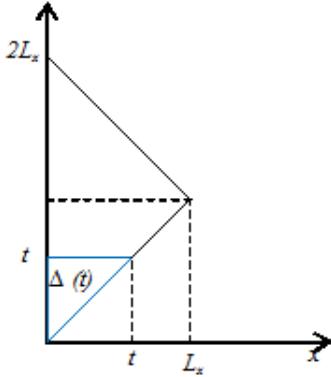
имеет место равенство

$$(12) \quad \begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left(v_t u_t - \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} v_t u - v_x u_x - v_x u_x - v_y u_y \right) dx dy dt \\ &= \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left(v(x, y, x) q_x(x, y) + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} v(x, y, x) q(x, y) \right) dx dy - \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} v(0, y, t) g(y, t) dt dy. \end{aligned}$$

3.3. Корректность прямой задачи. Для доказательства корректности прямой задачи сначала докажем несколько лемм. Потом докажем теорему существования, единственности и устойчивости решения прямой задачи.

Рассмотрим прямую задачу в нижнем треугольнике $t \in (0, L_x)$ (см. рис.2).

Пусть $\Delta(t) = \{(\xi, y, \tau) : \xi = (0, t), y \in (0, L_y), \tau \in (\xi, t)\}$.

Рис. 2. Рассмотрение области Ω в нижнем треугольнике.

Лемма 1. Пусть $u \in H^1(\Omega)$ является обобщенным решением прямой задачи (5) – (8), тогда выполняется следующее равенство

$$(13) \quad \begin{aligned} & \int_0^{L_y} \int_0^t (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy = \int_0^{L_y} \int_0^t (q_\xi^2(\xi, y) + q_y^2(\xi, y)) d\xi dy \\ & -2 \int_0^{L_y} \int_0^t u_\tau(0, y, \tau) g(y, \tau) d\tau dy - \int_0^{L_y} \int_0^t \int_0^\tau \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_\tau^2 d\tau d\xi dy. \end{aligned}$$

Доказательство.

Рассмотрим следующее тождество в области $\Delta(t) = \{(\xi, y, \tau) : \xi = (0, t), y \in (0, L_y), \tau \in (\xi, t)\}$:

$$\iiint_{\Delta(t)} u_\tau \left(u_{\tau\tau} + \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_\tau - u_{\xi\xi} - u_{yy} \right) d\tau d\xi dy = 0.$$

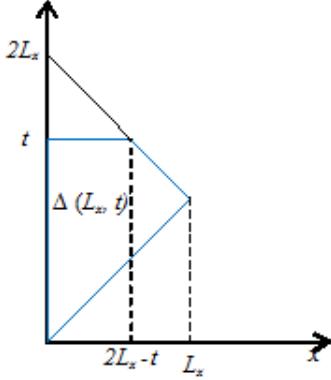
Интегрируя по частям, получим следующее равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^t (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy = \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^t (u_t^2 + 2u_t u_\xi + u_\xi^2)(\xi, y, \xi) d\xi dy \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^t u_y^2(\xi, y, \xi) d\xi dy - \int_0^{L_y} \int_0^t (u_\tau u_\xi)(0, y, \tau) d\tau dy - \int_0^{L_y} \int_0^t \int_0^\tau \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_\tau^2 d\tau d\xi dy \end{aligned}$$

Откуда, учитывая условие (6), получим

$$(u_t^2 + 2u_t u_\xi + u_\xi^2)(\xi, y, \xi) = (u_t + u_\xi)^2 = \left(\frac{du}{d\xi} \Big|_{\frac{du}{d\xi}=1} \right)^2 = q_\xi^2.$$

Таким образом, получаем равенство (13).

Рис. 3. Рассмотрение области Ω в верхнем треугольнике.

Пусть при $t \in (0, L_x)$

$$\|u\|^2(t) = \int_0^{L_y} \int_0^t (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \|q\|^2(t) &= \int_0^{L_y} \int_0^t (q_\xi^2(\xi, y) + q_y^2(\xi, y)) d\xi dy \\ \|g\|^2(t) &= \int_0^{L_y} \int_0^t (g^2(y, \tau) + q_\tau^2(y, \tau)) d\tau dy \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим прямую задачу в верхнем треугольнике $t \in (L_x, 2L_x)$ (см. рис.3).

Лемма 2. Пусть $u \in H^1(\Omega)$ является обобщенным решением прямой задачи (5) – (8). Тогда выполняется следующее равенство

$$\begin{aligned} &\int_0^{L_y} \int_0^{2L_x-t} (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy + \int_0^{L_y} \int_{2L_x-t}^{L_x} (u_t - u_\xi)^2(\xi, y, 2L_x - \xi) d\xi dy \\ (14) \quad &= \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (q_\xi^2(\xi, y) + q_y^2(\xi, y)) d\xi dy - 2 \int_0^{L_y} \int_0^t u_\tau(0, y, \tau) g(y, \tau) d\tau dy - \int_0^{L_y} \int_0^t \int_0^\tau \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_\tau^2 d\tau d\xi dy. \end{aligned}$$

Доказательство.

Рассмотрим следующее тождество в области $\Delta(L_x, t) = \Delta(L_x) \cap \{\tau < t\}$ где $\Delta(L_x) = \{(x, y, t) : x = (0, L_x), y \in R, t \in (x, 2L_x - x)\}$

$$\iint_{\Delta(L_x, t)} u_\tau \left(u_{\tau\tau} + \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_\tau - u_{\xi\xi} - u_{yy} \right) d\tau d\xi dy = 0.$$

Интегрируем по частям получим следующее равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x-t} (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy + \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_{2L_x-t}^{L_x} (u_t^2 - 2u_t u_\xi + u_\xi^2)(\xi, y, 2L_x - \xi) d\xi dy \\ & + \iiint_{\Delta(L_x, t)} \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_\tau^2 d\tau d\xi dy = \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^t (u_t^2 + 2u_t u_\xi + u_\xi^2)(\xi, y, \xi) d\xi dy \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^t u_y^2(\xi, y, \xi) d\xi dy - \int_0^{L_y} \int_0^t (u_\tau u_\xi)(0, y, \tau) d\tau dy \end{aligned}$$

Откуда $(u_t^2 + 2u_t u_\xi + u_\xi^2)(\xi, y, \xi) = (u_t + u_\xi)^2 = \left(\frac{du}{d\xi} \Big|_{\frac{du}{d\xi}=1} \right)^2 = q_\xi^2$ и учитываем условию (6). Получаем равенство (14). Пусть при $t \in (L_x, 2L_x)$

$$\|u\|^2(t) = \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x-t} (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \|q\|^2(L_x) &= \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (q_\xi^2(\xi, y) + q_y^2(\xi, y)) d\xi dy \\ \|g\|^2(t) &= \int_0^{L_y} \int_0^t (g^2(y, \tau) + q_\tau^2(y, \tau)) d\tau dy \end{aligned}$$

Теорема 1. (существование обобщенного решения прямой задачи) Если $q, g \in H^1(\Omega)$, то прямая задача (5) – (8) имеет единственное обобщенное решение $u \in H^1(\Omega)$ и верна оценка

$$(15) \quad \|u\|^2(t) \leq e^{Mt} \cdot (\|q\|^2(L_x) + \|g\|^2(2L_x))$$

здесь $t \in (0, L_x)$. *Доказательство.*

Из теоремы вложения $C(0, t) \subset H^1(0, t)$ получаем оценку

$$(16) \quad |u(x, y, t)| \leq C_1 \sqrt{\int_0^t (u^2 + u_\xi^2)(\xi, y, t) d\xi} \quad \forall x \in (0, t), \quad \forall y, t.$$

Интегрируем по частям следующий интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{L_y} \int_0^t u_\tau(0, y, \tau) g(y, \tau) d\tau dy &= \int_0^{L_y} \left[u(0, y, t) g(y, t) - u(0, y, 0) g(y, 0) \right] dy - \\ & - \int_0^{L_y} \int_0^t u(0, y, \tau) g_\tau(y, \tau) d\tau dy \end{aligned}$$

Откуда получаем неравенство:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{L_y} \int_0^t u_\tau(0, y, \tau) g(y, \tau) d\tau dy \right| &\leq \int_0^{L_y} \left[|u(0, y, t)g(y, t)| + |u(0, y, 0)g(y, 0)| \right] dy \\ &+ \int_0^{L_y} \int_0^t |u(0, y, \tau)g_\tau(y, \tau)| d\tau dy \end{aligned}$$

Тогда из оценки (16) вытекает

$$\int_R \int_0^t |u_\tau(0, y, \tau)g(y, \tau)| d\tau dy \leq C_2 \|u\|(t) \cdot \|g\|(t).$$

Оценим равенство (13) и получим:

$$\int_0^{L_y} \int_0^t (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy \leq \int_0^{L_y} \int_0^t (q_\xi^2(\xi, y) + q_y^2(\xi, y)) d\xi dy + 2 \int_0^{L_y} \int_0^t |u_\tau(0, y, \tau)g(y, \tau)| d\tau dy.$$

Отсюда вытекает следующее неравенство

$$\|u\|^2(t) \leq \|q\|^2(t) + C_3 \|u\|(t) \cdot \|g\|(t).$$

Из курса элементарной математики можно показать

$$a^2 \leq b^2 + C_0 ad \implies a^2 \leq C_*(b^2 + d^2).$$

Тогда получаем следующую оценку

$$(17) \quad \|u\|^2(t) \leq C_4 (\|q\|^2(t) + \|g\|^2(t)).$$

Пусть функция $\left| \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \right|_{C^1((0, L_x) \times (0, L_y))} \leq M$.

Используя неравенство Гельдера и оценим следующий интеграл

$$\int_0^{L_y} \int_0^t \int_0^\tau |u_\tau^2| \left| \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \right| d\xi d\tau dy \leq M \int_0^t \int_0^{L_y} \int_0^\tau |u_\tau^2| d\xi dy d\tau$$

Отсюда

$$\sqrt{\int_0^{L_y} \int_0^\tau |u_\tau|^2 d\xi dy} \leq \|u\|(\tau),$$

Тогда получим

$$\int_0^{L_y} \int_0^t \int_0^\tau |u_\tau^2| \left| \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \right| d\xi d\tau dy \leq M \int_0^t \|u\|^2(\tau) d\tau.$$

Следовательно из (13)

$$(18) \quad \|u\|^2(t) \leq C_4(\|q\|^2(t) + \|g\|^2(t)) + M \int_0^t \|u\|^2(\tau) d\tau.$$

Пусть $a(t) = \|u\|^2(t)$, $b(t) = C_4(\|q\|^2(t) + \|g\|^2(t))$, тогда $b(t)$ монотонно растёт и $b(t) \leq B = b(L_x)$ отсюда получаем

$$a(t) \leq B + M \int_0^t a(\tau) d\tau.$$

Применяя к неравенству лемму Громуолла–Беллмана, получим

$$a(t) \leq Be^{Mt}$$

В итоге доказываем неравенство (15).

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕОЭЛЕКТРИКИ МЕТОДОМ ЛАНДВЕБЕРА

Вводим оператор A следующим образом

$$\begin{aligned} A: q(x, y) &\mapsto f(y, t) \\ A: H^1(0, L_x) &\mapsto H^1(0, 2L_x) \end{aligned}$$

Тогда обратная задача (5) – (9) записывается в операторной форме

$$(19) \quad Aq = f.$$

Введем целевой функционал

$$(20) \quad J(q_n) = \|Aq_n - f\|_{W_2^0}^2 = \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} [u(0, y, t; q_n) - f(y, t)]^2 dy dt.$$

Целевого функционала (20) минимизируем методом Ландвебера.

$$(21) \quad q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n,$$

$$\text{где } \alpha \in \left(0, \frac{1}{\|A\|^2}\right)$$

4.1. Вычисление градиента целевого функционала. Зададим приращение $q_n + \delta q_n$, тогда

$$(22) \quad \delta u = \tilde{u} - u = u(x, y, t; q_n + \delta q_n) - u(x, y, t; q_n).$$

Используя обозначение (22), вычисляем приращение целевого функционала $J(q)$.

$$\begin{aligned}
 J(q_n + \delta q_n) - J(q_n) &= \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} [u(0, y, t; q_n + \delta q_n) - f(y, t)]^2 dy dt \\
 &\quad - \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} [u(0, y, t; q_n) - f(y, t)]^2 dy dt = \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} [u(0, y, t; q_n + \delta q_n) - u(0, y, t; q_n)] \\
 &\quad \times [u(0, y, t; q_n + \delta q_n) - f(y, t) + u(0, y, t; q_n) - f(y, t)] dy \\
 (23) \quad &= \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} \delta u(0, y, t; q_n) 2[u(0, y, t; q_n) - f(y, t)] dy + o(\|\delta u\|).
 \end{aligned}$$

Для получения выражения на $\delta u(0, y, t; q_n)$ рассмотрим постановку возмущенной задачи для уравнений (5) — (8).

$$(24) \quad \tilde{u}_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy}$$

$$(25) \quad \tilde{u}_x(0, y, t) = g(y, t),$$

$$(26) \quad \tilde{u}(x, y, x) = q_n + \delta q_n,$$

$$(27) \quad \tilde{u}(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0.$$

Из соотношений (24) — (27) вычтем соотношения (5) — (8) и, учитывая (22), получим для приращения δu задачу

$$(28) \quad \delta u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \delta u_t = \delta u_{xx} + \delta u_{yy}$$

$$(29) \quad \delta u_x(0, y, t) = 0,$$

$$(30) \quad \delta u(x, y, x) = \delta q_n,$$

$$(31) \quad \delta u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0.$$

Умножая (28) на произвольную функцию $\psi(x, y, t)$, проинтегрируем по Ω .

$$\begin{aligned}
 0 &= \iiint_{\Omega} \left(\delta u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \delta u_t - \delta u_{xx} - \delta u_{yy} \right) \psi dx dy dt = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \int_x^{2L_x-x} \psi \delta u_{tt} dt dx dy \\
 &\quad - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \int_0^t \psi \delta u_{xx} dx dt dy - \int_0^{L_y} \int_{L_x}^{2L_x} \int_0^{2L_x-x} \psi \delta u_{xx} dx dt dy - \int_0^{L_x} \int_x^{2L_x-x} \int_0^{L_y} \psi \delta u_{yy} dy dt dx \\
 &\quad + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \int_x^{2L_x-x} \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \psi \delta u_t dt dx dy
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям и получим:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[(\psi \delta u_t)(x, y, 2L_x - x) - \underline{(\psi \delta u_t)(x, y, x)} - (\psi_t \delta u)(x, y, 2L_x - x) + \underline{(\psi_t \delta u)(x, y, x)} \right] \\
& + \int_x^{2L_x - x} \psi_{tt} \delta u dt \Big] dx dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \left[(\psi \delta u)(x, y, 2L_x - x) - (\psi \delta u_t)(x, y, x) - \int_x^{2L_x - x} \psi_t \delta u dt \right] dx dy \\
& - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[\underline{(\psi \delta u_x)(t, y, t)} - \underline{(\psi \delta u_x)^{(0)}(0, y, t)} - \underline{(\psi_x \delta u)(t, y, t)} + (\psi_x \delta u)(0, y, t) + \int_0^t \psi_{xx} \delta u dx \right] dt dy \\
& - \int_0^{L_y} \int_{L_x}^{2L_x} \left[(\psi \delta u_x)(2L_x - t, y, t) - \underline{(\psi \delta u_x)^{(0)}(0, y, t)} - (\psi_x \delta u)(2L_x - t, y, t) + (\psi_x \delta u)(0, y, t) \right. \\
& \left. + \int_0^{2L_x - t} \psi_{xx} \delta u dx \right] dt dy - \int_0^{L_x} \int_x^{2L_x - x} \left[(\psi \delta u_y)(x, L_y, t) - \underline{(\psi \delta u_y)^{(0)}(x, 0, t)} - \underline{(\psi_y \delta u)(x, L_y, t)} + \right. \\
& \left. + (\psi_y \delta u)^{(0)}(x, 0, t) + \int_0^{L_y} \psi_{yy} \delta u dy \right] dt dx
\end{aligned}$$

Учитывая (29) и (31) и в силу того, что $\delta u_x(t, y, t) + \delta u_t(x, y, x) = \frac{d\delta u}{dx} \Big|_{\frac{dt}{dx}=1} = (\delta q)_x$ получаем

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} \left(\psi_{tt} - \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon} \psi_t} - \psi_{xx} - \psi_{yy} \right) \delta u dx dy dt \\
& + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[(\psi \delta u_t)(x, y, 2L_x - x) - (\psi_t \delta u)(x, y, 2L_x - x) + (\psi_t \delta u)(x, y, x) \right] dx dy \\
& + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (\psi_x \delta u)(t, y, t) dt dy - \int_0^{L_y} \int_{L_x}^{2L_x} \left[(\psi \delta u_x)(2L_x - t, y, t) - (\psi_x \delta u)(2L_x - t, y, t) \right] dt dy \\
& - \int_0^{L_y} (\psi \delta u)^{(0)} \Big|_{0}^{L_x} dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (\psi_x \delta u)(t, y, t) dx dy - \int_0^{L_x} \int_x^{2L_x - x} \left[(\psi \delta u_y)(x, L_y, t) - (\psi \delta u_y)^{(0)}(x, 0, t) \right] dt dx \\
& + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \left[(\psi \delta u)(x, y, 2L_x - x) - (\psi \delta u)(x, y, x) \right] dx dy + \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} (\psi_x \delta u)(0, y, t) dt dy
\end{aligned}$$

Откуда, вытекает постановка сопряженной задачи

$$(32) \quad \psi_{tt} - \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}\psi_t} = \psi_{xx} + \psi_{yy},$$

$$(33) \quad \psi(x, y, 2L_x - x) = 0,$$

$$(34) \quad \psi_x(0, y, t) = 2(u(0, y, t) - f(y, t)),$$

$$(35) \quad \psi_y(x, L_y, t) = \psi_y(x, 0, t) = 0.$$

Тогда, учитывая (23), получим

$$\langle \delta q_n, J' q_n \rangle = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (\psi_t(x, y, x) + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \psi(x, y, x)) \delta q dx dy.$$

По определению [3, стр.260] главная часть приращения функционала есть градиент, т.е.

$$(36) \quad J' q_n = \psi_t(x, y, x) + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \psi(x, y, x).$$

Здесь $\psi(x, y, t)$ есть решение сопряженной задачи (32) — (35).

4.2. Алгоритм решения обратной задачи.

- (1) Выбираем начальное приближение q_0 .
- (2) Предположим, что q_n уже известно.
- (3) Решаем прямую задачу (5) — (8) с заданным q_n .
- (4) Вычисляем значение функционала $J(q_n)$ по формуле (20).
- (5) Если значение целевого функционала не достаточно мало (например, $J(q_n) > \delta$), тогда решаем сопряженную задачу (32)–(35) с данными

$$\psi_n(0, y, t) = 2(u_n(0, y, t) - f(y, t)).$$

- (6) Вычисляем градиент функционала $J'(q_n)$ по формуле (36).
- (7) Вычисляем следующее приближение $q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n$ и переходим пункту 2.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ.

Обозначим $\sigma_1 = \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}$. Будем искать решение прямой задачи (5) — (8) в виде ряда Фурье по переменной y :

$$u(x, y, t) = \sum u^k(x, t) e^{iky}$$

$$\sigma_1(x, y) = \sum \sigma_1^k(x) e^{iky}$$

Тогда получим:

$$\sum u_{tt}^k e^{iky} + \sum_{n,k} \sigma_1^n e^{in y} u_t^k e^{iky} = \sum u_{xx}^k e^{iky} - \sum_k k^2 u^k(x, t) e^{iky}$$

Введем обозначение:

$$\begin{aligned} n+k &= k', & n &= k'-k, \\ u_{tt}^k + \sum_{k'} \sigma_{k'-k} \sigma_1^{k'} &= u_{xx}^k - k^2 u^k, \end{aligned}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix}.$$

$$(37) \quad U_{tt} - \Sigma(x)U_t = U_{xx} + E_N U,$$

$$(38) \quad U_x|_{x=0} = G(t),$$

$$(39) \quad U|_{t=x} = Q(x),$$

Здесь,

$$E_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N^2 \end{pmatrix}, \Sigma(x) = \begin{pmatrix} \sigma^N & \sigma^{N-1} & \sigma^{N-2} & \dots & \sigma^0 \\ \sigma^{N-1} & \sigma^{N-2} & \sigma^{N-3} & \dots & \sigma^1 \\ \sigma^{N-2} & \sigma^{N-3} & \sigma^{N-4} & \dots & \sigma^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma^0 & \sigma^1 & \sigma^2 & \dots & \sigma^N \end{pmatrix},$$

Прямая задача (37)-(39) - требуется определить $U(x, t)$ по заданным функциям $G(t)$ и $Q(x)$.

Обратная задача заключается в определении функции $Q(x)$ из соотношений (37)-(39) по дополнительной информации:

$$(40) \quad U|_{x=0} = F(t).$$

5.1. Конечно-разностный алгоритм решения прямой задачи.

Заменим конечно-разностными аналогами производные [8, 9, 10, 7] в уравнении (37) и получим:

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{h^2} + \Sigma_i \frac{U_i^{k+1} - U_i^{k-1}}{2h} &= \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2} - E_N U_i^k, \\ U_i^{k+1} + U_i^{k-1} + \frac{h}{2} \Sigma_i (U_i^{k+1} - U_i^{k-1}) &= U_{i+1}^k + U_{i-1}^k - h^2 E_N U_i^k \\ U_i^k &= \frac{U_i^{k+1} + U_i^{k-1}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U_i^{k+1}} + \underline{U_i^{k-1}} + \frac{h}{2} \Sigma_i (\underline{U_i^{k+1}} - \underline{U_i^{k-1}}) &= U_{i+1}^k + U_{i-1}^k - h^2 E_N (\underline{U_i^{k+1}} - \underline{U_i^{k-1}}) \\ \left(I + \frac{h}{2} \Sigma_i + \frac{h}{2} E_N \right) \underline{U_i^{k+1}} &= U_{i+1}^k + U_{i-1}^k - \left(I - \frac{h}{2} \Sigma_i + \frac{h}{2} E_N \right) \underline{U_i^{k-1}} \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$(41) \quad M_i = I + \frac{h}{2} \Sigma_i + \frac{h}{2} E_N$$

$$(42) \quad P_i = I - \frac{h}{2} \Sigma_i + \frac{h}{2} E_N$$

получим

$$M_i U_i^{k+1} = U_{i+1}^k + U_{i-1}^k - P_i U_i^{k-1}$$

$$U_i^{k+1} = M_i^{-1} (U_{i+1}^k + U_{i-1}^k - P_i U_i^{k-1}).$$

Запишем так же граничное условие (38)

$$U_x|_{x=0} = G(t),$$

$$\begin{aligned} U(h, kh) &= U_1^k = U_0^k + h U_x|_{x=0} + \frac{h^2}{2} U_{xx} = U_0^k + h G^k + \frac{h^2}{2} (U_{tt} + \Sigma(0) U_t + E_N U|_{x=0}) = \\ &= \underline{U_0^k} + h G^k + \frac{h^2}{2} \left(\frac{U_0^{k+1} - 2U_0^k + U_0^{k-1}}{h^2} + \Sigma_0 \frac{U_0^{k+1} - U_0^{k-1}}{2h} + E_N U_0^k \right) = \\ &= h G^k + \frac{U_0^{k+1} - U_0^{k-1}}{2} + \frac{h}{4} \Sigma_0 (U_0^{k+1} - U_0^{k-1}) + \frac{h^2}{2} E_N U_0^k \\ U_0^k &= \frac{U_0^{k+1} + U_0^{k-1}}{2} \end{aligned}$$

$$U_1^k = h G^k + \frac{U_0^{k+1} - U_0^{k-1}}{2} + \frac{h}{4} \Sigma_0 (U_0^{k+1} - U_0^{k-1}) + \frac{h^2}{2} E_N \left(\frac{U_0^{k+1} + U_0^{k-1}}{2} \right)$$

$$U_1^k = h G^k + \frac{1}{2} \left(I + \frac{h}{2} \Sigma_0 + \frac{h^2}{2} E_N \right) U_0^{k+1} + \frac{1}{2} \left(I - \frac{h}{2} \Sigma_0 + \frac{h^2}{2} E_N \right) U_0^{k-1}$$

Учитывая обозначения (41) и (42)

$$U_1^k = h G^k + \frac{1}{2} M_0 U_0^{k+1} + \frac{1}{2} P_0 U_0^{k-1}$$

$$M_0 U_0^{k+1} = 2U_1^k - 2h G^k - P_0 U_0^{k-1}$$

$$U_0^{k+1} = M_0^{-1} (2U_1^k - 2h G^k - P_0 U_0^{k-1})$$

Условие на характеристике

$$U_i^i = Q_i.$$

5.2. Результаты численных расчетов. Расчеты проводились в области $(z, y) = (0, 10) \times (0, 12)$ м., время наблюдения 50 нс. Шаг по пространственным переменным $h_x = h_y = 0.01$ м. Шаг по времени равен $h_t = 0.0047$ нс.

Расчеты проведены для трех различных сред: с одной неоднородностью, с двумя неоднородностями и тремя неоднородностями, расположенными на глубине 6 м.

Параметры среды $\varepsilon = 1$, $\sigma = 0.01$, значения параметров внутри неоднородностей $\varepsilon = 20$, $\sigma = 0.001$.

На рисунках 4–6 приведено аномальное поле — поле, полученное путем вычитания из наблюдаемого поля от неоднородной среды поля от источника.

Расчеты показывают, что решение задачи продолжения электромагнитного поля на глубину $z = 3$ м. позволяет различать неоднородности расположенные на глубине 6 м.

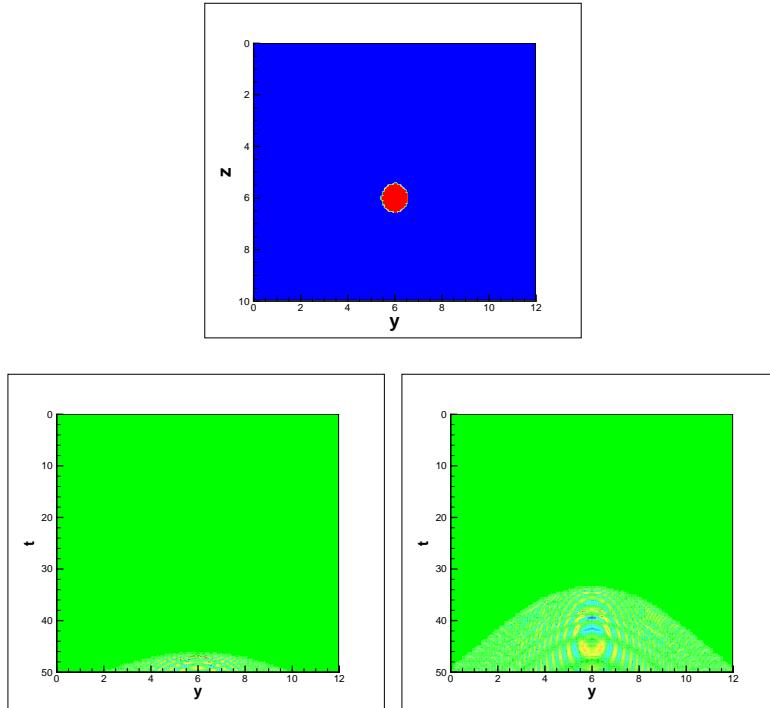
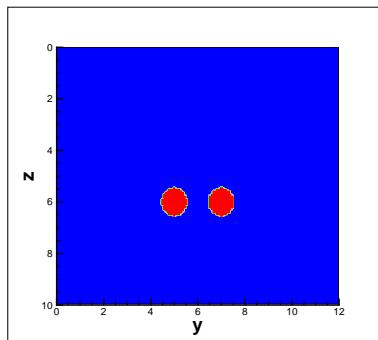


Рис. 4. Сверху — среда с одной неоднородностью. Слева — наблюдаемое аномальное поле на границе $z = 0$. Справа — наблюданное аномальное поле на глубине $z = 3$ м.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С.И. Кабанихин Обратные и некорректные задачи. —Новосибирск: СибНИ, 2008.—460 с.
- [2] Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсеитова А.Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. — Алматы-Новосибирск: ОФ «Международный фонд обратных задач», 2006. —426 с.
- [3] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. — Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 552 с.
- [4] H.A. Levine, *Continuous data dependence, regularization, and a three lines theorem for the heat equation with data in a space like direction*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), CXXXIV (1983), 267–286.

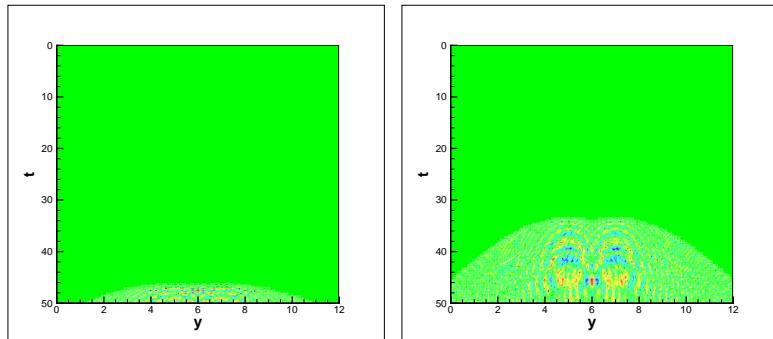


Рис. 5. Сверху — среда с двумя неоднородностями. Слева — наблюдаемое аномальное поле на границе $z = 0$. Справа — наблюденное аномальное поле на глубине $z = 3$ м.

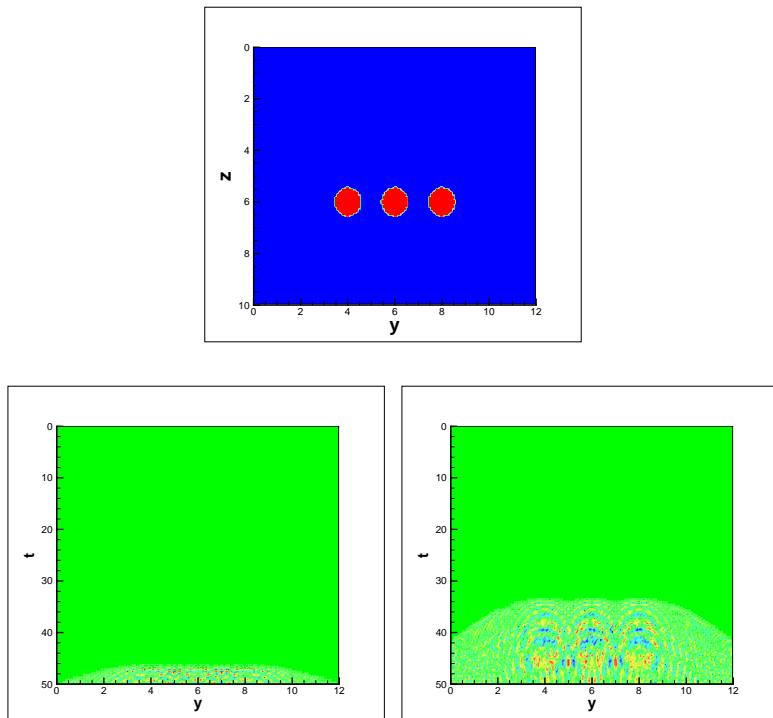


Рис. 6. Сверху — среда с тремя неоднородностями. Слева — наблюденное аномальное поле на границе $z = 0$. Справа — наблюденное аномальное поле на глубине $z = 3$ м.

- [5] S.I. Kabanikhin, A.L. Karchevsky, *Method for solving the Cauchy Problem for an Elliptic Equation*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, VSP, The Netherlands, Vol. 3, 1 (1995), 21–46.
- [6] В. А. Козлов, В. Г. Мазья, А. В. Фомин, Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., том 31, № 1 (1991), с. 64–74.

- [7] S.I. Kabanikhin and M.A. Shishlenin and D.B. Nurseitov and A.T. Nurseitova and S.E. Kasenov. *Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation.* Journal of Applied Mathematics, 2014, (2014), <http://dx.doi.org/10.1155/2014/786326>, 7 pages.
- [8] S.I. Kabanikhin and Y.S. Gasimov and D.B. Nurseitov and M.A. Shishlenin and B.B. Sholpanbaev and S. Kasenov. *Regularization of the continuation problem for elliptic equations.* Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013/ Vol. 21 **6**, pp. 871–884.
- [9] S.I. Kabanikhin and D.B. Nurseitov and M.A. Shishlenin and B.B. Sholpanbaev. *Inverse problems for the ground penetrating radar.* Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013. Vol. 21 **6**, pp. 885–892.
- [10] М.А. Шишленин. *Матричный метод в задачах определения источников колебаний.* Сибирские электронные математические известия, 11 (2014), стр. С.161–С.171.

СЕРГЕЙ ИГОРЕВИЧ КАБАНИХИН

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
ул. ПИРОГОВА 2,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: ksi52@mail.ru

ДАНИЯР БОРИСОВИЧ НУРСЕИТОВ

NATIONAL OPEN RESEARCH LABORATORY OF INFORMATION AND SPACE TECHNOLOGIES KAZNTU,
AV. SATRAEV, 22,
050013, ALMATY, KAZAKHSTAN
E-mail address: d.nurseitov@norlist.kz

БАКЫТГЕРЕЙ БАКТУРОВИЧ ШОЛПАНБАЕВ

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. АВАЯ,
пр. ДОСТЫК 13,
050010, АЛМАТА, КАЗАХСТАН
E-mail address: Bahtygeray@mail.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.103–С.114 (2014)

УДК 519.633.2

MSC 13A99

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С.И. Кабанихин, О.И. Криворотко, К.С. Бобоев, Н.Ю. Зятьков

Аннотация. Определение упругих параметров внутреннего строения Земли является одной из фундаментальных задач. Хорошо известно, что для устойчивого определения коэффициентов гиперболических уравнений и систем необходимо изучать импульсную характеристику среды. В данной работе рассматриваются некоторые численные алгоритмы построения импульсной характеристики среды. Они основаны на изучении фундаментальной структуры решения. Для этого вводятся инварианты Римана, полученные из системы уравнений теории упругости, записанные в скоростях и напряжениях, в изотропном упругом полупространстве. Построен численный алгоритм решения прямой задачи с использованием метода характеристик в сочетании с интерполяцией на каждом временном шаге.

Ключевые слова: уравнения теории упругости, метод характеристик, фундаментальное решение, численный метод интерполяции.

ВВЕДЕНИЕ

Прямые и обратные задачи теории упругости были впервые поставлены и исследованы в спектральной и динамической постановках А.С. Алексеевым [1, 2], А.С. Благовещенским [3]. В данной статье мы рассмотрим прямую задачу Лэмба в постановке, изученной ранее Б.Г. Михайленко [4, 5]. Прямая задача рассматривается в предположении линейной зависимости скоростей.

Основная идея работы заключается в построении решения прямой задачи с импульсным источником, сосредоточенным на поверхности Земли. Известно, что решение такой задачи имеет разрывы первого рода на характеристиках.

© 2014 Кабанихин С.И., Криворотко О.И., Бобоев К.С., Зятьков Н.Ю..

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00773) и Министерством образования и науки Российской Федерации.

Поступила 15 мая 2014 г., опубликована 25 декабря 2014 г.

Это обстоятельство существенно осложняет построение численных алгоритмов в силу потери гладкости решения на линиях разрыва. В данной работе мы используем разложение решения прямой задачи на сумму гладких и разрывных компонент. Этот подход позволяет, с одной стороны, вычислить амплитуды распространяющихся разрывов, а с другой стороны, построить новую систему уравнений для гладких частей, что позволяет применить схемы более высокого порядка точности.

В разделе 1 приведена постановка прямой задачи теории упругости. В разделе 2 описано построение фундаментального решения прямой задачи в предположении линейной зависимости скоростей. В разделе 3 приведена постановка обратной задачи теории упругости. В разделе 4 с помощью метода характеристик прямая задача сведена к задаче с постоянными коэффициентами перед частными производными. И в разделе 5 представлены результаты численных расчетов прямой задачи теории упругости.

1. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим неоднородное полупространство $x_3 \geq 0$, характеристики которого являются функциями глубины ($\rho = \rho(x_3) > 0$, $\lambda = \lambda(x_3) > 0$, $\mu = \mu(x_3) > 0$). Предположим, что на границе $x_3 = 0$ приложено воздействие вида $F(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})\delta(t)$, $F(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ – достаточно гладкая финитная функция. В этом случае граничное условие на свободной поверхности имеет вид

$$\sigma_{33}|_{x_3=0} = -F(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})\delta(t), \quad \sigma_{13}|_{x_3=0} = \sigma_{23}|_{x_3=0} = 0. \quad (1.1)$$

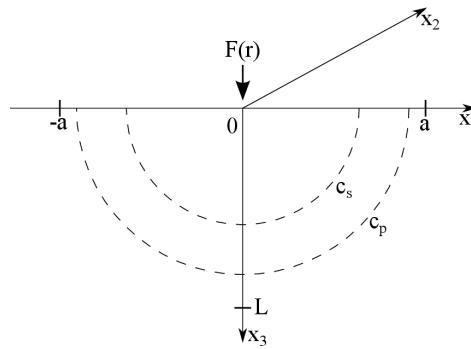


Рис. 1.1. Схематическая иллюстрация упругого полупространства $x_3 > 0$.

Известно [7], что колебания полупространства без внешних сил могут быть описаны системой уравнений

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}, & i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} = C \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, & x_3 > 0, (x_1, x_2) \in R^2, \end{cases} \quad (1.2)$$

с начальными условиями

$$(v, \sigma)|_{t<0} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $v = (v_1, v_2, v_3)^T$, $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$, $i = 1, 2, 3$, $(u_1, u_2, u_3)^T$ – вектор смещений в точке $x \in R^3$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ – тензор напряжений, $i, j = 1, 2, 3$. Система (1.2) состоит из девяти уравнений, последние шесть из которых получены с помощью дифференцирования закона Гука $\sigma = C\varepsilon$ по времени. Здесь $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6)^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6)^T$,

$$\varepsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, i = 1, 2, 3, \varepsilon_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \varepsilon_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \varepsilon_6 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right),$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad C_{11_{ij}} = \begin{cases} \lambda + 2\mu, & i = j; \\ \lambda, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$C_{12} = C_{21} = O_3, \quad C_{22} = \text{diag}(\mu, \mu, \mu).$$

В работе построен алгоритм численного решения задачи (1.2)-(1.3) с начальными условиями (1.1). Полученное численное решение является фундаментальным решением задачи (1.2) в следующем смысле: решение задачи (1.1)-(1.3) с произвольным источником $g(t)$ (это решение мы будем обозначать v_g и σ_g)

$$\sigma_{33}|_{x_3=0} = -F(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})g(t) \quad (1.4)$$

может быть получено по формуле (* – свёртка)

$$v_g = v * g, \quad \sigma_g = \sigma * g. \quad (1.5)$$

2. ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Перепишем систему (1.1)-(1.3) в цилиндрических координатах (r, θ, x_3) , $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \in (0, a)$, учитывая, что воздействие $F(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ обладает осевой симметрией. Параметр a выбирается из условия, что волновое поле при $t \in [0, T]$ не достигает боковой границы цилиндра (r, x_3) , т.е. если $x_3 \in (0, L)$, то $a > L$, $L = c_1 T$, c_1 – продольная (первичная) волна. Компоненты тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{33} , τ_{r3} , а также вертикальная и тангенциальная компоненты скорости смещений u по оси r и w по оси x_3 определяются как решение системы уравнений

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{r3}}{\partial x_3}, & \rho \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{r3}}{\partial x_3} + \frac{\tau_{r3}}{r} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} = \lambda \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial x_3} \right] + 2\mu \frac{\partial w}{\partial x_3}, & \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t} = \lambda \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial x_3} \right] + 2\mu \frac{u}{r}, \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} = \lambda \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial x_3} \right] + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, & \frac{\partial \tau_{r3}}{\partial t} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial r} \right], \end{cases} \quad (2.1)$$

с нулевыми начальными условиями

$$\begin{aligned} u_{33}|_{t<0} &= 0, & w|_{t<0} &= 0, & \sigma_{33}|_{t<0} &= 0, \\ \sigma_{rr}|_{t<0} &= 0, & \sigma_{\theta\theta}|_{t<0} &= 0, & \tau_{r3}|_{t<0} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

и граничными условиями (1.1).

Решения прямой задачи (2.1)-(2.2) можно найти, следуя методу А.С. Алексеева и Б.Г. Михайленко [4], в виде следующих комбинаций рядов Дини и Фурье-Бесселя:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, a) S(x_3, t, \bar{k}_m) J_1(\bar{k}_m, r), \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, a) R(x_3, t, \bar{k}_m) J_0(\bar{k}_m, r), \\ \sigma_{33} &= \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, a) Q_1(x_3, t, \bar{k}_m) J_0(\bar{k}_m, r), \quad \tau_{r3} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, a) Q_2(x_3, t, \bar{k}_m) J_1(\bar{k}_m, r), \\ \sigma_{rr} &= \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, a) [Q_4(x_3, t, \bar{k}_m) + \bar{k}_m Q_3(x_3, t, \bar{k}_m)] J_0(\bar{k}_m, r), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, a) [Q_4(x_3, t, \bar{k}_m) J_0(\bar{k}_m, r) + r^{-1} Q_3(x_3, t, \bar{k}_m)] J_1(\bar{k}_m, r), \end{aligned}$$

где $\omega(m, a) = [a J_0(\bar{k}_m, a)]^{-2}$, $r \in (0, a)$, \bar{k}_m — корни уравнения Бесселя $J_1(\bar{k}_m, a) = 0$, параметр $a \in R_+$ выбран настолько большим, что рассматриваемое волновое поле при $t \in [0, T]$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{r=a} &= \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial r} \Big|_{r=a} = \tau_{r3}|_{r=a} = 0, \\ \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} &= 0, \quad \left\{ \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \right] \right\} \Big|_{r=a} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В силу финитности $F(r)$ и гиперболичности системы (2.1) такое a существует и зависит от размера носителя функции F и рассматриваемого интервала времени T .

Подставляя полученные ряды в (2.1), получим для каждого фиксированного m систему

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} + \bar{k}_m Q_2, & \rho \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial Q_2}{\partial x_3} - \bar{k}_m Q_4 - \bar{k}_m^2 Q_3, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial R}{\partial x_3} + \lambda \bar{k}_m S, & \frac{\partial Q_2}{\partial t} = \mu \frac{\partial S}{\partial x_3} + \mu \bar{k}_m R, \\ \frac{\partial Q_3}{\partial x_3} = 2\mu S, & \frac{\partial Q_4}{\partial x_3} = \lambda \frac{\partial R}{\partial x_3} + \lambda \bar{k}_m S, \end{cases} \quad (2.4)$$

с начальными данными и граничными условиями

$$\begin{aligned} S|_{t<0} &= 0, \quad R|_{t<0} = 0, \quad Q_j|_{t<0} = 0, \quad j = \overline{1, 4}, \\ Q_1|_{z=0} &= F_m \delta(t), \quad Q_2|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь в обозначениях $R, S, Q_j, \overline{1, 4}$ не указана для краткости зависимость от \bar{k}_m, F_m — соответствующие коэффициенты Фурье функции $F(r)$.

Для приведения системы (2.4) к каноническому виду определим новые функции

$$(2.6) \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \alpha = \frac{c_2}{c_1}$$

и выберем следующие римановы инварианты

$$\begin{aligned} \Phi_{(j)} &= R + (-1)^{j+1} Q_1 (\rho c_1)^{-1}, \quad j = 1, 2, \\ \Phi_{(j)} &= S + (-1)^{j+1} Q_2 (\rho c_2)^{-1}, \quad j = 3, 4, \\ \Phi_{(5)} &= Q_3, \quad \Phi_{(6)} = Q_4 - (1 - 2a^2) Q_1. \end{aligned}$$

Тогда систему (2.4) можно переписать в виде

$$\left(I_6 \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{K} \frac{\partial}{\partial z} + \tilde{A} \right) \Phi = 0, \quad (2.7)$$

где $\Phi = (\Phi_{(1)}, \Phi_{(2)}, \dots, \Phi_{(6)})$, $\tilde{K} = \text{diag}(-c_1, c_1, -c_2, c_2, 0, 0)$ матрица \tilde{A} определяется равенствами

$$\begin{aligned} (A\Phi)_{(j)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} [(\rho c_1)^{-1}] \rho c_1^2 (\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)}) - \frac{1}{2} \bar{k}_m c_2 (\Phi_{(3)} - \Phi_{(4)}) + \\ &\quad + (-1)^j \bar{k}_m c_1^{-2} (c_1^2 - 2c_2^2) (\Phi_{(3)} + \Phi_{(4)}), \quad j = 1, 2, \\ (A\Phi)_{(j)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} [(\rho c_2)^{-1}] \rho c_2^2 (\Phi_{(3)} - \Phi_{(4)}) + \rho^{-1} \bar{k}_m^2 (\Phi_{(5)} + \Phi_{(6)}) + \\ &\quad + (-1)^{j+1} \frac{1}{2} \bar{k}_m c_2 (\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)}) + \frac{1}{2} \bar{k}_m \rho c_1 (1 + 2\alpha^2) (\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)}), \quad j = 3, 4, \\ (A\Phi)_{(5)} &= -\rho c_2^2 (\Phi_{(3)} + \Phi_{(4)}), \quad (A\Phi)_{(6)} = -\rho c_2^2 (1 - 2\alpha^2) \bar{k}_m (\Phi_{(3)} + \Phi_{(4)}). \end{aligned}$$

В прямой задаче при каждом натуральном m и заданных функциях ρ, c_1, c_2 требуется определить Φ — решение системы (2.7), удовлетворяющее начальным

$$\Phi_{(j)}|_{t<0} = 0, \quad j = \overline{1, 6} \quad (2.8)$$

и граничным условиям

$$\frac{1}{2} \rho c_1 (\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)})|_{x_3=0} = F_m \delta(t), \quad (\Phi_{(3)} - \Phi_{(4)})|_{x_3=0} = 0. \quad (2.9)$$

3. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Обратную задачу будем исследовать в предположении, что скорости c_1 и c_2 линейно зависят, т.е.

$$c_1 = c(z), \quad c_2 = \alpha c(z), \quad (3.1)$$

причем постоянная α удовлетворяет условию

$$\alpha \in \left(0, \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1 \right). \quad (3.2)$$

Сформулируем обратную задачу. Пусть m — фиксированное натуральное число и относительно решения прямой задачи (2.7)-(2.9) известна дополнительная информация

$$\begin{aligned} (\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)})|_{x_3=0} &= f_{(1)}(t), \\ (\Phi_{(3)} - \Phi_{(4)})|_{x_3=0} &= f_{(2)}(t), \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Требуется определить из соотношений (2.7)-(2.9), (3.3) по заданным F_m , $f_{(1)}(t)$, $f_{(2)}(t)$ положительные функции $\rho(x_3)$, $c_1(x_3)$, $c_2(x_3)$, дополнительно удовлетворяющие условиям (3.1), (3.2).

4. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

Введем новую переменную

$$x = \int_0^{x_3} \frac{d\xi}{c(\xi)}$$

и, чтобы не вводить новых обозначений, оставим их прежними для всех рассматриваемых функций. Тогда прямую задачу (2.4)-(2.5) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \left(I_6 \frac{\partial}{\partial t} + K \frac{\partial}{\partial x} + A \right) \Phi = 0, & x \in R_+, \quad t \in (0, T), \\ \Phi_{(j)}|_{t<0} = 0, \quad j = \overline{1, 6}, \\ (\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)})|_{x=0} = -\beta \delta(t), \quad (\Phi_{(3)} - \Phi_{(4)})|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь $\beta = -F_m[\rho(+0)c(+0)]^{-1}$, $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_6)$, $k_1 = -k_2 = -1$, $k_3 = -k_4 = -\alpha$, $k_5 = k_6 = 0$,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \sigma' A_1 & A_2 & O_2 \\ -A_2^* & \alpha \sigma' A_1 & A_3 \\ O_2 & A_4 & O_2 \end{pmatrix}, \\ A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = -\bar{k}_m c \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = 2\bar{k}_m c e^{-\sigma} \begin{pmatrix} \bar{k}_m & 1 \\ \bar{k}_m & 1 \end{pmatrix}, \\ B_j &= \alpha - (-1)^j(1 - 2\alpha^2), \quad j = 1, 2; \quad \sigma(x) = \ln[\rho(x)c(x)], \\ A_4 &= -2\alpha^2 c e^\sigma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \bar{k}_m(1 - 2\alpha^2) & \bar{k}_m(1 - 2\alpha^2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Решение прямой задачи (4.1) рассмотрим в области

$$\Delta_4(T) = \{(x, t) : x \in (0, T), x < t < 2T - x\}, \quad T \in R_+.$$

Интегрируем каждое из уравнений системы из (4.1) вдоль соответствующей характеристики $\frac{dx}{dt} = k_j$, $j = \overline{1, 6}$,

$$\Phi_{(j)}(x, t) = \Phi_{(j)}(x_j, t_j) - \int_{t_j}^t (A\Phi)_{(j)}(x - k_j(t - \tau), \tau) d\tau, \quad j = \overline{1, 6}, \quad (x, t) \in \Delta_4(T).$$

Здесь (x_j, t_j) — точка пересечения характеристики $\frac{dx}{dt} = k_j$, выпущенной «вниз» из точки $(x, t) \in \Delta_4(T)$ с границей области $\Delta_4(T)$.

Лемма. Пусть элементы матрицы A принадлежат классу $C^1[0, T]$. Тогда компонента $\Phi_{(2)}$ решения задачи (4.1) имеет вид

$$\Phi_{(2)}(x, t) = S(t)\delta(t - x) + \tilde{\Phi}_{(2)}(x, t), \quad (x, t) \in \Delta_4(T),$$

где функция $\tilde{\Phi}_{(2)}$ непрерывна в $\overline{\Delta_4(T)}$, а $S(t)$ есть решение интегрального уравнения

$$S(t) = \beta + \frac{1}{2} \int_0^t \psi(\xi) S(\xi) d\xi, \quad t \in (0, T).$$

Здесь $\psi(x) = \sigma'(x)$.

Теорема [6]. В предположении $A(x) \in C^1[0, T]$ задача (4.1) сводится к

$$\left(I_6 \frac{\partial}{\partial t} + K \frac{\partial}{\partial x} + A \right) \Phi = 0, \quad (x, t) \in \Delta_4(T), \quad x \neq \alpha t, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & (\Phi_{(j)} - \Phi_{(j+1)})|_{x=0} = 0, \quad j = 1, 3, \quad x \in (0, T); \\ & \Phi_{(1)}|_{x=t} = \gamma_1 \psi(t) S(t), \quad \Phi_{(3)}|_{x=t} = \gamma_3 c(t) S(t), \\ & \Phi_{(4)}|_{x=t} = \gamma_4 c(t) S(t), \quad \Phi_{(j)}|_{x=t} = 0, \quad j = 5, 6; \quad x \in (0, T); \\ & [\Phi_{(4)}]|_{x=\alpha t} = S_1(t), \quad t \in (0, \frac{1+\alpha}{2}T). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь последнее условие означает, что $\Phi_{(4)}$ при переходе через прямую $x = \alpha t$ имеет скачок первого рода:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_3 = \frac{\bar{k}_m B_2}{1 + \alpha}, \quad \gamma_4 = \frac{\bar{k}_m B_1}{1 - \alpha}, \quad \gamma_5 = \gamma_3 - \gamma_4, \quad S_{(1)}(t) = \gamma_5 e^{\frac{\alpha}{2} \int_0^t \psi(\xi) d\xi}.$$

5. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В данном разделе описаны результаты некоторых численных экспериментов фундаментального решения системы (4.2)-(4.3) для констант $\alpha = \frac{1}{3}$ и $m = 2$.

Определим две равномерные сетки $\omega_h = \{(x_i, t^k) : x_i = ih, t^k = kh\}$, $i, k = 0, \bar{N}$, $h = L/N$ и $\omega_{h,\alpha} = \{(x_j, t^k) : x_j = j\alpha h, t^k = kh\}$, $j = 0, \bar{N}_\alpha$, $N_\alpha = N/\alpha$ в области $\Delta_4(T)$. Система уравнений (4.2) дискретизуется следующим образом:

$$\begin{cases} \Phi_{(1)_i}^{k+1} = \Phi_{(1)_{i+1}}^k - h(A\Phi)_{(1)_i}^k, \quad \Phi_{(2)_i}^{k+1} = \Phi_{(2)_{i-1}}^k + h(A\Phi)_{(2)_i}^k, & (x_i, t^k) \in \omega_h, \\ \Phi_{(3)_i}^{k+1} = \Phi_{(3)_{i+1}}^k + h(A\Phi)_{(3)_i}^k, \quad \Phi_{(4)_i}^{k+1} = \Phi_{(4)_{i-1}}^k + h(A\Phi)_{(4)_i}^k, & (x_i, t^k) \in \omega_{h,\alpha}, \\ \Phi_{(5)_i}^{k+1} = \Phi_{(5)_i}^k + h(A\Phi)_{(5)_i}^k, \quad \Phi_{(6)_i}^{k+1} = \Phi_{(6)_i}^k + h(A\Phi)_{(6)_i}^k, & (x_i, t^k) \in \omega_h, \end{cases} \quad (5.1)$$

с начальными и граничными условиями (4.3)

$$\begin{aligned} & \Phi_{(1)_0}^k = \Phi_{(2)_0}^k, \quad \Phi_{(3)_0}^k = \Phi_{(4)_0}^k, \quad \Phi_{(4)_0}^0 = S_{(1)}^0, \\ & \Phi_{(1)_k}^k = \gamma_1 (\sigma')^k S^k, \quad \Phi_{(3)_k}^k = \gamma_3 c^k S^k, \quad \Phi_{(4)_k}^k = \gamma_4 c^k S^k, \quad \Phi_{(5)_k}^k = \Phi_{(6)_k}^k = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

На Рисунке 5.1 а) показана схема расчёта $k + 1$ -го по времени уровня дискретной сетки, зная k -ый, всех компонент фундаментального решения Φ . На Рисунке 5.1 б) показано фундаментальное решение Φ задачи (4.2)-(4.3) с постоянными параметрами упругости среды λ , μ и плотности ρ .

В численных расчетах для $T = 11$ и $m = 2$ начально-краевая задача (4.2)-(4.3) была решена для различных параметров среды $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$ и $\rho(x_3)$. На Рисунке 5.2 (сверху-слева) приведены графики параметров упругости для трехслойной среды. В качестве источника была рассмотрена функция $g(t)$, изображенная на Рисунке 5.2 (сверху-справа). Результаты численных расчётов скоростей \tilde{v}_3 , \tilde{v}_r полученные посредством (5.1)-(5.2) и v_{g_3} , v_{g_r} из (1.5), показаны на Рисунке 5.2 внизу.

В силу того, что продольные и поперечные волны отражаются от двух границ (разделов трех сред), на графике 5.2 (справа снизу) сложно определить время прихода той или иной сейсмической волны. Для определения откликов функций v_{g_3} и v_{g_r} от третьего слоя заданной среды, решим задачу (5.1)-(5.2)

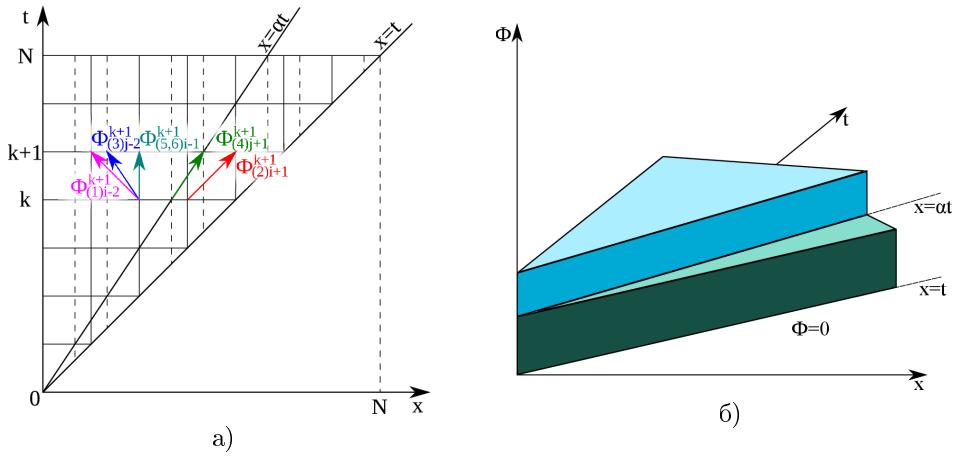


Рис. 5.1. а) Схематическое изображение дискретной схемы (5.1). б) Схематическое представление структуры фундаментального решения Φ .

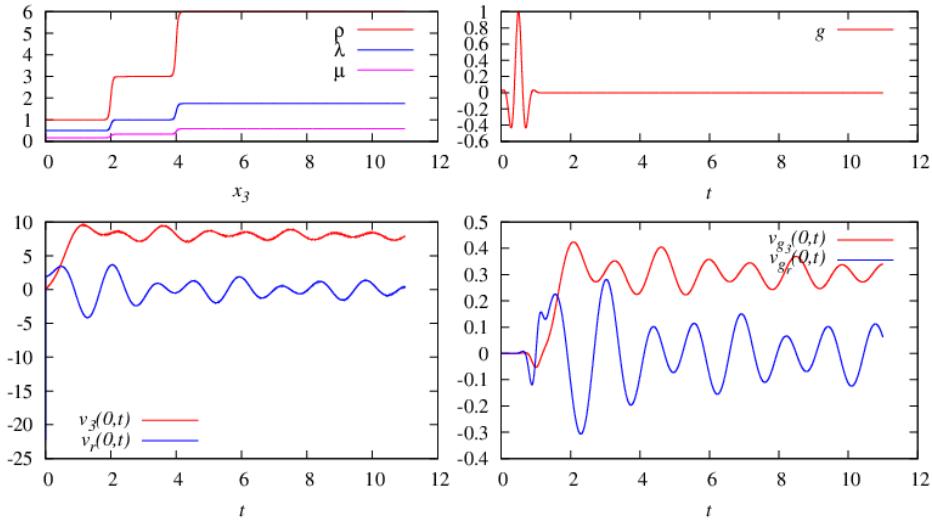


Рис. 5.2. Функции параметров упругости $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$ и плотности $\rho(x_3)$ (сверху-слева); функция источника $g(t)$ (сверху-справа); фундаментальные скорости Фурье \tilde{v}_3 и \tilde{v}_r для $m = 2$ (снизу-слева); скорости Фурье v_{g_3} и v_{g_r} из (1.5) (снизу-справа).

для двухслойной среды. Вычислив разность полученных скоростей v_{g_3} и v_{g_r} для трехслойной и двухслойной сред, получим распределение скоростей, отраженных от третьего слоя.

На Рисунке 5.3 (сверху-слева) приведены графики параметров упругости для двухслойной среды. В качестве источника была рассмотрена функция $g(t)$, изображенная на Рисунке 5.3 (сверху-справа). Результаты численных расчётов

скоростей \tilde{v}_3, \tilde{v}_r полученные посредством (5.1)-(5.2) и v_{g_3}, v_{g_r} из (1.5), показаны на Рисунке 5.3 внизу.

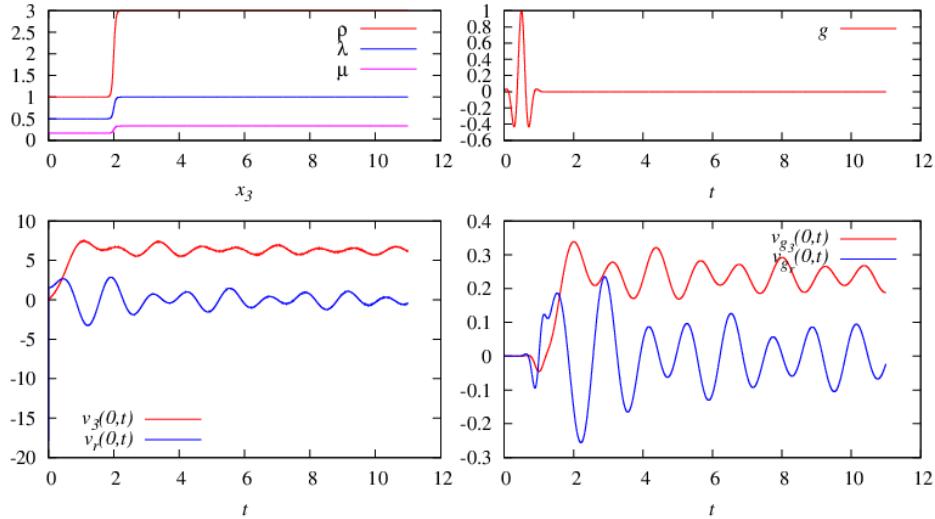


Рис. 5.3. Функции параметров упругости $\lambda(x_3), \mu(x_3)$ и плотности $\rho(x_3)$ (сверху-слева); функция источника $g(t)$ (сверху-справа); фундаментальные скорости Фурье \tilde{v}_3 и \tilde{v}_r для $m = 2$ (снизу-слева); скорости Фурье v_{g_3} и v_{g_r} из (1.5) (снизу-справа).

На Рисунке 5.4 изображен результат разности двух скоростей v_{g_3} и v_{g_r} , вычисленных для трехслойной (см. Рисунок 5.2) и двухслойной (см. Рисунок 5.3) сред, характеризующий отклик функций v_{g_3} и v_{g_r} от третьего слоя. При заданных параметрах среды нетрудно вычислить фактическое время прихода отраженной от третьего слоя волны:

$$t_1^{(3)} = 2 \left(\frac{x_3^{(1)}}{c_1^{(1)}} + \frac{x_3^{(2)} - x_3^{(1)}}{c_1^{(2)}} \right) \approx 9,75.$$

Здесь $x_3^{(i)}$ – глубина i -го слоя, $c_1^{(i)}$ – продольная скорость распространения волн в i -м слое, определенная по формуле (2.6), $i = 1, 2$.

Для определения откликов функций v_{g_3} и v_{g_r} теперь от второго слоя заданной среды, решим задачу (5.1)-(5.2) для однослоиной среды. На Рисунке 5.5 (сверху-слева) приведены графики параметров упругости для однослоиной среды. В качестве источника была рассмотрена функция $g(t)$, изображенная на Рисунке 5.5 (сверху-справа). Результаты численных расчётов скоростей \tilde{v}_3, \tilde{v}_r полученные посредством (5.1)-(5.2) и v_{g_3}, v_{g_r} из (1.5), показаны на Рисунке 5.5 внизу.

На Рисунке 5.6 изображен результат разности двух скоростей v_{g_3} и v_{g_r} , вычисленных для двухслойной (см. Рисунок 5.3) и однослоиной (см. Рисунок 5.5) сред, характеризующий отклик функций v_{g_3} и v_{g_r} от второго слоя.

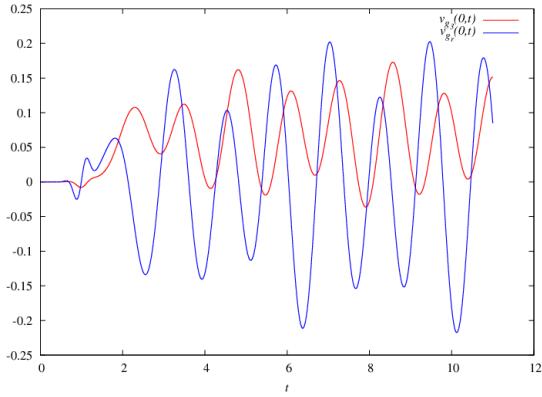


Рис. 5.4. График функций v_{g_3} и v_{g_r} , являющихся разностями соответствующих функций скорости, вычисленных для трехслойной и двухслойной сред.

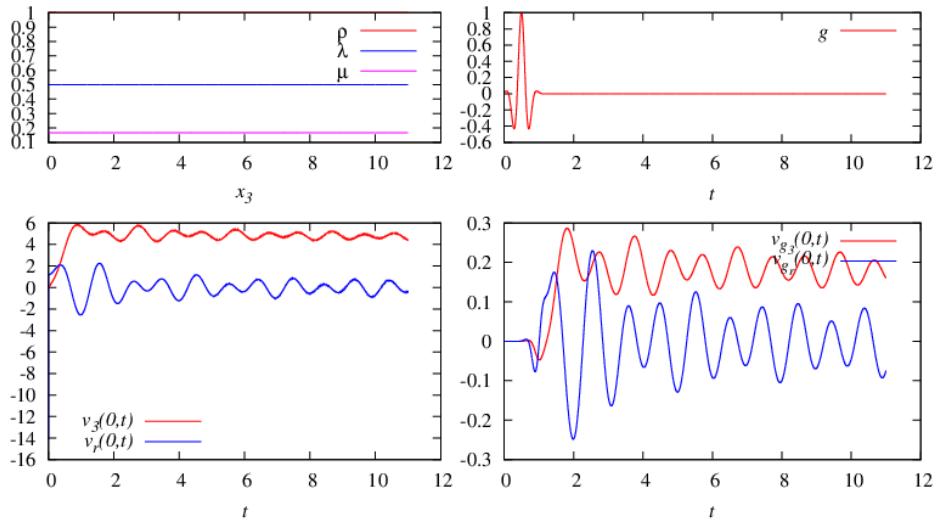


Рис. 5.5. Функции параметров упругости $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$ и плотности $\rho(x_3)$ (сверху-слева); функция источника $g(t)$ (сверху-справа); фундаментальные скорости Фурье \tilde{v}_3 и \tilde{v}_r для $m = 2$ (снизу-слева); скорости Фурье v_{g_3} и v_{g_r} из (1.5) (снизу-справа).

Отметим, что фактическое время прихода отраженной от второго слоя волны можно вычислить аналогичным вышеописанному способом:

$$t_1^{(2)} = 2 \frac{x_3^{(1)}}{c_1^{(1)}}, \quad t_2^{(2)} = 2 \frac{x_3^{(1)}}{c_2^{(1)}}.$$

Здесь $c_2^{(1)}$ – поперечная скорость распространения волн в первом слое. Для заданных параметров среды времена прихода отраженных от второго слоя волн

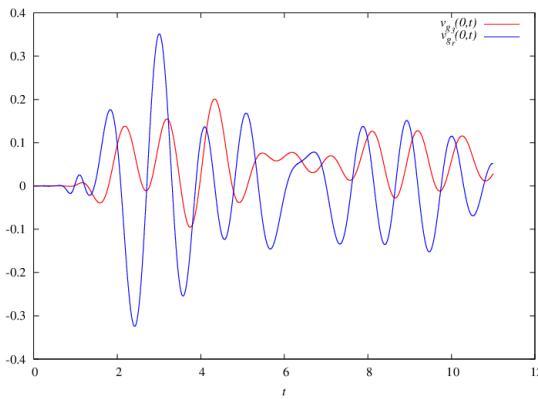


Рис. 5.6. График функций v_{g_3} и v_{g_r} , являющихся разностями соответствующих функций скорости, вычисленных для двухслойной и однослоиной сред.

$t_1^{(2)} = 3.38$, $t_1^{(2)} = 8.76$ и $t_2^{(2)} = 9.8$ совпадают с результатами численных расчетов (см. Рисунок 5.6). Отметим, что наиболее сильный отклик приходится на первую отраженную продольную волну, более слабые – на вторую продольную и первую поперечные отраженные от второго слоя волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.С. Алексеев, *Некоторые обратные задачи теории распространения волн*, Известия АН СССР. Серия геофизика, № 11, С. 1514-1531, 1962.
- [2] А.С. Алексеев, *Обратные динамические задачи сейсмики*, В кн.: Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных, Москва: Наука, С. 9-84, 1967.
- [3] А.С. Благовещенский, *Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн*, Труды Ленинградского университета, Выпуск 1, С. 68-81, 1966.
- [4] А.С. Алексеев, Б.Г. Михайленко, *Метод вычисления теоретических сейсмограмм для сложно построенных моделей сред*, Доклады АН СССР, **35**, № 3, С. 46-49, 1977.
- [5] Б.Г. Михайленко, *Метод решения динамических задач сейсмики для двумерно-неоднородных моделей сред*, Доклады АН СССР, **246**, № 1, С. 47-51, 1979.
- [6] С.И. Кабанихин, *Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений*, Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988.
- [7] М.Н. Sadd, *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*, New York: Elasticity: Theory, Applications, and Numerics, 2005.

СЕРГЕЙ ИГОРЕВИЧ КАБАНИХИН

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

пр-т Лаврентьева 6,

Новосибирский государственный университет,

ул. Пирогова 2,

630090, Новосибирск, Россия

E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

Кодир Сабурович Бобоев

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

пр-т Лаврентьева 6,

630090, Новосибирск, Россия

E-mail address: boboev@mail.ru

Ольга Игоревна Криворотько, Николай Юрьевич Зятьков
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru, nikolay.zyatkov@gmail.com

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.115–С.120 (2014)

УДК 519.633.2

MSC 13A99

FAST ALGORITHM FOR CALCULATION OF THE MOVING TSUNAMI WAVE HEIGHT

O.I. KRIVOROTKO

ABSTRACT. One of the most urgent problems of mathematical tsunami modeling is estimation of a tsunami wave height while a wave approaches to the coastal zone. There are two methods for solving this problem, namely, Airy-Green formula in one-dimensional case

$$S^{(l)}(x) = S^{(l)}(0) \cdot \sqrt[4]{H(0)/H(x)},$$

and numerical solution of an initial-boundary value problem for linear shallow water equations (LSWE) that depends on three variables. The main difficulty problem of tsunami modeling is a very big size of the computational domain. The calculation of the solution of LSWE (the function of three variables) in this domain requires large computing resources. We construct a new algorithm to solve numerically the problem of determining the moving tsunami wave height for linear source which is based on kinematic-type approach and analytical representation of fundamental solution of LSWE. We get the expression of the moving tsunami wave height for the point source and demonstrate connections between tsunami amplitude for point, linear and arbitrary sources.

Keywords: shallow water equations, eikonal equation, tsunami wave height, finite-difference scheme.

1. PROBLEM STATEMENT

The recent severe tsunamis in Japan (2011), Sumatra (2004), and at the Indian coast (2004) showed that a system producing exact and immediate information about tsunamis is of vital importance. Mathematical modeling and numerical simulations are most used instruments for providing such an information. Most suitable

© 2014 O.I. Krivorotko.

This work is partially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation.

Поступила 15 мая 2014 г., опубликована 25 декабря 2014 г.

physical models related to simulation of tsunamis are based on linear shallow water equations:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\eta := \eta_{tt} - \operatorname{div}(gH(x, y)\operatorname{grad} \eta) = 0, & t > 0; \\ \eta|_{t=0} = q(x, y), \quad \eta_t|_{t=0} = 0, & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Here $\Omega := (0, L_x) \times (0, L_y)$ is a rectangle domain, $\eta(x, y, t)$ is the free surface, $H(x, y) > 0$ is a known function describing the bottom relief (bathymetry), $q(x, y)$ is an initial tsunami perturbation in Ω , $g = 9.8 \text{ [m/s}^2]$ is the acceleration of gravity.

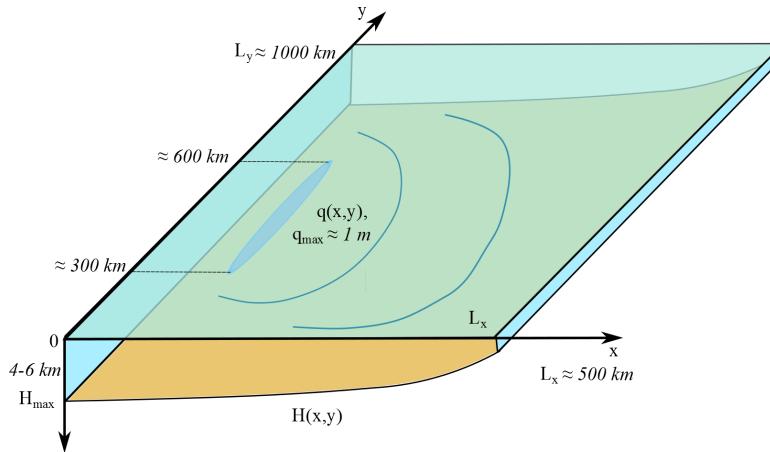


Рис. 1.1. Illustration of the calculation domain Ω .

Simulation of tsunami wave propagation on such scales (see Figure 1.1) is not an easy calculation task [1].

Proposed numerical algorithm makes it possible to calculate the front amplitude of a wave coming to a given point and the wave arrival time by solving this problem **not in the entire domain Ω** , but only on a selected characteristic surface.

The paper is organized as follows. In Section 2 the Cauchy problem for determining of moving tsunami wave height is derived in case of linear tsunami source. Numerical experiments for linear source are described in Section 3. Obtained results correlate with well-known Airy-Green formula (see Section 4). In Section 5 using characteristics of hyperbolic equation we demonstrate the formula for tsunami wave height for point source. In the last Section 6 we show connections between moving tsunami wave height for point, linear and arbitrary sources.

2. LINEAR SOURCE

We consider the linear source $q(x, y) = h(y) \cdot \delta(x)$. Here $\delta(x)$ is a Dirac function and $h(y)$ is a sufficiently smooth function. Then problem (1.1) can be reduced to the following problem in a half-plane

$$\begin{cases} \mathcal{L}\eta = 0, & x > 0, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ \eta|_{t<0} = 0, \quad \eta_x|_{x=0} = h(y) \cdot \delta(t), & y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Here \mathbb{R} is a set of real numbers.

The main idea of calculation the moving tsunami wave height for problem (2.1) consists of the **change of variables** $z = \tau(x, y)$ [2]. Here $\tau(x, y)$ is a solution of Cauchy problem for eikonal equation

$$\begin{cases} \tau_x^2 + \tau_y^2 = (gH(x, y))^{-1}, & x > 0, y \in \mathbb{R}; \\ \tau(0, y) = 0, \tau_x(0, y) = (gH(0, y))^{-1/2}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Remark. We assume that maps $z = \tau(x, y)$ and $x = x(z, y)$ are mutually inverse and one-to-one, *i.e.* we exclude the appearance of caustics.

Then, with the change of variables $v(z, y, t) = \eta(x, y, t)$ and $b(z, y) = \sqrt{gH(x, y)}$ problem (2.1) can be rewritten as follows ($z, y > 0$):

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{zz} + b^2 v_{yy} + A_1 v_{zy} + A_2 v_z + A_3 v_y, & z > 0, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ v|_{t<0} = 0, \quad v_z|_{z=0} = g(y)\delta(t), & y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.3)$$

$$A_1 = 2b^2\tau_y, \quad A_2 = b^2(\tau_{xx} + \tau_{yy}) + 2\left(\frac{b_z}{b} + bb_y\tau_y\right), \quad A_3 = 2b(b_z\tau_y + b_y), \quad g(y) = h(y)\left(b^{-2}(0, y) - \tau_y^2(0, y)\right)^{-1/2}.$$

The coefficients of derivatives v_{tt} and v_{zz} in problem (2.3) are equal to unity that allows us to represent the solution of problem (2.3) as follows [3]:

$$v(z, y, t) = S^{(l)}(z, y) \cdot \theta(t - z) + \tilde{v}(z, y, t). \quad (2.4)$$

Here $\tilde{v}(z, y, t)$ is a smooth function, $\theta(t - z)$ is a Heaviside step function.

Substituting representation (2.4) in system (2.3) and equating the coefficients at $\delta(t - z)$, we obtain a Cauchy problem for wave amplitude $S^{(l)}(z, y)$:

$$\begin{cases} S_z^{(l)} + \frac{A_1}{2}S_y^{(l)} + \frac{A_2}{2}S^{(l)} = 0, & z > 0, y \in \mathbb{R}; \\ S^{(l)}(0, y) = g(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.5)$$

The main benefit of above algorithm consists of reducing of the problem (1.1) to the problem (2.5) of determining the function $S^{(l)}(z, y)$ of two variables.

3. NUMERICAL EXPERIMENTS

In numerical calculations we use 1:10000 m scale. We put $L_x = 50$ km and $L_y = 100$ km. The initial wave amplitude is equal to 1 m. The grid size is equal to 500×300 points. We solve the Cauchy problem (2.2) for artificial bathymetry (Fig. 3.1a) using a method of characteristics [4, 5, 11, 12, 13, 14] and the Cauchy problem (2.5) using an explicit finite-difference scheme of the second order approximation [6, 7] (Fig. 3.1b).

Our algorithm allows one to compute an initial wave amplitude using measured data at moment T .

Our algorithm is **30 times faster** than solving complete shallow water equations.

We plan to apply above algorithm for real bathymetry using databases collected by non-profit organization WAPMERR (World Agency of Planetary Monitoring and Earthquake Risk Reduction) in modern GIS technology ITRIS (Integrated Tsunami Research and Information System) [9, 10, 6]. WAPMERR has a historical database of alleged tsunami sources around the world which is based on the information about seaquakes, a database of observations of the tsunami waves in coastal areas and bathymetry data.

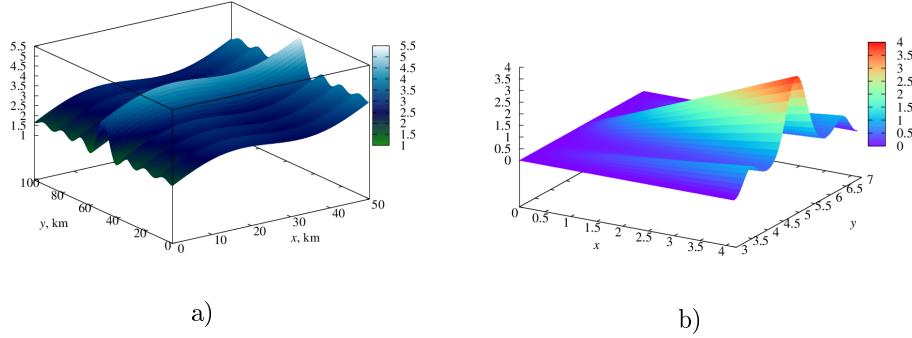


Рис. 3.1. a) The bathymetry $H(x, y)$. All dimensions are in kilometers. b) The wave amplitude $S^{(l)}(x, y)$ (values are in meters).

4. AIRY-GREEN FORMULA

If all functions in Cauchy problem (2.5) does not depend on the variable y (one-dimensional case), then the problem (2.5) has a following solution [8]:

$$S^{(l)}(z) = S^{(l)}(0) \cdot \sqrt[4]{H(0)/H(z)}. \quad (4.1)$$

The expression (4.1) for the moving tsunami wave height is consistent with the well-known Airy-Green formula: **the wave amplitude $S^{(l)}$ increases as a depth of the bottom H decreases.**

5. POINT SOURCE

Consider the Cauchy problem with a point source in (x_0, y_0)

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = \delta(x - x_0, y - y_0)\delta(t), & t \in \mathbb{R}; \\ w|_{t<0} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (5.1)$$

Remark. Solutions of problems (1.1) and (5.1) are connected as follows ($\xi_1^0 = \xi_1 + x_0$, $\xi_2^0 = \xi_2 + y_0$):

$$\eta(x, y, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} w_t(x - \xi_1, y - \xi_2, t) q(\xi_1^0, \xi_2^0) d\xi_1 d\xi_2.$$

It is known [4], that solution w of problem (5.1) can be represented as follows:

$$w(x, y, t) = \frac{S^{(p)}(x, y)}{\sqrt{t^2 - \tau^2(x, y)}} \theta(t) \theta(t^2 - \tau^2(x, y)) + \tilde{w}(x, y, t).$$

Here $\tau(x, y)$ is a solution of eikonal equation (2.2) with condition $\tau(x, y) = O(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ (here $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$), and the wave amplitude $S^{(p)}(x, y)$ has the form:

$$S^{(p)}(x, y) = \frac{1}{\pi g H(x_0, y_0)} \frac{\sqrt{\tau(x, y)}}{\exp\{0.5gI(\tau(x, y))\}}, \quad (5.2)$$

where $I(\tau(x, y)) = \int_0^\tau ((H\xi_x)_x + (H\xi_y)_y) d\xi$.

We obtain the expression (5.2) for the moving tsunami wave height $S^{(p)}(x, y)$ for a point source using the Theorem from [4].

6. CONNECTIONS

Denote by $S(x, y)$ the moving tsunami wave height generated by an arbitrary source $q(x, y)$. Then the amplitudes $S(x, y)$, $S^{(l)}(x, y)$ and $S^{(p)}(x, y)$ for the arbitrary, linear and point sources, respectively, are connected as follows:

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} q(\xi, \zeta) S^{(p)}(\xi, \zeta) d\xi d\zeta, \\ S^{(l)}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} h(\zeta) S^{(p)}(x, \zeta) d\zeta, \\ S(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} p(\xi) S^{(l)}(\xi, y) d\xi, \quad q(x, y) = p(x)h(y). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Kabanikhin, A. Hasanov, I. Marinin, O. Krivorotko, D. Khidasheli, *A variational approach to reconstruction of an initial tsunami source perturbation*, Applied Numerical Mathematics, **83**, Pp. 22-37, 2014.
- [2] S.I. Kabanikhin, *Linear regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations*, Sobolev Institute of Mathematics. Preprint No. 27, 1988 (in Russian).
- [3] V.G. Romanov, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
- [4] V.G. Romanov, *Stability in Inverse Problems*, Moscow: Nauchniy Mir, 2005 (in Russian).
- [5] S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorotko, *Numerical solution of eikonal equation*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **10**, Pp. C28-C34, 2013 (in Russian).
- [6] S.I. Kabanikhin, I.V. Marinin, O.I. Krivorotko, A. Karas, D. Khidasheli, *3D modeling and visualization of seaquake-produced tsunami and run-up*, Abstracts of AOGS 10th Annual Meeting, Brisbane, Australia, June 24-28, 2013.
- [7] S.I. Kabanikhin, I.V. Marinin, O.I. Krivorotko, D. Khidasheli, *Gradient algorithm of tsunami source reconstruction*, Abstracts of Applied Inverse Problem Conference, Daejeon, Korea, July 1-5, 2013. Pp. 80-81.
- [8] S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorotko, *A numerical method for determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation*, Applied Computational Mathematics, **12**, Pp. 91-96, 2013.
- [9] S.I. Kabanikhin, I.V. Marinin, V. Komarov, O.I. Krivorotko, A. Karas, D. Khidasheli, *New methods of earthquakes and tsunami sources determining, simulation, modeling and visualization*, Abstracts of World forum «Natural cataclysm & global problems of the modern civilization» GEOCATACLYSM-2011, Istanbul, Turkey, September 19-21, 2011. Pp. 59-60.
- [10] A. Marchuk, I. Marinin, V. Komarov, O. Krivorotko, A. Karas, D. Khidasheli, *3D GIS integrated natural and man-made hazards research and information system*, Proceedings of The Joint International Conference on Human-Centered Computer Environments (HCCE) 2012, Aizu-Wakamatsu, Japan, March 8-13, 2012. Pp. 225-229.
- [11] Kabanikhin S.I., Scherzer O. and Shishlenin M.A. Iteration methods for solving a two-dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2003, Vol. 11 (1), pp. 87-109.
- [12] Kabanikhin S.I., Satybaev A.D., Shishlenin M.A. Direct methods of solving inverse hyperbolic problems. 2004. VSP/BRILL, the Netherlands.
- [13] Kabanikhin S.I. and Shishlenin M.A. Quasi-solution in inverse coefficient problems. // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. 16, 707-715.
- [14] S.I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, Berlin: Gruyter, 2011.

OLGA I. KRIVOROTKO
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
PIROGOVA STREET 2,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.121–С.131 (2014)

УДК 519.633.2

MSC 13A99

OPTIMIZATION APPROACH TO COMBINED INVERSE TSUNAMI PROBLEM

O.I. KRIVOROTKO

ABSTRACT. It is known that some of the parameters required for direct simulation of tsunamis are bottom relief characteristics and initial perturbation data (tsunami source). The most suitable physical models related to simulation of tsunamis are based on shallow water equations. We investigate two different inverse problems of determining the tsunami source using three different additional data: underwater measurements and satellite wave-form images. We investigate gradient-type inverse problem solution and show that using the combination of two different types of data allows one to increase stability and convergence of numerical inverse problem solution. Results of numerical experiments of the tsunami source reconstruction are presented and discuss.

Keywords: shallow water equations, Dirichlet problem, satellite data, DART data, conjugate gradient method, combined data.

1. INTRODUCTION

Tsunamis are gravitational *i.e.* gravity-controlled waves resulting from abrupt large-scale perturbations arising during seaquakes, underwater volcano eruptions, underwater landslides, rock fragment falls, underwater explosions, etc. More than 250 tsunamis were observed in the 20th century, and about 90 percent of all tsunamis are caused by seaquakes. Most suitable physical models related to simulation of these tsunamis are based on shallow water equations (see, [1, 2] and references therein). The bottom relief characteristics and initial perturbation data (tsunami source) are required for direct simulation of tsunamis. It is known that seismic data of the earthquake are connected with initial tsunami source [3]. Constructed

© 2014 O.I. Krivorotko.

This work is partially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation.

Поступила 15 мая 2014 г., опубликована 25 декабря 2014 г.

tsunami source by seismic data is a quite rough against its real analogue. To get more precise characteristics of tsunami wave near the shore we need to have sufficient good initial data about this event (tsunami source data, bottom topography), numerical method of high accuracy for solving the system of shallow water equations during the acceptable computational time. In the 20th century there exist to many numerical approach to solving the hyperbolic partial differential equations that describe the flow below a pressure surface in a fluid (shallow water equations) such as finite-difference approach, finite volume method, finite element method, *etc.* Hence we emphasize on refining of tsunami source obtained by seismic data. An overview of methodologies and techniques related to estimation of tsunami source characteristics is given in [4]. The most of them consists of determining the tsunami source by additional measurements of a passing wave (this problem are often called inverse tsunami problem) such as DART (Deep-ocean Assessment and Reporting of Tsunamis) buoys positioned on the ocean floor, tide gauges measurements, satellite wave-form images, *etc.* The main idea of this paper is an identification of tsunami source using a combination of two types of data about the passing wave: DART buoys and satellite wave-form image. We show that using a combination of different types of data allows one to increase the stability and efficiency of tsunami source reconstruction.

The paper is organized as follows. In Section 2 we describe a mathematical problem statement and discuss about its ill-posedness. In Section 3 we consider a variational formulation of the inverse tsunami problem for two measured data of passing wave: DART data (inverse problem 1) and satellite image data on the part of computational domain (inverse problem 2), and for combination of these data (combined inverse problem). In the final Section 4 we compare two inverse problem and their combination and show the benefits of combined data.

2. PROBLEM STATEMENT

The available observations show that tsunami waves are long ones (in comparison to the ocean depth). Therefore, shallow water theory, which describes sufficiently well a wide class of problems associated with long-wave processes is often used for hydrodynamic description of the waves [1, 2]. In this paper we consider the linear shallow water equations that describe the propagation of tsunami waves in the deep ocean (when nonlinear terms can be neglected).

The ocean domain being considered is bounded from above by the free surface $\eta(x, y, t)$, and from below, by the bottom relief $H(x, y) > 0$. We assume that the computational time period T is not long enough for the wave to reach the edges of the domain, and therefore we can set homogeneous boundary conditions at the boundary of the domain. In the Cartesian coordinate system, we formulate the initial boundary-value problem:

$$\begin{cases} \eta_{tt} = \operatorname{div}(gH(x, y)\operatorname{grad}\eta), & t > 0; \\ \eta|_{t=0} = q(x, y), \quad \eta_t|_{t=0} = 0, & (x, y) \in \Omega; \\ \eta|_{\partial\Omega} = 0 & \end{cases} \quad (2.1)$$

for the linear equations of shallow water theory in terms of the free surface without external forces, *e.g.* the Coriolis force and bottom friction. Here $\Omega := (0, L_x) \times (0, L_y)$ is a rectangle domain (see Figure 2.1), $\eta(x, y, t)$ defines the free water surface vertical displacement, $H \in H^1(\Omega)$ is a known function describing the bottom

relief (bathymetry), $q \in H^2(\Omega)$ is an initial tsunami perturbation in Ω with the compact support. Further, we will use $c(x, y) = \sqrt{gH(x, y)}$ that describes the tsunami propagation velocity according to the long-wave theory, $g = 9.8 [m/s^2]$ is the acceleration of gravity.

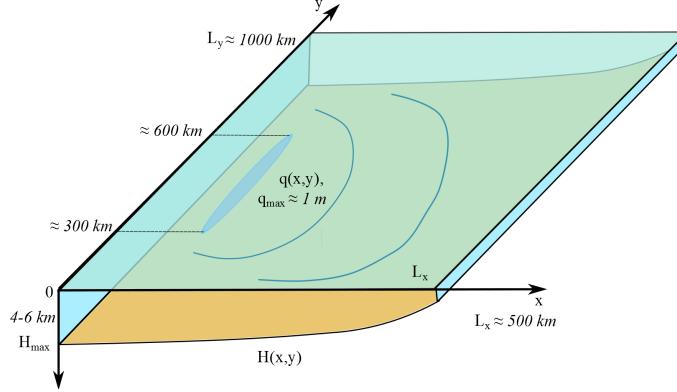


Рис. 2.1. Illustration of the calculation domain Ω .

The direct tsunami problem (2.1) consists of determination of a function $\eta \in C(0, T; H^2(\Omega))$ in the domain Ω by known functions $H(x, y)$ and $q(x, y)$.

Consider combined underwater systems (DART buoys, tide gauges)

$$\eta(x_m, y_m, t) = f_m(t), \quad (x_m, y_m) \in \Omega, \quad t \in (T_{m_1}, T_{m_2}), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2.2)$$

and satellite altimeters data

$$\eta(x, y, T) = f(x, y), \quad (x, y) \in \omega \subset \Omega, \quad T > 0. \quad (2.3)$$

Here $\omega := (l_x^{(1)}, l_x^{(2)}) \times (l_y^{(1)}, l_y^{(2)})$, $0 \leq l_x^{(1)} \leq l_x^{(2)} \leq L_x$, $0 \leq l_y^{(1)} \leq l_y^{(2)} \leq L_y$, is a subset of Ω , $M \in \mathbb{N}$.

The combined inverse tsunami problem consists of determination of a tsunami source $q(x, y)$ from (2.1)-(2.3) by known function $H(x, y)$ and measured data $f_{(m)}(t)$, $m = 1, \dots, M$, and $f(x, y)$.

Consider the operator form of inverse problem 1 (2.1)-(2.2)

$$A_1 q = F, \quad A_1 : H^2(\Omega) \mapsto C(0, T; E^M)$$

and of inverse problem 2 (2.1), (2.3)

$$A_2 q = f, \quad A_2 : H^2(\Omega) \mapsto L_2(\Omega).$$

Here $F(t) := (f_1(t), f_2(t), \dots, f_M(t)) \in E^M$ is the vector of discrete measured output data, E^M is the Euclidean space of time dependent observations.

The inverse problem (2.1)-(2.3) with a compact operator $A := (A_1, A_2)^T$ is ill-posed [5]. The compactness of operators A_1 and A_2 are proved in papers [4] and [6, 7, 8], respectively.

Hence, we consider the solution $q(x, y)$ of inverse problem (2.1)-(2.3) in the class of functions:

$$q(x, y) = \sum_{k=1}^K q_k(x) \sin \frac{2\pi k}{L_y} y. \quad (2.4)$$

3. VARIATIONAL FORMULATION OF INVERSE PROBLEMS AND NUMERICAL EXPERIMENTS

Although, the functional equation $Aq = \tilde{F}$ is often useful for ill-posedness analysis of inverse problems, in practice the exact fulfillment of conditions (2.2) and (2.3) is almost impossible, due to measurement errors in water level records. Hence, the problem $Aq = \tilde{F}$ equivalent the minimization problem [5]

$$\min_{q \in H^2(\Omega)} J(q), \quad J(q) = \|Aq - \tilde{F}\|^2.$$

Here $J(q)$ is the cost function.

Firstly, we find gradients of cost functions of inverse problem 1 and 2, and then we construct the gradient of the cost function $J(q)$. Secondly, we apply the conjugate gradient method [9, 5] for solving inverse problems numerically (see Fig. 3.1).

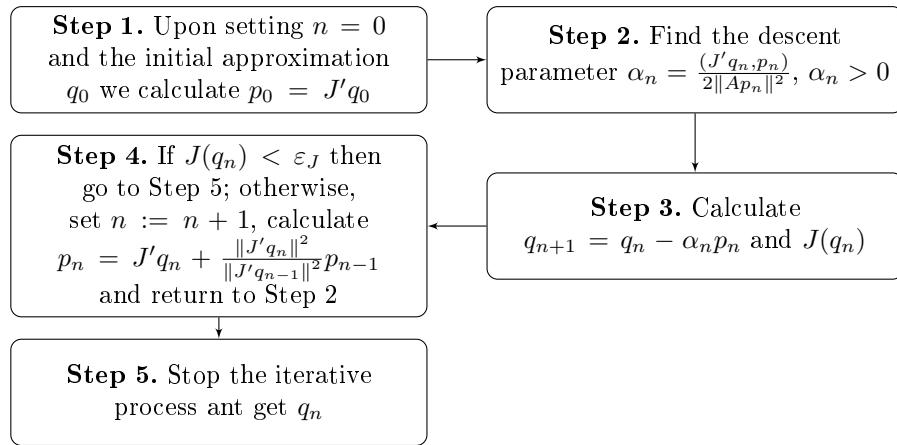


Рис. 3.1. The scheme of the conjugate gradient algorithm.

Note, that conjugate gradient method has an important convergence properties:

Lemma 1. *If the exact solution q_e of problem $Aq = \tilde{F}$ then the following estimate holds*

$$J(q_n) \leq \frac{\|q_0 - q_e\|^2}{n\alpha_n(1 - \alpha_n\|A\|^2)}.$$

Lemma 2. *The sequence q_n converges to the normal solution to the equation $Aq = \tilde{F}$ with respect to q_0 .*

3.1. Inverse problem 1. Consider inverse problem 1 (IP 1) that consists of determination of function $q(x, y)$ from

$$\begin{cases} \eta_{tt} = \operatorname{div}(gH(x, y)\operatorname{grad} \eta), & t > 0; \\ \eta|_{t=0} = q(x, y), \quad \eta_t|_{t=0} = 0, & (x, y) \in \Omega; \\ \eta|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

by known $H(x, y)$ and measured data:

$$\eta(x_m, y_m, t) = f_m(t), \quad (x_m, y_m) \in \Omega, t \in (T_{m_1}, T_{m_2}), m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.2)$$

The correctness of IP 1 in one-dimensional case was proved in [10]. The algorithm of constructing function $q(x, y)$ in two-dimensional case based on truncated singular value decomposition was proposed in [11].

We consider $q(x, y)$ from class of functions (2.4). Note, that if $K = M$ then IP 1 is well-posed, *i.e.* its solution exists, is unique and depends continuously on the data of the problem.

Assume that measured data $f_m(t)$ are known in ε -neighborhood of each point (x_m, y_m) , *i.e.* $\eta_\varepsilon(x, y, t) = f_m(t)$, $x \in (x_m - \varepsilon, x_m + \varepsilon)$, $y \in (y_m - \varepsilon, y_m + \varepsilon)$. Then the problem $A_1 q = F$ reduces to minimization problem of a cost function:

$$J_1(q) = \|A_1 q - F\|_{L^2(0, T)}^2 := \sum_{m=1}^M \int_{T_{m_1}}^{T_{m_2}} \int_{x_m - \varepsilon}^{x_m + \varepsilon} \int_{y_m - \varepsilon}^{y_m + \varepsilon} [\eta(x, y, t; q) - \eta_\varepsilon(x, y, t)]^2 dt.$$

We need to get a gradient of cost function $J_1(q)$ to solve an IP 1 by the conjugate gradient algorithm (Fig. 3.1). This gradient was obtained in the following Theorem of paper [4]:

Theorem 1. *The following gradient formula holds for the cost function $J_1(q)$:*

$$J'_1 q = \psi_{1_t}(x, y, 0). \quad (3.3)$$

Here $\psi_1 \in C(0, T; H^2(\Omega))$ is the weak solution of the following final data hyperbolic problem:

$$\begin{cases} \psi_{1_{tt}} - \operatorname{div}(c^2(x, y) \operatorname{grad} \psi_1) = R_1(x, y, t), & (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ \psi_1(x, y, T) = 0, \quad \psi_{1_t}(x, y, T) = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \psi_1|_{\partial\Omega_T} = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

where $R_1(x, y, t)$ satisfies the relation:

$$R_1(x, y, t) = -2 \sum_{m=1}^M \{[\eta(x, y, t) - \eta_\varepsilon(x, y, t)]\theta(x - x_m + \varepsilon)\theta(x_m + \varepsilon - x) \cdot \theta(y - y_m + \varepsilon)\theta(y_m + \varepsilon - y)\theta(t - T_{m_1})\theta(T_{m_2} - t)\}.$$

In our numerical experiments we consider a rectangle region with 50 km in x ($x \in (0, L_x)$, $L_x = 50000$ m) and 100 km in y ($y \in (0, L_y)$, $L_y = 100000$ m). The bottom was assumed to be one-dimensional (see Fig. 3.2), *i.e.*

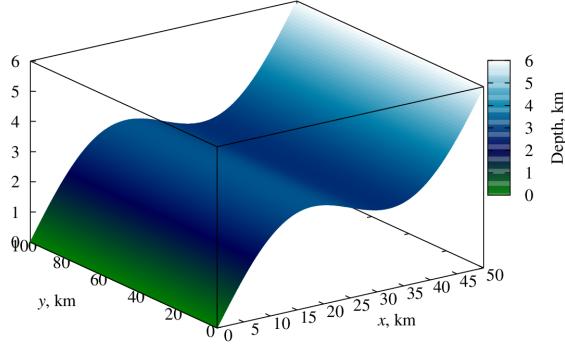
$$H(x, y) = H(x) = 1500 \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) + \frac{H_{\max} - H_{\min}}{L_x} x + H_{\min}.$$

Here $H_{\max} = 6000$ m, $H_{\min} = 5$ m are the highest and lowest average depth of the ocean, respectively.

Consider a tsunami source of form $q_e(x, y) = 6000 + q_1(x) \cdot q_2(y)$, where

$$q_1(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot A \cdot \left(\cos \frac{\pi(2x - L_x + A_1)}{A_1} + 1\right), & x \in (\frac{L_x}{2} - A_1, \frac{L_x}{2}); \\ -0.5 \cdot \left(\cos \frac{\pi(2x - L_x - A_2)}{A_2} + 1\right), & x \in (\frac{L_x}{2}, \frac{L_x}{2} + A_2), \end{cases}$$

$$q_2(y) = \begin{cases} 0.5 \cdot \left(1 + \sin \frac{\pi(y - \frac{\varepsilon + L_y}{2} + A_3)}{\varepsilon}\right), & y \in (\frac{L_y}{2} - A_3, \frac{L_y}{2} - A_3 + \varepsilon); \\ 1, & y \in (\frac{L_y}{2} - A_3 + \varepsilon, \frac{L_y}{2} + A_4 - \varepsilon); \\ 0.5 \cdot \left(1 - \sin \frac{\pi(y + \frac{\varepsilon - L_y}{2} - A_4)}{\varepsilon}\right), & y \in (\frac{L_y}{2} + A_4 - \varepsilon, \frac{L_y}{2} + A_4). \end{cases}$$

Рис. 3.2. The bottom relief $H(x, y)$.

Here $A_1 = 1500$ m, $A_2 = 500$ m, $A_3 = A_4 = 30$ km, $\varepsilon = 5$ km and tsunami wave height $A = 8$ m. Note, that tsunami wavelength is much greater than its amplitude A .

In numerical calculation for direct problem (3.1) we used the following explicit finite-difference scheme of the second order approximation [12]:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\eta_{i,j}^{k+1} - 2\eta_{i,j}^k + \eta_{i,j}^{k-1}}{h_t^2} = (\Lambda_{xx}\eta)(t) + (\Lambda_{yy}\eta)(t), & i = \overline{1, N_x - 1}, \\ & j = \overline{1, N_y - 1}, \\ & k = \overline{1, N_t - 1}; \\ \eta_{i,j}^0 = q_{i,j}, \quad \eta_{i,j}^1 = \eta_{i,j}^0 + \frac{h_t^2}{2} ((\Lambda_{xx}\eta)(0) + (\Lambda_{yy}\eta)(0)), & i = \overline{1, N_x - 1}, \quad (3.5) \\ & j = \overline{1, N_y - 1}; \\ \eta_{i,0}^k = \eta_{i,N_y}^k = 0, & k = \overline{0, N_t}; \\ \eta_{0,j}^k = \eta_{N_x,j}^k = 0, & k = \overline{0, N_t}, \end{array} \right.$$

with following Courant–Friedrichs–Lowy (CFL) condition:

$$h_t = 0, 8 \cdot \frac{h_x h_y}{\|c\|_C \cdot \sqrt{h_x^2 + h_y^2}}.$$

Here h_t is the time step, $\eta_{i,j}^k$ is the approximate value of $\eta(x_i, y_j, t_k)$ at a mesh points (x_i, y_j, t_k) of an uniform mesh $\omega_h = \{(x_i, y_j, t_k) \in \Omega_T : x_i = ih_x, i = \overline{0, N_x}, y_j = jh_y, j = \overline{0, N_y}, t_k = kh_t, k = \overline{0, N_t}\}$. Here $h_x = L_x/N_x$ and $h_y = L_y/N_y$ are the steps along x and y axes, respectively. We set $T = 60$ minutes, and $N_t = T/h_t$ is number of points along the time-axis. The operators $(\Lambda_{xx}\eta)(t)$ and $(\Lambda_{yy}\eta)(t)$ are defined as follows:

$$\begin{aligned} (\Lambda_{xx}\eta)(t) &= (c^2 \eta_x)_{\bar{x}} = \frac{1}{h_x} \left(\frac{c_{i+1,j}^2 + c_{i,j}^2}{2} \cdot \frac{\eta_{i+1,j}^k - \eta_{i,j}^k}{h_x} - \frac{c_{i,j}^2 + c_{i-1,j}^2}{2} \cdot \frac{\eta_{i,j}^k - \eta_{i-1,j}^k}{h_x} \right), \\ (\Lambda_{yy}\eta)(t) &= (c^2 \eta_y)_{\bar{y}} = \frac{1}{h_y} \left(\frac{c_{i,j+1}^2 + c_{i,j}^2}{2} \cdot \frac{\eta_{i,j+1}^k - \eta_{i,j}^k}{h_y} - \frac{c_{i,j}^2 + c_{i,j-1}^2}{2} \cdot \frac{\eta_{i,j}^k - \eta_{i,j-1}^k}{h_y} \right). \end{aligned}$$

The measured output data (3.2) has the form:

$$\eta_{m,m}^k = f_m^k, \quad (x_m, y_m) \in \Omega, m = 1, 2, \dots, M.$$

For solving the adjoint problem (3.4) we used the same finite-difference scheme (3.5) with $\varepsilon = 125$ meters.

We apply the conjugate gradient method for solving IP 1 (3.1)-(3.2). The grid size is: $N_x = 750$, $N_y = 500$, $N_t = 600$ (we choose this grid size was shown in [4]). We set the measured data $f_m(t)$, $m = \overline{1, 6}$, for IP 1 with «white» noise 1-7%, i.e. $f_m^{(\gamma)}(t) = f_m(t) + \gamma \text{Random}(f_m) \|f_m\|$, $\gamma = 0.01-0.07$, that generated from the numerical solution $\eta_h(x_m, y_m, t)$ of the direct problem (3.5) in six points in the line $y = 13x - 45.5$ from $x_1 = 40000$ to $x_6 = 47000$ with a step $\Delta x = \frac{1}{6}$. We choose an initial approximation $q_0 = H_{\max}$ that defines an unperturbed sea surface.

The stopping parameter $\varepsilon_J > 0$ in the stopping condition $J(q_n) < \varepsilon_J$ of conjugate gradient algorithm (Fig. 3.1) was chosen as follows. We analyze the dependence on the iteration number n and data noise level γ of the convergence error $e(n; \cdot; \gamma)$ and the relative accuracy error $E(n; \cdot; \gamma)$ defined as follows:

$$e_1(n; q; \gamma) = \sum_{m=1}^M \|\eta_h(x_m, y_m, \cdot; q_n^{(1)}) - f_m^{(\gamma)}(\cdot)\|_{L_h^2(T_{m_1}, T_{m_2})},$$

$$E_1(n; q; \gamma) = \frac{\|q_e - q_n^{(1)}\|_{L_h^2(\Omega)}}{\|q_e\|_{L_h^2(\Omega)}}.$$

Here η_h is the solution of direct problem (3.5) defined on the mesh ω_h , $q_n^{(1)}$ denotes the dependence of solution η_h from the initial data.

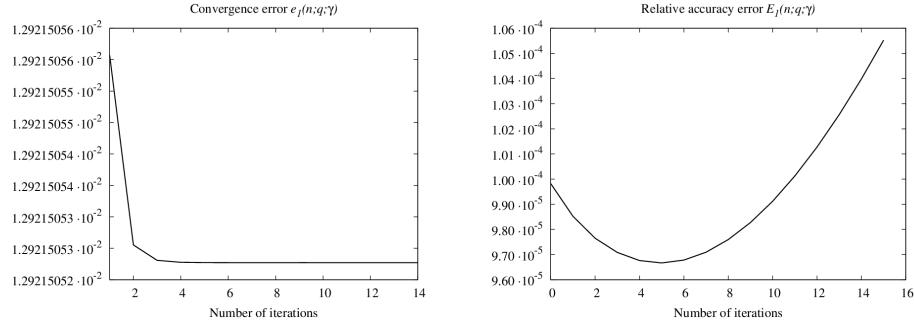


Рис. 3.3. The convergence error $e_1(n; q; \gamma)$ (left figure) and relative accuracy error $E_1(n; q; \gamma)$ (right figure) corresponding to conjugate gradient method when $\gamma = 3\%$.

The behavior of convergence error $e_1(n; q; \gamma)$ as a function of the iteration number n consists of three phases: the initial phase of rapid decrease but short duration, the second phase of slow decrease, and the third phase of almost constant behavior, after some iterations (see left curve of Fig. 3.3). As computational experiments show, the *minimum value of relative accuracy error $E_1(n; q; \gamma)$ is achieved between the second and third phases of the curve $e(n; q; \gamma)$ versus n* . Any value of the convergence error $e_1(n; q; \gamma)$ between the second and third phases is assumed to be *an optimal value ε_J of the stopping parameter* in the conjugate gradient method. The corresponding

number of iterations is defined to be *an optimal one*. For $\gamma = 3\%$ the optimal number of iteration is equal to five. The reconstructed tsunami source $q_n^{(1)}$ for IP 1 from the random noisy output data $\gamma = 3\%$ demonstrated on Fig. 3.4b.

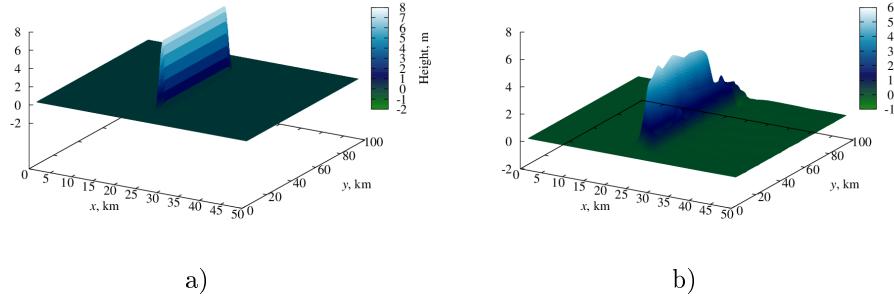


Рис. 3.4. a) The initial perturbation $q_e(x, y)$ (exact solution of inverse problem 1). b) The reconstructed tsunami source $q_5^{(1)}(x, y)$ from the random noisy output data $\gamma = 3\%$ for 5 iterations.

In paper [4] authors show different numerical experiments and the above theory works very well.

3.2. Inverse problem 2. Consider inverse problem 2 (IP 2) that consists of determination of function $q(x, y)$ from

$$\begin{cases} \eta_{tt} = \operatorname{div}(gH(x, y)\operatorname{grad}\eta), & t > 0; \\ \eta|_{t=0} = q(x, y), \quad \eta_t|_{t=0} = 0, & (x, y) \in \Omega; \\ \eta|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

by known $H(x, y)$ and measured data:

$$\eta(x, y, T) = f(x, y), \quad (x, y) \in \omega \subset \Omega, \quad T > 0. \quad (3.7)$$

Here $\omega := (l_x^{(1)}, l_x^{(2)}) \times (l_y^{(1)}, l_y^{(2)})$, $0 \leq l_x^{(1)} \leq l_x^{(2)} \leq L_x$, $0 \leq l_y^{(1)} \leq l_y^{(2)} \leq L_y$, is a subset of Ω . We consider $q(x, y)$ form class of functions (2.4).

The IP 2 $A_2 q = f$ can be reduced to minimization problem of a cost function:

$$J_2(q) = \|A_2 q - F\|_{L^2(0, T)}^2 := \int_{l_x^{(1)}}^{l_x^{(2)}} \int_{l_y^{(1)}}^{l_y^{(2)}} (\eta(x, y, T) - f(x, y))^2 dy dx.$$

The gradient of the cost function $J_2(q)$ was obtained in the Theorem of papers [13, 14]:

Theorem 2. *The following gradient formula holds for the cost function $J_2(q)$:*

$$J'_2 q = \psi_{2t}(x, y, 0). \quad (3.8)$$

Here $\psi_2 \in C(0, T; H^2(\Omega))$ is the weak solution of the following final data hyperbolic problem:

$$\begin{cases} \psi_{2tt} = \operatorname{div}(c^2(x, y) \operatorname{grad} \psi_2), & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T); \\ \psi_2(x, y, T) = 0, \psi_{2t}(x, y, T) = R_2(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ \psi_2|_{\partial\Omega_T} = 0, & t \in (0, T) \end{cases} \quad (3.9)$$

where $R_2(x, y, t)$ satisfies the relation:

$$R_2(x, y) = 2(\eta(x, y, T) - f(x, y)) \theta(x - l_x^{(1)}) \theta(l_x^{(2)} - x) \cdot \theta(y - l_y^{(1)}) \theta(l_y^{(2)} - y).$$

We conduct the same numerical experiments as in case of IP 1. We set the same domain, bottom relief, exact initial source, grid size and apply the finite-difference scheme (3.5) and conjugate gradient method (Fig. 3.1) with stopping parameter ε_J . We put $l_x^{(1)} = l_y^{(1)} = 0$, $l_x^{(2)} = 25$ km, $l_y^{(2)} = 50$ km, i.e. satellite data $f(x, y)$ are known in small rectangle ω . The reconstructed tsunami source $q_n^{(2)}$ for IP 2 from the random noisy output data $\gamma = 3\%$ demonstrated on Fig. 3.5b.

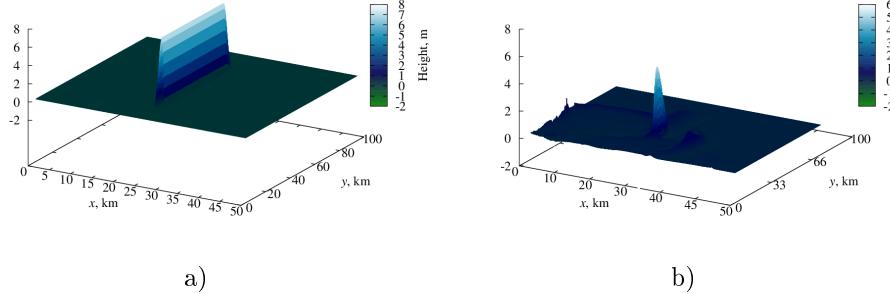


Рис. 3.5. a) The initial perturbation $q_e(x, y)$ (exact solution of inverse problem 2). b) The reconstructed tsunami source $q_{15}^{(2)}(x, y)$ from the random noisy output data $\gamma = 3\%$ for 15 iterations.

Note, that reconstructed part of function $q_e(x, y)$ (see Fig. 3.5b) corresponds to the measured data domain ω .

3.3. Combined inverse problem. The combined inverse tsunami problem (2.1)-(2.3) rewritten in operator form $Aq = \tilde{F}$ reduces to minimization problem of a cost function:

$$J(q) = \beta J_1(q) + (1 - \beta) J_2(q), \quad \beta \in [0, 1].$$

As our problem is linear, that the gradient of a cost function $J(q)$ has the form:

$$J'q = \beta J'_1 q + (1 - \beta) J'_2 q, \quad \beta \in [0, 1],$$

where $J'_1 q$ and $J'_2 q$ are obtained earlier in formulas (3.3) and (3.8), respectively.

Using the above setting in numerical experiments we apply the conjugate gradient method to combined inverse tsunami problem (2.1)-(2.3). The reconstructed tsunami source q_n for combined inverse problem from the random noisy output data $\gamma = 3\%$ and parameter $\beta = 0.3$ demonstrated on Fig. 3.6b.

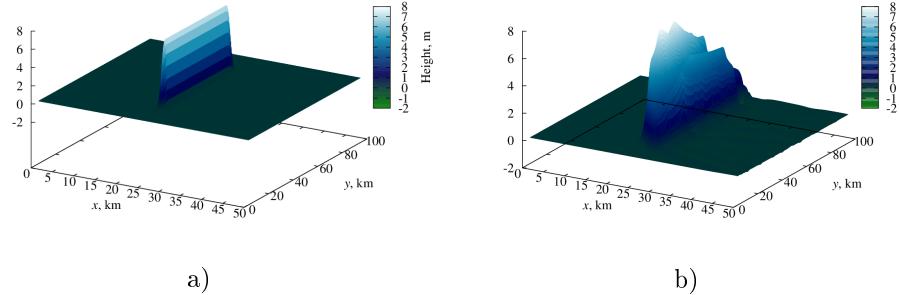


Рис. 3.6. a) The initial perturbation $q_e(x, y)$ (exact solution of combined inverse problem). b) The reconstructed tsunami source $q_{10}(x, y)$ from the random noisy output data $\gamma = 3\%$ for 10 iterations.

Note, that the location of initial source as well as its amplitude are reconstructed better than in case of IP 1 (Fig. 3.4b) and IP 2 (Fig. 3.5b).

4. BENEFITS OF COMBINED DATA

We compare a relative accuracy error curves $E_1(n; q; \gamma)$ and $E_2(n; q; \gamma)$ for IP 1 and IP 2, respectively

$$E_i(n; q; \gamma) = \frac{\|q_e - q_n^{(i)}\|_{L_h^2(\Omega)}}{\|q_e\|_{L_h^2(\Omega)}}, \quad i = 1, 2,$$

and $E_c(n; q; \gamma)$ for combined inverse problem

$$E_c(n; q; \gamma) = \frac{\|q_e - q_n\|_{L_h^2(\Omega)}}{\|q_e\|_{L_h^2(\Omega)}}.$$

Using of combined DART and satellite data allows one to increase the stability and efficiency of tsunami source reconstruction (see Fig. 4.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C.V. Vreugdenhil, *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*, Springer, 1994.
- [2] E. Pelinovsky, *Waves in Geophysical Fluids. Tsunamis, Rogue Waves, Internal Waves and Internal Tides* edited by J. Grue and K. Trulsen, SpringerWienNewYork, 2006.
- [3] L. Mansinha, D.E. Smylie, *The displacement fields of inclined faults*, Bulletin of the Seismological Society of America, **61**, Pp. 1433-1440, 1971.
- [4] S. Kabanikhin, A. Hasanov, I. Marinin, O. Krivorotko, D. Khidasheli, *A variational approach to reconstruction of an initial tsunami source perturbation*, Applied Numerical Mathematics, **83**, Pp. 22-37, 2014.
- [5] S.I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, Berlin: Gruyter, 2011.
- [6] V.K. Ivanov, V.V. Vasin, V.P. Tanana, *Theory of Linear Ill-posed Problems and its Applications*, Inverse and Ill-posed Problems Series, VSP, 1978.
- [7] Yu.E. Anikonov, B.A. Bubnov, G.N. Erokhin, *Inverse and Ill-posed Sources Problems*, The Netherlands: VSP, 1997.
- [8] S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorotko, *Combined inverse tsunami problem*, Bulletin of the Novosibirsk Computer Center, Mathematical Modeling In Geophysics, **16**, Pp. 45-58, 2013.

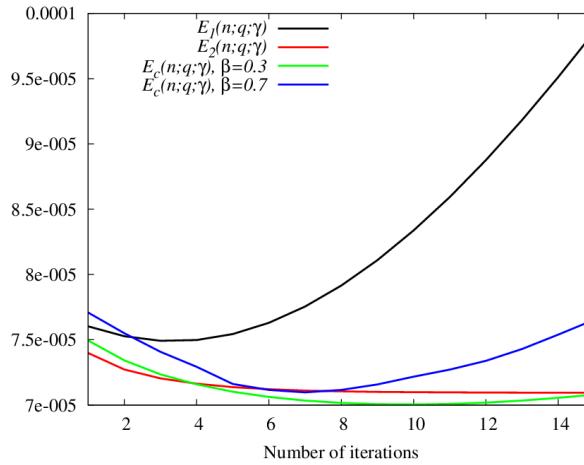


Рис. 4.1. The relative accuracy errors for IP 1, IP 2 and combed inverse problem for $\beta = 0.3$ and $\beta = 0.7$.

- [9] M. Hanke, *Conjugate Gradient Type Methods for Ill-Posed Problems*, England: Longman Scientific & Technical, 1995.
- [10] V.G. Romanov, P.S. Moshkalev, *The one-dimensional inverse problem of finding a tsunami source*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **14** (3), Pp. 87-99, 2011.
- [11] T.A. Voronina, *Reconstruction of initial tsunami waveforms by a truncated SVD method*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **19**, Pp. 615-629, 2011.
- [12] A.A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*, New York: Marcel Dekker, 2001.
- [13] S.I. Kabanikhin, M.A. Bektemesov, D.B. Nurseitov, O.I. Krivorotko, A.N. Alimova, *An optimization method in the Dirichlet problem for the wave equation*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **20** (1), Pp. 193-211, 2012.
- [14] S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorotko, *The numerical method of solving Dirichlet problem for the wave equation*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **15** (4), Pp. 90-101, 2012.

OLGA I. KRIVOROTKO
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 PIROGOVA STREET 2,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.132–С.144 (2014)

УДК 512.5

MSC 13A99

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА-КРЕЙНА

Н.С. Новиков

ABSTRACT. Inverse problems for some hyperbolic equations are considered. The Gel'fand-Levitman-Krein approach is applied to reduce nonlinear inverse problems to sets of linear integral equation. Numerical solution of integral equations is obtained using singular value's decomposition method and Monte-Carlo method. Results of numerical experiments are represented.

Keywords: inverse problems, numerical methods, integral equations, Monte-Carlo methods

1. ВВЕДЕНИЕ.

В работе рассматривается двумерный аналог уравнения Гельфанд-Левитана-Крейна. Метод И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана широко распространён в теории обратных и некорректных задач. Метод заключается в сведении нелинейной обратной задачи к системе линейных интегральных уравнений типа Фредгольма.

Первые работы, связанные с этим методом, относятся к середине XX века. В 1951 И.М. Гельфанд и Б.М. Левитан разработали метод восстановления оператора Штурма-Лиувилля и получили достаточные условия для определения, является ли заданная монотонная функция спектральной функцией некоторого оператора. Почти в то же время М.Г. Крейн (1951, 1954) рассмотрел задачу о струн и сформулировал теоремы о разрешимости обратной задачи. В течение следующего десятилетия А.С. Алексеев предложил решение обратной динамической задачи теории упругости на основе аналогичного подхода. В настоящее

© 2014 Новиков Н.С.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00773) и Министерства образования и науки Российской Федерации.

Поступила 14 июля 2014 г., опубликована 20 декабря 2014 г.

время существует широкий круг задач, для решения которых может быть использован метод Гельфанд-Левитана.

2. Вывод одномерного уравнения Гельфанда-Левитана для обратной задачи для волнового уравнения

В этом разделе мы рассмотрим обратную задачу для одномерного волнового уравнения и сведём её к уравнению Гельфанд-Левитана. Рассмотрим следующую постановку задачи (В.Г. Романов):

$$\begin{aligned} L_q u \equiv (\frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^2} + q(x))u &= 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} &= \delta(x), \\ u|_{x=0} = f(t), \quad u_x|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

Обратная задача заключается в восстановлении функции $q(x)$ по данным обратной задачи $f(t)$.

Продолжим функцию $u(x, t)$ для значений $t \leq 0$ нечётным образом:

$$u(x, t) = -u(x, -t), \quad t \leq 0.$$

Тогда функция $f(t) = u(0, t)$ имеет в $t = 0$ разрыв первого рода:

$$f(+0) = \frac{1}{2}, \quad f(-0) = -\frac{1}{2}.$$

При этом функция $u(x, t)$ при всех x, t является решением уравнения

$$L_q u = 0$$

И удовлетворяет условию $u(x, t) \equiv 0, t < |x|$.

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу:

$$\begin{aligned} L_q w &= 0, \quad x > 0, \quad -\infty < t < \infty, \\ w|_{x=0} &= \delta(t - t_0), \quad w_x|_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

В силу формулы Даламбера эта задача эквивалентна решению следующего интегрального уравнения:

$$w(x, t) = \frac{1}{2}[\delta(t - x) + \delta(t + x)] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} q(\xi)w(\xi, \tau)d\xi d\tau.$$

При этом выполняется следующее условие: $w(x, t) \equiv 0, 0 < x < |t|$.

Обозначим $\tilde{w}(x, t) = w(x, t) - \frac{1}{2}[\delta(t - x) + \delta(t + x)]$.

Кусочно-непрерывная Функция $\tilde{w}(x, t)$ является решением следующего уравнения:

$$\tilde{w}(x, t) = \frac{1}{4}\theta(x - |t|) \left[\int_0^{(x+t)/2} q(\xi)d\xi + \int_0^{(x-t)/2} q(\xi)d\xi \right] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} q(\xi)\tilde{w}(\xi, \tau)d\xi d\tau.$$

Отсюда можно получить, что

$$\tilde{w}(x, x) = \frac{1}{4} \int_0^x q(\xi) d\xi.$$

При этом функция $w(x, t)$ связана с решением обратной задачи следующим соотношением:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) w(x, t-s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) w(x, \tau) d\tau.$$

Последнее уравнение может быть переписано в виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(t-x) + f(t+x)] + \int_{-x}^x f(t-\tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau.$$

Отсюда можно получить:

$$\frac{1}{2}[f(t-x) + f(t+x)] + \int_{-x}^x f(t-\tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau = 0, \quad x > |t|.$$

Это уравнение называется уравнением Гельфанд-Левитана. Дифференцируя его по t , получим:

$$(1) \quad \tilde{w}(x, t) + \int_{-x}^x f(t-\tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2}[f'(t-x) + f'(t+x)], \quad x > 0, t \in (-x, x).$$

Используя чётность $\tilde{w}(x, t)$ по переменной t , можно упростить полученное уравнение:

$$(2) \quad \tilde{w}(x, t) + \int_0^x [f(t-\tau) + f(t+\tau)] \tilde{w}(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2}[f'(t-x) + f'(t+x)], \quad x > 0, t \in [0, x].$$

Разрешив уравнение Гельфанд-Левитана, можно получить решение исходной обратной задачи, пользуясь соотношением:

$$q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x), \quad x > 0.$$

Теорема. Обратная задача однозначно разрешима на интервале $[-T/2, T/2]$ в классе кусочно-непрерывных функций тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t) \in C^2[0, T]$, $f'(+0) = 1/2$, $f'(0) = 0$;

2. Уравнение Гельфанд-Левитана (1), где $f(-t) = f(t)$, $t \in [0, T]$, однозначно разрешимо для всех $x \in (0, T/2)$.

3. ДВУМЕРНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА

В этом разделе мы рассмотрим следующее семейство прямых задач([?]):

$$(3) \quad L_q u^k \equiv u_{tt}^k - \Delta u^k + q(x, y)u^k = 0; \\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, t > 0, k \in \mathbb{Z};$$

$$(4) \quad u^k|_{t=0} = 0, \quad u_t^k|_{t=0} = \delta(x)e^{iky}.$$

Обратная задача заключается в определении функции $q(x, y)$ по дополнительной информации:

$$(5) \quad u^k|_{x=0} = f^k(y, t), \quad u_x^k|_{x=0} = 0.$$

Используем формулу Даламбера для решения задачи (3), (4):

$$(6) \quad u^k(x, y, t) = \frac{1}{2}e^{iky}\theta(t - |x|) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} [u_{yy}^k - q(x, y)u^k](\xi, y, \tau) d\xi d\tau.$$

В силу этого имеет место равенство: $u^k(x, y, t) \equiv 0, 0 < t < |x|, y \in \mathbb{R}$.

Кроме того, можно получить необходимое условие разрешимости обратной задачи:

$$(7) \quad f^k(y, +0) = \frac{1}{2}e^{iky}.$$

Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу:

$$(8) \quad L_q w^m = 0; \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z};$$

$$(9) \quad w^m|_{x=0} = e^{imy}\delta(t), \quad w_x^m|_{x=0} = 0.$$

Задача Коши (8), (9) с данными на времениподобной поверхности $x = 0$, не является, вообще говоря, корректно-поставленной в классе функций конечной гладкости. Однако возможно доказать однозначную разрешимость обратной задачи, используя подход Л. Ниренберга и Л. Овсянникова([?]).

Теперь применим формулу Даламбера для задачи (8), (9):

$$(10) \quad w^m(x, y, t) = \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(t - x) + \delta(t + x)] + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} [-w_{yy}^m + q(x, y)w^m](\xi, y, \tau) d\xi d\tau.$$

Имеет место равенство: $w^m(x, y, t) \equiv 0, 0 < |x| < t, y \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$(11) \quad \tilde{w}^m(x, y, t) = w^m(x, y, t) - \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(t - x) + \delta(t + x)].$$

Используя (11) в (10), получим:

$$(12) \quad \tilde{w}^m(x, y, t) = \frac{1}{4}e^{imy}\theta(x - |t|) [xm^2 + Q(x, y, t)] + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} [-\tilde{w}_{yy}^m + q(x, y)\tilde{w}^m](\xi, y, \tau) d\xi d\tau.$$

Здесь

$$Q(x, y, t) = \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi, y) d\xi + \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y) d\xi.$$

Следовательно,

$$\tilde{w}^m(x, y, x-0) = \frac{1}{4} e^{imy} \left[xm^2 + \int_0^x q(\xi, y) d\xi \right].$$

Теперь продолжим функции $u^k(x, y, t)$ - решение задачи (3), (4) - для $t < 0$ с помощью нечётного продолжения:

$$u^k(x, y, t) = -u^k(x, y, -t), \quad t < 0.$$

Тогда $f^k(y, t)$ могут быть представлены следующим образом:

$$f^k(y, t) = \frac{1}{2} e^{iky} [\theta(t) - \theta(-t)] + \tilde{f}^k(y, t), \quad y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

После нечётного продолжения функции $u^k(x, y, t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$(13) \quad L_q u^k = 0; \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z};$$

$$(14) \quad u^k|_{x=0} = f^k(y, t), \quad u_x^k|_{x=0} = 0.$$

Решения задач (8), (9) и (13), (14) связаны следующим образом:

$$(15) \quad u^k(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_m w^m(x, y, s) f_k^m(t-s) ds, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, воспользовавшись свойствами функций $u^k(x, y, t)$ и $w^m(x, y, t)$ и дифференцируя уравнение (15) по t , можно получить двумерный аналог уравнения Гельфанд-Левитана-Крейна:

$$(16) \quad \tilde{w}^k(x, y, t) + \int_{-x}^x \sum_m f_k^m(t-s) \tilde{w}^m(x, y, s) ds = \\ = -\frac{1}{2} [f^{k'}(y, t-x) + f^{k'}(y, t+x)],$$

Это семейство интегральных уравнений рассматривается в области $|t| < x$, $y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение исходной обратной задачи может быть получено следующим образом:

$$q(x, y) = 4 \frac{d\tilde{w}^0(x, y, x-0)}{dx}.$$

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА

4.1. Численное решение прямой задачи. В ходе численных экспериментов использовались "синтетические" данные, полученные в ходе численного решения соответствующей прямой задачи. Опишем численный алгоритм решения следующего семейства прямых задач:

$$L_q u^k \equiv u_{tt}^k - \Delta u^k + q(x, y) u^k = 0; \\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, t > 0, k \in \mathbb{Z}; \\ u^k|_{t=0} = 0, \quad u_t^k|_{t=0} = \delta(x) e^{iky}.$$

Для решения этого семейства задач использовался проекционный метод. Метод основан на представлении всех входящих в формулировку задачи функций в виде сумм Фурье:

$$q(x, y) = \sum_m q_m(x) e^{imy};$$

$$u^k(x, y, t) = \sum_m u_m^k(x, t) e^{imy};$$

Предполагая, что все коэффициенты, соответствующие номерам $|m| > N$, равны 0, исходное семейство задач может быть аппроксимировано решением следующей одномерной задачи:

$$U_{tt}(x, t) = U_{xx} - KU - Q(x)U;$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$U|_{t=0} = 0, \quad U_t|_{t=0} = I\delta(x).$$

Здесь I - единичная матрица, U, K, Q - квадратные матрицы размера $2N + 1$:

$$U_{km} = u_m^k; \quad K_{km} = k^2 \delta_{km};$$

$$Q_{km} = \theta(N - |k - m|) q_{k-m}, \quad k, m = -N \dots N.$$

Полученная система называется N -приближением исходной задачи. Отметим, что можно рассматривать N -приближение как регуляризирующее семейство для исходной задачи.

Используя свойства решения прямой задачи, изложенные в предыдущем разделе, получим, что

$$U|_{x=t} = U|_{x=-t} = \frac{1}{2}I; \quad U|_{|x|>t} \equiv 0.$$

В соответствии с этим равенством можно решить прямую задачу следующим образом. Выберем равномерную сетку $x_j = jh, t_k = kh$, и приблизим дифференциальное уравнение конечно-разностным:

$$\frac{U_i^{k-1} - 2U_i^k + U_i^{k+1}}{h^2} = \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} - (K + Q_i) \frac{U_{i-1}^k + U_{i+1}^k}{2}.$$

Здесь $U_i^k = U(ih, kh), Q_i = Q(ih)$ - значения соответствующих матриц в узлах сетки. Последнее соотношение может быть переписано в следующем виде:

$$U_i^{k+1} = -U_i^{k-1} + \left(I - \frac{h^2}{2}(K + Q_i)\right)(U_{i-1}^k + U_{i+1}^k);$$

$$U_k^k = U_{-k}^k = 0.$$

Данные обратной задачи вычисляются как след решения прямой задачи:

$$F^k = U_0^k.$$

Здесь

$$F(t) \equiv (F_{km})(t)_{k,m=-N..N}, \quad F^k = F(kh).$$

Используя представление на основе сумм Фурье, перепишем уравнение Гельфанд-Левитана (16):

$$(17) \quad \tilde{W}(x, t) + \int_{-x}^x \sum_m F'(t-s) \tilde{W}(x, s) ds = -\frac{1}{2} [F'(t-x) + F'(t+x)],$$

Аналогичным образом может быть получено решение прямой задачи для двумерного уравнения акустики [8, 9, 10, 11, 12].

4.2. Решение линейной системы. Уравнение (17) может быть сведено к линейной системе. Фиксируя $x = mh$ и заменяя интеграл в левой части конечной суммой, получим:

$$(18) \quad \begin{aligned} \tilde{W}_k + \frac{h}{2} \tilde{W}_{-m} F'(t_k - s_{-m}) + \sum_{i=-m+1}^{m-1} h F'(t_k - s_i) \tilde{W}_k + \frac{h}{2} \tilde{W}_{-m} F'(t_k - s_{-m}) = \\ = -\frac{1}{2} [F'(t_k - s_m) + F'(t_k + s_m)], \end{aligned}$$

Перепишем это равенство в виде СЛАУ:

$$W(I + \tilde{A}) = G$$

Здесь \tilde{A} - квадратная матрица размера $(2m+1)*(2N+1)$, состоящая из блоков размера $(2N+1)$:

$$\tilde{A} = (B_{ik}), i, k = 1 \dots 2m+1; B_{ik} = \begin{cases} h F'((k-i)h) & \text{if } i \neq 1, 2m+1 \\ \frac{h}{2} F'((k-i)h) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Для решения этой системы был использован метод сингулярного разложения. Пусть имеется СЛАУ

$$\mathbb{A}_{mn} q_n = f_m.$$

Здесь $\mathbb{A}_{mn} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ — прямоугольная матрица, а $q_n \in \mathbb{R}^n$, $f_m \in \mathbb{R}^m$ — вектора.

В соответствии с теоремой о сингулярном разложении, существуют матрицы U_{mm} и V_{nn} и положительные $\{\sigma_j\}$, такие, что

$$\mathbb{A}_{mn} = \mathbb{U}_{mn} \Sigma_{mn} \mathbb{V}_{nn}^T.$$

Здесь

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{pmatrix}.$$

Значения σ_n называются сингулярными числами матрицы \mathbb{A} . При этом $\sigma_{n+1} \leq \sigma_n$.

Теперь перепишем систему $\mathbb{A}_{mn} q_n = f_m$ в виде:

$$\mathbb{U}_{mm} \Sigma_{mn} \mathbb{V}_{nn}^T q_n = f_m.$$

Обозначим $z_n = \mathbb{V}_{nn}^T q_n$. Тогда $q_n = V_{nn} z_n$. Отсюда получим:

$$\Sigma_{mn} Z_n = \mathbb{U}_{mm}^T f_m = g_m.$$

Следовательно $z_j = \frac{g_j}{\sigma_j}$, для $\sigma_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, M_{xy}$). Для $\sigma_j = 0$ мы предполагаем, что $z_j = 0$.

4.3. Метод Монте-Карло. Так же для решения уравнения Гельфанд-Левитана был применён метод Монте-Карло. Идея метода заключается в том, что ([5]) интеграл от произвольной функции можно представить в виде математического ожидания некоторой случайной величины, а решения интегрального уравнения $\varphi = K\varphi + f$ может быть представлено рядом Неймана:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} K^n f$$

Основным элементом, использующимся для вычисления искомой случайной величины, является цепь Маркова. Однородная цепь Маркова представляет собой последовательность случайных величин x_0, \dots, x_n, \dots таких, что распределение величины x_n определяется только значением x_{n-1} , и условная плотность распределения x_n при условии $x_{n-1} = x'$ для всех n есть заданная функция $r(x', x)$, не зависящая от n .

Следовательно, цепь Маркова определяется тремя функциями:

- 1) $\pi(x)$ — Плотность начального положения.
- 2) $r(x', x)$ — Плотность перехода из точки x' .
- 3) $p(x')$ — вероятность обрыва цепи в точке x' .

Определим также вспомогательную функцию

$$p(x', x) := r(x', x)(1 - p(x'))$$

Эта функция единственным образом задаёт функции $r(x', x)$ и $p(x')$, поскольку

$$\int p(x', x) dx = 1 - p(x').$$

Теперь рассмотрим вычисление функционала

$$(19) \quad I_h = (\varphi, h) = \int_X h(x)\varphi(x)dx, h \in L_\infty,$$

где $\phi(x)$ — решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \int_X k_{ij}(y, x)\varphi(y)dy + g(x), g \in L_1.$$

Будем предполагать, что для функций $\pi(x)$ и $p(x', x)$ выполнены следующие условия:

$\pi(x) \neq 0$, if $g(x) \neq 0$ и $p(x', x) \neq 0$, if $k(x', x) \neq 0$

В этом случае имеет место следующая теорема ([5]):

Пусть

$\rho(K_1) < 1$, где K_1 — интегральный оператор с ядром $|k(y, x)|$

We define by x_0, \dots, x_m, \dots — цепь Маркова, соответствующая функциям $\pi(x)$ и $p(x', x)$.

Определим случайную величину:

$$(20) \quad \xi_n = \sum_{i=0}^m Q_i h(x_i)$$

где коэффициенты Q_0, \dots, Q_m задаются следующим образом:

$$(21) \quad Q_0 = \frac{g(x_0)}{\pi(x_0)}, \quad Q_i = Q_{i-1} \cdot \frac{k(x_{m-1}, x_m)}{p(x_{m-1}, x_m)} = Q_{i-1} \cdot \frac{k(x_m, x_{m-1})}{r(x_{m-1}, x_m)(1 - p(x_{m-1}))}$$

Тогда имеет место равенство:

$$(22) \quad I_h = E\xi$$

Отметим, что алгоритм легко распространяется на случай системы линейных интегральных уравнений.

Правая часть равенства (22) может быть аппроксимирована в соответствии с законом больших чисел:

$$(23) \quad E\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N}{N}$$

Для нахождения решения в конкретной точке мы используем некоторую модификацию алгоритма - "метод сопряженных блужданий" ([5]). Положим $\pi(s) = \delta(s - x)$. Тогда, используя формальную подстановку $g(s) = \delta(s - x)$ и $\pi(s) = \delta(s - x)$ в равенстве

$$E\xi = E\left[\sum_{i=0}^m Q_i h(x_i)\right] = (\varphi, h) = (g, \varphi^*)$$

Получим, что:

$$\varphi^*(x) = h(x) + E\left[\sum_{i=1}^m Q_i h(x_i)\right]$$

Здесь φ^* - решение сопряжённого уравнения:

$$\varphi^* = K^* \varphi^* + h.$$

Отсюда, рассматривая исходное уравнение как сопряжённое к уравнению $\varphi^* = K^* \varphi^* + h$, можно получить:

$$(24) \quad \varphi(x) = E\xi^*(x) = E[g(x) + \sum_{i=1}^m Q_i^* g(x_i)]$$

Здесь

$$(25) \quad Q_0^* = \frac{h(x_0)}{\pi(x_0)} = 1, \quad Q_i^* = Q_{i-1}^* \cdot \frac{k(x_m, x_{m-1})}{p(x_{m-1}, x_m)} = Q_{i-1}^* \cdot \frac{k(x_m, x_{m-1})}{r(x_{m-1}, x_m)(1 - p(x_{m-1}))}$$

Отметим, что вид начального распределения $\pi(s) = \delta(s - x)$ означает, что начальная точка цепи Маркова фиксирована и равна x . Следовательно, можно сформулировать следующий алгоритм для решения уравнения (17) методом Монте-Карло:

I Выбрать N - число реализаций случайной величины ξ .

II Выбрать:

1) плотность перехода $r(y, x)$, являющуюся плотностью распределения для всех фиксированных y

2) вероятность обрыва цепи $p(y)$ - число $(0, 1)$ для любых y

III Для всех $n \leq N$:

1) Получить цепь Маркова - последовательность x_0, \dots, x_m :

a) Положить $x_0 = x$

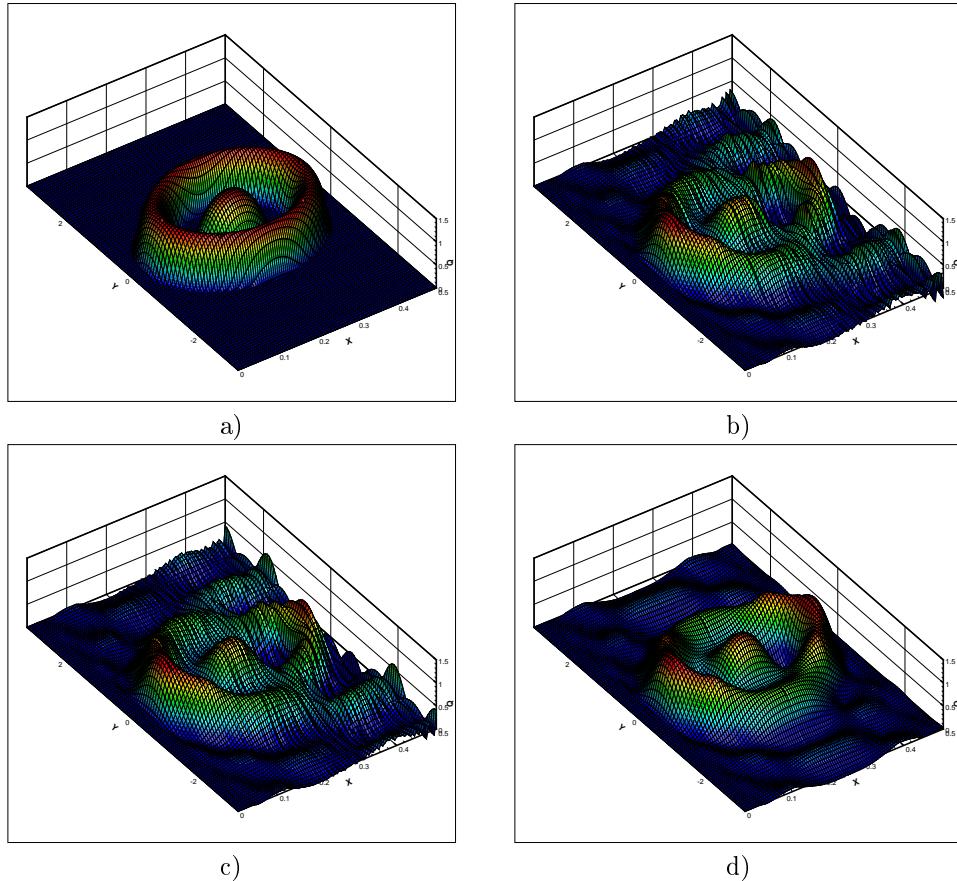


Рис. 1. Results of numerical experiments for $N = 3$: a) Exact Solution b) Solution by Monte-Carlo method, number of tests 500–2000, c) Solution by Monte-Carlo method, number of tests 1000–4000, d) SVD solution.

- b) Определить, в соответствии с вероятностью $p(x_0)$, произошёл ли обрыв цепи. В случае обрыва положить $m = 0$, и перейти к 2). Иначе положить $m = 1$ и перейти к с).
 - c) Получить новую случайную точку x_1 , используя x_0 и плотность распределения $r(x_0, x)$.
 - d) Повторять б) и с), пока не произойдёт обрыв.
 - 2) Вычислить Q_0^*, \dots, Q_m^* в соответствии с (25);
 - 3) Вычислить ξ_n в соответствии с (24)
- IV Вычислить I_h в соответствии с (23).

5. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЁТЫ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. // Москва: Наука, 1984.

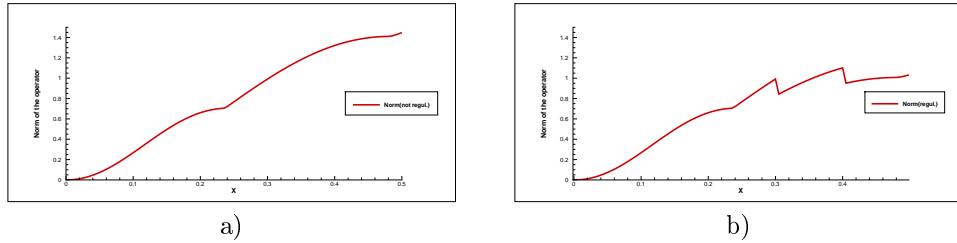


Рис. 2. Results of numerical experiments for $N = 8$: a) Norm of the integral operator b) Norm of the operator after regularization.

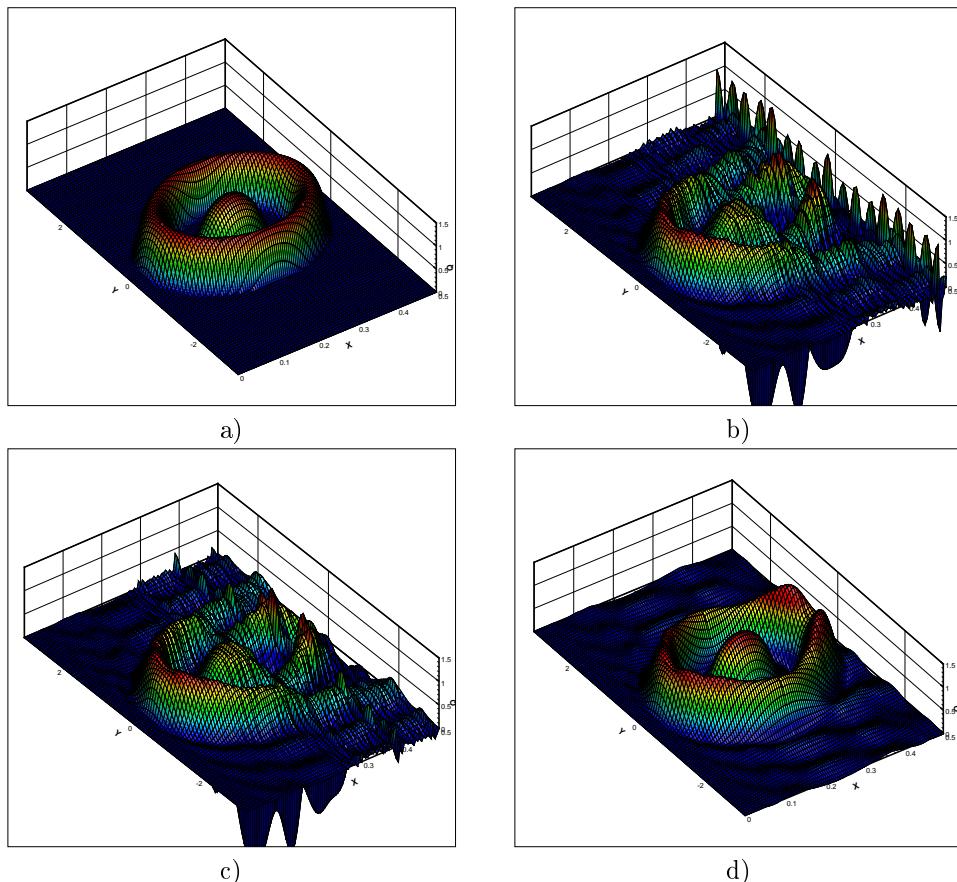


Рис. 3. Results of numerical experiments for $N = 8$: a) Exact Solution b) Solution by Monte-Carlo method, number of tests 500–2000, c) Solution by Monte-Carlo method, number of tests 1000–4000, d) SVD solution.

- [2] Благовещенский А.С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны. // Тр.Матем.Инст. АН СССР, 1971.

[3] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. // Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008.

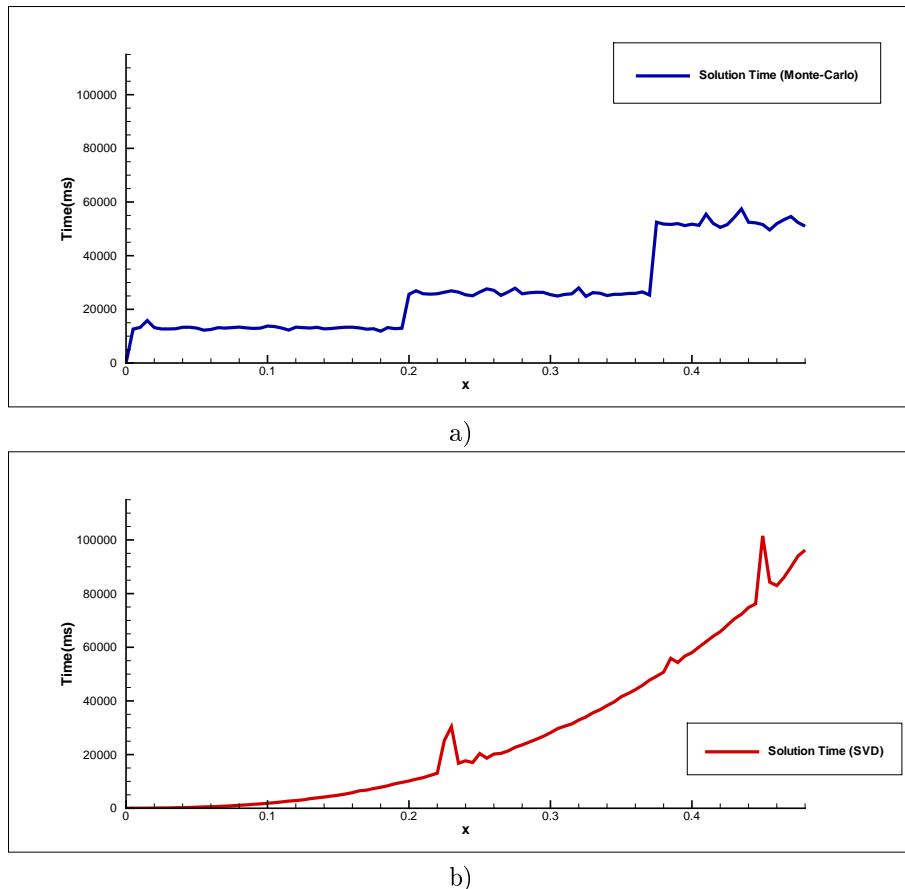


Рис. 4. Results of numerical experiments for $N = 8$: a) Span time for Monte-Carlo method b) Span time for SVD method.

- [4] Бибердорф Э.А. Гарантиированная точность в прикладных задачах линейной алгебры. // Новосиб. гос. Уп-т, Новосибирск, 2008.
- [5] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. // Москва, Наука, 1976
- [6] Белинская И.И. Решение некоторых гиперболических уравнений методом Монте-Карло. //Новосибирск, 1998.
- [7] Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Сравнительный анализ численных методов решения обратной задачи для волнового уравнения. Обратные задачи и информационные технологии, (2002), 1, No. 1, с. 49 - 71.
- [8] Кабанихин С.И.,Шишленин М.А. Решение обратной задачи акустики методами Гельфанд-Левитана и граничного управления. Обратные задачи и информационные технологии, 2003. 2. №1.
- [9] Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Comparative Anallysis of Boundary control and Gel'fand-Levitman methods of solving inverse acoustic problem. Inverse Problems In Ingineering Mechanics 4, International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics 2003 (ISIP 2003), Nagano, Japan. pp. 503-512.
- [10] Kabanikhin S.I. and Shishlenin M.A. Quasi-solution in inverse coefficient problems. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2008. Vol. 16, No.7, pp. 707-715.

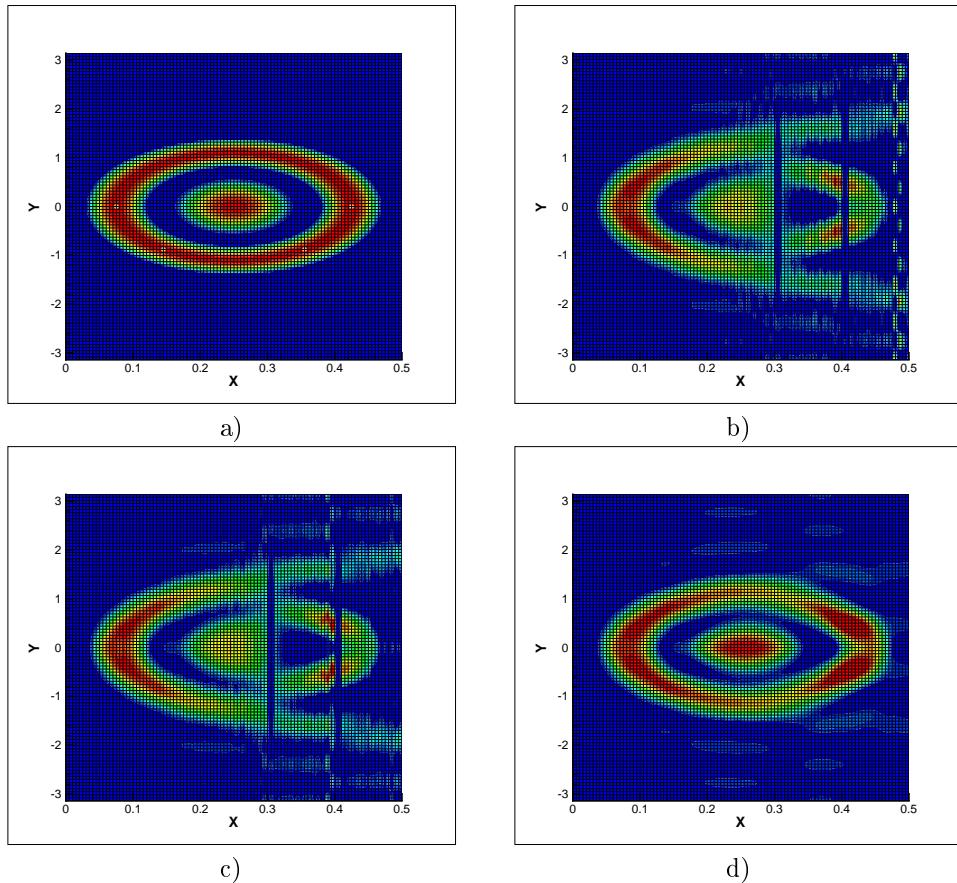


Рис. 5. Results of numerical experiments for $N = 8$: a) Exact Solution b) Solution by Monte-Carlo method, number of tests 500–2000, c) Solution by Monte-Carlo method, number of tests 1000–4000, d) SVD solution.

- [11] Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. De Gruyter, 2011, 471 pp.
- [12] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin. Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gelfand-Levit-Krein equation. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2011. Vol. 18, No. 9, pp. 979–996.

НИКИТА СЕРГЕЕВИЧ НОВИКОВ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: novikov-1989@yandex.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.145–С.155 (2014)

УДК 519.62/.64
MSC 13A99

ДВУМЕРНЫЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Д.Б. Нурсеитов, М.А.Шишленин, Б.Б.Шолпанбаев

ABSTRACT. В статье рассматривается двумерная обратная задача для уравнения геоэлектрики в линеаризованной постановке. Обратная задача решена оптимизационным методом. Выписаны градиенты функционалов. Приведены численные результаты решения обратной задачи по определению диэлектрической проницаемости слоистой среды и локализованных объектов.

Keywords: обратная задача, линеаризация, оптимизационный метод.

1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Рассмотрим постановки двумерной обратной задачи геоэлектрики [1, 6, 7, 8, 9, 10], об определении $\varepsilon(x, y)$ из соотношений:

$$(1) \quad \varepsilon(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma(x, y) \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{\mu} \Delta_{x,y} u, \quad (x, y) \in (0, L_x) \times (0, L_y), \quad t \in (0, 2L_x),$$

$$(2) \quad u|_{t<0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = r_0 \delta(t),$$

$$(3) \quad u|_{x=0} = f(y, t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, 2L_x)$$

NURSEITOV D.B., SHISHLENIN M.A., SHOLPANBAEV B.B., Two dimensional linearized inverse problems.

© 2014 Нурсеитов Д.Б., Шишленин М.А., Шолпанбаев Б.Б.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, совместного проекта СО РАН и НАН Украины и интеграционного проекта СО РАН 122.

Поступила 12 марта 2014 г., опубликована 25 декабря 2014 г.

по заданной дополнительной информации:

$$(4) \quad u|_{x=0} = f(y, t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, 2L_x)$$

Здесь: $u(x, y, t) = E_2(x, y, t)$ компонента электромагнитного поля, $\varepsilon(x, y)$ диэлектрическая проницаемость, считаем, что проводимость $\sigma(x, y)$, и магнитная проницаемость μ - известны.

Предположим что $\varepsilon(x, y)$, имеет следующую структуру:

$$(5) \quad \varepsilon(x, y) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x, y).$$

Полагаем, что функции $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x, y)$ удовлетворяют следующим условиям A_0 [5, 6]:

1. $\varepsilon_1 \in C^2(\bar{R}_+)$, $\varepsilon'_1(+0) = 0$;
2. Существуют константы M_1, M_2 и M_3 такие что при всех $x \in R_+$ имеет место: $0 < M_1 \leq \varepsilon_1(x) \leq M_2$, $\|\varepsilon_1\|_{C^2(R_+)} \leq M_3$;
3. Функция $\varepsilon_2(x, y)$ отлична от нуля при $(x, y) \in (0, L_x) \times (0, L_y)$, $\varepsilon_2(x, y) \in C^2((0, h) \times (0, L_y))$, $\alpha = \|\varepsilon_2\|_{C^2((0, h) \times (0, L_y))}$, $\alpha \ll M_1$.

Проведем линеаризацию, представим решение $u(x, y, t)$ граничной задачи (1)-(3) в виде:

$$(6) \quad u(x, y, t) = u_1(x, t) + u_2(x, y, t)$$

Здесь: $u_1(x, t)$ есть решение следующей граничной задачи:

$$(7) \quad \varepsilon_1(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1 + \sigma(x, \widehat{y}) \frac{\partial}{\partial t} u_1 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1, \quad x \in (0, L_x), \quad t \in (0, 2L_x)$$

$$(8) \quad u_1 \Big|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u_1 \Big|_{x=0} = r_0 \delta(t)$$

\widehat{y} - фиксированное значение переменной. Пренебрегая членом $\varepsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2$, получаем для определения $u_2(x, y, t)$ задачу:

$$(9) \quad \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2 + \sigma(x, y) \frac{\partial}{\partial t} u_2 = \frac{1}{\mu} \Delta_{x,y} u_2 - \varepsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1 \quad (x, y) \in (0, 2L_x) \times (0, L_y), \quad t < 2L_x$$

$$(10) \quad u_2|_{t<0} = 0 \quad (u_2)_t|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u_2|_{x=0} = 0$$

$$(11) \quad u|_{\partial K_n(D)} = 0 \quad x \in (0, 2L_x), \quad t < 2L_x$$

Дополнительная информация для задачи (9)-(11) об определении $u_2(x, y, t)$ и функции $\varepsilon_2(x, y)$, примем в виде:

$$(12) \quad u_2|_{x=0} = g(y, t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, 2L_x)$$

где: $g(y, t) = f(y, t) - u_1(0, t)$

В качестве дополнительной информации для задачи (7)-(8), об определении $u_1(x, t)$ и функции $\varepsilon_1(x)$, примем

$$(13) \quad u_1|_{x=0} = f(\bar{y}, t), \quad t \in (0, 2L_x)$$

Таким образом, решение обратной задачи (1)-(4), об определении $\varepsilon(x, y)$ и функции $u(x, y, t)$ состоит из следующих этапов:

1. Решаем обратную задачу (**обратная задача 1**), об определении $\varepsilon_1(x)$ и функции $u_1(x, t)$ на глубину h из соотношений (7)-(8) по известной дополнительной информации (13).

2. Решаем прямую задачу (7)-(8) на глубину h и определяем $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1$ (входит в правую часть уравнения (9)).

3. Решаем обратную задачу (**обратная задача 2**), об определении $\varepsilon_2(x, y)$ из соотношений (9)-(11) по известным уже функциям $\varepsilon_1(x)$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1$ и дополнительной информации $g(y, t)$.

Приведем задачу (7)-(8) к более удобному для исследования виду. С этой целью введем новую переменную

$$(14) \quad x = \psi(z), \quad \psi(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{\varepsilon_1(\xi)},$$

и новые функции

$$(15) \quad \begin{aligned} S(x) &= \sqrt{\varepsilon_1(z)} / \sqrt{\varepsilon_1(+0)}, & v(x, t) &= u_1(z, t) / S(x), \\ a(x) &= S''(x) / S(x) - 2[S'(x)]^2 / S^2(x). \end{aligned}$$

В силу условия **A₀** функция $\psi(z)$ имеет обратную $z = \psi^{-1}(x)$, поэтому функции S , v , a определены корректно.

Если продолжить все рассматриваемые функции четным образом по x в \mathbb{R}_- , то $v(x, t)$ будет решением задачи

$$(16) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a(x)v, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+;$$

$$(17) \quad v|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 2\gamma\delta(x).$$

Здесь $\gamma = -r_0\varepsilon_1(+0)$.

Решение задачи (16), (17) можно представить в виде

$$v(x, t) = \gamma\theta(t - |x|) + p(x, t).$$

Подставив данное представление в (16), получим, что $p(x, t)$ является решением задачи

$$(18) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + a(x)p + \gamma\theta(t - x)a(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+;$$

$$(19) \quad p|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Для $p(x, t)$ определим

$$\mathcal{A}_{x,t}[p(\xi, \tau)] \equiv \mathcal{A}_{x,t}[p] = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} p(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда, используя формулу Даламбера для представления решения задачи Коши (18), (19), приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $p(x, t)$:

$$(20) \quad p(x, t) = I(x, t) + \mathcal{A}_{x,t}[ap], \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Здесь

$$I(x, t) = (\gamma/2)\mathcal{A}_{x,t}[a(\xi)\theta(\tau - |\xi|)].$$

Учитывая четность $a(x)$, свойства функции Хевисайда и совершая очевидные преобразования, получим полезные в дальнейшем равенства

$$(21) \quad \frac{\partial}{\partial x} I(x, t) = \frac{\gamma}{2} \int_0^t a(\xi)\theta(t - |\xi|)|_{\xi=x-t+\tau}^{\xi=x+t-\tau} d\tau;$$

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, t) &= \frac{\gamma}{2} \theta(t)[\delta(t+x) + \delta(t-x)] \int_0^t a(\xi)d\xi + \\ &+ \frac{\gamma}{4} \theta(t-|x|) \left[a\left(\frac{t+x}{2}\right) + a\left(\frac{t-x}{2}\right) - 4a(x) \right]. \end{aligned}$$

Лемма 1. Предположим, что $a \in C(\mathbb{R})$. Тогда при любых $x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ решение интегрального уравнения (20) существует и единственно в $C(\Delta(x_0, t_0))$,

$$\Delta(x_0, t_0) = \{(\xi, \tau) \mid \tau \in (0, t_0), \xi \in (x_0 - t_0 + \tau, x_0 + t_0 - \tau)\},$$

и имеет место оценка

$$(23) \quad \|p\|_{C(\Delta(x_0, t_0))} \leq (\gamma/2)t_0^2 M_4 e^{t_0 \sqrt{M_4}},$$

где $M_4 = \|a\|_{C(\mathbb{R})}$.

Лемма 2. Пусть $a \in \bar{C}(\mathbb{R})$, $\bar{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ – множество функций $p(x, t)$ непрерывных в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ всюду, кроме, возможно линии, $t = |x|$. Тогда решение интегрального уравнения (20) имеет частные производные первого порядка по t и x , принадлежащие классу $\bar{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ и удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(\xi, \tau) \in \Delta(x, t) \\ |\xi| \neq \tau}} |p'_{(m)}(\xi, \tau)| &\leq \gamma t M_4 [1 + (\gamma/2)t^2 M_4 e^{t \sqrt{M_4}}], \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad m = 1, 2, \\ p'_{(1)}(x, t) &= \frac{\partial p}{\partial x}(x, t), \quad p'_{(2)}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial t}(x, t). \end{aligned}$$

Лемма 3. Если $a \in C(\mathbb{R})$, то решение уравнения (20) имеет частную производную по x второго порядка, принадлежащую классу $C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-)$, имеющую вид

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, t) - a(x)p(x, t) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t [a(x+t-\tau)p'_{(2)}(x+t-\tau, \tau) + a(x-t+\tau)p'_{(2)}(x-t+\tau, \tau)]d\tau, \end{aligned}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$, и удовлетворяющую неравенству

$$\sup_{(\xi, \tau) \in \Delta(x, t), |\xi| \neq \tau} \left| \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2}(\xi, \tau) \right| \leq \gamma M_5,$$

$$\text{где } M_5 = M_4 [3/2 + T_h^2 M_4 + (1/2)T_h^2 M_4 (1 + T_h^2 M_4) e^{T_h \sqrt{M_4}}].$$

Теорема 1. Предположим, что ε_1 удовлетворяет условию **A₀**. Тогда решение задачи (7)–(8) существует, принадлежит классу C^2 ($t > \psi(z) > 0$) и имеет структуру

$$(25) \quad u_0(z, t) = \gamma S(\psi(z))\theta(t - \psi(z))p(\psi(z), t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad z \in \mathbb{R}_+.$$

1.1. Теорема существования решения прямой задачи. Переайдем к исследованию прямой задачи (9)–(11). Определим

$$w(x, y, t) = u_1(z, y, t)/S(x), \quad q(x, y) = \varepsilon_2(z, y), \quad b(x) = \varepsilon_1(z),$$

где $z = \psi^{-1}(x)$ (см. (14)), и, используя четное продолжение по x , получим для w начально-краевую задачу

$$(26) \quad Lw = q(x, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x \in (-h_1, h_1), \quad y \in \mathcal{K}_n(\mathcal{D}), \quad t \leq T_{h_1};$$

$$(27) \quad w|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0;$$

$$(28) \quad w|_{\partial \mathcal{K}_n(\mathcal{D})} = 0.$$

Здесь

$$(29) \quad Lw = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b^2(x)\Delta_y - a(x) \right) w, \quad h_1 = \psi(h),$$

функции $v(x, t)$ и $a(x)$ определены в (15). Учитывая представление (25), нетрудно вычислить предел функции $w(x, y, t)$ при $|x| \rightarrow t - 0$:

$$(30) \quad \lim_{|x| \rightarrow t-0} w(x, y, t) = \gamma q(t, y)/4.$$

Следовательно, вместо задачи (26)–(28) можно ограничиться исследованием задачи

$$(31) \quad Lw = q(x, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Delta(T), \quad y \in \mathcal{K}_n(\mathcal{D}), \quad t \in (0, T_{h_1});$$

$$(32) \quad w(x, y, |x|) = \gamma q(x, y)/4, \quad x \in (-T, T);$$

$$(33) \quad w|_{\partial \mathcal{K}_n(\mathcal{D})} = 0.$$

Здесь $T \in (0, T_{h_1}/2)$; $\Delta(T) = \{(x, t) : x \in (-T, T), t \in (|x|, 2T - |x|)\}$.

Предположим, что классическое решение задачи (31)–(33), т. е. функция

$$w(x, y, t) \in C^2(\Delta(T) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D})) \cap C^1(\overline{\Delta(T)} \times \overline{\mathcal{K}_n(\mathcal{D})}),$$

удовлетворяющая уравнению (31) и граничным условиям (32) и (33), существует. Умножим обе части (31) на w_t и проинтегрируем по области

$$\Omega(T, t) = \Delta_t(T) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}), \quad t \in (0, 2T),$$

$$\Delta_t(T) = \Delta(T) \cap \{(x, t') \mid t' < t\}.$$

Применяя после стандартных преобразований формулу Остроградского, получим тождество

$$(34) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|^2(t) + \left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\|^2(t) + \|b|\nabla_y w|^2\|(t) \right] = \\ = \int_{S_t} (\Phi, \bar{n}) \S + \int_{\Omega(T, t)} \frac{\partial w}{\partial t} \left(aw + q \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Здесь $S_t = \partial(\Delta(T) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D})) \cap \{(x, y, t) : t' < t\}$; \bar{n} — вектор внешней нормали к S_t ;

$$\Phi = \left(-\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x}, -b^2 \frac{\partial w}{\partial t} \nabla_y w, \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + b^2 |\nabla_y w|^2 \right] \right),$$

$$\|w\|^2(t) = \begin{cases} \int_{-t}^t \int_{\mathcal{K}_n(\mathcal{D})} w^2(x, y, t) \, dy \, dx, & t \in [0, T], \\ \int_{t-T}^{T-t} \int_{\mathcal{K}_n(\mathcal{D})} w^2(x, y, t) \, dy \, dx, & t \in [T, 2T]. \end{cases}$$

Лемма 4. Предположим, что $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z, y)$ удовлетворяют условию **A₀**, а коэффициенты оператора L и начально-краевые условия задачи (31)–(33) построены по функциям $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z, y)$ указанным выше способом. Тогда классическое решение задачи (31)–(33) единственно и удовлетворяет неравенству

$$(35) \quad \|w\|_1(t) \leq M_6 \|q\|_{W_2^1([-T, T] \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}))}, \quad t \in [0, 2T],$$

где постоянная M_6 зависит только от M_j , $j = \overline{1, 5}$ (здесь и далее $j = \overline{m, n}$ означает, что j пробегает все целые значения от m до n);

$$\|w\|_1^2(t) = \|w\|^2(t) + \|\nabla_{x,y,t} w\|^2(t), \quad t \in [0, 2T].$$

Для определения обобщенного решения задачи (31)–(33) и доказательства его существования воспользуемся некоторой модификацией метода Фурье: разделим переменные не как обычно — на пространственные и временную, а будем искать решение в виде суммы функций типа $X(x, t)Y(y)$.

Будем говорить, что функция $w(x, y, t)$ принадлежит классу $\mathcal{P}(T, \mathcal{D})$, если $w(x, y, t)$ непрерывна в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ по переменным $(x, t) \in \overline{\Delta(T)}$, т. е. если для любой пары $(x, t) \in \overline{\Delta(T)}$ выполняется условие

$$\lim_{(x', t') \rightarrow (x, t)} \|w(x', y, t') - w(x, y, t)\|_{L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))} = 0.$$

При доказательстве теоремы существования обобщенного решения задачи (31)–(33) используем очевидные модификации известных утверждений.

Лемма 5. Пусть последовательность $\{u_m(x, y, t)\}$, $u_m \in \mathcal{P}(T, \mathcal{D})$, сходится к функции $u(x, y, t)$ в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ равномерно по $(x, t) \in \overline{\Delta(T)}$. Тогда $u \in \mathcal{P}(T, \mathcal{D})$.

Лемма 6. Пусть последовательность функций $\{u_m(x, y, t)\}$, $u_m \in \mathcal{P}(T, \mathcal{D})$ сходится в себе в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ равномерно по $(x, t) \in \overline{\Delta(T)}$. Тогда существует $u \in \mathcal{P}(T, \mathcal{D})$, такая, что последовательность $\{u_m(x, y, t)\}$ сходится к $u(x, y, t)$ в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ равномерно по $(x, t) \in \overline{\Delta(T)}$.

Лемма 7. Пусть $\varepsilon_1(z)$ и $\varepsilon_2(z, y)$ удовлетворяют условию **A₀**. Предположим, что существует такая последовательность функций $\{\bar{q}_m(x, y)\}$,

$\bar{q}_m \in C^1([-T, T] \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$, $m = 1, 2, \dots$, что

1) $\lim_{m \rightarrow \infty} \|q - \bar{q}_m\|_{W_2^1([-T, T] \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}))} = 0$;

2) при каждом $m = 1, 2, \dots$ существует классическое решение $\bar{w}_m(x, y, t)$ задачи (31)–(33) для $q = \bar{q}_m(x, y)$.

Тогда существует функция $w \in \mathcal{P}(T, \mathcal{D})$, такая, что

$$(36) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|w - \bar{w}_m\| = 0.$$

Функцию $w(x, y, t)$ назовем *обобщенным решением* задачи (31)–(33).

Используя лемму 4 и лемму 5, можно показать, что таким образом определенное обобщенное решение удовлетворяет уравнению (31) в обобщенном смысле.

Теорема 2. *Предположим, что $\varepsilon_1(z)$ и $\varepsilon_2(z, y)$ удовлетворяют условию **A₀**. Тогда для любого $T \in (0, T_h)$ обобщенное решение задачи (31)–(33) существует и единственно.*

Представим $q(x, y)$ в виде

$$(37) \quad q(x, y) = \sum_k q_k(x) Y_k(y).$$

Здесь

$$Y_k(y) = \exp\left(\frac{i\pi}{D} \langle k, y \rangle\right), \quad k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad \langle k, y \rangle = \sum_{j=1}^n k_j y_j,$$

\sum_k означает суммирование по всем $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, n}$.

В силу условия **A₀** ряд в (37) сходится в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ к $q(x, y)$ равномерно по $x \in [-T, T]$.

Обобщенное решение задачи (31)–(33) будем искать в виде ряда

$$(38) \quad w(x, y, t) = \sum_k w_k(x, t) Y_k(y), \quad (x, t) \in \Delta(T),$$

где $w_k(x, t)$ — классическое решение задачи

$$(39) \quad L_k w_k = q_k(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Delta(T);$$

$$(40) \quad w_k(x, |x|) = \gamma q_k(x)/4, \quad x \in [-T, T];$$

$$(41) \quad L_k = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2(x)|k|^2 - a(x), \quad |k|^2 = \sum_{j=1}^n k_j^2.$$

Лемма 8. *При выполнении условия теоремы 2 классическое решение задачи (39), (40) при любом $k \in \mathbb{Z}^n$ существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|w_k\|_{C(\overline{\Delta(T)})} \leq \frac{1}{4} (1 + 4T_h M_5) \|q_k\|_{C^1[-T, T]} e^{(1+M_2^2|k|^2)T_h}.$$

1.2. Единственность решения обратной задачи и регуляризация.

Теорема 3. *Предположим, что $\varepsilon_1(z)$ удовлетворяет условию **A₀** (пункты 1, 2). Тогда решение обратной задачи (9)–(12) единствено в классе функций $\varepsilon_2(z, y)$, удовлетворяющих условию **A₀** (пункты 3, 4).*

Теорема 4. *Предположим, что $\varepsilon_1(z)$ удовлетворяет условию **A₀**. Предположим также, что для каждой функции $g^{(m)}(y, t)$, $m = 1, 2$, выполнены условия:*

- 1) $g^{(m)}(y, t) = \sum_k g_k^{(m)}(t) Y_k(y)$, $m = 1, 2$;
- 2) $g^{(m)}(y, t)$ непрерывны в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ по t на отрезке $[0, T_h]$;
- 3) для $g^{(m)}(y, t)$, $m = 1, 2$, существует решение $c_1^{(m)}(z, y)$, $m = 1, 2$, обратной задачи (9)–(12), удовлетворяющее условию **A₀**.

Тогда при любом $k \in F^n$ имеет место неравенство

$$(42) \quad \|q_k^{(1)} - q_k^{(2)}\|_{C[-T, T]} \leq \omega(k) \|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\|_{C[0, T_h]},$$

где $T \in (0, T_h)$; $q^{(m)}(x, y) = \varepsilon_2^{(m)}(\psi^{-1}(x), y) = \sum_k q_k^{(m)}(x) Y_k(y)$; $\omega(k) = M_9 e^{T_h \sqrt{M_8}}$;
 $M_8 = 4M_5 [1 + T_h^2 e^{T_h \sqrt{|k|^2 M_2^2 + M_4}}]$; $M_9 = M_8 / (\gamma M_5)$.

$$(43) \quad \begin{aligned} \frac{\gamma}{4} q_k^{(m)}(t) &= -B_{t,t}[q_k^{(m)} v''_{(1)}] + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\xi^{2t-\xi} R_k(t-0, t, \xi, \tau) \Phi_k^{(m)}(\xi, \tau) d\tau d\xi + \\ &+ G_k^{(m)}(t-0, t) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\xi^{2t-\xi} R_k(t-0, t, \xi, \tau) G_k^{(m)}(\xi, \tau) d\tau d\xi, \end{aligned}$$

$t \in [0, T], \quad m = 1, 2.$

Теорема 5. Предположим, что ε_1 удовлетворяет условию **A₀**. Предположим также, что для $g(y, t)$, непрерывной в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ по t на отрезке $[0, T_h]$, существует решение обратной задачи (9)–(12), удовлетворяющее условию **A₀**. Пусть $g_\varepsilon(y, t)$ непрерывна в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ по t на $[0, T_h]$ и удовлетворяет неравенству

$$\max_{t \in [0, T_h]} \|g - g_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))} \leq \epsilon.$$

Обозначим

$$b_N^{(\varepsilon)}(x, y) = \sum_{|k| \leq N} q_k^{(\varepsilon)}(x) Y_k(y),$$

где $q_k^{(\varepsilon)}(x)$ есть решение интегрального уравнения (43), в которое вместе с $g_k^{(m)}(t)$ подставлен коэффициент Фурье $g_k^{(\varepsilon)}(t)$ функции $g_\varepsilon(y, t)$:

$$g_\varepsilon(y, t) = \sum_k g_k^{(\varepsilon)}(t) Y_k(y).$$

Тогда имеет место оценка

$$(44) \quad \|q - b_N^{(\varepsilon)}\|_{L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))} \leq \omega(N) \epsilon + M/N, \quad t \in [0, T],$$

где

$$M = \max_{x \in [0, T_h]} \|q\|_{W_2^1(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))}.$$

2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1.

Конкретизируем постановку обратной задачи 1. Найти $\varepsilon_1(x)$ и функцию $u_1(x, t)$ из соотношений:

$$(45) \quad \varepsilon_1(t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1 + \sigma(x, \bar{y}) \frac{\partial}{\partial t} u_1 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1, \quad x \in (0, L_x), \quad t \in (0, 2L_x)$$

$$(46) \quad u_1|_{t=0} = 0, \quad (u_1)_t|_{t=0} = 0,$$

$$(47) \quad \frac{\partial}{\partial x} u_1|_{x=0} = r_0 \delta(t)$$

по известной дополнительной информации:

$$(48) \quad u_1|_{x=0} = f(\widehat{y}, t), \quad t \in (0, 2L_x)$$

Для решения обратной задачи 1 применяем оптимизационный метод [2]. Пусть $q(x)$ – приближенное решение обратной задачи (45)-(48). Рассмотрим квадратичный функционал:

$$(49) \quad J_1(q) = \int_0^{2L_x} [u_1(0, \widehat{y}, t; q) - f(\widehat{y}, t)]^2 dt$$

Приближение $q^{(n+1)}(x)$, определим методом наискорейшего спуска [3]:

$$q^{(n+1)}(x) = q^{(n)}(x) - \alpha_n \nabla J_1(q^{(n)}),$$

Здесь: α_n - коэффициент спуска, а градиент функционала (49), определяется из соотношения:

$$\nabla J_1(q^{(n)}) = \int_0^{2L_x} \psi(x, \widehat{y}, t; q^{(n)}) (u_1)_{tt} dt,$$

где: $\psi(x, \widehat{y}, t; q^{(n)})$ - есть решение соответствующей сопряженной задачи:

$$(50) \quad q(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \sigma \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi, \quad x \in (0, L_x), \quad t \in (0, 2L_x)$$

$$(51) \quad \psi|_{t=2L_x} = 0, \quad \psi_t|_{t=2L_x} = 0,$$

$$(52) \quad \psi_x|_{x=0} = 2[u_1(0, t; q) - f(t)]$$

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 2

Конкретизируем постановку обратной задачи 2. Найти $\varepsilon_2(x, y)$ и функцию $u_2(x, y, t)$ из соотношений:

$$(53) \quad \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2 + \sigma \frac{\partial}{\partial t} u_2 = \frac{1}{\mu} \Delta_{x,y} u_2 - \varepsilon_2(x, y) Q(x, t), \quad (x, y) \in (0, L_x) \times (0, L_y), \quad t < 2L_x$$

$$(54) \quad u_2|_{t=0} = 0, \quad (u_2)_t|_{t=0} = 0,$$

$$(55) \quad u|_{y=0} = 0, \quad x \in (0, L_x), \quad t < 2L_x$$

По известной дополнительной информации

$$(56) \quad u_2|_{x=0} = g(y, t), \quad y \in (0, L_x), \quad t \in (0, 2L_x)$$

А также, по уже известным вычислениям обратной задачи 1, имеем $\varepsilon_1(x)$ и

$$Q(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1$$

Пусть $p(x, y)$ – есть приближенное решение обратной задачи (53)-(56), рассмотрим функционал:

$$(57) \quad J_2(p^{(n)}(x, y)) = \int_0^{2L_x} \int_{-D}^D [u_2(0, y, t; p^{(n)}) - g(y, t)] dy dt$$

Используем как и выше, итерационный метод:

$$p^{(n+1)}(x, y) = p^{(n)}(x, y) - \alpha_n \nabla J_2(p^{(n)}),$$

Где градиент функционала (57), определяется по формуле:

$$\nabla J_2(q^{(n)}) = \int_0^{2L_x} \varphi(x, y, t; q^{(n)}) Q(x, t) dt,$$

Здесь функция $Q(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1$ считается уже вычисленной на предыдущем этапе, а $\varphi(x, y, t; q^{(n)})$ есть решение следующей сопряженной задачи:

$$(58) \quad \varepsilon_1(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \delta(x, y) \frac{\partial}{\partial t} \varphi + p(x, y) Q(x, t) = \frac{1}{\mu} \Delta_{x,y} \varphi, \quad (x, y) \in (0, L_x) \times (0, L_y), \quad t \in (2L_x, 0),$$

$$(59) \quad \varphi|_{t=2L_x} = 0, \quad \varphi_t|_{t=2L_x} = 0,$$

$$(60) \quad \varphi_x|_{x=0} = 2[u_1(0, y, t; p^{(n)}) - g(y, t)], \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, 2L_x),$$

$$(61) \quad \varphi|_{y=0} = 0, \quad x \in (0, L_x), \quad t \in (0, 2L_x).$$

Для численного решения прямой задачи (53)-(55) и вспомогательной задачи (58)-(61) используем схему расщепления [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.Г.Романов, С.И.Кабанихин, *Обратная задача геоэлектрики*, М.: Наука, 1991. - 303с.
- [2] С.И.Кабанихин, К.Т.Искаков, *Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач*, НГУ, Новосибирск, 2001. - 315 с.
- [3] Ф.П.Васильев., *Методы решения экстремальных задач*, М.: Наука, 1981. – 400 с.
- [4] А.А.Самарский, *Теория разностных схем.*, М. Наука. 1975.
- [5] Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Линеаризованная многомерная обратная задача для волнового уравнения. Обратные задачи и информационные технологии, 2002, 1, №2, с. 83-114.
- [6] Kabanikhin S.I., Satybaev A.D., Shishlenin M.A. Direct methods of solving inverse hyperbolic problems. 2004. VSP/BRILL, the Netherlands.
- [7] Kabanikhin S.I. and Shishlenin M.A. Quasi-solution in inverse coefficient problems. // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. 16, 707-715.
- [8] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, D.B. Nursetov, A.T. Nursetova and S.E. Kasenov. Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation. Journal of Applied Mathematics, 2014, (2014), <http://dx.doi.org/10.1155/2014/786326>, 7 pages.
- [9] S.I. Kabanikhin, Y.S. Gasimov, D.B. Nursetov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev and S. Kasenov. Regularization of the continuation problem for elliptic equations. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013/ Vol. 21 6, pp. 871-884.

- [10] S.I. Kabanikhin, D.B. Nurseitov, M.A. Shishlenin and B.B. Sholpanbaev. *Inverse problems for the ground penetrating radar*. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013. Vol. 21 **6**, pp. 885-892.

Данияр Борисович Нурсейтов

NATIONAL OPEN RESEARCH LABORATORY OF INFORMATION AND SPACE TECHNOLOGIES KAZNTU,
AV. SATPAEV, 22,

050013, ALMATY, KAZAKHSTAN

E-mail address: d.nurseitov@norlist.kz

Максим Александрович Шишленин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. АКАДЕМИКА КОПТОУГА 4,

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,

ул. Пирогова 2,

630090, Новосибирск, Россия

E-mail address: mshishlenin@math.nsc.ru

Бакытгерей Бактурович Шолпанбаев

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АБАЯ,

пр. Достык 13,

050010, Алматы, Казахстан

E-mail address: Bahtygeray@mail.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.156–С.160 (2014)

УДК 519.62
MSC 13A99

ON SOLVABILITY OF INTERPOLATION PROBLEM FOR
RATIONAL FUNCTIONS

V.G. CHEREDNICHENKO

ABSTRACT. Unlike the polynomial interpolation, where the solution exists, is unique, and can be written explicitly, the problem of rational interpolation may have no solution. The system of algebraic equations which we obtain may be arbitrary “bad”. The author [1] has developed the approach based on the algebra of rational functions which leads to the explicit solution without use of systems. This method allows us to describe the cases of solvability which have the spectral nature..

Keywords: polynomial interpolation, rational functions, stability.

Introduce the polynomial Q_m , P_n of the degrees no more than m , n respectively and the rational function

$$R_n^m(z) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}.$$

Problem R. Let m , n be nonnegative integers, $m + n = N$, $N \geq 1$. Suppose that

$$(1) \quad (z_k, w_k), \quad k = 1, 2, \dots, N+1,$$

are the pairs of complex numbers, where z_k are distinct. To find rational functions R_{N-m}^m , $m = N, N-1, \dots, 0$ which satisfy the conditions

$$(2) \quad R_{m-n}^m(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \dots, N+1.$$

We may assume that $w_k \neq 0$, otherwise, the dimension of the problem may be decreased.

It is easy to proof the uniqueness of solution of this interpolation problem, however, the solution exists not always. We shall consider this problem now.

CHEREDNICHENKO V.G. ON SOLVABILITY OF INTERPOLATION PROBLEM FOR RATIONAL FUNCTIONS.

© 2014 CHEREDNICHENKO V.G.

Поступила 12 февраля 2014 г., опубликована 20 декабря 2014 г.

The coefficients of the desired polynomials satisfy the following system of linear equations:

$$(3) \quad Q_m(z_k) = w_k P_n(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, N+1.$$

It is clear that if Q_m, P_n solve the problem R , then $\gamma Q_m, \gamma P_n$ also solve the problem for each constant γ .

Since the numbers w_k are arbitrary, the rank of system (2) may vary. In monograph [1] there is given the survey of this “multipointed approximation of Padé”.

The author have chosen another method [2–5] of this classical problem based on the algebra of rational functions. We shall construct the solution explicitly and will not use the system of linear equations. Using the data of problem (1) we introduce the two polynomials: $Q_n(z)$ — the classical interpolant and the nodal polynomial

$$\Omega_{N+1}(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{N+1}).$$

These polynomials contain all the information about the problem. Further, we construct the polynomials:

$$H_m(z), \quad m = N, N_1, \dots, 0: \quad H_N = Q_N, \quad \frac{\Omega_{N+1}}{Q_N} = A_1^{(1)} + \frac{H_{N-1}}{Q_N},$$

$$\frac{Q_N}{H_{N-1}} = A_1^{(2)} + \frac{H_{N-2}}{H_{N-1}}, \quad \dots, \quad \frac{H_2}{H_1} = A_1^{(N)} + \frac{H_0}{H_1}.$$

Here $A_1^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N$ are first degree polynomials. Such method is called the Euclidean algorithm.

Теорема 1 ([2]). *The numerator of the desired rational function is defined by the formula*

$$Q_m = (-1)^{N-m} H_m, \quad m = N-1, N-2, \dots, 0.$$

The problem is really solved, since further we take any $(N-m+1)$ conditions from (1) and find the interpolant

$$P_{N-m}(z_k) = \frac{Q_m(z_k)}{Q_N(z_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N-m+1,$$

where the right-hand side is already known.

Теорема 2. *Let $0 \leq m \leq N$ be fixed. The problem R has the solution of the form Q_m/P_{N-m} if*

$$(4) \quad P_{N-m}(z_k) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N+1.$$

Really, in this case the homogeneous system (3) has nontrivial solutions; therefore, the initial system (2) is solvable.

Note the the polynomial P_{N-m} is not known before we solve the problem and the condition (4) is not constructive. However, with the use of theorem 1 we easily find P_{N-m} .

The data (1) for determination of R_{N-m}^m we shall call singular if for at least one $k, 1 \leq k \leq N+1$

$$(5) \quad P_{N-m}(z_k) = 0.$$

Следствие 1. *There exist no more then $N+1$ singular cases for determining R_{N-m}^m .*

Suppose, for example, that we seek for the interpolant Q_{N-1}/P_1 , if

$$\Omega_{N+1}(z) = (z - z_1) \dots (z - z_{N+1}) = z^{N+1} + a_1 z^N + a_2 z^{N-1} + \dots + a_{N+1}$$

$$(-a_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_N),$$

$$Q_N = b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N, \quad b_0 \neq 0,$$

$$\frac{\Omega_{N+1}}{Q_N} = P_1(z) + \frac{H_{N-1}}{Q_N}, \quad P_1(z) = \frac{1}{b_0} \left[z + \left(a_1 - \frac{b_1}{b_0} \right) \right].$$

The singular cases:

$$(6) \quad P_1(z_k) = 0, \quad b_1 = b_1^{(k)} = b_0(z_k + a_1), \quad k = 1, 2, \dots, N+1.$$

Теорема 3. *The singular cases for the interpolational problem for R_1^{N-1} are given by formulas (6).*

Example 1. Let

$$z_k = k, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (N = 3), \quad Q_3 = z^3 + b_1 z^2,$$

$$\Omega_{n+1}(z) = z^4 - 10z^3 + 35z^2 - 50z + 24 \quad (a_1 = -10).$$

The singular cases for the interpolant Q_2/P_1 :

$$b_1^{(1)} = -9, \quad b_1^{(2)} = -8, \quad b_1^{(3)} = -7, \quad b_1^{(4)} = -6.$$

In the three-dimensional space of coefficients (b_1, b_2, b_3) there are four singular points on the b_1 -axis and b_2, b_3 are arbitrary. In this example the interpolation problem for all these cases is unsolvable. For another b_1 -values we have

$$\frac{Q_2}{P_1} = \frac{-[35 + b_1(b_1 + 10)]z^2 - 507 + 24}{z - (b_1 + 10)}.$$

The problem of interpolation by the functions Q_2/P_1 for nodes mentioned above is investigated. We see that the problem of solvability of interpolation by rational functions has the spectral character.

We consider now another method of solution of this problem in explicit form.

Лемма 1. *Let $m \geq n$ and*

$$(7) \quad \frac{Q_m(z_k)}{P_n(z_k)} = W_k, \quad k = 1, 2, \dots, m-n+1.$$

Then, the following representation holds

$$\frac{Q_m(z)}{P_n(z)} = T_{m-n}(z) + \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{m-n+1})Q_{n-1}(z)}{P_n(z)},$$

$$(8) \quad T_{m-n}(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \dots, m-n+1.$$

Really, in the right-hand side the function of the form R_n^m is written. All the conditions (8) evidently hold.

This formula generalizes the interpolation Newton polynomial and represents the solution of the interpolational problem explicitly.

Really, the Newton formula is as follows:

$$F_n(z) = \lambda_1 + \lambda_2(z - z_1) + \dots + \lambda_{n+1}(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

Using this formula for $n = 1$ we obtain from (8)

$$\frac{Q_1(z)}{P_1(z)} = \lambda_1 + \frac{(z - z_1)}{\lambda_2 + \lambda_3(z - z_2)}, \quad \lambda_k = \text{const}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Substituting here $z = z_1, z_2, z_3$ subsequently, we have

$$\lambda_1 = w_1, \quad \lambda_2 = \frac{z_2 - z_1}{w_2 - w_1}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{z_3 - z_2} \left(\frac{z_3 - z_1}{w_3 - w_1} - \frac{z_2 - z_1}{w_2 - w_1} \right).$$

Acting analogously, we obtain

$$\frac{Q_2}{P_1} = \lambda_1 + \lambda_2(z - z_1) + \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{\lambda_3 + \lambda_4(z - z_3)},$$

$$\frac{Q_1}{P_2} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2(z - z_1) + \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{\lambda_3 + \lambda_4(z - z_3)}},$$

$$\frac{Q_2}{P_2} = \lambda_1 + \frac{z - z_1}{\lambda_2 + \lambda_3(z - z_2) + \frac{(z - z_2)(z - z_3)}{\lambda_4 + \lambda_5(z - z_4)}} \quad \text{and so on.}$$

Thus, we have constructed the second effective method of solution of the interpolational problem for rational functions; and we do not use here the system of linear equations.

Example 2. Construct the interpolant Q_1/P_3 , given (z_k, w_k) , $k = 1, 2, \dots, 5$.

Using the lemma, we can write

$$\frac{Q_1}{P_3} = \frac{1}{\frac{P_3}{Q_1}} = \frac{1}{T_2(z) + \frac{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}{Q_1(z)}}.$$

Substituting here z_1, z_2, z_3 , we have

$$T_2(z_1) = \frac{1}{w_1}, \quad T_2(z_2) = \frac{1}{w_2}, \quad T_2(z_3) = \frac{1}{w_3},$$

thus, we have found $T_2(z)$. Further, we use the remained nodes z_4, z_5 to derive $Q_1(z)$.

Let, concretely, $z_k = 0, 1, 2, 3, 4$, $W_k = -10, -9, -2, 17, 54$ ($Q_3(z) = z^3 - 10$), then

$$T_2(z) = -\frac{1}{90}(17z^2 - 16z + 9), \quad T_2(3) = -\frac{19}{15}, \quad T_2(4) = -\frac{217}{90};$$

therefore,

$$Q_1(3) = \frac{765}{169}, \quad Q_1(4) = \frac{405}{41}, \quad Q_1(z) = \frac{15}{169} \left[51 + \frac{2472}{41}(z - 3) \right].$$

Thus, the interpolant $Q_1(z)/P_3(z) \ll Q_3(z)$ is constructed.

At the same time we have found the approximate solution of the equation $z^3 - 10 = 0$, namely $z = 2.1541$ (more explicitly $z = 2.1543$). Note, that on the base of Theorem 1, for solving this problem we divide the polynomials twice

$$\frac{\Omega_5}{Q_3} = T_2 + \frac{H_2}{Q_3}, \quad \frac{Q_3}{H_2} = A_1 + \frac{H_1}{H_2}, \quad H_1(z) = 0, \quad z = 2.154.$$

This method is faster than the first one.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Beiker Dj., Graves-Morris P. The Pade approximation. Mir, Moscow, 1986 [in Russian].
- [2] Gerednichenko V. G. Rational approximation, analytical solution // Sib. Math. J. 2002. V. 43, N 1. P. 188–193.
- [3] Gerednichenko V. G. Rational approximation and analytical continuation from a finite number of points // J. Inverse Ill-Posed Problems. 2006. V. 14, N 7. P. 643–649.
- [4] Gerednichenko V. G. Approximation by rational functions // Applicable Analysis, Intern. J. 2008. V. 87, N 10. P. 1289–1295.
- [5] Gerednichenko V. G. Approximation by rational functions. Solution of the equatinos // Sib. Electr. Math. Izv. 2010. P. 283–289. <http://semr.math.nsc.ru>.

VICTOR G. CHEREDNICHENKO
NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
20, PROSPEKT K. MARKSA,
630073, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: prof.cherednichenko@yandex.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. С.161–С.171 (2014)

УДК 519.6

MSC 65N21, 65M32, 65R32

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ КОЛЕБАНИЙ

М.А.Шишленин

ABSTRACT. В работе рассматривается обратная задача определения источника сейсмических или акустических волн. Обратная задача заключается в определении неизвестного начального условия $q(x, y)$ для гиперболического уравнения по измерениям $f_n(t)$ сделанным в некоторых точках на поверхности (x_n, y_n) , $n = 1, 2, \dots, M$. Метод основан на дискретизации рассматриваемой задачи и сведении дискретной задачи к системе линейных алгебраических уравнений. Приведены результаты численных расчетов.

Keywords: inverse source problem, singular value decomposition, degree of ill-posedness.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуется обратная задача определения источника возмущений [1, 4, 6, 7]. Рассматривается обратная задача поиска начальных данных на примере двумерного уравнения акустики в случае, когда дополнительная информация задается в некоторых точках на поверхности как функция времени. Подобные задачи возникают в морской акустике (например, задачи определения источников цунами) и сейсмике [1, 2, 3, 4, 11, 21].

Проблема восстановления источников имеет важнейшее значение при восстановлении источников землетрясений, определении координат и первоначальной формы волн цунами, и во многих других задачах, связанных с волновыми процессами. В данной работе предложен метод восстановления начального

SHISHLENIN M.A. THE MATRIX METHOD IN INVERSE SOURCE PROBLEMS.

© 2014 Шишленин М.А.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, совместного проекта СО РАН и НАН Украины и интеграционного проекта СО РАН 122.

Поступила 12 марта 2013 г., опубликована 25 декабря 2014 г.

состояния, основанный на решении обратной некорректной задачи для гиперболического уравнения. Обратная задача формулируется в операторной форме $Aq = f$. После дискретизации обратной задачи получается система линейных алгебраических уравнений $Aq = f$. Проводится анализ сингулярных чисел матрицы A_{mn} , на основе которого реализуется метод усеченного сингулярного разложения. Численно исследуется степень некорректности обратной задачи. С помощью анализа сингулярных чисел полученной матрицы показано, что с увеличением числа приемников увеличивается разрешимость обратной задачи, повышается устойчивость решения и корректность задачи. Проведены результаты численных расчетов для точных и зашумленных данных. Результаты работы впервые были представлены на 6 международной конференции “Inverse Problems: Modeling and Simulation”, 21–26 мая, 2012, Анталья, Турция [15].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямую задачу:

$$(1) \quad u_{tt} = c^2(x, y)\Delta u, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T);$$

$$(2) \quad u|_{t=0} = q(x, y);$$

$$(3) \quad u_t|_{t=0} = 0;$$

$$(4) \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

В прямой задаче (1)–(4) необходимо определить функцию $u(x, y, t)$ по заданным $q(x, y)$, $c(x, y)$ и граничным условиям (4).

Обратная задача заключается в определении функции $q(x, y)$ из соотношений (1)–(4), если известна следующая дополнительная информация

$$(5) \quad u(x_m, y_m, t) = f_m(t), \quad m = \overline{1, M}.$$

Подобная задача может быть устойчиво решена только при очень сильных априорных предположениях о функции $q(x, y)$. В любом случае по наблюдениям за колебаниями поверхности на M точках возможно определить лишь конечное число (не более чем M) функций одной переменной. Ряд результатов исследования этой задачи приведен в [19, 22, 20, 2, 3, 4, 11, 21].

Некорректность обратной задачи (1)–(5) исследована в [6].

В работе [11] доказано, что оператор обратной задачи является компактным и на основе проекционного метода, сингулярного разложения и r -решения [10] построен численный алгоритм решения обратной задачи. В силу компактности оператора, любая конечно-разностная аппроксимация оператора матрицей размерности $K \times L$ будет сходиться к оператору при $K, L \rightarrow \infty$ и также $q^{KL}(x, y) \rightarrow q(x, y)$ (если решение существует). Сходимость r -решения конечної системы линейных алгебраических уравнений к r -решению операторного уравнения исследована в [10].

В [4] исследована одномерная обратная задача определения источника. Доказана теорема о разрешимости обратной задачи и построен численный алгоритм основанный на решении системы интегральных уравнений.

В данной статье решена дискретная линейная обратная задача. Во-первых, при численном решении задачи используется проекция на некоторое конечное подпространство (метод-конечных разностей, метод конечных элементов

и т.д.). Во-вторых, в приложениях данные о функции $c(x, y)$, как правило, задаются в виде табличного значения. Указывается способ сведения дискретной обратной задачи к системе линейных алгебраических уравнений. Анализ сингулярных чисел матрицы полученной системы, позволяет оценить некорректность задачи и построить эффективный алгоритм локализации источника волн на основе r -решения. Численно показано, что с увеличением числа приемников уменьшается некорректность задачи (число обусловленности СЛАУ уменьшается).

3. ПОСТАНОВКА ДИСКРЕТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ. СВЕДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Сведем обратную задачу (1)–(5) к дискретной обратной задаче. Пусть область $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$, $h_x = L_x/N_x$, $h_y = L_y/N_y$. Шаг по времени h_t выбирается из условия Куранта, $N_t = T/h_t$. Введем дискретную функцию $u_{i,j}^k = u(ih_x, jh_y, nh_t)$. Заменим производные конечно-разностными аналогами и получим следующую дискретную обратную задачу:

Заменим производные следующими конечно-разностными аналогами и получим дискретную задачу

$$(6) \quad \frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{h_t^2} = c_{ij}^2 \left(\frac{u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{h_y^2} \right),$$

где $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$;

$$(7) \quad u_{i,j}^0 = q_{i,j}, \quad i = \overline{0, N_x}, \quad j = \overline{0, N_y};$$

$$(8) \quad u_{i,j}^1 = q_{i,j} + \frac{c_{ij}^2 h_t^2}{2} \left(\frac{q_{i-1,j} - 2q_{i,j} + q_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{q_{i,j-1} - 2q_{i,j} + q_{i,j+1}}{h_y^2} \right),$$

где $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$;

$$(9) \quad u_{0,j}^k = u_{N_x,j}^k = 0, \quad j = \overline{0, N_y}, \quad k = \overline{0, N_t};$$

$$(10) \quad u_{i,0}^k = u_{i,N_y}^k = 0, \quad i = \overline{0, N_x}, \quad k = \overline{0, N_t};$$

$$(11) \quad u_{m_i, m_j}^k = f^k, \quad i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{0, M}, \quad k = \overline{0, N_t}.$$

Дискретная прямая задача (6)–(10) заключается в определении функции $u_{i,j}^k$ по известным функциям $c_{i,j}$ и $q_{i,j}$.

Обратная задача (6)–(11) заключается в определении функции $q_{i,j}$ по известным функциям $c_{i,j}$ и $f_{i,j}$.

Введем вектор

$$\vec{V}^k = (v_{0,0}^k, \dots, v_{0,N_y}^k, v_{1,0}^k, \dots, v_{1,N_y}^k, \dots, v_{N_x,0}^k, \dots, v_{N_x,N_y}^k).$$

Перепишем прямую задачу (6)–(11) в матрично-векторной форме. Для этого перепишем уравнение (6) в следующем виде:

$$(12) \quad \vec{V}^{k+1} = \mathbb{B} \vec{V}^k - \vec{f}^{k-1}.$$

Матрица \mathbb{B} состоит из элементов конечно-разностной схемы (6) и граничных условий (9), (10) и имеет размерность $(N_x + 1)(N_y + 1)^2$.

Обозначим

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{h_t^2}{h_x^2} c^2(ih_x, jh_y); \\ b_{ij} &= 2 \left[1 - c^2(ih_x, jh_y) \left(\frac{h_t^2}{h_x^2} + \frac{h_t^2}{h_y^2} \right) \right]; \\ d_{ij} &= \frac{h_t^2}{h_y^2} c^2(ih_x, jh_y). \end{aligned}$$

Тогда матрицу \mathbb{B} можно записать в 5-ти диагональном виде

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & \dots & 0 & d_{11} & b_{11} & d_{11} & 0 & 0 & \dots & a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & \dots & 0 & 0 & d_{12} & b_{12} & d_{12} & \dots & 0 & 0 & a_{12} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & \dots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы \mathbb{B} строятся по следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{i(N_y+1)+j+1, (i+1)(N_y+1)+j+1} &= a_{ij}; \\ \mathbb{B}_{i(N_y+1)+j+1, i(N_y+1)+j+1} &= b_{ij}; \\ \mathbb{B}_{i(N_y+1)+j+1, (i-1)(N_y+1)+j+1} &= a_{ij}; \\ \mathbb{B}_{i(N_y+1)+j+1, i(N_y+1)+j+2} &= d_{ij}; \\ \mathbb{B}_{i(N_y+1)+j+1, i(N_y+1)+j} &= d_{ij}. \end{aligned}$$

Здесь $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$.

Начальные условия перепишутся в следующем виде:

$$(13) \quad U^0 = Q.$$

В силу (12) и определения матрицы \mathbb{B} условие (8) можно переписать в следующем виде:

$$(14) \quad U^1 = 0.5\mathbb{B}Q.$$

Сначала сведем прямую задачу к системе линейных алгебраических уравнений.

Лемма 1. *Дискретную прямую задачу в момент времени N_t (12)–(14) можно представить в виде*

$$(15) \quad \vec{V}^{N_t} = \mathbb{A}_{N_t} \vec{Q}.$$

Матрица \mathbb{A}_{N_t} имеет размерность $(N_x + 1)(N_y + 1)^2$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (12) как рекуррентное соотношение. Очевидно, что

$$\begin{bmatrix} \vec{V}^{k+1} \\ \vec{V}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}^k \\ \vec{V}^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Здесь \mathbb{I} — единичная матрица. Тогда

$$\begin{bmatrix} V^{k+1} \\ V^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \vec{V}^1 \\ \vec{V}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} 0.5\mathbb{B}Q \\ Q \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\widehat{\mathbb{A}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{11}(k) & \mathbb{A}_{12}(k) \\ \mathbb{A}_{21}(k) & \mathbb{A}_{22}(k) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbb{B} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}^k.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} V^{N_t} \\ V^{N_t-1} \end{pmatrix} = \widehat{\mathbb{A}}(N_t - 1) \begin{pmatrix} 0.5\mathbb{B}Q \\ Q \end{pmatrix}.$$

Таким образом получаем, что

$$(16) \quad V^{N_t} = 0.5\mathbb{A}_{11}(N_t - 1)\mathbb{B}Q + \mathbb{A}_{12}(N_t - 1)Q = \\ = [0.5\mathbb{A}_{11}(N_t - 1)\mathbb{B} + \mathbb{A}_{12}(N_t - 1)]Q.$$

Обозначим

$$\mathbb{A} = 0.5\mathbb{A}_{11}(N_t - 1)\mathbb{B} + \mathbb{A}_{12}(N_t - 1).$$

Получаем утверждение леммы

$$V^{N_t} = \mathbb{A}Q.$$

□

4. ДИСКРЕТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. ОДНО ИЗМЕРЕНИЕ

Рассмотрим случай восстановления начального состояния в случае когда дополнительные данные измеряются в одной точке. Случай M приемников рассмотрим позднее.

Данные обратной задачи (11) можно сформулировать в следующем виде

$$(17) \quad (S_{i,j}, U^k) = f^k, \quad k = \overline{0, N_t}.$$

Здесь вектор $S_{i,j}$ отвечает за координаты источника. Таким образом, мы получили следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (S_{i,j}, Q) &= f^0, \\ (S_{i,j}, U^1) &= f^1, \\ (S_{i,j}, U^2) &= f^2, \\ &\vdots \\ (S_{i,j}, U^{N_t}) &= f^{N_t}. \end{aligned}$$

Учитывая полученные ранее представления (15), можно переписать систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} (S_{i,j}, Q) &= f^0, \\ (S_{i,j}, 0.5\mathbb{B}, Q) &= f^1, \\ (S_{i,j}, \mathbb{A}(1), Q) &= f^2, \\ &\vdots \\ (S_{i,j}, \mathbb{A}(N_t - 1), Q) &= f^{N_t}. \end{aligned}$$

Таким образом обратная задача по восстановлению источника волн сводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} S_{ij} \\ 0.5\mathbb{B}^*S_{ij} \\ \vdots \\ \mathbb{A}^*(N_t - 1)S_{i,j} \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} f^0 \\ f^1 \\ \vdots \\ f^{N_t} \end{bmatrix}.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений является недоопределенной и состоит из $N_t + 1$ уравнений и $(N_x + 1)(N_y + 1)$ неизвестных.

5. ДИСКРЕТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. M ИЗМЕРЕНИЙ

В предыдущем параграфе мы построили систему линейных алгебраических уравнений, являющуюся аналогом дискретной обратной задачи определения источника волн в случае одного измерения

$$A_1 q = f_1.$$

Пусть имеется M приемников. Тогда для каждого из них можно построить СЛАУ вида

$$A_j q = f_j, \quad j = \overline{1, M}.$$

Рассмотрим расширенную систему

$$Aq = f,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_M \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix}.$$

Расширенная система линейных алгебраических уравнений $Aq = f$ является дискретным аналогом обратной задачи в случае M измерений и состоит из $M(N_t + 1)$ уравнений и $(N_x + 1)(N_y + 1)$ неизвестных.

6. МЕТОД СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ И r -РЕШЕНИЕ

Рассмотрим алгоритм решения СЛАУ $A_{mn}q_n = f_m$, предложенный в [8]. Здесь $A_{mn} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ — прямоугольная матрица $q_n \in \mathbb{R}^n$, $f_m \in \mathbb{R}^m$ — вектора.

По теореме о сингулярном разложении существуют ортогональные матрицы U_{mm} и V_{nn} и набор неотрицательных чисел $\{\sigma_j\}$, что

$$\mathbb{A}_{mn} = \mathbb{U}_{mn}\Sigma_{mn}\mathbb{V}_{nn}^T.$$

Здесь

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{pmatrix}.$$

σ_n называются сингулярными числами матрицы \mathbb{A} и выполняется $\sigma_{n+1} \leq \sigma_n$.

Перепишем задачу $\mathbb{A}Q = F$ в виде:

$$\mathbb{U}_{mm}\Sigma_{mn}\mathbb{V}_{nn}^T q_n = f_m.$$

Положим $z_n = \mathbb{V}_{nn}^T q_n$. Тогда $q_n = V_{nn} z_n$. Откуда получаем, что

$$\Sigma_{mn} Z_n = \mathbb{U}_{mm}^T f_m = g_m.$$

Следовательно $z_j = \frac{g_j}{\sigma_j}$, если $\sigma_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, M_{xy}$). При $\sigma_j = 0$ полагаем $z_j = 0$.

Построено нормальное псевдорешение $q_{np} = V_{nn} z_n$ [5].

В силу некорректности обратной задачи (6)–(11), сингулярные числа матрицы \mathbb{A} могут быть малыми величинами. В этом случае при нахождении $z_j = \frac{g_j}{\sigma_j}$ будут получаться очень большие числа.

Строится r -решение системы линейных алгебраических уравнений [8, 5, ?]: начиная с некоторого номера r σ_j полагаются равными нулю. Выбор номера r согласовано с уровнем погрешности δ в данных обратной задачи, используя следующий критерий

$$r = \arg \min_p \|Aq_p - f_\delta\|.$$

Здесь q_p решение системы, у которой σ_j равны нулю начиная с номера p .

7. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Зафиксированы следующие параметры: $L_x = 8$, $L_y = 8$, $N_x = 50$, $N_y = 50$, $T = 0.09$, из условия Куранта $N_t = 38$. Точное решение $q(x, y)$ приведено на рис. 1. На рис. 1 справа приведен график функции скорости распространения волн $c(x, y)$.

Приближенные данные брались в следующем виде:

$$f_\varepsilon(x, y) = f(x, y) \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\beta\right).$$

Здесь ε — уровень шума в данных в %, β — случайное число равномерно распределенное на отрезке $[-1, 1]$ для фиксированного x и y .

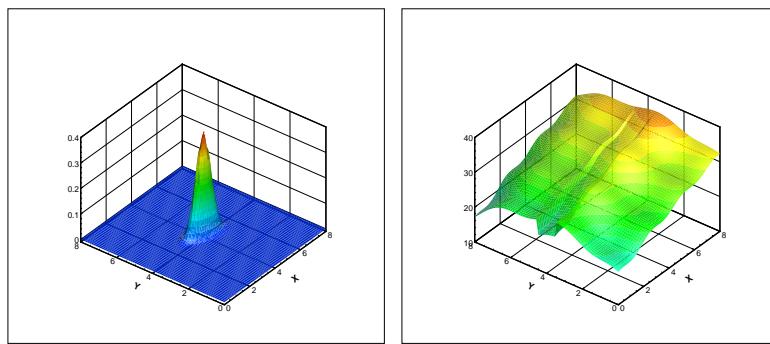
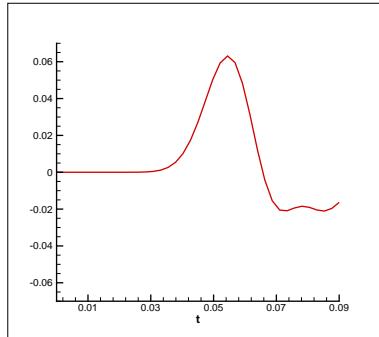
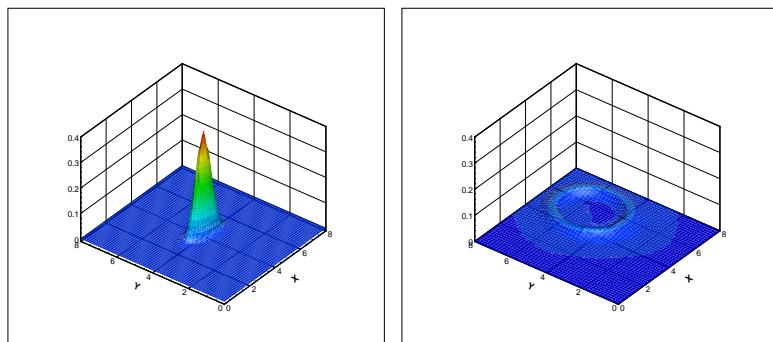
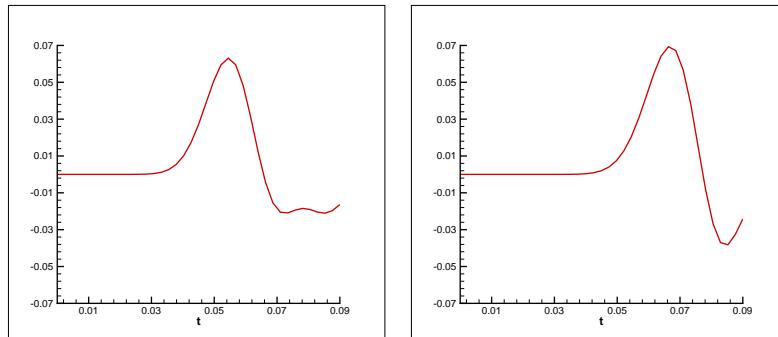


Рис. 1. Слева – точное решение $q(x, y)$. Справа – скорость распространения волн $c(x, y)$

Численные расчеты для одного приемника приведены на рис. 2, 3. Приемник расположен в точке $x_1 = 5.28$, $y_1 = 5.28$.

Численные расчеты для двух приемников приведены на рис. 5, 5. Приемники расположены в точках: $x_1 = 5.28$, $y_1 = 5.28$ и $x_2 = 2.64$, $y_2 = 2.64$.

Рис. 2. Точные данные обратной задачи $f_1(t) = u(x_1, y_1, t)$.Рис. 3. Слева – точное решение $q(x, y)$. Справа – решение полученное по одной дополнительной информацииРис. 4. Слева – точные данные обратной задачи $f_1(t) = u(x_1, y_1, t)$. Справа – точные данные обратной задачи $f_2(t) = u(x_2, y_2, t)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обратная задача определения источника волн сводится к дискретному аналогу. Дискретный аналог обратной задачи позволяет записать задачу в виде системы линейных алгебраических уравнений.

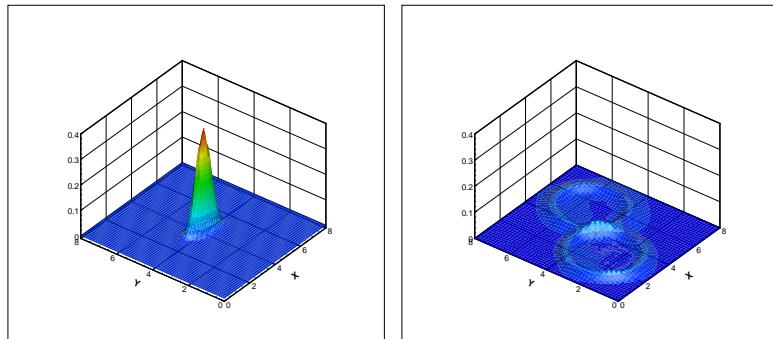


Рис. 5. Слева – точное решение $q(x, y)$. Справа – решение полученное по двум дополнительным информаций

На основе метода сингулярного разложения строится регуляризирующий алгоритм решения обратной задачи определения источника акустических волн, который учитывает априорную информацию о решении задачи и уровень ошибок в данных.

Анализ сингулярных чисел полученной матрицы показал, что с увеличением приемников повышается разрешающая способность задачи и устойчивость.

Построенный алгоритм решения обратной задачи на основе метода сингулярного разложения [8] позволяет учитывать априорную информацию о местах возможного расположения источников [8, 5].

Предложенный в данной работе подход можно применить для решения линейных обратных и некорректных задач для уравнений вида $Lu = u_{tt}$, $Lu = u_t$ и $Lu = 0$, где L – эллиптический оператор с произвольными граничными условиями [23, 24, 25, 26].

Проблема быстрого роста требуемой памяти для хранения информации решаема современными методами сжатия информации (например, использование библиотек с разреженными матрицами) или с помощью методов тензорного анализа [12, 13].

С помощью предложенного алгоритма полученное решение о локализации источника акустических и сейсмических волн можно использовать как хорошее начальное приближение для итерационных методов решения на больших сетках с учетом априорной информации о решении обратной задачи [27, 28].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кайстренко В.М. Обратная задача на определение источника цунами.// Сб.: Волны цунами. Труды САХКНИИ. 1972.Вып.29.С.82-92.
- [2] Воронина Т.А. Определение пространственного распределения источников колебаний по дистанционным измерениям в конечном числе точек //СибЖВМ.2004.-Т.7, № 3. С.203-211.
- [3] T.A. Voronina. Determination of spatial distribution of oscillation sources by remote measurements on a finite set of points // Siberian J. of Numer. Mathematics. Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. Novosibirsk, 2004. Vol. 7 №3. Pp.203-211.
- [4] В. Г. Романов, П. С. Мошков. Одномерная обратная задача об определении источника цунами // Сиб. журн. индустр. матем., 2011, том 14, номер 3, стр. 87-99
- [5] С. И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

- [6] Isakov V. *Inverse Problems in PDE, Appl. Math.Sc.*, Vol. 127, Springer-Verlag, New York, 1998. Second edition, 2005.
- [7] J. L. Buchanan, R. P. Gilbert, A. Wirgin, Y.S. Xu, *Marine Acoustics. Direct and Inverse Problems*, SIAM, Philadelphia, 2004.
- [8] С.К. Годунов, А.Г. Антонов, О.И. Кирилюк, В.И. Костин, *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах*. // Новосибирск: Наука, 1992.
- [9] Марчук Ан.Г., Чубаров Л.В., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука, 1983.176с.
- [10] V.A. Cheverda, V.I. Kostin, R-pseudoinverse for compact operators in Hilbert space: existence and stability, *J. Inverse Ill-Posed Problems*, 3 (1995), 131–148.
- [11] T.A. Voronina, Reconstruction of initial Tsunami waveforms by a truncated SVD method, *J. Inverse Ill-Posed Problems*, 19 (2011), 615–629.
- [12] D. V. Savostyanov and I. V. Oseledets. Fast adaptive interpolation of multi-dimensional arrays in tensor train format. In Proceedings of 7th International Workshop on Multidimensional Systems (nDS). IEEE, 2011. doi = 10.1109/nDS.2011.6076873.
- [13] S. V. Dolgov, Boris N. Khoromskij, and Ivan V. Oseledets. Fast solution of multi-dimensional parabolic problems in the tensor train/quantized tensor train-format with initial application to the Fokker-Planck equation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 34(6):A3016–A3038, 2012.
- [14] Samarskii A.A. Введение в численные методы, Moscow, Nauka, 1987. 272 pp. (in Russian)
- [15] M. Shishlenin. Numerical methods of solving inverse acoustic problems. Abstracts of the 6th International Conference “Inverse Problems: Modeling and Simulation”, held on May 21- 26, 2012, Antalya, Turkey.
- [16] Godunov S.K., Ryabenkii V.S. The Difference Schemes, Moscow, Nauka, 1977. 441 pp. (in Russian)
- [17] Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: изд. Ин-та прикладной физики РАН, 1996.
- [18] Ле Блон П., Майsek Л. Волны в океане. М.: Мир, 1981.
- [19] Авдеев А. В., Горюнов Э. В., Лаврентьев М. М.-мл. Обратная задача цунами: определение параметров источника // Природно-техногенная безопасность Сибири. Т. 1: Тр. науч. мероприятий. Красноярск: изд ИПЦ КГТУ, 2001. С. 131-138.
- [20] Voronina T. A. Reconstruction of the initial tsunami waveform by the coastal observations inversion // Bull. Novosibirsk Computer Center. Ser. Math. Methods in Geophysics. 2002. № 7. P. 89-100.
- [21] Voronina T. A., Tcheverda V. A., Voronin V. V. Some properties of the inverse operator for a tsunami source recovery. Сибирские электронные математические известия, 11 (2014), стр. 532-547.
- [22] Voronina T.A., Tcheverda V. A. Reconstruction of tsunami initial form via level oscillation // Bull. Novosibirsk Comput. Center. Ser. Math. Methods in Geophysics. 1998. № 4. P. 127-136.
- [23] S.I. Kabanikhin and M.A. Shishlenin and D.B. Nursetov and A.T. Nursetova and S.E. Kasenov. Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation. Journal of Applied Mathematics, 2014, (2014), <http://dx.doi.org/10.1155/2014/786326>, 7 pages.
- [24] S.I. Kabanikhin and Y.S. Gasimov and D.B. Nursetov and M.A. Shishlenin and B.B. Sholpanbaev and S. Kasenov. Regularization of the continuation problem for elliptic equations. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013/ Vol. 21 6, pp. 871-884.
- [25] S.I. Kabanikhin and D.B. Nursetov and M.A. Shishlenin and B.B. Sholpanbaev. Inverse problems for the ground penetrating radar. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013. Vol. 21 6, pp. 885-892.
- [26] А.С. Белоносов, М.А. Шишленин. Задача продолжения для параболического уравнения с данными на части границы. Сибирские электронные математические известия, 11 (2014), стр. С.22-С.34.
- [27] Kabanikhin S.I. and Shishlenin M.A. Quasi-solution in inverse coefficient problems. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2008. Vol. 16, No.7, pp. 707–715.
- [28] С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений. Труды ИММ УрО РАН, 2012. Том 186 № 1, стр. 147–164.

Максим Александрович Шишленин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: mshishlenin@math.nsc.ru