S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 1–17 (2014) УДК 510.6
MSC 03B45

НЕГАТИВНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НАД МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКОЙ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Л.Л. МАКСИМОВА

Abstract. It is proved that extensions of the minimal Johansson logic J are negatively equivalent if and only if their centers are equal. It is proved in [1] that the logics with the weak interpolation property WIP are divided into eight intervals with etalon logics on the top. Therefore a logic possesses WIP iff it is negatively equivalent to one of the eight etalon logics. An axiomatization and a semantic characterization are found for WIP-minimal logics, which are the least elements of all eight intervals of logics with WIP. The Craig interpolation property CIP is stated for the most of WIP-minimal logics.

Keywords: minimal logic, negative equivalence, semantic completeness, interpolation

1. Введение

Статья посвящена исследованию проблемы интерполяции над минимальной логикой Йохансона J [2]. В [1] был найден эффективный критерий для проверки справедливости слабого интерполяционного свойства WIP в J-логиках, т.е. расширениях логики J. Проблема справедливости интерполяционного свойства Крейга CIP и других родственных свойств решена для подкласса стройных J-логик [3, 4], но остается нерешенной для семейства всех J-логик.

Широко известная теорема Гливенко говорит, что формула вида $\neg A$ выводима в интуиционистской пропозициональной логике тогда и только тогда, когда она выводима в классической логике. Для минимальной логики это утверждение неверно. С.Одинцов в [5] ввел понятие негативной эквивалентности на классе расширений минимальной логики и показал, что этот класс разбивается

Maksimova L.L., Negative equivalence over the minimal logic and interpolation.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00168).

Поступила 31 мая 2013 г., опубликована 21 января 2014 г.

на интервалы, состоящие из негативно эквивалентных логик. В [1] была предложена классификация J-логик с помощью так называемых центров, которая играла существенную роль в доказательстве разрешимости слабого интерполяционного свойства WIP над логикой J. Логика обладает свойством WIP, если и только если ее центр совпадает с центром одной из восьми эталонных логик. В этой статье мы заметим, что J-логики негативно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые центры.

Отсюда следует, что логика обладает слабым интерполяционным свойством WIP, если и только если она негативно эквивалентна одной из эталонных логик, которые являются верхними концами интервалов негативной эквивалентности. Все эталонные логики обладают свойством CIP [6]. В настоящей статье мы найдем удобную аксиоматизацию и семантическую характеризацию всех восьми WIP-минимальных логик, наименьших в интервалах логик со свойством WIP, а также установим свойство CIP для большинства из этих логик.

2. Негативная эквивалентность

Язык минимальной логики Йохансона J в качестве исходных связок содержит $\&, \vee, \to, \bot, \top$; отрицание определяется как сокращение $\neg A = A \to \bot$; $(A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A)$. Множество всех формул обозначаем через For. Формула называется *позитивной*, если не содержит вхождений символа $\bot$. Логика J может быть задана исчислением, которое имеет те же схемы аксиом, что и позитивное интуиционистское исчисление Int^+, и единственное правило вывода модус поненс. Под J-*логикой* понимается любое множество формул, содержащее все аксиомы логики J и замкнутое относительно подстановки и правила модус поненс: $A, A \to B/\ B$. Обозначаем

$$\mathrm{Int} = \mathrm{J} + (\bot \to p),\ \mathrm{Cl} = \mathrm{Int} + (p \vee \neg p),\ \mathrm{Neg} = \mathrm{J} + \bot,\ \mathrm{Gl} = \mathrm{J} + (p \vee \neg p).$$

Логика *нетривиальна*, если не совпадает с множеством всех формул For. J-логика называется *суперинтуиционистской*, если она содержит интуиционистскую логику Int, и *негативной*, если расширяет логику Neg; L называется *паранепротиворечивой*, если не содержит ни Int, ни Neg. Можно доказать, что J-логика является негативной тогда и только тогда, когда она не содержится в Cl. Для любой J-логики L обозначаем через $E(L)$ семейство всех J-логик, содержащих L.

Негативная эквивалентность введена в [5]. Две J-логики L_1 и L_2 называются *негативно эквивалентными*, если для любой формулы A выполняется

$$L_1 \vdash \neg A \iff L_2 \vdash \neg A.$$

Поскольку формула $\neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$ выводима в J, очевидна

Лемма 2.1. *Две логики L_1 и L_2 негативно эквивалентны тогда и только тогда, когда для любой формулы A выполняется*

$$L_1 \vdash \neg\neg A \iff L_2 \vdash \neg\neg A.$$

Классы негативной эквивалентности образуют разбиение решетки J-логик. В [5] отмечено, что каждый класс является интервалом с нижним и верхним концами. Таким образом, каждой логике L соответствуют наибольшая и наименьшая логики, негативно эквивалентные L.

Предложение 2.2. *Если* $L = \mathrm{J} + Ax$, *то наименьшая логика* L_{ln}, *негативно эквивалентная логике* L, *есть* $\mathrm{J} + \{\neg\neg A |\ A \in Ax\}$.

Доказательство. Ясно, что любая логика, негативно эквивалентная логике L, содержит логику $L' = \mathrm{J} + \{\neg\neg A |\ A \in Ax\}$, так как $\mathrm{J} \vdash A \to \neg\neg A$. Докажем, что L' негативно эквивалентна L.

Пусть $B_1, \ldots, B_n$ – вывод формулы $\neg A$ в логике L. Докажем индукцией по $k \le n$, что все формулы $\neg\neg B_k$ выводимы в L'. Если B_k получена некоторой подстановкой из аксиомы логики J, то $\mathrm{J} \vdash \neg\neg B_k$; если подстановкой в одну из формул из Ax, то $L' \vdash \neg\neg B_k$. Применение правила $A, A \to B/\ B$ переходит в применение правила $\neg\neg A, \neg\neg(A \to B)/\ \neg\neg B$, которое сохраняет выводимость, так как $\mathrm{J} \vdash \neg\neg A \to (\neg\neg(A \to B) \to \neg\neg B)$.

Отсюда следует, что $\neg\neg\neg A$, а вместо с ней и $\neg A$ выводима в L'. Поскольку все формулы из L' выводимы в L, получаем негативную эквивалентность L и L'. □

Наибольшая логика, негативно эквивалентная L, в [5] обозначается через $\nabla(L)$. Там доказано, что

$$\nabla(L) \vdash A \iff L \vdash \neg\neg A.$$

Кроме того, в [5] показано, что аксиоматизация логики $\nabla(L)$ получается из аксиоматизации логики L добавлением схемы аксиом $A \vee \neg A$ и правила $A \vee \bot / A$. Вместо этого правила можно взять правило $\neg\neg A/A$.

В параграфе 4 мы найдем алгебраический критерий негативной эквивалентности и другое описание для логики $\nabla(L)$.

3. Алгебраическая семантика

Алгебраическая семантика для расширений минимальной логики строится с помощью *алгебр Йохансона* (сокращенно J-*алгебр*), то есть алгебр $\mathbf{A} =< A; \&, \vee, \to, \bot, \top >$, удовлетворяющих условиям:

$< A; \&, \vee, \top >$ есть решетка относительно $\&, \vee$ с наибольшим элементом $\top$,

$z \le x \to y \iff z \& x \le y$,

$\bot$ – произвольный элемент в A.

J-алгебра называется *гейтинговой*, или *псевдобулевой алгеброй*, если $\bot$ – наименьший элемент множества A, и *негативной алгеброй*, если $\bot$ - наибольший элемент множества A. Одноэлементная J-алгебра $\mathbf{E}$ называется *единичной*, или *вырожденной*; это единственная J-алгебра, которая является одновременно негативной и гейтинговой алгеброй.

J-алгебра $\mathbf{A}$ называется *невырожденной*, если она содержит не менее двух элементов; $\mathbf{A}$ называется *вполне связной*, или *сильно компактной*, если для всех $x, y \in \mathbf{A}$ выполняется $x \vee y = \top \Leftrightarrow (x = \top$ или $y = \top)$. Элемент Ω алгебры $\mathbf{A}$ называется *предпоследним элементом*, или *опремумом* алгебры $\mathbf{A}$, если он является наибольшим среди элементов алгебры $\mathbf{A}$, отличных от $\top$.

Хорошо известно (см., например, [7]), что семейство J-алгебр образует многообразие и существует взаимно однозначное соответствие между логиками, содержащими логику J, и многообразиями J-алгебр. Если A – формула, $\mathbf{A}$ – алгебра, то говорим, что в $\mathbf{A}$ общезначима формула A, и пишем $\mathbf{A} \models A$, если тождество $A = \top$ выполняется в $\mathbf{A}$. Пишем $\mathbf{A} \models L$ вместо $(\forall A \in L)(\mathbf{A} \models A)$.

Каждой логике $L \in E(\mathrm{J})$ соответствует многообразие J-алгебр

$$V(L) = \{\mathbf{A}|\mathbf{A} \models L\}.$$

Любая логика характеризуется многообразием $V(L)$. Говорим, что логика L порождается некоторым классом алгебр, если многообразие $V(L)$ порождается этим классом. Если $V(L)$ порождается алгеброй $\mathbf{A}$, то пишем иногда $L = L\mathbf{A}$.

Если $L \in E(\mathrm{Int})$, то $V(L)$ – многообразие гейтинговых алгебр, а если $L \in E(\mathrm{Neg})$, то многообразие негативных алгебр.

Пусть Γ –множество формул, B – формула. Пишем $\Gamma \vdash_L B$, если B выводима из $L \cup \{\Gamma\}$ с помощью правила модус поненс. Широко известна

Теорема 3.1 (Сильная теорема о полноте)**.** *Пусть L – J-логика. Тогда $\Gamma \vdash_L B$, если и только если для любой алгебры $\mathbf{A} \in V(L)$ и любого означивания v в алгебре $\mathbf{A}$ из $v(\Gamma) = \top$ следует $v(B) = \top$.*

Напомним, что невырожденная алгебра называется подпрямо неразложимой, если она не разлагается в подпрямое произведение отличных от нее сомножителей. J-алгебра подпрямо неразложима, если и только если она имеет опремум.

Лемма 3.2. [1] *Если в J-алгебре $\mathbf{A}$ неверно $a \leq b$, то существуют подпрямо неразложимая $\mathbf{C}$ с опремумом Ω и гомоморфизм $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ такие, что $f(a) = \top$ и $f(b) = \Omega$.*

Для доказательства нижеследующих утверждений применяем методы из [8, 9]. Используется представление алгебр с помощью порождающих и определяющих соотношений [10].

Если $\mathbf{x}$ – множество переменных, через $F(\mathbf{x})$ обозначим множество всех формул, построенных с помощью переменных из $\mathbf{x}$.

Пусть дана алгебра $\mathbf{A}$. Каждому элементу a из $\mathbf{A}$ ставится в соответствие переменная p_a. Обозначим $\mathbf{x} = \{p_a|a \in \mathbf{A}\}$. Определим каноническое означивание $v_0(p_a) = a$. На множестве $F(\mathbf{x})$ определяем отношение:

$$A =_{\mathbf{A}} B \iff \mathbf{A} \models v_0(A) = v_0(B).$$

Тогда $=_{\mathbf{A}}$ является конгруэнцией на $F(\mathbf{x})$ и существует изоморфизм φ_0 между $F(\mathbf{x})\big/ =_{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{A}$ такой, что $\varphi_0(A\big/_{=_{\mathbf{A}}}) = v_0(A)$ для любой $A \in F(\mathbf{x})$. Обозначим

$$D^+(\mathbf{A}) = \{A(\mathbf{x})|\ \mathbf{A} \models v_0(A(\mathbf{x})) = \top\}.$$

Если $\mathbf{B} \models D^+(\mathbf{A})[v]$ для некоторой алгебры $\mathbf{B}$ и означивания v, то отображение $h(a) = v(p_a)$ является гомоморфизмом алгебры $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$.

Лемма 3.3. *Пусть $\mathbf{A}$ – подпрямо неразложимая J-алгебра с опремумом Ω. Тогда для любой J-алгебры $\mathbf{B}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathbf{A}$ вложима в $\mathbf{B}$;*

(2) *существует означивание v в $\mathbf{B}$, такое что $v(D^+(\mathbf{A})) = \top$ и $v(p_\Omega) \neq \top$.*

Доказательство. Пусть существует означивание v в $\mathbf{B}$, такое что $v(D^+(\mathbf{A})) = \top$ и $v(p_\Omega) \neq \top$. Определим отображение $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ условием: $\alpha(a) = v(p_a)$ для всех a из $\mathbf{A}$. Так как $v(D^+(\mathbf{A})) = \top$, отображение α является гомоморфизмом.

Далее, $\alpha(\Omega) \neq \top$. Если $a, b \in \mathbf{A}$ и $a \neq b$, то $D^+(\mathbf{A})$ содержит формулу $((p_a \leftrightarrow p_b) \to p_\Omega)$, поэтому $(\alpha(a) \leftrightarrow \alpha(b)) \to \alpha(\Omega) = \top$, $(\alpha(a) \leftrightarrow \alpha(b)) \leq \alpha(\Omega) \neq \top$ и $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. Таким образом, α – мономорфизм из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$

Обратно, если $\mathbf{A}$ вложима в $\mathbf{B}$, то означивание $v(p_a) = a$ для всех a из $\mathbf{A}$ удовлетворяет требованию п. (2). □

Лемма 3.4. *Пусть* $\mathbf{A}$ *– подпрямо неразложимая* J*-алгебра с опремумом* Ω. *Тогда для любой* J*-логики* L*:*

$$\mathbf{A} \notin V(L) \iff D^+(\mathbf{A}) \vdash_L p_\Omega.$$

Доказательство. Пусть $D^+(\mathbf{A}) \nvdash_L p_\Omega$. Докажем, что $\mathbf{A} \in V(L)$.

По сильной теореме о полноте существуют алгебра $\mathbf{B} \in V(L)$ и означивание v в алгебре $\mathbf{B}$ такие, что $\mathbf{B} \models v(D^+(\mathbf{A}))$ и $\mathbf{B} \not\models v(p_\Omega)$. По лемме 3.3 $\mathbf{A}$ вложима в $\mathbf{B}$, а значит, $\mathbf{A} \in V(L)$.

Обратное очевидно, так как при означивании $v_0(p_a) = a$ в алгебре $\mathbf{A}$ все формулы из $D(\mathbf{A})$ принимают значение $\top$, а $v(p_\Omega) < \top$. □

4. Центральный напарник и негативная эквивалентность

Алгебра называется *центральной*, если она подпрямо неразложима и ее опремум совпадает с $\bot$.

Класс всех центральных алгебр из многобразия $V(L)$ называется *центром логики* L и обозначается через $\Lambda(L)$. Логика называется *центральной*, если многообразие $V(L)$ порождается ее центром. Для данной логики L определяем ее *центральный напарник* L_{cn} как центральную логику с центром $\Lambda(L)$. Ясно, что $L \subseteq L_{cn}$.

Лемма 4.1. *Если* $L \nvdash \neg A$, *то существуют центральная алгебра* $\mathbf{A} \in V(L)$ *и означивание* v *в* $\mathbf{A}$ *такие, что* $v(A) = \top$.

Доказательство. Пусть $L \nvdash \neg A$. Тогда существует алгебра $\mathbf{A} \in V(L)$ такая, что формула $\neg A$ опровергается в $\mathbf{A}$ при некотором означивании v'. Получаем $v'(A) \nleq \bot_{\mathbf{A}}$. По лемме 3.2 существуют подпрямо неразложимая $\mathbf{C}$ и гомоморфизм $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ такие, что $f(v'(A)) = \top$ и $f(\bot_{\mathbf{A}}) = \bot_{\mathbf{C}}$ есть опремум алгебры $\mathbf{C}$. Тогда $\mathbf{C}$ есть центральная алгебра и $v(A) = \top$, где $v(p) = f(v'(p))$ для любой переменной p. □

Лемма 4.2. *Для любой центральной алгебры* $\mathbf{A}$ *и любой* J*-логики* L*:*

$$\mathbf{A} \notin V(L) \iff D^+(\mathbf{A}) \vdash_L \bot.$$

Доказательство. Следует из леммы 3.4. Достаточно заметить, что условия $D^+(\mathbf{A}) \vdash p_\Omega$ и $D^+(\mathbf{A}) \vdash \bot$ равносильны, так как формула $(\bot \leftrightarrow p_\Omega)$ входит в $D^+(\mathbf{A})$. □

Теорема 4.3. *Для любых* J*-логик* L *и* L' *следующие условия эквивалентны:*

(1) L *и* L' *негативно эквивалентны;*
(2) L *и* L' *имеют одинаковые центры;*
(3) *центральные напарники* L_{cn} *и* L'_{cn} *совпадают.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\Lambda(L) \neq \Lambda(L')$ и $\mathbf{A} \in \Lambda(L') - \Lambda(L)$. Тогда $\mathbf{A} \notin V(L)$ и $D^+(\mathbf{A}) \vdash_L \bot$ по лемме 4.2. Ввиду конечности выводов существует конечное подмножество $\Gamma \subseteq D^+(\mathbf{A})$ такое, что $\Gamma \vdash_L \bot$. Обозначим через C_0 конъюнкцию всех формул из Γ и получим $L \vdash \neg C_0$. Последняя формула опровергается в $\mathbf{A}$, причем $\mathbf{A} \in V(L')$, поэтому $L' \nvdash \neg C_0$. Таким образом, L и L' не являются негативно эквивалентными.

(2)$\Rightarrow$(3) Следует из определения.

(3)$\Rightarrow$ (1) Пусть логики L и L' не являются негативно эквивалентными и некоторая формула $\neg A$ принадлежит $L' - L$. По лемме 4.1 существуют центральная алгебра $\mathbf{A} \in V(L)$ и означивание v в $\mathbf{A}$ такие, что $v(A) = \top$. Ясно, что $\mathbf{A} \in \Lambda(L) \subseteq V(L_{cn})$, поэтому $L_{cn} \not\vdash \neg A$. С другой стороны, $L'_{cn} \supseteq L'$, а значит, $L'_{cn} \vdash \neg A$. Таким образом, $L'_{cn} \neq L_{cn}$. □

Следствие 4.4. *Для любой* J*-логики* L *логика* L_{cn} *является наибольшей среди логик, негативно эквивалентных логике* L.

Доказательство. Поскольку $L \subseteq L_{cn}$, получаем $\Lambda(L_{cn}) \subseteq \Lambda(L)$. С другой стороны, $V(L_{cn}) \supseteq \Lambda(L)$ и $\Lambda(L_{cn}) \supseteq \Lambda(L)$, поэтому $\Lambda(L_{cn}) = \Lambda(L)$. По теореме 4.3 L_{cn} негативно эквивалентна логике L. Если L' негативно эквивалентна логике L, то $L_{cn} = L'_{cn} \supseteq L'$. □

Из описания наибольшей логики, негативно эквивалентной L, найденного в [5] и процитированного в конце параграфа 2, следует, что

$$L_{cn} \vdash A \iff L \vdash \neg\neg A.$$

Кроме того, из [5] следует, что аксиоматизация логики L_{cn} получается из аксиоматизации логики L добавлением схемы аксиом $A \vee \neg A$ и правила $\neg\neg A/A$.

Отметим, что равномерным добавлением аксиом (без дополнительного правила) обойтись нельзя, так как $\mathrm{Gl} = \mathrm{J} + (p \vee \neg p)$ является центральным напарником логики J, а логика Neg содержит Gl, но не является центральной и, значит, не может быть чьим-либо центральным напарником.

Примерами центральных логик являются логики вида $L \uparrow \mathrm{Cl}$ и $L \Uparrow \mathrm{Cl}$, введенные в [11] для любой негативной логики L. Аксиоматизация этих логик получается из аксиоматизации для L. Если $L = \mathrm{Neg} + Ax$, то

$$L \uparrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Gl} + \{\bot \to B|\ B \in Ax\},$$

$$L \Uparrow \mathrm{Cl} = (L \uparrow \mathrm{Cl}) + ((\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q)).$$

В частности, $\mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Gl}$, $\mathrm{For} \uparrow \mathrm{Cl} = \mathrm{For} \Uparrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Cl}$.

5. Логики, негативно эквивалентные эталонным

Установим связь негативной эквивалентности с интерполяционными свойствами. Напомним определения.

Если $\mathbf{p}$ – список нелогических символов, через $A(\mathbf{p})$ обозначаем формулу, у которой все нелогические символы входят в $\mathbf{p}$, а через $F(\mathbf{p})$ – множество всех таких формул.

Пусть L – логика, $\vdash_L$ – отношение следования в L. Пусть $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ – попарно не пересекающиеся списки переменных, $A(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ – формулы. *Интерполяционное свойство Крейга* CIP определяется следующим образом.

CIP. Если $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует формула $C(\mathbf{p})$ такая, что $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$.
В [12] было введено *слабое интерполяционное свойство*:

WIP. Если $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L \bot$, то существует формула $A'(\mathbf{p})$ такая, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L A'(\mathbf{p})$ и $A'(\mathbf{p}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L \bot$.

В классической логике эти свойства равносильны. Во всех расширениях минимальной логики CIP влечет WIP.

В [12] доказано, что все пропозициональные суперинтуиционистские логики обладают слабым интерполяционным свойством WIP. Очевидно, все негативные логики также имеют это свойство. Семейства J-логик с WIP и J-логик без WIP имеют мощность континуума. В [1] доказано, что существует алгоритм для распознавания свойства WIP в любой конечно аксиоматизируемой J-логике. Особую роль в описании J-логик с WIP имеют восемь центральных логик, определенных ниже.

В [8] было найдено полное описание суперинтуиционистских логик с интерполяционным свойством CIP. Существует лишь конечное число таких логик. В [13] были найдены все негативные логики с CIP:

$$\mathrm{Neg},\ \mathrm{NC} = \mathrm{Neg} + (p \to q) \vee (q \to p),\ \mathrm{NE} = \mathrm{Neg} + p \vee (p \to q),\ \mathrm{For} = \mathrm{Neg} + p.$$

Следующие восемь логик называются *эталонными*: For, Cl, $(\mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl})$, $(\mathrm{NC} \uparrow \mathrm{Cl})$, $(\mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Cl})$, $(\mathrm{NE} \Uparrow \mathrm{Cl})$, $(\mathrm{NC} \Uparrow \mathrm{Cl})$, $(\mathrm{Neg} \Uparrow \mathrm{Cl})$.

Приведем аксиоматизацию этих логик [11]:

$\mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Gl} + (\bot \to p \vee (p \to q))$,

$\mathrm{NC} \uparrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Gl} + (\bot \to (p \to q) \vee (q \to p))$,

$\mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Gl}$,

$L \Uparrow \mathrm{Cl} = (L \uparrow \mathrm{Cl}) + ((\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q))$.

Теорема 5.1. J-*логика L обладает свойством WIP тогда и только тогда, когда L негативно эквивалентна одной из восьми эталонных логик.*

Доказательство. В [1] доказано, что J-логика L обладает свойством WIP тогда и только тогда, когда ее центр $\Lambda(L)$ совпадает с центром одной из восьми эталонных логик. По теореме 4.3 получаем требуемое утверждение. □

Таким образом, семейство J-логик с WIP распадается на восемь попарно не пересекающихся интервалов. Поскольку все эталонные логики являются центральными, они являются верхними концами этих интервалов. Нижние концы интервалов будем называть WIP-*минимальными* логиками. Аксиоматизацию для нижних концов можно получить из предложения 2.2. WIP-минимальная логика, негативно эквивалентная логике For, – это логика Neg. В [5] показано, что наименьшей логикой, негативно эквивалентной логике Cl, является логика

$$\mathrm{Od} = \mathrm{J} + \neg\neg(\bot \to p).$$

Для любой негативной логики $L = \mathrm{Neg} + Ax$ обозначим через $L\downarrow$ наименьшую логику, негативно эквивалентную логике $L \uparrow \mathrm{Cl}$, а через $L \Downarrow$ наименьшую логику, негативно эквивалентную логике $L \Uparrow \mathrm{Cl}$. Тогда по предложению 2.2, учитывая $\mathrm{J} \vdash \neg\neg(p \vee \neg p)$, получаем

$$L \downarrow = \mathrm{J} + \{\neg\neg(\bot \to B) \mid B \in Ax\},$$

$$L \Downarrow = L \downarrow + \neg\neg((\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q)).$$

В частности, $\mathrm{Neg} \downarrow = \mathrm{J}$, $\mathrm{For} \downarrow = \mathrm{For} \Downarrow = \mathrm{Od}$.

Расположение логик с WIP представлено в следующей теореме.

Теорема 5.2. *Логика L из $E(\mathrm{J})$ имеет WIP тогда и только тогда, когда удовлетворяет одному из следующих условий:*

$\mathrm{Neg} \subseteq L \subseteq \mathrm{For}$;

$\mathrm{Od} \subseteq L \subseteq \mathrm{Cl}$;

$(N \Downarrow) \subseteq L \subseteq (N \Uparrow \mathrm{Cl})$ *или* $(N \downarrow) \subseteq L \subseteq (N \uparrow \mathrm{Cl})$, *где* $N \in \{\mathrm{Neg}, \mathrm{NC}, \mathrm{NE}\}$.

Доказательство. По теореме 5.1 любая логика L с WIP негативно эквивалентна одной из эталонных логик L_0. По сдедствию 4.4 верхним концом соответствующего интервала является центральный напарник логики L, который совпадает с $(L_0)_{cn} = L_0$. По предложению 2.2 из аксиоматизации эталонных логик For, Cl, $(N \uparrow \mathrm{Cl})$, $(N \Uparrow \mathrm{Cl})$ получаем аксиоматизацию WIP-минимальных логик соответствующих интервалов. □

Эталонные логики подробно описаны [1]. Все они финитно аппроксимируемы и разрешимы, а также обладают интерполяционным свойством Крейга CIP. В следующих параграфах мы рассмотрим WIP-минимальные логики. Получим семантическую характеризацию для этих логик, а также установим свойство CIP для шести из этих логик. Вопрос, обладают ли свойством CIP логики NC $\downarrow$ и NC $\Downarrow$, остается пока открытым.

6. Модифицированная семантика

В [14] была доказана теорема о полноте логики J и некоторых ее расширений относительно семантики типа Крипке. В [15] предложена модифицированная семантика, которую мы используем для доказательства CIP.

Подмножество X частично упорядоченного множества W называем *конусом*, если оно удовлетворяет условию:

$x \in X,\ x \leq y \Rightarrow y \in X.$

Под J-*шкалой* (или просто *шкалой*) понимаем тройку $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$, где W – непустое множество, частично упорядоченное отношением $\leq$ и имеющее наибольший элемент ∞, Q – конус множества W, содержащий ∞.

Моделью языка $\mathcal{L}$ называется четверка $M = (W, \leq, Q, \models)$, где $(W, \leq, Q)$ – шкала, $\models$ - отношение между элементами множества W и формулами языка $\mathcal{L}$, удовлетворяющее условиям:

(1) $x \models p,\ x \leq y \Rightarrow y \models p$ для любой переменной p языка $\mathcal{L}$;

(2) $\infty \models p$ для любой переменной p языка $\mathcal{L}$;

(3) $x \models \bot \iff x \in Q$;

(4) $x \models (A \& B) \iff (x \models A$ и $x \models B)$;

(5) $x \models (A \vee B) \iff (x \models A$ или $x \models B)$;

(6) $x \models (A \supset B) \iff (\forall y)(x \leq y \Rightarrow (y \models A \Rightarrow y \models B))$.

Индукцией по длине формулы доказывается следующая

Лемма 6.1. *Для любой модели M языка $\mathcal{L}$:*

(1) $\infty \models A$ для любой формулы A языка $\mathcal{L}$;

(2) $x \models A,\ x \leq y \Rightarrow y \models A$ для любой формулы A языка $\mathcal{L}$.

Модель (или шкала) называется *инициальной*, если имеет наименьший элемент. Если x есть элемент шкалы W, через W^x обозначаем шкалу $\{y |\ x \leq y\}$ с индуцированным порядком; через M^x обозначаем ограничение модели M на шкалу W^x.

Формула A называется *истинной*, или *общезначимой в модели* M, если $x \models A$ для любого $x \in M$. Формула называется *общезначимой в шкале* $\mathbf{W}$, если она истинна в любой модели, основанной на этой шкале.

Пусть $L \in E(\mathrm{J})$. Модель M языка $\mathcal{L}$ называется L-*моделью*, если $x \models A$ для любого $x \in M$ и любой формулы A языка $\mathcal{L}$, выводимой в L.

Определим понятие канонической модели M_L языка $\mathcal{L}$. Множество T формул языка $\mathcal{L}$ называется *L-теорией языка* $\mathcal{L}$, если оно содержит $L \cap \mathcal{L}$ и замкнуто относительно правила модус поненс; L-теория T называется *простой*, если удовлетворяет условию: $(A \vee B) \in T \Rightarrow (A \in T$ или $B \in T)$ для любых формул A, B. В частности, множество $F(\mathcal{L})$ всех формул языка $\mathcal{L}$ является простой L-теорией языка $\mathcal{L}$.

В дальнейшем нам потребуется следующая простая

Лемма 6.2. *Пусть T – множество формул языка $\mathcal{L}$. Тогда T является L-теорией языка $\mathcal{L}$ в том и только в том случае, если T содержит $L \cap \mathcal{L}$, замкнуто относительно взятия конъюнкции формул и для всех формул A, B языка $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию:*
$A \vdash_L B \Rightarrow (A \in T \Rightarrow B \in T)$.

Каноническая модель M_L языка $\mathcal{L}$ строится следующим образом. Обозначим через W_L множество всех простых L-теорий языка $\mathcal{L}$, через $\leq_L$ – отношение теоретико-множественного включения, $Q_L = \{T \in W_L | \perp \in T\}$. Полагаем

$$M_L = (W_L, \leq_L, Q_L, \models_L),$$

где для любой $T \in W_L$ и любой переменной p:

$$T \models_L p \iff p \in T.$$

Отметим, что $F(\mathcal{L})$ является наибольшим элементом шкалы W_L.

Определение канонической модели было введено Сегербергом [14]. Оно отличается от нашего определения тем, что теория $F(\mathcal{L})$ не включалась в W_L. Следующие теоремы, доказанные Сегербергом [14], справедливы и для моделей, рассматриваемых в этой статье.

Теорема 6.3. (О канонической модели.) *Для любой* J*-логики L и языка $\mathcal{L}$ каноническая модель M_L языка $\mathcal{L}$ является L-моделью. Более того, для любой теории T из M_L и любой формулы A языка $\mathcal{L}$:*

$$T \models A \iff A \in T.$$

Отсюда сразу вытекает

Теорема 6.4. (О полноте.) *Для любой формулы A языка $\mathcal{L}$ и любой* J*-логики L следующие условия эквивалентны:*

(1) *A выводима в L;*
(2) *A общезначима во всех L-моделях языка $\mathcal{L}$.*

7. Семантическая характеризация

В этом параграфе мы найдем семантическую характеризацию WIP-минимальних логик.

Для краткости обозначим
$L1 = \mathrm{Neg}\Downarrow = \mathrm{J} + \neg\neg((\perp \to p \vee q) \to (\perp \to p) \vee (\perp \to q))$;
$L2 = \mathrm{Od} = \mathrm{J} + \neg\neg(\perp \to p)$;
$L3 = \mathrm{NC}\downarrow = \mathrm{J} + \neg\neg(\perp \to (p \to q) \vee (q \to p))$;
$L4 = \mathrm{NE}\downarrow = \mathrm{J} + \neg\neg(\perp \to p \vee (p \to q))$.

Говорим, что шкала или модель удовлетворяет *условию максимальности*, если для любого элемента $x \in W - Q$ существует максимальный в $W - Q$ элемент $y \geq x$.

Лемма 7.1. *Для любой* J*-логики* L *ее канонические модели удовлетворяют условию максимальности.*

Доказательство. Пусть L – J-логика и T – L-теория произвольного языка $\mathcal{L}$ из $W_L - Q_L$. Тогда $\bot \notin T$. Множество всех L-теорий, расширяющих T и не содержащих $\bot$, удовлетворяет условиям леммы Цорна и поэтому содержит максимальный элемент T'. Стандартным образом проверяется, что T' – простая теория. Поэтому $T' \in W_L - Q_L$. □

Определим условия на шкалы:
(F1) Для любого x, максимального в $W - Q$, существует $y \in Q$, который является наименьшим в $W^x \cap Q$.
(F2) Для любого x, максимального в $W - Q$, и любого $y \in Q$: $x \leq y \Rightarrow y = \infty$.
(F3) Для любого x, максимального в $W - Q$, и любого $y \in Q$: $(x \leq y \leq z$ и $y \leq v) \Rightarrow (z \leq v$ или $v \leq z)$.
(F4) Для любого x, максимального в $W - Q$, длина цепей в $W^x \cap Q$ не превосходит 2.

Лемма 7.2. *Пусть шкала* W *удовлетворяет условию максимальности. Если* W *удовлетворяет условию (F1), (F2), (F3) или (F4), то в ней общезначимы все формулы из L1, L2, L3 или L4, соответственно.*

Доказательство. Пусть $M = (W, \leq, Q, \models)$ – модель и W удовлетворяет условию максимальности. Заметим, что если $z \in W$ и $z \not\models \neg\neg A$ для некоторой формулы A, то существует $y \in W$ такой, что $z \leq y$, $y \models \neg A$ и $y \not\models \bot$. Тогда $y \notin Q$ и по условию максимальности, существует такой максимальный x в $W - Q$, что $y \leq x$. При этом $x \models (A \to \bot)$ и $x \not\models \bot$, поэтому $x \not\models A$.

Докажем, что если M удовлетворяет (F1), то M является $L1$-моделью. Допустим, что $M \not\models \neg\neg((\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q))$. Тогда существует x, максимальный в $W - Q$ и такой, что $x \not\models ((\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q))$. Существует $y \geq x$ такой, что $y \models (\bot \to p \vee q)$, $y \not\models (\bot \to p)$ и $y \not\models (\bot \to q)$. Отсюда следует, что $y \notin Q$.

Кроме того, существуют $u, v \geq y$ такие, что $u \models \bot$, $u \not\models p$, $v \models \bot$ и $v \not\models q$. Получили $u, v \in Q$.

Если выполнено (F1), то существует элемент z, наименьший в $W^y \cap Q$. В частности, $z \leq u$ и $z \leq v$. Получаем $z \models (\bot \to p \vee q)$, а значит, $z \models p$ или $z \models q$. Но тогда в первом случае $u \models p$, а во втором $v \models q$ – противоречие. Итак, $M \models L1$.

Допустим, что $M \not\models \neg\neg(\bot \to p)$. Тогда существует x, максимальный в $W - Q$ и такой, что $x \not\models (\bot \to p)$. Существует $y \geq x$ такой, что $y \models \bot$ и $y \not\models p$. Получаем $y \in Q$ и $y \neq \infty$, т.е. условие (F2) нарушается. Таким образом, если M удовлетворяет (F2), то $M \models L2$.

Остальные пункты проверяются аналогично. □

Предложение 7.3. *Если логика* L *содержит логику* $L1$*,* $L2$*,* $L3$ *или* $L4$*, то все ее канонические модели удовлетворяют соответствующему условию (F1), (F2), (F3) или (F4),*

Доказательство. Покажем, что для каждой из логик $L1 - L4$ все ее канонические модели удовлетворяют требуемым условиям. Прежде всего заметим, что для любой логики L ее канонические модели удовлетворяют условию максимальности по лемме 7.1.

Кроме того, если T – максимальная в $W_L - Q_L$ и $T \vdash_L \neg\neg A$, то $T \vdash_L A$. В самом деле, $T \nvdash_L \neg A$ и существует теория $T' \supseteq T$ такая, что $T' \vdash_L A$ и $T' \nvdash_L \bot$. Ввиду максимальности T получаем $T = T'$ и $T \vdash_L A$.

(1) Рассмотрим логику $L \supseteq L1 = \mathrm{J} + \neg\neg((\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q))$. Покажем, что для любого языка каноническая модель W_L удовлетворяет условию (F1).

Пусть T – максимальный элемент в $W_L - Q_L$. Возьмем $T' = \{A|\ T, \bot \vdash_L A\}$. Докажем, что T' – простая теория. Допустим, что $(A \vee B) \in T'$. Тогда $T \vdash_L \bot \to (A \vee B)$. Поскольку $T \vdash_L \neg\neg((\bot \to A \vee B) \to (\bot \to A) \vee (\bot \to B))$ и T максимальна, получаем $T \vdash_L ((\bot \to A \vee B) \to (\bot \to A) \vee (\bot \to B))$. Отсюда $T \vdash_L (\bot \to A) \vee (\bot \to B)$, а значит, $T \vdash_L (\bot \to A)$ или $T \vdash (\bot \to B)$. Следовательно, $A \in T'$ или $B \in T'$.

Итак, T' – простая теория. Очевидно, она является наименьшей в множестве теорий из Q_L, расширяющих T.

(2) Пусть $L \supseteq L2 = \mathrm{J} + \neg\neg(\bot \to p)$. Покажем, что W_L удовлетворяет условию (F2). Пусть T – L-теория языка $\mathcal{L}$, которая является максимальным элементом в $W_L - Q_L$, $T' \in Q_L$, $T \subseteq T'$. Покажем, что $T' = F(\mathcal{L})$.

Возьмем произвольную формулу A. Тогда $T \vdash_L \neg\neg(\bot \to A)$. Ввиду максимальности T получаем $T \vdash_L \bot \to A$. Отсюда $T' \vdash_L A$. Таким образом, $T' = F(\mathcal{L})$, что и требовалось.

(3) Рассмотрим логику $L \supseteq L3 = \mathrm{J} + \neg\neg(\bot \to (p \to q) \vee (q \to p))$. Покажем, что W_L удовлетворяет условию (F3).

Допустим противное. Пусть T – L-теория языка $\mathcal{L}$, которая является максимальным элементом в $W_L - Q_L$, $T_1, T_2, T_3 \in Q_L$, $T \subseteq T_1 \subseteq T_2$, $T_1 \subseteq T_3$ и $T_2 \not\subseteq T_3$, $T_3 \not\subseteq T_2$. Тогда существуют формулы $A \in T_2 - -T_3$, $B \in T_3 - -T_2$.

Поскольку T – максимальная в $W_L - Q_L$ и $T \vdash_L \neg\neg(\bot \to (A \to B) \vee (B \to A))$, получаем $T \vdash_L (\bot \to (A \to B) \vee (B \to A))$. Отсюда $T_1 \vdash_L (A \to B) \vee (B \to A)$, а значит, $T_1 \vdash (A \to B)$ или $T_1 \vdash (B \to A)$. В первом случае выводим $T_2 \vdash B$, а во втором – $T_3 \vdash A$, получили противоречие.

(4) Пусть $L \supseteq L4 = \mathrm{J} + \neg\neg(\bot \to p \vee (p \to q))$. Покажем, что W_L удовлетворяет условию (F4).

Пусть T – L-теория языка $\mathcal{L}$, которая является максимальным элементом в $W_L - Q_L$, $T_1, T_2 \in Q_L$, $T \subseteq T_1 \subseteq T_2$, $T_1 \neq T_2$. Покажем, что $T_2 = F(\mathcal{L})$.

Возьмем произвольную формулу A и докажем, что $A \in T_2$. По условию существует формула $B \in T_2 - T_1$.

Имеем $T \vdash_L \neg\neg(\bot \to B \vee (B \to A))$. Из максимальности T заключаем $T \vdash_L (\bot \to B \vee (B \to A))$. Поэтому $T_1 \vdash_L B \vee (B \to A)$ и $T_1 \vdash_L (B \to A)$. Получаем $T_2 \vdash_L A$, что и требовалось. □

Из предложения 7.3 и лемм 7.1 и 7.2 сразу вытекает

Теорема 7.4. *Все WIP-минимальные логики полны по Крипке.*

Более точно, логика Neg характеризуется классом шкал, удовлетворяющих условию $Q = W$, логика $\mathrm{J} = \mathrm{Neg}\downarrow$ – всеми шкалами, логика $\mathrm{Neg}\Downarrow$ – шкалами с условиями максимальности и (F1), и так далее.

8. Достаточные условия интерполяции

Как мы уже упоминали, все восемь эталонных логик обладают свойством CIP [11]. Для доказательства CIP в WIP-минимальных логиках мы применим метод из [15].

В [15] была доказана теорема, дающая достаточное условие для CIP в J-логиках. Сначала приведем определения.

Даны шкалы W_0, W_1. Отображение θ из W_1 на W_0 называется *p-морфизмом шкал*, если удовлетворяет условиям:

(p1) $x, y \in W_1, x \leq_1 y \Rightarrow \theta(x) \leq_0 \theta(y)$;

(p2) $x \in W_1, y \in W_0, \theta(x) \leq_0 y \Rightarrow (\exists z \in W_1)(x \leq_1 z \wedge \theta(z) = y)$;

(p3) $x \in Q_1 \iff \theta(x) \in Q_0$.

Заметим, что из (p1) следует, что для любого p-морфизма θ из W_1 на W_0 выполнены условия: $\theta(\infty_1) = \infty_0$, и если W_1 – инициальная шкала с наименьшим элементом a, то $\theta(a)$ – наименьший элемент в W_0.

Даны модели $M_1 = (W_1, \leq_1, Q_1, \models_1)$ языка $\mathcal{L}_1$ и $M_0 = (W_0, \leq_0, Q_0, \models_0)$ языка $\mathcal{L}_0$, содержащегося в языке $\mathcal{L}_1$. Отображение θ из W_1 на W_0 называется *$\mathcal{L}_0$-морфизмом моделей*, если удовлетворяет условиям:

(m1) θ является p-морфизмом шкал;

(m2) для любого $x \in W_1$ и любой переменной p языка $\mathcal{L}_0$:

$$x \models_1 p \iff \theta(x) \models_0 p.$$

Индукцией по длине формулы доказывается

Лемма 8.1. *Пусть θ - $\mathcal{L}_0$-морфизм модели M_1 языка $\mathcal{L}_1$ на модель M_0 языка $\mathcal{L}_0$. Тогда для любого $x \in W_1$ и любой формулы A языка $\mathcal{L}_0$:*

$$x \models_1 A \iff \theta(x) \models_0 A.$$

Класс моделей K называем *устойчивым*, если для любых инициальных моделей M_1 языка $\mathcal{L}_1$, M_2 языка $\mathcal{L}_2$ и M_0 языка $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ из K и любых $\mathcal{L}_0$-морфизмов $\theta_1 : M_1 \to M_0$, $\theta_2 : M_2 \to M_0$ существуют инициальная модель M языка $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, принадлежащая K, а также $\mathcal{L}_1$-морфизм φ из M на M_1 и $\mathcal{L}_2$-морфизм ψ из M на M_2 такие, что $\theta_1\varphi = \theta_2\psi$.

Теорема 8.2. [15] *Пусть выбранный класс L-моделей содержит все инициальные конусы канонических L-моделей всех языков от различных конечных множеств переменных. Если этот класс является устойчивым, то L имеет CIP.*

9. WIP-минимальные логики с CIP

В этом параграфе мы установим CIP для большинства WIP-минимальных логик.

Свойство CIP для логики J, которая является WIP-минимальной логикой, негативно эквивалентной эталонной логике Gl, доказано в [16]. Наименьшая логика, негативно эквивалентная For, – это логика Neg, она также имеет CIP [13].

Теперь для ряда WIP-минимальных логик найдем устойчивые классы, что позволит доказать CIP для этих логик.

В [15] было определено понятие согласованного произведения моделей. Пусть даны две модели M_1 языка $\mathcal{L}_1$ и M_2 языка $\mathcal{L}_2$, имеющие общий $\mathcal{L}_0$-морфный образ M_0, где $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, относительно $\mathcal{L}_0$-морфизмов θ_1, θ_2 соответственно. Рассмотрим следующую модель

$$M = (W, \leq, Q, \models)$$

языка $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Положим

$$W = \{(a, b) |\ a \in W_1,\ b \in W_2,\ \theta_1(a) = \theta_2(b)\},$$
$$(a, b) \leq (a', b') \iff (a \leq_1 a' \text{ и } b \leq_2 b'),$$
$$Q = \{(a, b) \in W |\ a \in Q_1,\ b \in Q_2\},$$
$$(a, b) \models p \iff ((p \in \mathcal{L}_1 \text{ и } a \models_1 p) \text{ или } (p \in \mathcal{L}_2 \text{ и } b \models_2 p)).$$

Заметим, что $\theta_1(\infty_1) = \theta_2(\infty_2)$ ввиду монотонности р-морфизмов, поэтому пара $\infty = (\infty_1, \infty_2)$ принадлежит W и является наибольшим элементом в этом множестве. Кроме того, если M_1 и M_2 - инициальные модели с наименьшими элементами a_1 и a_2 соответственно, то $\theta(a_1) = \theta(a_2)$ есть наименьший элемент модели M_0, пара (a_1, a_2) принадлежит W и является наименьшим элементом в модели M, а значит, M – инициальная модель.

Модель M называется *согласованным произведением M_1 и M_2 над M_0.*

Лемма 9.1. [15] *Если даны две модели M_1 языка $\mathcal{L}_1$ и M_2 языка $\mathcal{L}_2$, имеющие общий $\mathcal{L}_0$-морфный образ M_0, где $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, относительно $\mathcal{L}_0$-морфизмов θ_1, θ_2 соответственно, и M – их согласованное произведение над M_0, то проекция π_1 является $\mathcal{L}_1$-морфизмом из M на M_1, а проекция π_2 - $\mathcal{L}_2$-морфизмом из M на M_2, причем $\theta_1\pi_1 = \theta_2\pi_2$.*

Поскольку согласованное произведение инициальных моделей снова является инициальной моделью, отсюда сразу вытекает

Следствие 9.2. *Если класс моделей замкнут относительно согласованных произведений, то он является устойчивым.*

Лемма 9.3. *Пусть $M = (W, \leq, Q, \models)$ – согласованное произведение моделей с условием максимальности. Тогда*

(1) *M также удовлетворяет условию максимальности;*
(2) *если $(x_1, x_2) \in W$, то элемент (x_1, x_2) является максимальным в $W - Q$ тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 являются максимальными в $W_1 - Q_1$ и $W_2 - Q_2$ соответственно.*

Доказательство. Пусть $M = (W, \leq, Q, \models)$ – согласованное произведение моделей M_1 и M_2 над M_0, где все M_i удовлетворяют условию максимальности.

Сначала докажем (2). Очевидно, если $(x_1, x_2) \in W$, x_1 – максимальный в $W_1 - Q_1$, а x_2 – максимальный в $W_2 - Q_2$, то (x_1, x_2) – максимальный в $W - Q$.

Пусть (x_1, x_2) – максимальный элемент в $W - Q$. Покажем максимальность x_1 в $W_1 - Q_1$. Допустим $x_1 \leq_1 y_1 \in W_1 - Q_1$. Поскольку $\theta_1(x_1) = \theta_2(x_2)$, существует $y_2 \in W_2$ такой, что $x_2 \leq_2 y_2$ и $\theta_1(y_1) = \theta_2(y_2)$. Тогда $(y_1, y_2) \in W - Q$ и $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$, а значит, $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ и $x_1 = y_1$. Таким образом, x_1 – максимальный в $W_1 - Q_1$. Аналогично, x_2 – максимальный в $W_2 - Q_2$.

Теперь докажем условие максимальности для M. Пусть (x_1, x_2) – произвольный элемент в $W - Q$. Тогда $x_1 \in W_1 - Q_1$ и $x_2 \in W_2 - Q_2$. Так как W_1 удовлетворяет условию максимальности, существует максимальный $y_1 \in W_1 - Q_1$

такой, что $x_1 \leq_1 y_1$. Получаем $\theta_1(x_1) \leq_0 \theta_1(y_1)$. Поскольку $\theta_1(x_1) = \theta_2(x_2)$, существует $y_2 \in W_2$ такой, что $x_2 \leq_2 y_2$ и $\theta_1(y_1) = \theta_2(y_2)$. Ясно, что $y_2 \notin Q_2$. Далее, существует максимальный $z_2 \in W_2 - Q_2$ такой, что $y_2 \leq_2 z_2$. следовательно, существует $z_1 \in W_1$ такой, что $y_1 \leq z_1$ и $\theta_1(z_1) = \theta_2(z_2)$. Имеем $z_1 \notin Q_1$, поэтому $z_1 = y_1$.

Получили $(z_1, z_2) \in W - Q$ и $(x_1, x_2) \leq (z_1, z_2)$. По (2), (z_1, z_2) является максимальным в $W - Q$. □

Теорема 9.4. *Логики* Neg $\Downarrow$, Od, NE $\downarrow$ *имеют CIP.*

Доказательство. Для указанных трех логик найдем подходящие устойчивые классы, тогда по теореме 8.2 эти логики имеют CIP.

По леммам 7.1 и 7.2 и предложению 7.3 логика $L1 = \mathrm{Neg}\Downarrow$ полна относительно класса K1 моделей с условием максимальности, удовлетворяющих условию (F1), логика $L2 = \mathrm{Od}$ полна относительно класса K2 моделей с условием максимальности, удовлетворяющих условию (F2), а логика $L4 = \mathrm{NE}\downarrow$ полна относительно класса K4 моделей с условием максимальности, удовлетворяющих условию (F4). При этом классы K1, K2, K4 содержат все канонические модели соответствующей логики и замкнуты относительно взятия конусов. Докажем, что эти классы являются устойчивыми.

(1) Покажем, что класс K1 замкнут относительно согласованных произведений.

Пусть $M = (W, \leq, Q, \models)$ – согласованное пооизведение моделей из K1. По лемме 9.3 W удовлетворяет условию максимальности. Проверим условие (F1). Пусть (x_1, x_2) – максимальный элемент в $W - Q$. Тогда для $i = 1, 2$ элемент x_i является максимальным в $W_i - Q_i$ по лемме 9.3(2). Так как W_i удовлетворяет условию (F1), существует наименьший элемент y_i в множестве $Q_i \cap W_i^{x_i}$. Докажем, что пара $(y_1, y_2) \in Q$, тогда она и будет требуемым наименьшим элементом в множестве $Q \cap W^{(x_1,x_2)}$.

Заметим, что элемент $\theta_1(y_1)$ является наименьшим в множестве Q_0. Аналогично, $\theta_2(y_2)$ является наименьшим элементом в Q_0. Отсюда $\theta_1(y_1) = \theta_2(y_2)$, а значит, $(y_1, y_2) \in Q$, что и требовалось. Таким образом, M принадлежит классу (K1).

По следствию 9.2 класс K1 устойчив.

(2) Покажем, что класс K2 замкнут относительно согласованных произведений, тогда по следствию 9.2 он является устойчивым.

Пусть $M = (W, \leq, Q, \models)$ – согласованное пооизведение моделей из K2. По лемме 9.3 W удовлетворяет условию максимальности. Проверим условие (F2). Пусть (x_1, x_2) – максимальный элемент в $W - Q$, $(y_1, y_2) \in Q$ и $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$. Тогда для $i = 1, 2$ элемент x_i является максимальным в $W_i - Q_i$ по лемме 9.3(2), $y_i \in Q_i$ и $x_i \leq y_i$. Так как W_i удовлетворяет условию (F2), получаем $x_i = \infty_i$, что и требовалось.

(3) В отличие от классов K1 и K2, класс K4 не замкнут относительно согласованных произведений. Тем не менее, он является устойчивым. Докажем это.

Пусть даны две модели M_1 языка $\mathcal{L}_1$ и M_2 языка $\mathcal{L}_2$, имеющие общий $\mathcal{L}_0$-морфный образ M_0, где $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, относительно $\mathcal{L}_0$-морфизмов θ_1, θ_2 соответственно. В согласованном произведении моделей M_1 и M_2 над M_0 оставим лишь подмножество

$$W' = \{(x,y)|\ x \in (W_1 - Q_1),\ y \in (W_2 - -Q_2),\ \theta_1(x) = \theta_2(y)\} \cup Q',$$

где

$$Q' = \{(x,y)|\ x \in Q_1,\ y \in Q_2,\ \theta_1(x) = \theta_2(y) \neq \infty_0\} \cup$$
$$\{(x,\infty_2)|\ x \in Q_1,\ \theta_1(x) = \infty_0\} \cup \{(\infty_1, y)|\ y \in Q_2,\ \theta_2(y) = \infty_0\}.$$

Тогда соответствующая подмодель M' принадлежит классу $K4$. Нетрудно проверить, что проекции π_i остаются $\mathcal{L}_i$-морфизмами из M' на M_i. Таким образом, класс $K4$ является устойчивым. По теореме 8.2 логика $L4$ имеет CIP. $\square$

В [15] было доказано, что логики $\mathrm{JF} = \mathrm{J} + ((\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q))$ и $\mathrm{JE}^{\mathrm{Q}}_1 = \mathrm{J} + (\bot \to p \vee (p \to q))$ имеют CIP, но их сумма $\mathrm{JE}^{\mathrm{Q}}_2 = \mathrm{JF} + \mathrm{JE}^{\mathrm{Q}}_1$ не имеет CIP. Как мы видели в теореме 9.4, WIP-минимальные логики $L1$ и $L4$, негативно эквивалентные первым двум логикам, также имеют CIP. Докажем, что и WIP-минимальная логика, негативно эквивалентная сумме $\mathrm{JE}^{\mathrm{Q}}_2 = \mathrm{JF} + \mathrm{JE}^{\mathrm{Q}}_1$, имеет CIP.

Теорема 9.5. *Логика* $\mathrm{NE}\Downarrow$ *имеет CIP.*

Доказательство. Обозначим $L5 = \mathrm{NE} \Downarrow = L1 + L4$. Рассмотрим класс $K5$ моделей с условием максимальности, удовлетворяющих условию

(F5) для любого x, максимального в $W - Q$, существует не более одного $y \in Q$ такого, что $x < y < \infty$.

По леммам 7.2 и 7.1 и предложению 7.3 логика $L5$ полна относительно класса K5, причем этот класс содержит инициальные конусы всех канонических моделей логики $L5$. Покажем устойчивость класса K5, тогда по теореме 8.2 логика $L5$ имеет CIP.

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 9.6. *Любая инициальная модель M языка $\mathcal{L}$ из класса $K5$ является $\mathcal{L}$-морфным образом подходящей инициальной модели $M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$ того же языка, принадлежащей $K5$ и удовлетворяющей условиям:*

(t1) множество $W^* - \{\infty\}$ является деревом, т.е. W^* удовлетворякт условию:

$(x \leq^* z < \infty$ и $y \leq^* z) \Rightarrow (x \leq^* y$ или $y \leq^* x)$;

(t2) для любого x, максимального в $W^* - Q^*$, существует точно один y, такой что $x <^* y <^* \infty$.

Доказательство. Для данной модели $M = (W, \leq, Q, \models)$ языка $\mathcal{L}$ с инициальным элементом x_0 обозначим через W_1^* множество всех конечных последовательностей $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$, где $k \geq 0$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \infty$. Полагаем $W^* = W_1^* \cup \{\infty\}$ и считаем ∞ наибольшим элементом в W^*. Для последовательностей из W^* считаем $(x_0, x_1, \ldots, x_k) \leq^* (x_0, y_1, \ldots, y_n)$, если первая последовательность является началом второй. Полагаем

$$Q^* = \{\infty\} \cup \{(x_0, x_1, \ldots, x_k)|\ x_k \in Q - -\{\infty\}\},$$

$$(x_0, x_1, \ldots, x_k) \models^* p \iff x_k \models p$$

для любой переменной p из $\mathcal{L}$.

Легко видеть, что построенная модель M^* принадлежит классу K5 и удовлетворяет условию (t1), а отображение $\theta : W^* \to W$, где $\theta(x_0, x_1, \ldots, x_k) = x_k$, $\theta(\infty) = \infty$, является $\mathcal{L}$-морфизмом.

Если построенная M^* не удовлетворяет условию (t2), расширяем ее. Для любого элемента x, максимального в $W^* - Q^*$ и не имеющего последователей в Q^*, отличных от ∞, добавляем точно одного такого последователя $y <^* \infty$, который сравним только с предшественниками элемента x, и считаем $y \models^* p$ для любой переменной p. Отображение, склеивающее все добавленные элементы с ∞, является $\mathcal{L}$-морфизмом расширенной модели на M^*. Расширенная модель удовлетворяет всем требованиям леммы. □

Продолжим доказательство теоремы. Докажем, что класс K5 является устойчивым.

Пусть M_0, M_1, M_2 – инициальные модели из класса K5 языков $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ и даны $\mathcal{L}_0$-морфизмы θ_1, θ_2 из M_1 и M_2 на M_0. По лемме 9.6 можем считать, что M_1 и M_2 удовлетворяют условиям (t1) и (t2). Для $i = 1, 2$ и каждого элемента x, максимального в $W_i - Q_i$, обозначаем через $\gamma(x)$ тот единственный y, для которого $x <_i y <_i \infty_i$.

Определим $M' = (W', \leq', Q', \models')$ как подмодель согласованного произведения M_1 и M_2 над M_0, полагая

$$Q' = \{(y_1, y_2)|\ y_1 \in Q_1, y_2 \in Q_2, \theta_1(y_1) = \theta_2(y_2) \neq \infty_0\} \cup$$

$$\cup \{(y_1, y_2)|\ \theta_1(y_1) = \theta_2(y_2) = \infty_0, y_1 \text{ не имеет вида } \gamma(x_1), y_2 \text{ не имеет вида } \gamma(x_2)\}$$

$$\cup \{(\gamma(x_1), \gamma(x_2))|\ x_1 \in W_1, x_2 \in W_2, \theta_1(\gamma(x_1)) = \theta_2(\gamma(x_2)) = \infty_0\};$$

$$W' = Q' \cup \{(x_1, x_2)|\ x_1 \in W_1 - Q_1, x_2 \in W_2 - Q_2, \theta_1(x_1) = \theta_2(x_2)\}.$$

Заметим, что $M' \in K5$. Условие максимальности выполнено по лемме 9.3. Кроме того, для любого максимального в $W' - Q'$ элемента (x_1, x_2) имеем $\theta_1(\gamma(x_1)) = \theta_2(\gamma(x_2))$. В самом деле, для $i = 1, 2$ элемент $\theta_i(\gamma(x_i))$ является наименьшим элементом в множестве последователей элемента $\theta_i(x_i)$, принадлежаших Q_0, а $\theta_1(x_1) = \theta_2(x_2)$, Поэтому пара $(\gamma(x_1), \gamma(x_2))$ принадлежит Q' и является единственным последователем элемента (x_1, x_2) в $Q' - \{(\infty_1, \infty_2)\}$. В частности, M' удовлетворяет условию (t2).

Покажем, что проекция π_1 из W' на W_1 является $\mathcal{L}_1$-морфизмом. Достаточно проверить условие (p2).

Пусть $(x_1, x_2) \in W'$, $x_1 <_1 y_1$. Найдем $y_2 \in W_2$ такой, что $y_2 \geq_2 x_2$ и $(y_1, y_2) \in W'$.

Имеем $\theta_2(x_2) = \theta_1(x_1) \leq_0 \theta_1(y_1)$. Так как θ_2 – p-морфизм, существует $z_2 \geq_2 x_2$ такой, что $\theta(z_2) = \theta_1(y_1)$. Если $(y_1, z_2) \in W'$, то это и есть искомая пара.

Пусть $(y_1, z_2) \notin W'$. Это означает, что $\theta_1(y_1) = \theta(z_2) = \infty_0$ и выполняется один из случаев:

(1) $y_1 = \gamma(v_1)$ для некоторого v_1, z_2 не представим в виде $\gamma(v_2)$ ни для какого v_2;

(2) $z_2 = \gamma(v_2)$ для некоторого v_2, y_1 не представим в виде $\gamma(v_1)$.

В случае (2) можно взять $y_2 = \infty_2$. Тогда $(y_1, y_2) \in Q' \subseteq W'$.

Рассмотрим случай (1). Тогда $y_1 = \gamma(v_1)$ для некоторого v_1, максимального в $W_1 - Q_1$. Имеем $x_1 <_1 y_1$, $v_1 <_1 y_1$. По (t1) получаем $x_1 \leq_1 v_1$ или $v_1 <_1 x_1$. Если $v_1 <_1 x_1$, то $v_1 <_1 x_1 <_1 y_1 <_1 \infty_1$, что противоречит условию (t2). Поэтому $x_1 \leq_1 v_1$ и $\theta_2(x_2) = \theta_1(x_1) \leq_0 \theta_1(v_1)$. Следовательно, существует $u_2 \geq_2 x_2$ такой, что $\theta_2(u_2) = \theta_1(v_1)$. По условию максимальности существует $v_2 \geq_2 u_2$, максимальный в $W_2 - Q_2$. Ясно, что $\theta_2(v_2) \geq_0 \theta_2(u_2) = \theta_1(v_1)$, Из максимальности v_1 следует максимальность $\theta_1(v_1)$ в $W_0 - Q_0$, поэтому $\theta_2(v_2) = \theta_1(v_1)$, а значит, $(v_1, v_2) \in W'$, причем это максимальный элемент в $W' - Q'$.

Как уже было доказано, пара $(\gamma(v_1), \gamma(v_2))$ входит в $Q' \subseteq W'$. Таким образом, нашли требуемый элемент $y_2 = \gamma(v_2) \geq_2 x_2$ такой, что $(y_1, y_2) \in W'$.

Следовательно, π_1 – $\mathcal{L}_1$-морфизм. Аналогично доказывается, что π_2 является $\mathcal{L}_2$-морфизмом из M' на M_2.

Таким образом, класс K5 является устойчивым. По теореме 8.2 логика $L5$ имеет CIP. □

Таким образом, имеют свойство CIP шесть из восьми WIP-минимальных логик, а именно, логики Neg, J, Od, Neg $\Downarrow$, NE $\Downarrow$ и NE $\downarrow$.

Вопрос, обладают ли свойством CIP логики NC $\downarrow$ и NC $\Downarrow$, остается пока открытым.

Список литературы

[1] Л.Л.Максимова, *Разрешимость слабого интерполяционного свойства над минимальной логикой*, Алгебра и логика, **50**:2, (2011), 152–188. MR2849305

[2] I.Johansson, *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistic Formalismus*, Compositio Mathematica 4 (1937), 119–136. MR1556966

[3] Л.Л.Максимова, *Разрешимость интерполяционного свойства Крейга в стройных J-логиках*, Сибирский математический журнал, **53**: 5 (2012), 1048–1064. MR3057926

[4] Л.Л.Максимова, *Проективное свойство Бета в стройных логиках* Алгебра и логика, **52**: 2 (2013), 172–202. MR3134782

[5] S.P.Odintsov, *Negative equivalence of extensions of minimal logic*, Studia Logica, **78** (2004), 417–442. MR2121732

[6] L.Maksimova, *Interpolation and Definability over the logic Gl*, Studia Logica, **99**, no. 1–3 (2011), 249-267. MR2836442

[7] H.Rasiowa, *An algebraic approach to non-classical logic*, North-Holland, Amsterdam, 1974. MR0446968

[8] Л.Л.Максимова, *Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр*, Алгебра и логика, **16**: 6 (1977), 643–681. MR0516426

[9] D.M.Gabbay, L.Maksimova, *Interpolation and Definability: Modal and Intuitionistic Logics*, Clarendon Press, Oxford, 2005. MR2153890

[10] А.И.Мальцев, *Алгебраические системы*, М., Наука, 1970.

[11] Л.Л.Максимова, *Интерполяция и определимость в расширениях минимальной логики*, Алгебра и логика, **44**:6 (2005), 726–750. MR2213303

[12] L.Maksimova, *Interpolation and joint consistency*, In: We Will Show Them! Essays in Honour of Dov Gabbay. Volume 2, S. Artemov, H. Barringer, A. d'Avila Garcez, L. Lamb and J. Woods, eds. King's College Publications, London, 2005, 293–305. Zbl 1260.03064

[13] Л.Л.Максимова, *Неявная определимость в позитивных логиках*, Алгебра и логика, **42**:1 (2003), 65–93. MR1988024

[14] K.Segerberg, *Propositional logics related to Heyting's and Johansson's*, Theoria, **34** (1968), 26–61. MR0241275

[15] Л.Л.Максимова, *Метод доказательства интерполяции в паранепротиворечивых расширениях минимальной логики*, Алгебра и логика, 46, no. 5 (2007), 627–648.

[16] K.Schütte, *Der Interpolationsatz der intuitionistischen Prädikatenlogik*, Mathematische Annalen, 148:192–200, 1962.

Лариса Львовна Максимова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: lmaksi@math.nsc.ru