S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 1021–1034 (2014) УДК 519.2
MSC 65C05

ВЫЧИСЛЕНИЕ КАПИТАЛА ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ КОМБИНИРОВАННОГО МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО В НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ ФИНАНСОВЫХ ИНДЕКСОВ

Г.И. БЕЛЯВСКИЙ, Н.В. ДАНИЛОВА

Abstract. The calculations in models of random processes with influence of events are considered. The trajectories of these processes are continuous concatenation of trajectories of diffusion processes with constant coefficients. The suggested method is the combination of the Monte-Carlo method and exact calculation. The examples of popular models, for which investigated models can be used as the approximation, are presented.

Keywords: Monte-Carlo method, Black-Scholes formula, stochastic volatility.

1. Введение

Метод Монте-Карло широко используется в задачах вычисления значений функционалов на траекториях случайных процессов. Пожалуй, он является одним из самых универсальных методов вычислительной математики. Сдерживающим фактором для метода является невысокая скорость сходимости, связанная с необходимостью большого числа повторений для получения достоверных результатов. В статье рассматривается широкий класс моделей, для которых возможно существенное сокращение повторений, за счет комбинирования метода с точными расчетами. Рассматриваемый класс моделей можно отнести к моделям с дискретным вмешательством случая, а предлагаемый метод естественно назвать комбинированным методом Монте-Карло. Основной особенностью предложенных моделей является то, что траектории случайного

Beliavsky G.I., Danilova N.V. The combined Monte-Carlo method to calculate the capital of the optimal portfolio in nonlinear models of financial indexes.

Работа поддержана грантом 213.01-07-2014/07 ПЧВГ.

Поступила 15 апреля 2014 г., опубликована 30 декабря 2014 г.

процесса образуются в результате непрерывной конкатенации траекторий процессов с относительно простой структурой. В статье рассматривается конкатенация траекторий процессов, полученных на основе винеровского процесса. Приводятся примеры популярных моделей, для которых исследуемые модели можно использовать в качестве аппроксимирующих моделей. В статье развиваются методы, представленные в работе [1].

Расчёты производятся на (B, S)-рынке, заданном на стохастическом базисе $(\Omega, (F_t)_{t\geq 0}, F, P)$ со стандартными условиями. Пусть M - множество эквивалентных мер, относительно которых дисконтированная стоимость $\dfrac{S}{B}$ является мартингалом (множество мартингальных мер). В зависимости от множества мартингальных мер M в финансовой математике различают три ситуации. Первая ситуация возникает, если множество мартингальных мер пусто. В этой ситуации рынок допускает арбитраж, т.е. возможность заработать не рискуя (первая фундаментальная теорема финансовой математики). На безарбитражном рынке возможны две ситуации. Первая ситуация - мартингальная мера единственная, вторая - множество мартингальных мер содержит бесконечное число элементов. Единственность мартингальной меры на безарбитражном рынке является критерием полноты рынка (воспроизводимости ограниченного финансового обязательства). Этот факт является содержанием второй фундаментальной теоремы финансовой математики [2].

Основные примеры

В теории финансов особую роль играет модель Блэка-Шоулса:

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t), dB_t = B_t r dt, \tag{1}$$

для которой процесс $\left(\dfrac{S_t}{B_t}\right)_{t\in[0,T]}$ является мартингалом относительно единственной мартингальной меры P, порождаемой винеровским процессом, и естественной фильтрацией. При этом рынок является безарбитражным и полным. Отметим, что если в (1) коэффициент при dt не равен r, то необходимый переход к мартингальной мере с помощью преобразования Гирсанова в конечном итоге приведёт к уравнению (1).

Капитал оптимального самофинансируемого портфеля для европейского опциона с моментом погашения T вычисляется с помощью равенства $X_t = V(t, S_t)$, в котором функция

$$V(t,x) = \exp(-r(T-t))Ef\left(x\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\xi\right)\right) \tag{2}$$

где случайная величина ξ распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией ($\xi \in N(0,1)$). Интегрируемая, неотрицательная функция f - платёжное обязательство. Если параметры функции - детерминированные функции времени, то формула (2) претерпит незначительные изменения:

$V(t,x) = \exp(-r(T-t))Ef\left(x\exp\left(\int_t^T\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)ds+\sqrt{\int_t^T\sigma^2 ds\xi}\right)\right)$. Применение, например, формулы прямоугольников при вычислении интегралов приводит к приближённой формуле:

$$\tilde{V}(t,x) =$$

$$= \exp(-r(T-t))Ef\left(x\exp\left(\sum_{i=1}^{N_{T-t}}\left(r-\frac{\sigma_i^2}{2}\right)\Delta s_i+\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{T-t}}\sigma_i^2\Delta s_i\xi}\right)\right) \tag{3}$$

где $t = s_0 < s_1 < ... < s_{N_{T-t}} = T, r_i = r(S_{i-1}), \sigma_i = \sigma(S_{i-1})$. В этом примере разбиение интервала детерминировано.

Дальнейшее развитие модели связано с предположением, что волатильность - случайная функция времени, удовлетворяющая условиям:

$$1)\sigma(t,\omega) - \text{прогрессивно измеримое изображение,}$$

$$2)P\left(\int_0^T \sigma^2 ds < \infty\right) = 1.$$

В этом варианте

$V(t,x) = \exp(-r(T-t))E\left[f\left(x\exp\left(\int_t^T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)ds+\int_t^T\sigma^2 dW_s\right)\right)\right]$ и соответствующая приближённая формула:

$$\tilde{V}(t,x) = \exp(-r(T-t))\times$$

$$\times Ef\left(x\exp\left(\sum_{i=1}^{N_{T-t}}\left(r-\frac{\sigma_i^2}{2}\right)\Delta s_i+\sum_{i=1}^{N_{T-t}}\sigma_i\sqrt{\Delta s_i}\xi_i\right)\right), \tag{4}$$

в которой ξ_i - независимые случайные величины, $\xi_i \in N(0,1)$.

Пример 1. Рассмотрим одну из моделей стохастической волатильности, в которой волатильность колеблется вокруг некоторого уровня в соответствии с уравнениями:

$$\sigma_t = \sigma^m \exp(X_t),$$

$$dX_t = aX_t dt + bd\overline{W}_t, X_0 = 0. \tag{5}$$

В (5) $\overline{W}_t$ - винеровский процесс, причём $EdW_t d\overline{W}_t = \rho dt$, что обеспечивает корреляционную зависимость между стоимостью рискового актива и волатильностью. Как правило $\rho < 0$, параметр $a < 0$. Решением уравнения (5) является экспоненциальный процесс Орнштейна-Уленбека:

$\sigma_t = \sigma^m \exp\left(b\int_0^t \exp(a(t-s))d\overline{W}_s\right)$. Для того чтобы учесть в модели корреляцию между стоимостью S и волатильностью σ, преобразуем уравнение (1) в уравнение

$dS_t = S_t\left(rdt+\frac{\sigma_t}{\sqrt{1+\rho^2}}(d\widetilde{W}_t+\rho d\overline{W}_t)\right)$, в котором $\widetilde{W}$ - стандартный винеровский процесс, не зависящий от $\overline{W}$. В результате приближённая формула:

$$\widetilde{V}(t,x) = \exp(-r(T-t))\times \tag{6}$$

$$\times Ef\left(x\exp\left(r(T-t)+\sum_{i=1}^{N_{T-t}}\left(\frac{\sigma_i\sqrt{\Delta s_i}\rho\eta_i}{\sqrt{1+\rho^2}}-\frac{\sigma_i^2}{2}\Delta s_i\right)+\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{T-t}}\sigma_i^2\Delta s_i\xi}\right)\right)$$

Присутствующие в (6) случайные величины σ_i определяются уравнениями:

$$X_1 = b\sqrt{\frac{\exp(2at)-1}{2a}}\eta_1, \tag{7}$$

$$X_i = \exp(a\Delta s_i)X_{i-1} + b\sqrt{\frac{\exp(2a\Delta s_i) - 1}{2a}}\eta_i,$$
$$\sigma_i = \sigma^m \exp(X_i).$$

В (6) и (7) η_i - независимые случайные величины, причём $\eta_i \in N(0,1)$. Отметим, что последовательность X_i является супермартингалом относительно естественной фильтрации $\Phi_i = \sigma(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_i)$ и устойчивым процессом авторегрессии первого порядка. Для любого i волатильность σ_i распределена по логнормальному закону с математическим ожиданием
$E\sigma_i = \sigma^m \exp\left(\frac{(\exp(2as_i) - 1)b^2}{4a}\right)$ и дисперсией
$D\sigma_i = (\sigma^m)^2 \exp\left(\frac{(\exp(2as_i) - 1)b^2}{2a}\right)\left(\exp\left(\frac{(\exp(2as_i) - 1)b^2}{2a}\right) - 1\right)$. Отсюда следует, что при $b \to 0$ $\max \sigma_i \to \sigma^m$ в L_2. В этом примере разбиение интервала также детерминировано.

Пример 2. Рассмотрим непрерывную модификацию популярной ARCH-модели:

$$S_t = S_0 \exp(X_t),$$
$$dX_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_t^2}\,dW_t.$$

Переход к эквивалентной мартингальной мере означает замену этих уравнений на уравнения:

$$S_t = S_0 \exp(X_t), \tag{8}$$
$$dX_t = \left(r - \frac{\alpha_0 + \alpha_1 X_t^2}{2}\right)dt + \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_t^2}\,dW_t.$$

Приближённая формула для расчётов в этой модели:

$$\widetilde{V}(t,x) = \exp(-r(T-t)) \times \tag{9}$$
$$\times E\left[f\left(x \exp\left(\sum_{i=1}^{N}\left(r - \frac{\alpha_0 + \alpha_1 X_{T_{i-1}}^2}{2}\right)(T_i - T_{i-1}) + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \sum_{i=1}^{N}\sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1 X_{T_{i-1}}^2)(T_i - T_{i-1})}\xi\right)\right)\right],$$

причём $X_{T_0} = \ln \frac{x}{S_0}$. При этом второе из уравнений (8) заменяется на последовательность уравнений:
$dX_t = \left(r - \frac{\alpha_0 + \alpha_1 X_{T_{i-1}}^2}{2}\right)dt + \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{T_{i-1}}^2}\,dW_t$ с начальными условиями $X_{\tau_{i-1}}$. Последовательность моментов остановки определяется рекуррентными уравнениями: $T_0 = t, T_i = (T_{i-1} + \tau) \wedge T$, где
$\tau = \inf\{\tau : |X_{T_{i-1}+\tau} - X_{T_{i-1}}| \geq \epsilon\}$. Нетрудно показать, что начиная с некоторого j моменты остановки $T_j = T$. В этом примере разбиение интервала случайно.

Пример 3. Модель Блэка-Шоулса с дивидендами. В модели рассматривается ситуация, когда изменение капитала осуществляется не только за счёт изменений в рыночных стоимостях активов, но и с учётом дивидендов. Дисконтированный капитал портфеля в этой модели описывается уравнением: $d\left(\frac{X_t}{B_t}\right) =$

$\gamma_t\left(d\left(\frac{S_t}{B_t}\right)+d\left(\frac{C_t}{B_t}\right)\right), t\in[0,T]$. Процесс C описывает начисление дивидендов, поэтому естественно предположить, что он зависит от стоимости актива: $d\left(\frac{C_t}{B_t}\right)=\frac{g(S_t)}{B_t}dt$. В результате

$$dS_t = S_t(\mu dt+\sigma dW_t), \tag{10}$$

$$dB_t = B_t r dt,$$

$$d\left(\frac{X_t}{B_t}\right)=\gamma_t\left(\left(\frac{S_t}{B_t}(\mu-r)+\frac{g(S_t)}{B_t}\right)dt+\sigma\frac{S_t}{B_t}dW_t\right).$$

Для вычисления капитала оптимального самофинансируемого портфеля необходимо перейти к эквивалентной мере, относительно которой дисконтированный капитал будет мартингалом. Это эквивалентно замене уравнений (10) на уравнения:

$$dS_t = S_t\left(\left(r-\frac{g(S_t)}{S_t}\right)dt+\sigma dW_t\right), \tag{11}$$

$$dB_t = B_t r dt,$$

$$d\left(\frac{X_t}{B_t}\right)=\gamma_t\sigma\frac{S_t}{B_t}dW_t.$$

При получении приближенной формулы первое из уравнений (11) необходимо заменить на последовательность приближенных уравнений, аналогично тому, как это было сделано в ARCH-модели. Подробнее смотри ниже. В результате приближенная формула для расчета капитала портфеля:

$$\widetilde{V}(t,x)=\exp(-r(T-t))\times \tag{12}$$

$$\times Ef\left(x\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)-\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{g(S_{T_{i-1}})}{S_{T_{i-1}}}(T_i-T_{i-1})\right)+\sigma\sqrt{T-t}\xi\right)\right)$$

Здесь также, как и в примере 2, разбиение случайно. Приближенные формулы (3), (4), (6), (9) и (12) можно рассматривать как частные случаи вычисления функции $V(t,x)=\exp(-r(T-t))E(f(S_T)/S_t=x)$ для модели, в которой снос или волатильность являются процессами с дискретным вмешательством случая.

Описание модели

В организации модели участвуют стохастический базис $\langle\Omega,(F_t)_{t\geq 0},F_\infty,P\rangle$ с естественной фильтрацией $F_t=\sigma(W_s,s\leq t)$, пополненной событиями нулевой вероятности относительно винеровской меры P; моменты остановки: $0<\tau_1<\tau_2<...$, причём при $n\to\infty$ $\tau_n\to\infty$; последовательность случайных величин (b_i,a_i), причём $a_i,b_i\in F_{\tau_i}$. Снос и волатильность определяются равенствами: $\mu(t)=\sum\limits_i b_i I_{\tau_i\leq t}, \sigma(t)=\sum\limits_i a_i I_{\tau_i\leq t}$. В результате модель Блэка-Шоулза относительно единственной мартингальной меры, существование и единственность которой будет обосновано ниже, приобретает вид:

$$S_t=$$

$$=S_0\exp\left(\sum_{i\geq 1}\left(\left(r-\frac{\sigma_{i-1}^2}{2}\right)(t\wedge\tau_i-t\wedge\tau_{i-1})+\sigma_{i-1}(W_{t\wedge\tau_i}-W_{t\wedge\tau_{i-1}})\right)\right),$$

$$B_t = B_0 \exp(rt), \tag{13}$$

где $\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$. Приращения винеровского процесса $W_{t\wedge\tau_i} - W_{t\wedge\tau_{i-1}}$ благодаря строго марковскому свойству винеровского процесса независимые и их закон распределения $\mathrm{Law}(W_{t\wedge\tau_i} - W_{t\wedge\tau_{i-1}}) = N(0, t\wedge\tau_i - t\wedge\tau_{i-1})$, где ξ - стандартная нормальная случайная величина. Поэтому уравнения (13) эквивалентны по закону распределения уравнениям:

$$S_t = S_0 \times$$
$$\times \exp\left(\sum_{i\geq 1}\left(\left(r - \frac{\sigma_{i-1}^2}{2}\right)(t\wedge\tau_i - t\wedge\tau_{i-1}) + \sigma_{i-1}\sqrt{t\wedge\tau_i - t\wedge\tau_{i-1}}\,\xi_i\right)\right),$$

$$B_t = B_0 \exp(rt). \tag{14}$$

В (14) ξ_i - независимые стандартные нормальные случайные величины. Для этой модели справедливо утверждение.

Утверждение 1. *Дисконтированный процесс стоимости* $\frac{S}{B}$ *является мартингалом.*

Справедливость утверждения вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Интегрируемый и адаптированный процесс X будет мартингалом тогда и только тогда, когда для любого конечного момента остановки τ $EX_\tau = EX_0$.*

Доказательство этой леммы для дискретного времени приведено в [3], и не требуется больших усилий, чтобы перенести его на непрерывное время.

Доказательство утверждения. Пусть τ - конечный момент остановки. У дисконтированного процесса стоимости
$\frac{S_\tau}{B_\tau} = \frac{S_0}{B_0}\exp\left(-\sum_{i\geq 1}\left(\frac{\sigma_{i-1}^2}{2}(\tau\wedge\tau_i - \tau\wedge\tau_{i-1}) + \sigma_{i-1}\sqrt{\tau\wedge\tau_i - \tau\wedge\tau_{i-1}}\,\xi_i\right)\right)$ количество слагаемых в показателе экспоненты конечно, так как при $i\to\infty$ $\tau_i\to\infty$ и τ - конечный момент остановки. Поэтому условное математическое ожидание

$$E\left(\frac{S_\tau}{B_\tau} \mid \tau, \{\tau_i, r_i, \sigma_i\}\right) = \frac{S_0}{B_0}\exp\left(-\sum_{i\geq 1}\frac{\sigma_i^2}{2}(\tau\wedge\tau_i - \tau\wedge\tau_{i-1}) +\right.$$
$$\left. + \sum_{i\geq 1}\frac{\sigma_i^2}{2}(\tau\wedge\tau_i - \tau\wedge\tau_{i-1})\right) = \frac{S_0}{B_0}.$$ Отсюда для любого конечного момента остановки математическое ожидание $E\frac{S_\tau}{B_\tau} = \frac{S_0}{B_0}$. Далее остаётся применить лемму 1.

Применение формулы Ито позволяет записать уравнения (14) в эквивалентной дифференциальной форме как последовательность «склеенных» уравнений:

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma_{i-1}dW_t), \tag{15}$$

$$dB_t = rB_t dt,\ t \in (\tau_{i-1}, \tau_i],$$
$$\text{с начальными условиями } S_t \mid_{t=\tau_{i-1}} = S_{\tau_{i-1}},\ B_t \mid_{t=\tau_{i-1}} = B_{\tau_{i-1}}.$$

Допустим, что уравнения (15) имеют вид:

$$dS_t = S_t(\mu_{i-1}dt + \sigma_{i-1}dW_t), \tag{16}$$
$$dB_t = rB_t dt,\ t \in (\tau_{i-1}, \tau_i],$$
$$\text{с начальными условиями } S_t \mid_{t=\tau_{i-1}} = S_{\tau_{i-1}},\ B_t \mid_{t=\tau_{i-1}} = B_{\tau_{i-1}}.$$

В этом случае дисконтированная стоимость не является мартингалом. Возникает вопрос о существовании эквивалентной меры, относительно которой дисконтированная стоимость будет мартингалом. Соответствующий результат сформулируем в виде утверждения 2, которое является прямым следствием теоремы Гирсанова [4].

Прежде чем сформулировать утверждение 2, рассмотрим «склеенный» процесс:

$$d\overline{W}_t = \frac{\mu_i - r}{\sigma_i}dt + dW_t, t \in (\tau_{i-1}, \tau_i],$$

аналогичный процессам (15) и конечный момент остановки τ.

Утверждение 2. *Процесс $\overline{W}_{\tau\wedge t}$ является стандартным броуновским движением относительно меры $d\overline{P} = Z_\tau dP$, где $Z_\tau =$*

$$= \exp\left(- \sum_{i\geq 1} \left(\frac{(r-\mu_{i-1})^2}{2}(\tau\wedge\tau_i - \tau\wedge\tau_{i-1}) + (r-\mu)\sqrt{\tau\wedge\tau_i - \tau\wedge\tau_{i-1}}\xi_i \right) \right).$$

Доказательство заключается в проверке равенства $EZ_\tau = 1$, которое является справедливым. Относительно процесса $\overline{W}_t$ уравнения (16) приобретают вид (15), следовательно, дисконтированный процесс стоимости является мартингалом относительно меры $\overline{P}$.

Из утверждений (1) и (2) вытекает полнота рынка. Действительно, положив $X_t = V(t, S_t)$, получим с помощью формулы Ито равенство для рисковой составляющей самофинансируемого портфеля $\gamma_t = \dfrac{\partial V(t,S_t)}{\partial x}$. Для любого ограниченного финансового обязательства функция $V(t,x)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x. Отсюда траектории γ непрерывны почти всюду, так как непрерывны траектории процесса стоимости - актива S. Так как процессы с непрерывными траекториями относятся к предсказуемым процессам, то дисконтированный капитал портфеля представим в виде интеграла от рисковой составляющей γ по дисконтированной стоимости акции $\dfrac{X_t^\pi}{B_t} = \dfrac{X_0}{B_0} + \displaystyle\int_0^t \gamma(s)d\frac{S_u}{B_u}$, следовательно, для любого ограниченного финансового обязательства существует самофинансируемый портфель, капитал которого в начальный момент $X_0 = \exp(-rT)Ef(S_T)$ и в финальный момент времени $X_T = f(S_T)$ почти всюду. Этот факт означает полноту рассматриваемого рынка. Из полноты рынка следует единственность мартингальной меры[2].

Первый комбинированный метод Монте-Карло (Монте-Карло и формула Блэка-Шоулса) Вычисление функции $V(t,x)$ для рассматриваемой модели производится следующим образом. Моменты остановки τ разбивают интервал $[t,T]$ на N_{T-t} случайных интервалов
$t = T_0 < T_1 < ... < T_{N_{T-t}} = T$[1]. Рассмотрим две случайные величины

[1] Мы не предполагаем, что T - детерминированная величина

$A_t(y) = \sum_{i=1}^{N_{T-t}} \left(r - \frac{\sigma_{i-1}^2}{2} \right) (T_i - T_{i-1})$ и $B_t(y) = \sum_{i=1}^{N_{T-t}} \sigma_{i-1}^2 (T_i - T_{i-1})$ при $\sigma_0 = y$. Функцию $V(t, x)$ можно вычислить, используя телескопическое свойство условного математического ожидания:

$$V(t, x, y) =$$
$$= \exp(-r(T-t)) E_{A_t, B_t} \left(E \left(f \left(x \exp \left(A_t(y) + \sqrt{B_t(y)} \xi \right) \right) / A_t, B_t \right) \right).$$

Внутреннее (условное) математическое ожидание вычисляется по случайной величине ξ со стандартным нормальным законом распределения, поэтому основная сложность связана с вычислением внешнего математического ожидания. Метод основывается на предположении о том, что существует генератор последовательности моментов остановок τ и последовательности σ. Обозначим через
$\phi(x, A_t(y), B_t(y)) = E \left(f \left(x \exp \left(A_t(y) + \sqrt{B_t(y)} \xi \right) \right) / A_t(y), B_t(y) \right)$. Для европейского опциона-колл с финансовым обязательством
$f(x) = \max(x - K, 0)$ функция
$\phi(x, A_t(y), B_t(y)) = x \exp(r(T-t)) \Phi \left(\sqrt{B_t(y)} + \theta_t(y) \right) - K \Phi (\theta_t(y))$, где $\theta_t(y) = \frac{1}{\sqrt{B_t(y)}} \left(A_t(y) - \ln \frac{K}{x} \right)$, $\Phi(x)$ - функция Лапласа. В соответствии с методом Монте-Карло приближенная формула будет иметь вид:

$$V(t, x, y) = \exp(r(T-t)) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \phi(x, A_t^i(y), B_t^i(y)) \right). \tag{17}$$

Для европейского опциона-колл $V(t, x, y)$ - среднее справедливых цен Блэка-Шоулса.

Второй комбинированный метод Монте-Карло(Монте-Карло и динамическое программирование). Здесь будет использована обратная индукция. Будем предполагать, что
$\sigma_i \in \{\sigma_{i-1} - h, \sigma_{i-1} + h\}$ с вероятностями $P(\sigma_i = \sigma_{i-1} + h / F_{T_{i-1}}) = p_{i-1}$. Рассмотрим последовательность
$\phi_i(x, y, \tau) = E \left(f \left(x \exp \left(A_i(y) + \sqrt{B_i(y)} \xi \right) \right) / \tau \right)$, где τ - случайное разбиение интервала $[t, T]$, $A_i(y) = \sum_{j=i+1}^{N_{T-t}} \left(r - \frac{\sigma_{j-1}^2}{2} \right) (T_j - T_{j-1})$,
$B_i(y) = \sum_{j=i+1}^{N_{T-t}} \sigma_{j-1} (T_j - T_{j-1})$ при $\sigma_i = y$. Для последовательности справедливо рекуррентное уравнение:

$$\phi_{i-1}(x, y, \tau) = \tag{18}$$
$$= E \left(\phi_i \left(x \exp \left(\left(r - \frac{y^2}{2} \right) (T_i - T_{i-1}) + y \sqrt{T_i - T_{i-1}} \xi \right), y + h, \tau \right) p_i + \right.$$
$$\left. + \phi_i \left(x \exp \left(\left(r - \frac{y^2}{2} \right) (T_i - T_{i-1}) + y \sqrt{T_i - T_{i-1}} \xi \right), y - h, \tau \right) (1 - p_i) \right),$$
$$\phi_{N_T}(x, \sigma_T, \tau) = f(x).$$

В (18) ξ - стандартная нормальная случайная величина, и математическое ожидание вычисляется по ξ. Формула (17) приобретает вид:

$$V(t,x,y) = \exp(-r(T-t))\left(\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\phi_0(x,y,\tau^i)\right).$$

Ниже приведены два вычислительных примера с детерминированным (модель стохастической волатильности) и случайным (модель с дивидендами) разбиениями интервала. В первом примере использован первый комбинированный метод Монте-Карло, во втором примере - второй.

Вычислительный пример 1. Модель стохастической волатильности. Рассмотрим реализацию метода при вычислении справедливой цены европейского опциона-колл с платёжным обязательством $f(x) = \max(x-K,0)$ на примере модели стохастической волатильности. Разбиение интервала $[t,T]$ равномерно и $\Delta s_i = \dfrac{T-t}{N}$. Выражения для случайных величин A и B имеют вид: $A_t = \dfrac{T-t}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(r-\dfrac{\sigma_i^2}{2}\right)$, $B_t = \dfrac{T-t}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i$. Случайные величины σ_i вычисляются по формулам: $X_1 = b\sqrt{\dfrac{\exp(2at)-1}{2a}}\eta_1$, $X_i = \left(1+\dfrac{T-t}{N}\right)X_{i-1} + b\sqrt{\dfrac{T-t}{N}}\eta_i$, $\sigma_i = \sigma^m\exp(X_i)$. Нормальные случайные величины η_i получены при помощи адаптивного генератора [1].

Для исходных данных: $\sigma^m = 0.01, a = -0.1, r = 0.2, t = 0, T = 1, N = 10, S_0 = K = 6$, зависимость значений $V(0,6)$ от параметра b приведена в таблице 1, при $L = 200$, 250, 300.

b	L=200	L=250	L=300
0	1.1214	1.1214	1.1214
0.1	1.1213	1.1216	1.1217
0.2	1.1218	1.1238	1.1239
0.3	1.1232	1.1246	1.1247
0.4	1.1236	1.1263	1.1264
0.5	1.1271	1.1276	1.1278
0.6	1.1308	1.1389	1.1392
0.7	1.1356	1.1358	1.1359
0.8	1.1423	1.1398	1.1397
0.9	1.1413	1.1455	1.1454
1	1.1489	1.1508	1.1509

Таблица 1. Зависимость справедливой цены европейского опциона-колл от параметра b.

Из таблицы вытекает устойчивость вычислительного метода. Наблюдается рост справедливой цены при увеличении параметра b и приближение справедливой цены к цене, вычисленной по формуле Блэка-Шоулса (b=0) при стремлении b к 0 (1.1214). Максимальное различие получено при b=0.6 и составляет примерно 0.003.

Вычислительный пример 2. Модель с дивидендами. Рассмотрим вычисление справедливой цены европейского опциона-колл для модели с дивидендами. На сей раз, разбиение интервала произведем случайными моментами остановки. Для этого нанесем равномерную сетку на фазовую положительную полуось с шагом h. Последовательность моментов остановки определяется по рекуррентной формуле:

$$\overline{\tau}_i = \inf\left(\tau : \left(r - \frac{g(S_{T_{i-1}})}{S_{T_{i-1}}}\right)\tau + \sigma W_\tau \geq h\right),$$

$$\widetilde{\tau}_i = \inf\left(\tau : \left(r - \frac{g(S_{T_{i-1}})}{S_{T_{i-1}}}\right)\tau + \sigma W_\tau \leq -h\right),$$

$$T_i = T \wedge (T_{i-1} + \min(\widetilde{\tau}_i, \overline{\tau}_i)),\ T_0 = t.$$

Прежде всего, вычислим вероятность $P(\widetilde{\tau}_i < \overline{\tau}_i)$. Для этого рассмотрим диффузию с постоянными коэффициентами $dX_t = adt + bdW_t$ и начальным условием $X_0 = x \in [A, B]$. Пусть $\tau_A = \inf(\tau : X_\tau \leq A)$, $\tau_B = \inf(\tau : X_\tau \geq B)$. Обозначим через $V(x) = P(\tau_A < \tau_B)$. Функция $V(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению: $aV' + \dfrac{b^2}{2}V'' = 0$ с краевыми условиями: $V(A) = 1$, $V(B) = 0$ (см., например, [4]). Отсюда искомая функция $V(x) = \dfrac{\exp\left(\dfrac{-2a}{b^2}x\right) - \exp\left(\dfrac{-2a}{b^2}B\right)}{\exp\left(\dfrac{-2a}{b^2}A\right) - \exp\left(\dfrac{-2a}{b^2}B\right)}$.

Следовательно, вероятность

$$P(\widetilde{\tau}_i < \overline{\tau}_i) = \frac{1 - \exp\left(\dfrac{-2a}{\sigma^2}h\right)}{\exp\left(\dfrac{2a}{\sigma^2}h\right) - \exp\left(\dfrac{-2a}{\sigma^2}h\right)},$$

где $a = r - \dfrac{g(S_{T_{i-1}})}{S_{T_{i-1}}}$. Рассмотрим последовательность бинарных случайных величин δ_i с условными вероятностями $P(\delta_i = 0/S_{T_{i-1}}) = P(\widetilde{\tau}_i < \overline{\tau}_i)$, через которые выражаются

$$S_{T_i} = S_{T_{i-1}}(\delta_i \exp(h) + (1 - \delta_i)\exp(-h)),$$

$$T_i = T \wedge (T_{i-1} + \delta_i \overline{\tau}_i + (1 - \delta_i)\widetilde{\tau}_i).$$

Далее потребуются условные законы распределения для случайных величин $\overline{\tau}_i$ и $\widetilde{\tau}_i$. Условные законы распределения для них могут быть получены в результате применения теоремы Гирсанова, см. [5]. Соответствующие условные плотности имеют вид:

$$\overline{p}_h(s/S_{T_{i-1}}) = \frac{h}{\sqrt{2\pi\sigma^2 s^3}} \exp\left(-\frac{(h - \mu s)^2}{2\sigma^2 s}\right), \tag{19}$$

$$\widetilde{p}_h(s/S_{T_{i-1}}) = \frac{h}{\sqrt{2\pi\sigma^2 s^3}} \exp\left(-\frac{(h + \mu s)^2}{2\sigma^2 s}\right).$$

В (19) $\mu = r - \dfrac{g(S_{T_{i-1}})}{S_{T_{i-1}}}$. В примере $g(x) = \Delta x^\alpha$. В таблице 2 приведена зависимость справедливой цены европейского опциона-колл от параметра α. Параметры модели: $\sigma = 0.15, r = 0.2, t = 0, T = 1, S_0 = 6, K = 5, \Delta = 0.1, \alpha \in [0, 1]$ с шагом $h = 0.1$.

α	L=200	L=250	L=300
0	1.7981	1.7984	1.7985
0.1	1.7822	1.7791	1.7788
0.2	1.7591	1.7562	1.7561
0.3	1.7314	1.7305	1.7306
0.4	1.6961	1.6969	1.6968
0.5	1.6577	1.6650	1.6554
0.6	1.6140	1.6152	1.6153
0.7	1.5625	1.5636	1.5637
0.8	1.5009	1.5014	1.5016
0.9	1.4280	1.4282	1.4283
1	1.3431	1.3436	1.3437

Таблица 2. Зависимость справедливой цены европейского опциона-колл от параметра α.

Поведение справедливой цены убывает с ростом α, что выглядит реалистично. Кроме этого, при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ вычисленные значения справедливой цены совпадают с точными значениями до третьего знака после запятой, полученными в результате замкнутого решения, которое существует в этих случаях (1.7985, 1.3437). Максимальное различие получено при $\alpha = 0.5$ и составляет примерно 0.004.

Погрешность. Поскольку одно из применений модели - это аппроксимация нелинейных моделей со случайной волатильностью, то мы сочли необходимым привести оценку для погрешности такой аппроксимации в следующей постановке. Рассмотрим два случайных процесса. Первый процесс удовлетворяет уравнению: $X_t = \sigma(X_t)W_t$ с функцией $\sigma(x)$, удовлетворяющей условию: $|\sigma'(x)| \leq L$. При выполнении этого условия уравнение имеет единственное сильное решение. Кроме этого, потребуем, чтобы для решения X_t выполнялось неравенство:

$$E\int_0^T \sigma^2(X_s)ds < \infty, \tag{20}$$

тогда процесс X_t является квадратично интегрируемым мартингалом. Второй процесс Y_t^h - аппроксимирующий процесс. Процесс Y_t^h удовлетворяет уравнениям типа (15) - $dY_t^h = \sigma(Y_{\tau_{i-1}}^h)dW_t$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$ с начальными условиями $Y_{\tau_{i-1}}$, где τ - строго возрастающая последовательность моментов остановки, причём $\tau_0 = 0$ и $Y_0 = X_0$. Моменты остановки определяются уравнениями:
$\tau_i = \inf\{\tau_{i-1} + \tau : |Y_{\tau_{i-1}}^h - Y_{\tau_{i-1}+\tau}^h| \geq \sigma(Y_{\tau_{i-1}})h\}$. Для упрощения выкладок потребуем, чтобы $\sigma(x) < M$[1], тогда преобразование Лапласа условного закона распределения приращения $E[\exp(-\lambda(\tau_i - \tau_{i-1}))/F_{\tau_{i-1}}] = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(h\sqrt{2\lambda})}$, условное математическое ожидание $E[\tau_i - \tau_{i-1}/F_{\tau_{i-1}}] = h^2$ и условная дисперсия $D[\tau_i - \tau_{i-1}/F_{\tau_{i-1}}] = h^4$. Таким образом, является справедливым следующее утверждение.

Утверждение 3. *Последовательность приращений $\tau_i - \tau_{i-1}$ является последовательностью независимых и одинаково распределённых случайных величин, причём $P(\tau_i - \tau_{i-1} < \infty) = 1$.*

[1] Трудно представить себе реальный процесс с неограниченной локальной изменчивостью.

Определим $N = \dfrac{T}{h^2}$. Как было показано ранее, процесс Y_t^h является мартингалом, причём при выполнении условия (20) - квадратично интегрируемым мартингалом. Процесс $Z_t^h = X_t - Y_t^h$ также квадратично интегрируемый мартингал с квадратической характеристикой

$\langle Z^h\rangle_{\tau_N} = \sum_i^N \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\sigma(X_s) - \sigma(Y_{\tau_{i-1}}))^2 ds,$

$\langle Z^h\rangle_{\tau_N} = \langle Z^h\rangle_{\tau_{N-1}} + \int_{\tau_{N-1}}^{\tau_N} (\sigma(X_s) - \sigma(Y_{\tau_{N-1}}))^2 ds.$

Используем утверждение (3), в результате получим неравенство $E(\langle Z^h\rangle_{\tau_N}/F_{\tau_{N-1}}) \le \langle Z^h\rangle_{\tau_{N-1}} + 2h^2L^2E(\langle Z^h\rangle_{\tau_N}/F_{\tau_{N-1}}) + 2(LM)^2h^4$. Выберем параметр h таким образом, чтобы выполнялось неравенство $1 - 2L^2h^2 > 0$, тогда $E(\langle Z\rangle_{\tau_N}/F_{\tau_{N-1}}) \le \dfrac{\langle Z\rangle_{\tau_N}}{1-2h^2L^2} + \dfrac{2(LM)^2h^4}{1-2h^2L^2}$. Применив индукцию назад, получим неравенство:

$$E(\langle Z\rangle_{\tau_N}) \le 2T(LM)^2h^2.$$

Математическое ожидание $E\tau_N = T$, дисперсия $D\tau_N = Th^2$. Следовательно, при $h \to 0$ $\tau_N \to T$ в L_2. Так как $E\langle Z\rangle_t$ - непрерывная функция от t, то является справедливым утверждение.

Утверждение 4. *Процесс Y^h сходится к процессу X в L_2 равномерно на интервале $[0, T]$ для любого конечного T.*

Библиографическая справка. Модель стохастической волатильности впервые появилась в работах H. Johnson and D. Shanno [6], J. Hull and A. White [7], L. Scott [8], J. Wiggins [9]. Исследования были продолжены в работах E. Stein and J. Stein [10], S. Heston [11], R. Schobel and J. Zhu [12], L. Rogers and L. Veraart [13]. Вычисления в рамках этих моделей сводятся к решению трехмерного фундаментального уравнения в частных производных. При различных упрощающих предположениях в ряде случаев удалось найти замкнутое решение. В остальных случаях предлагается использование численных методов. Смотри, например, работу R. Frontczak [14]. Авторегрессионные модели условной неоднородности также достаточно широко представлены в литературе. Название этим моделям было предложено Р. Энглем в [15]. Подробное изучение и анализ этих моделей можно найти в монографии А. Ширяева [16]. Известны также обобщения, называемые GARCH, EGARH и т.д. Для некоторых видов моделей этого типа также существуют замкнутые решения, см., например, работу S Heston and S. Nandi [17]. В работе [18] предложена альтернатива модели стохастической волатильности – модель с переключением режимов, в которой волатильность управляется марковской цепью. При выполнении вычислений в этой модели трехмерное фундаментальное уравнение заменяется системой уравнений для различных дискретных значений волатильности. В нашей модели изменение волатильности происходит в результате дискретного вмешательства случая, и волатильность сохраняет постоянное значение на случайных промежутках времени, что более естественно и упрощает расчеты. Задача вычисления оптимального портфеля в модели с дивидендами для линейного случая подробно изучалась в монографии А. Ширяева [2]. Идея использовать случайное разбиение интервала при вычислениях справедливых цен присутствует в работе P. Carr [19]. Однако это единственное, что связывает нас с этой работой. Как уже отмечалось во введении, метод Монте-Карло часто применяется для вычислений различной природы, поэтому имеется много статей, посвященных применению метода для вычисления функционалов на траекториях случайных процессов. Отметим две из них. Первая работа N.Chen and L. Jeff Hong [20] содержит подробный обзор, посвященный применению метода в финансовой инженерии, в котором уделяется внимание и моделям диффузии. Представленные методы используют генератор траекторий и так или иначе связаны с методом дискретизации случайного процесса (схема Эйлера – Муроями[21]) с постоянным шагом разбиения. Генерация всей траектории требует бо́льших вычислительных затрат по сравнению с нашим методом, в котором генерируются конечное число точек, через которые проходит бесконечное число траекторий, по которым выполняется аналитическое интегрирование. Второю работу A. Kuznetsov, A. Kyprianou, J. Pardo, K. van Schaik [22] мы упомянем в связи с использованием метода с аналитическим преобразованием Винера-Хопфа для получения генератора процессов максимума и минимума и поэтому в идеологическом смысле близкой нашим исследованиям.

Список литературы

[1] Г. Белявский, Н. Данилова, *Диффузионные модели со случайным переключением параметров. Расчеты и финансовые приложения*, Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2012.

[2] А. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики. Теория*, ФАЗИС, Москва, 1998.

[3] P. Baldi, L. Mazliak, P. Priouret, *Martingales and Markov chains*, Chapman and Hall,CRC, 2002. MR1932279

[4] A. Pascussi, *PDE and Martingal methods in option pricing*, Springer, 2012.

[5] I. Karatazas, S. Sherve, *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer, 1991.

[6] H. Johnson, D. Shanno, *Option pricing when the variance is changing*,Journal of Financial and Quantitative Analysis,**22** (1987), 143–151.

[7] J. Hull, A. White, *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*,Journal of Finance,**2** (1987), 281–300.

[8] L. Scott, *Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimation and an application*,Journal of Financial and Quantitative Analysis,**22** (1987), 419–438.

[9] J. B. Wiggins, *Option values under stochastic volatility: theory and empirical estimates*,Journal of Financial Economics,**2** (1987), 351–372.

[10] E. Stein, J. Stein, *Stock price distributions with stochastic volatiliy: an analytic approach*,Reviews of Financial Studies,**4** (1991), 727–752.

[11] S. Heston, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bondand currency options*,Reviews of Financial Studies,**2** (1993), 327–343.

[12] R. Schobel, J. Zhu, *Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: an extension*,European Financial Review,**3** (1999), 23–46. Zbl 1028.91026

[13] L. C. G. Rogers, L. A. M. Veraart, *A stochastic volatility alternative to SABR*,Journal of Applied Probability,**4** (2008), 1071–1085. MR2484162

[14] R. Frontczak, *Valuing Options in Heston's Stochastic Volatility Model: Another Analytical Approach*, Journal of Applied Mathematics, **4** (2011), 18–28. MR2844119

[15] R. Engle, *Autoregressive conditional heterocsedasticity with estimation of the variance of United Kingdom inflation*, Econometrica, **4** (1982), 987–1008. MR0666121

[16] А. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики. Факты, модели*, ФАЗИС, Москва, 1998.

[17] S.L.Heston, S.Nandi, *A closed-form GARCH option valuation model*, Review of Financial Studies, **3** (2000), 585–625.

[18] K. Chourdakis, *Non-affine option pricing*,Journal of Derivatives, **3** (2004), 10–25.

[19] P. Carr, *Randomization and the American put*, The review of financial studies,**3** (1998), 597–626.
[20] N. Chen, L. Jeff Hong, *Monte – Carlo simulation in financial engineering*, Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference,eds. IEEE, (2007), 919–931.
[21] P. Kloeden, E. Platen, *Numerical solution of stochastic differential equations*, Springer, 1995.
[22] A. Kuznetsov, A. Kyprianou, J. Pardo, K. van Schaik, *A Wiener-Hopf Monte-Carlo simulation technique for Levy processes*,The annals of applied probability, **6** (2011), 1–20. MR2895413

Григорий Исаакович Белявский
Южный федеральный университет,
ул.Мильчакова, 8а,
344090, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail address: beliavsky@hotmail.com

Данилова Наталья Викторовна
Южный федеральный университет,
ул.Мильчакова, 8а,
344090, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail address: danilova198686@mail.ru