S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 119–129 (2014) УДК 512.86
MSC 20H25

О СТАБИЛЬНОСТИ УНИПОТЕНТНЫХ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА НАД ТЕЛОМ

А.А. КОРОБОВ

Abstract. For a wide class of vector spaces over skew-fields we prove that a group of unipotent automorphisms is conjugate to a group of triangular matrices.

Keywords: skew linear groups, unipotent subgroups, division ring, stability subgroup.

1. Введение

Хорошо известно, что любая унипотентная группа G автоморфизмов n-мерного векторного пространства V над любым коммутативным телом D триангулируема. Глубинной причиной этого факта является то, что в группе G выполнена следующая формула:

$\forall g \in G\, \forall h \in G\ \mathrm{tr}(gh) - \mathrm{tr}(g) = 0.$

Из неё сразу следует, что размерность линейной оболочки множества $G-1$ в пространстве $\mathrm{End}_D(V)$ не превосходит n^2-2, поэтому группа G не может быть абсолютно неприводимой.

В случае некоммутативного тела вопрос 2.62 из Коуровской тетради [11] показывает, что доказать унитриангулируемость унипотентной группы автоморфизмов значительно труднее. Всё сказанное даёт основание для следующего определения.

Определение. Пусть D — тело положительной характеристики p. Будем говорить, что векторное пространство V над телом D обладает свойством $\mathcal{P}$, если из того, что два его унипотентных автоморфизма порядка p порождают

Korobov, A.A., On stability of unipotent automorphism groups of a vector space over a division ring.

Поступила 20 июня 2013 г., опубликована 13 февраля 2014 г.

унипотентную подгруппу, следует либо нетривиальность центра, либо — почти разрешимость этой группы.

Приведём некоторые примеры таких векторных пространств.

(1) Свойством $\mathcal{P}$ обладает конечномерное векторное пространство над любым коммутативным телом положительной характеристики (см. [1], 49.1.1).
(2) Свойством $\mathcal{P}$ обладает конечномерное векторное пространство над телом, являющимся локально конечномерным над своим центром [2].
(3) Свойством $\mathcal{P}$ обладает конечномерное векторное пространство над телом характеристики 2 [3].
(4) Свойством $\mathcal{P}$ обладает n-мерное векторное пространство над телом характеристики p, если $p > (n-1)(n-[n/2])$ [4].
(5) Свойством $\mathcal{P}$ обладает четырёхмерное векторное пространство над любым телом положительной характеристики (см. [2], [5]).
(6) Свойством $\mathcal{P}$ обладает пятимерное векторное пространство над телом характеристики 3.

Перечисленные примеры позволяют выдвинуть гипотезу.

Гипотеза. Свойством $\mathcal{P}$ обладает любое конечномерное векторное пространство над телом.

В пользу справедливости этой гипотезы можно высказать ещё следующее соображение. Если гипотеза окажется неверной для шестимерного пространства над телом характеристики 3, то будет положительно решён старый вопрос о бесконечности свободной группы периода 9 с двумя свободными образующими.

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть конечномерное векторное пространство V обладает свойством $\mathcal{P}$. Тогда всякая унипотентная группа автоморфизмов пространства V унитриангулируема.*

Кроме того, получен близкий результат для произвольного векторного пространства над телом.

Теорема 2. *Всякая бинарно конечная унипотентная группа автоморфизмов конечномерного векторного пространства над произвольным телом является унитриангулируемой.*

2. Известные результаты и определения, необходимые для доказательства теорем

Всюду в этом пункте D будет обозначать тело положительной характеристики.

Определение. Пусть W — ненулевое подпространство пространства V. Подгруппа $C_G(W) = \{g \in G | wg = w \ \forall w \in W\}$ называется стабилизатором подпространства W.

Определение. Пусть $V = V_0 > V_1 > \ldots > V_r = 0$ — матрёшка подпространств пространства V над телом D. Стабилизатором этой матрёшки называется группа всех автоморфизмов пространства, оставляющих члены указанной матрёшки инвариантными и действующих тождественно в секциях V_i/V_{i+1}.

Предложение 1. [3] *Пусть G — группа автоморфизмов n-мерного векторного пространства V над телом D. Тогда каждая возрастающая матрёшка стабилизаторов в группе G имеет длину, не превосходящую $n+1$.*

Определение. Максимальный по включению элемент во множестве всех стабилизаторов ненулевых подпространств будем коротко называть максимальным стабилизатором в группе G.

Предложение 2. (см. [6], 1.3.4). *Любая унипотентная локально конечная группа автоморфизмов конечномерного пространства V над телом D является стабилизатором некоторой матрёшки подпространств.*

Предложение 3. [7] *Пусть p — нечётное простое число, G — p-группа, a — её элемент порядка p, удовлетворяющий следующим условиям: 1) все подгруппы вида* гр(a, a^g), *$g \in G$, конечны; 2) централизатор $C_G(a)$ элемента a в группе G конечен. Тогда группа G почти нильпотентна.*

Лемма 1. *Пусть U, W — подпространства пространства V, G — унипотентная группа автоморфизмов пространства V, $C_1 = C_G(U)$ — максимальный стабилизатор. Тогда либо существует такое подпространство X размерности $\dim U + \dim W$, что $C_G(X) = C_1 \cap C_G(W)$, либо $C_G(W) \leq C_1$.*

Доказательство. Можно считать, что стабилизатор $C_G(W)$ не содержится в C_1. Предположим, что $U \cap W \neq 0$. Тогда найдётся ненулевой вектор v из $U \cap W$. Так как $C_1 = \{g \in G | wg = w \ \forall w \in U\}$, то для любого $g \in C_1$ выполнено $gv = v$. Обозначим прямую с направляющим вектором v через P. Тогда $C_1 \leq C_G(P)$. Так как C_1 — максимальный стабилизатор, то $C_1 = C_G(P)$. С другой стороны, $v \in W$, и поэтому $vc = v$ для любого c из $C_G(W)$. Тогда $C_G(W) \leq C_G(P) = C_1$. Полученное противоречие с условием показывает, что $U + W = U \oplus W$. Так как $C_1 \cap C_G(W) = C_G(U + W)$, то $X = U + W$ — искомое подпространство. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если пространство V размерности n над телом D обладает свойством $\mathcal{P}$, то пространство размерности, не превосходящей $n - 1$ над тем же телом, обладает свойством $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать лемму для любого подпространства пространства V, причём размерности, большей единицы. Пусть U — произвольное такое подпространство в V, g, h — любые такие автоморфизмы порядка p из $\mathrm{GL}(U)$, что группа гр(g, h) унипотентна. Зафиксируем некоторое дополнение W к пространству U, т. е. $V = U \oplus W$. Определим автоморфизмы g_0, h_0 пространства V следующим образом. Подпространства U и W инвариантны как относительно g_0 , так и относительно h_0, сужения автоморфизмов g_0 и h_0 на U совпадают с g и h, соответственно, а на подпространстве W оба автоморфизма тривиальны. Тогда группа $G_0 =$ гр(g_0, h_0) изоморфна группе G как абстрактная группа. Кроме того, группа G_0 порождается двумя элементами порядка p и унипотентна. По свойству $\mathcal{P}$ группа G_0 либо почти разрешима, либо с нетривиальным центром. Следовательно, группа G тоже либо почти разрешима, либо с нетривиальным центром. Так как автоморфизмы g, h порядка p пространства U были выбраны произвольно, то лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — унипотентная группа автоморфизмов конечномерного векторного пространства над телом положительной характеристики. Если в группе G имеется нетривиальная нормальная триангулируемая подгруппа, то группа G приводима.*

Доказательство. Пусть, напротив, группа G неприводима. Обозначим нетривиальную нормальную триангулируемую подгруппу группы G через Z, а характеристику тела — через p. Так как Z — разрешимая p-группа, то группа Z локально конечна. По предложению 2 группа Z является стабилизатором некоторой матрёшки подпространств. Наименьшее ненулевое подпространство в этой матрёшке обозначим через U_0. В частности, $Z \leq C_G(U_0)$. По предложению 1 существует максимальный стабилизатор H ненулевого подпространства, содержащий группу Z. Построим последовательность $(H_k)_{k\in\mathbf{N}}$ из стабилизаторов со следующим свойством: существует элемент g_k в G такой, что $H_k^{g_k}$ не содержится в H и $H_{k+1} = H_k^{g_k} \cap H$.

Сначала построим стабилизатор H_1. Предположим, что $H^g \subseteq H$ для любого элемента $g \in G$. Тогда $N = \text{гр}(H^g | g \in G)$ — нормальная подгруппа в G. Имеем $N \leq H = C_G(U)$, где U некоторое ненулевое подпространство в V. Так как $N \leq C_G(U)$, то существует одномерное подпространство P, инвариантное относительно группы N. Очевидно, P — минимальное N-допустимое подпространство. Пусть $\bar{U}$ сумма всех подпространств вида Pg по всем $g \in G$. Очевидно, $\bar{U}$ — G-допустимое подпространство в V. Поэтому из неприводимости группы G следует, что $V = \bar{U}$. Из конечномерности пространства V следует, что найдутся в группе G такие элементы $g_1, \ldots, g_n$, что V является прямой суммой подпространств $Pg_1, \ldots, Pg_n$, причём каждое подпространство Pg_k — одномерное N-допустимое подпространство.

Возьмём произвольный элемент h из N, возьмём произвольное натуральное число $k \in \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим $\bar{h} = h^{g_k}$. Так как для любого $v \in P$ выполнено $vh = v$, то $vg_k\bar{h} = vg_k h^{g_k} = vhg_k = vg_k$. Когда элемент h пробежит всю группу N, элемент $\bar{h}$ тоже пробежит всю группу N. Так как число $k \in \{1, \ldots, n\}$ было выбрано произвольно, то $N \leq \bigcap_{k=1}^{n} C_G(Pg_k)$.

Для произвольного вектора $v \in V$ имеем разложение $v = v_1 + \ldots + v_n$, где $v_k \in Pg_k$. Следовательно, $vh = v_1h + \ldots + v_nh = v_1 + \ldots + v_n = v$ для любого элемента h из N, т. е. группа N тривиальна.

С другой стороны, $Z \leq N$. Полученное противоречие с нетривиальностью группы Z показывает, что найдётся такой элемент g_1 в G, что H^{g_1} не содержится в H. Полагаем $H_1 = H, H_2 = H_1^{g_1} \cap H$.

Предположим теперь, что группы $H_1, \ldots, H_k$ с указанным свойством построены. Предположение, что $H_k^g \leq H$ для любого элемента $g \in G$, как и выше, приведёт к противоречию с нетривиальностью группы Z. Поэтому найдётся элемент g_k в G такой, что $H_k^{g_k}$ не содержится в H. Полагаем $H_{k+1} = H_k^{g_k} \cap H$.

Итак, требуемая последовательность стабилизаторов построена. Ясно, что каждый стабилизатор H_k является пересечением k максимальных стабилизаторов. Индукцией по m докажем следующее утверждение: размерность неподвижного относительно H_m подпространства не меньше m.

Утверждение очевидно при $m = 1$. Пусть уже доказано, что существуют такие линейно независимые векторы $w_1, \ldots, w_m$, что $w_kh = w_k$ для всех $k = 1, \ldots, m$ и для всех $h \in H_m$. Линейную оболочку векторов $w_1g_m, \ldots, w_mg_m$ обозначим через W. Ясно, что подпространство W неподвижно относительно группы $H_m^{g_m}$, т. е. $H_m^{g_m} \leq C_G(W)$. Так как $H_m^{g_m}$ не содержится в H и H — максимальный стабилизатор, то, по лемме 1, $H \cap C_G(W) = C_G(U \oplus W)$. В частности, $H_{m+1} \leq C_G(U \oplus W)$. Выберем ненулевой вектор u из подпространства U. Тогда $w_1, \ldots, w_m, u$ — искомые неподвижные векторы относительно H_{m+1}.

В итоге, в конечномерном пространстве V мы построили бесконечную возрастающую матрёшку истинных подпространств, так как каждое из них состоит из неподвижных относительно группы Z векторов. Мы пришли к противоречию, предположив неприводимость группы G. Значит, группа G приводима, и лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1 и теоремы 2

Доказательство обеих теорем проводится индукцией по размерности пространства V. Если $\dim V \leq 2$, утверждения теорем — это хорошо известный факт (см. [6], 1.3.6). Заметим, что его легко вывести, проанализировав доказательство следствия 3 ниже.

Пусть теперь $\dim V \geq 3$. Обозначим через p характеристику тела его скаляров. Пусть W — истинное подпространство в V . Рассмотрим его стабилизатор $H = C_G(W)$ в группе G. Тогда подпространство W инвариантно относительно группы H, сужения автоморфизмов из H на W образуют тривиальную группу, и каждый автоморфизм из H индуцирует автоморфизм фактор-пространства V/W. Возникает естественный гомоморфизм φ группы H в группу автоморфизмов фактор-пространства V/W над тем же телом. В случае теоремы 1 по лемме 2 пространство V/W обладает свойством $\mathcal{P}$. В случае теоремы 2 ясно, что группа $H/\mathrm{Ker}\varphi$ является p-группой, и каждая её двупорождённая подгруппа конечна. Так как группа $\Phi = H/\mathrm{Ker}\varphi$ изоморфна унипотентной группе автоморфизмов пространства V/W меньшей размерности (см. [6], 1.3.2), то по индуктивному предположению группа Φ триангулируема. Так как Φ — разрешимая p-группа, то группа Φ локально конечна. По предложению 2 группа Φ является стабилизатором некоторой матрёшки в V/W:

$$V/W = V_0/W \geq V_1/W \geq \ldots \geq V_r/W = 0.$$

Тогда группа H является стабилизатором следующей матрёшки:

$$V = V_0 \geq V_1 \geq \ldots \geq V_r = W > V_{r+1} = 0.$$

Поэтому группа H нильпотентна по теореме Ф. Холла (см. [9], теорема 16.3.2).

Итак, стабилизатор любого ненулевого подпространства нильпотентен и унитриангулируем. Фиксируем неединичный элемент x из группы G. Поскольку, элемент x унипотентен, то группа $\mathrm{гр}(x)$ стабилизирует следующую матрёшку:

$$V > V(x-1) > \ldots > V(x-1)^{k+1} = 0.$$

Очевидно, что $\mathrm{гр}(x)$ является подгруппой в стабилизаторе $C_G(W_0)$, где $W_0 = V(x-1)^k$.

Пусть сначала $C_G(W_0)$ — максимальный стабилизатор ненулевого подпространства. Тогда полагаем $C_x = C_G(W_0)$.

Пусть теперь $C_G(W_0)$ — немаксимальный стабилизатор. Тогда найдётся ненулевое подпространство W_1 такое, что $C_G(W_0) < C_G(W_1)$. Если стабилизатор $C_G(W_1)$ всё ещё немаксимальный, то найдётся ненулевое подпространство W_2 такое, что $C_G(W_1) < C_G(W_2)$. Через $n+1$ шагов, где n — размерность пространства V, мы построим, согласно предложению 1, максимальный стабилизатор, который обозначим через C_x. Ясно, что $x \in C_x$.

Предположим, что группа G не является триангулируемой. Пусть период группы G равен p^{l+1}. Выберем в группе G такой элемент $\bar{g}$, что $\bar{g}^{p^l} \neq 1$. Обозначим $f = \bar{g}^{p^l}$. Покажем, что в группе G найдётся такой элемент h, что f не принадлежит группе $C_{\bar{g}}{}^h$.

В самом деле, пусть, напротив, для любого элемента g из группы G выполнено $f \in {C_{\bar{g}}}^g$.Тогда $f^{g^{-1}} \in C_{\bar{g}}$ для любого $g \in G$. Поэтому группа гр$(f^g \mid g \in G)$ является нормальной в G и содержится в триангулируемой группе $C_{\bar{g}}$. С другой стороны, так как группа G больше любого максимального стабилизатора в ней ненулевого подпространства, то не существует истинных подпространств, инвариантных относительно G. Так как в неприводимой группе любая нормальная триангулируемая унипотентная подгруппа тривиальна, мы пришли к противоречию с нетривиальностью элемента f.

Итак, нужный элемент h найдётся. Полагаем $C_1 = C_{\bar{g}}$, $C_2 = {C_{\bar{g}}}^h$, $I = C_1 \cap C_2$. Очевидно, что I — стабилизатор ненулевого подпространства. Так как C_1 и C_2 — это два максимальных стабилизатора, то $I < C_1$, $I < C_2$. Поскольку нильпотентные группы C_1 и C_2 удовлетворяют нормализаторному условию (см. [9], теорема 16.2.2), то I — собственная нормальная подгруппа в $N_{C_k}(I)$, $k = 1, 2$. Значит, для $k = 1, 2$ в группе $N_{C_k}(I)$ найдётся элемент i_k, не принадлежащий группе I, причём ${i_k}^p \in I$, так как в каждой факторгруппе $N_{C_k}(I)/I$ имеется элемент порядка p.

Теперь покажем, что группа HI локально конечна. При доказательстве теоремы 1 тут длинные рассуждения. С них мы и начнём.

Пусть сначала группа $H =$ гр(i_1, i_2) приводима. Тогда по индуктивному предположению найдётся гомоморфизм группы H на локально конечную группу, ядром которого является унитриангулируемая группа. Тогда H — расширение одной локально конечной группы с помощью другой локально конечной группы. Следовательно, по теореме Шмидта группа H конечна. Поэтому группа HI локально конечна.

Пусть теперь группа H неприводима. Тогда по лемме 3 центр группы H тривиален. Кроме того, любая унитриангулируемая нормальная подгруппа в H тривиальна. В частности, $H \cap I = 1$. Поэтому ${i_k}^p = 1$, $k = 1, 2$. Тогда из свойства $\mathcal{P}$ (бинарной конечности группы G) следует конечность группы H и локальная конечность группы HI в случае теоремы 1 (в случае теоремы 2).

По предложению 2 локально конечная группа HI является стабилизатором некоторой матрёшки подпространств. Наименьшее ненулевое подпространство в этой матрёшке обозначим через $\tilde{W}$. В частности, $HI \leq C_G(\tilde{W})$. Применяя для группы HI те же рассуждения, что для группы гр(x) выше, мы найдём максимальный стабилизатор C_3 ненулевого подпространства, содержащий группу HI. Рассмотрим группы $I_1 = C_1 \cap C_3$ и $I_2 = C_2 \cap C_3$. Так как $C_1 \neq C_2$, то либо $C_1 \neq C_3$, либо $C_2 \neq C_3$. По построению для $k = 1, 2$ имеем $i_k \in C_3 \backslash I$. Значит, $I < I_1$, $I < I_2$. Обозначим через $C_1^{(1)}$ ту из групп C_1,C_2, которая не совпадает с группой C_3, через $C_2^{(1)}$ обозначим группу C_3, а через $I^{(1)}$ обозначим группу $C_1^{(1)} \cap C_2^{(1)}$. По построению стабилизатор $I^{(1)}$ строго содержит стабилизатор I. Применяя продемонстрированные рассуждения для $I^{(1)}$, вместо I, мы построим стабилизатор $I^{(2)}$, строго содержащий стабилизатор $I^{(1)}$, и так далее. Построенная бесконечно возрастающая матрёшка стабилизаторов противоречит условию максимальности для стабилизаторов. Противоречие возникло из-за того, что мы предположили нетриангулируемость группы G. Значит, группа G триангулируема, и доказательство индуктивного перехода завершено.

4. Заключительные следствия

Следствие 1. *Всякая бесконечная унипотентная группа G автоморфизмов шестимерного векторного пространства над телом характеристики 3 обладает бесконечной абелевой подгруппой.*

Доказательство. Пусть сначала группа G приводима. Тогда по теореме 1 G — локально конечная группа. В этом случае следствие вытекает из теоремы Каргаполова [10]. Аналогичное заключение мы можем сделать, если группа G имеет период 3. Пусть a — элемент группы G порядка 9. Покажем, что группа $L_g = \text{гр}(a^3, (a^g)^3)$ конечна для любого элемента $g \in G$.

В самом деле, пусть g — произвольный элемент из группы G. Обозначим $r = a^3$, $s = (a^g)^3$. Тогда $(r-1)^2 = (a^3-1)^2 = (a-1)^6 = 0$ и, значит, $(s-1)^2 = 0$. Если $rs = sr$, то утверждение очевидно. Можно считать, что $rs \neq sr$. Тогда найдётся ненулевой вектор u такой, что $u([r^{-1}, s^{-1}]-1) = 0$. Так как $urs = usr$, то $u(r-1)(s-1) = u(s-1)(r-1)$. Пусть сначала $w = u(r-1)(s-1) \neq 0$. Тогда это общий неподвижный вектор для r и s, и поэтому группа L_g приводима. Тогда по теореме 1 конечно порождённая группа L_g унитриангулируема. Значит, L_g — конечная группа. Пусть теперь $u(r-1) = 0$, $u(s-1) \neq 0$. Тогда вектор $u(s-1)$ общий неподвижный вектор для r и s, и поэтому L_g — конечная группа. Пусть, наконец, $u(r-1) = 0$ и $u(s-1) = 0$. Тогда ненулевой вектор u — это общий неподвижный вектор для r и s, и поэтому L_g — конечная группа. Тем самым показано, что группа L_g является конечной для любого элемента g из G.

Предположим, что утверждение следствия неверно, и K — контрпример. Тогда любая абелева подгруппа A группы K конечна, группа K неприводима, имеет элемент a порядка 9 и для любого $g \in K$ группа $\text{гр}(a^3, (a^g)^3)$ конечна.

Покажем, что централизатор $L = C_K(a^3)$ бесконечен. В самом деле, если бы централизатор L был бы конечен, то по предложению 3 3-группа K была бы почти нильпотентной, что противоречит теореме Каргаполова.

По определению группы K всякая абелева подгруппа A группы L конечна. Поэтому L — ещё один контрпример. В частности, группа L неприводима. С другой стороны, в центре группы L имеется нееденичный элемент a^3, поэтому группа L приводима по лемме 3. Мы пришли к противоречию, предположив, что существует контрпример к утверждению следствия. Таким образом, следствие доказано.

Следствие 2. *Периодическая p-группа, не являющаяся локально конечной, у которой почти разрешима всякая двупорождённая подгруппа, не имеет точного представления унипотентными автоморфизмами конечномерного векторного пространства над телом.*

Доказательство. Пусть, напротив, нашлось такое натуральное число n и такое тело D, что группа G из условия следствия изоморфна унипотентной подгруппе автоморфизмов n-мерного векторного пространства над телом D.

Пусть сначала характеристика тела D равна p. Пусть g, h — произвольные элементы группы G. По условию $\text{гр}(g, h)$ — почти разрешимая периодическая группа. Так как всякая такая группа локально конечна, то $\text{гр}(g, h)$ — конечная группа. Тем самым мы показали, что любая двупорождённая подгруппа группы G конечна. Значит, группа G бинарно конечна. Тогда по теореме 2 группа G триангулируема и локально конечна. Полученное противоречие с условием заканчивает рассмотрение случая $\text{char} D = p$.

Пусть теперь тело D имеет положительную характеристику q. Тогда всякая унипотентная подгруппа автоморфизмов n-мерного векторного пространства над телом D является q-группой (см. [6], 1.3.2). Значит, $p = q$. Полученное противоречие показывает, что характеристика тела D равна нулю. Тогда унипотентная подгруппа автоморфизмов n-мерного векторного пространства над телом D не имеет кручения. Полученное противоречие с периодичностью группы G завершает доказательство следствия.

Следствие 3. *Любая унипотентная группа G автоморфизмов трёхмерного пространства V над телом D является унитриангулируемой.*

Доказательство. По теореме 1 с учётом примера 3 можно считать, что $\mathrm{char} D \neq 2, 3$. Пусть g, s — произвольные элементы из группы G. Покажем, что группа $\mathrm{гр}(g, s)$ двуступенно нильпотентная. Можно считать, что группа $\mathrm{гр}(g, s)$ неприводима (см. [6], 1.3.6). Сначала покажем, что каждый элемент указанной группы перестановочен со своим сопряжённым. Для этого достаточно показать, что элемент g перестановочен с любым таким элементом h, что размерность подпространства $V(h-1)$ равна размерности подпространства $V(g-1)$.

Пусть, напротив, нашёлся элемент h такой, что $[g, h] \neq 1$. Пусть, сначала, $V(h-1)$ — одномерное пространство. Тогда найдётся ненулевой вектор $u \in V$ такой, что $u(ghg^{-1}h^{-1} - 1) = 0$. Тогда векторы $u(g-1)(h-1)$ и $u(h-1)(g-1)$ совпадают, и обозначим этот вектор через w. Так как g, h — унипотентные элементы и $\mathrm{dim} V(g-1) = \mathrm{dim} V(h-1) = 1$, то $(g-1)^2 = (h-1)^2 = 0$. Следовательно, вектор w неподвижен относительно группы $\mathrm{гр}(g, h)$. Из неприводимости последней следует, что $w = 0$. Тогда вектор $u(g-1)$ неподвижен относительно $\mathrm{гр}(g, h)$. Значит, вектор u неподвижен относительно g и $uh = ugh = uhg$. Поэтому вектор $u(h-1)$ неподвижен относительно $\mathrm{гр}(g, h)$. Из неприводимости последней получим, что ненулевой вектор u неподвижен относительно $\mathrm{гр}(g, h)$, что противоречит неприводимости этой группы.

Пусть теперь $\mathrm{dim} V(g-1) = \mathrm{dim} V(h-1) = 2$. Так как $[g, h] \neq 1$, то возможно определить вектор w так же, как в предыдущем случае. Покажем, что $u(h-1)$ — ненулевой вектор.

В самом деле, пусть, напротив, $u(h-1) = 0$. Тогда $w = 0$, $ug(h-1) = 0$. Поэтому u и ug — два неподвижных вектора относительно автоморфизма h. Так как неподвижное подпространство для автоморфизма h одномерно, то u — направляющий вектор инвариантной относительно группы $\mathrm{гр}(g, h)$ прямой. Получили противоречие с неприводимостью последней группы.

Итак, $u(h-1)$, $u(g-1)$ и w — это ненулевые векторы. Так как $(g-1)^3 = (h-1)^3 = 0$, то $w(g-1)^2 = w(h-1)^2 = 0$. Из неприводимости группы $\mathrm{гр}(g, h)$ следует, что один из векторов $w(g-1)$, $w(h-1)$ ненулевой. Элементы g и h входят в доказываемое утверждение симметрично, поэтому можно считать, что $w(g-1) \neq 0$. Тем самым мы построили базис всего пространства: $e_1 = w(g-1)$, $e_2 = w$, $e_3 = u(h-1)$. Более того, $e_3(g-1) = e_2$, $e_2(g-1) = e_1$, $e_1(g-1) = 0$. Тогда

$$e_2(h-1)^2 = 0, e_3(h-1)^2 = 0. \tag{1}$$

Обозначим $\bar{h} = h - 1$. Разложим векторы $e_1\bar{h}$, $e_2\bar{h}$, $e_3\bar{h}$ по нашему базису:

$$e_1\bar{h} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3, e_2\bar{h} = \delta e_1 + \epsilon e_2 + \mu e_3, e_3\bar{h} = \nu e_1 + \eta e_2 + \theta e_3.$$

Из соотношений $\bar{h}^2 \neq 0$, $\bar{h}^3 = 0$ сразу следует, что $\alpha = \delta = \nu = 0$. Поэтому из нильпотентности эндоморфизмов $g^x h - 1$ и $hg^x - 1$ следует нильпотентность матрицы

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ x & \epsilon + x\beta & \mu + x\gamma \\ \frac{x(x-1)}{2} & \eta + x(\epsilon+1) + \frac{x(x-1)}{2}\beta & \theta + x\mu + \frac{x(x-1)}{2}\gamma \end{pmatrix},$$

где x — произвольное целое число.

В самом деле, $((g^x-1)(h-1)+(g^x-1)+(h-1))^3 = 0$ и $((h-1)(g^x-1)+(g^x-1)+(h-1))^3 = 0$, поэтому нет разницы между двумя способами составления матрицы эндоморфизма — из координатных столбцов или из координатных строк. После вычитания из третьей строки второй, умноженной на $\frac{x(x-1)}{2}$, и согласованного с ним элементарного преобразования со столбцами полученной матрицы, мы получим матрицу B_x, подобную матрице A_x. Поскольку $B_x^3 = 0$, то получаем, что

$$(2)\quad (\beta+\frac{x-1}{2}\gamma)(\epsilon+x\beta+\frac{x-1}{2}(\mu+x\gamma))+\gamma(\eta+x+\frac{x+1}{2}\epsilon+\frac{x-1}{2}(\theta+\frac{x+1}{2}\mu)) = 0.$$

Здесь $x \in \{-1, 1, -2, 2\}$. Перепишем систему (2) в виде:

$$(3)\qquad d_0x^3 + d_1x^2 + d_2x^1 + d_3 = 0, x \in \{-1, 1, -2, 2\}.$$

Мы получили четыре соотношения для векторов d_0, d_1, d_2, d_3 векторного пространства $Fd_0 + Fd_1 + Fd_2 + Fd_3$ над полем F, где F — простое подполе центра тела D. Канонический гомоморфизм кольца целых чисел в F обозначим через χ. Тогда на систему соотношений (3) можно смотреть как на однородную систему линейных уравнений с матрицей Вандермонда, определитель которой равен $(\chi(2) - \chi(1))(\chi(2) + \chi(1))(\chi(2) + \chi(2))(\chi(1) + \chi(1))(\chi(1) + \chi(2))(\chi(-1) + \chi(2))$. Так как это ненулевой элемент поля F, то $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$. В частности, $\gamma^2/4 = d_0 = 0$. Итак, $\gamma = 0$. Теперь выпишем все соотношения, вытекающие из равенства $\bar{h}^3 = 0$.

Непосредственно проверяется, что

$e_1\bar{h}^2 = \beta\epsilon e_2 + \beta\mu e_3, e_2\bar{h}^2 = (\epsilon^2 + \mu\eta)e_2 + (\epsilon\mu + \mu\theta)e_3,$
$e_3\bar{h}^2 = (\eta\epsilon + \theta\eta)e_2 + (\theta^2 + \eta\mu)e_3$. С другой стороны, $e_2\bar{h}^2 = e_3\bar{h}^2 = 0$. Поэтому

$$(4)\qquad \epsilon\mu + \mu\theta = 0,$$

$$(5)\qquad \epsilon^2 + \mu\eta = 0.$$

Так как из соотношения (2) при $x \in \{-1, 1\}$ имеем $\beta(\epsilon+\beta) = 0$ и $\beta(\epsilon-\beta-\mu) = 0$, то либо $\beta = 0$, либо $\beta = -\epsilon$. Поскольку $\bar{h}^2 \neq 0$, то $\beta \neq 0$. Тогда $\mu = 2\epsilon \neq 0$. Следовательно, $\epsilon\mu = \mu\epsilon$, и тогда из (4) выводим $\theta = -\epsilon$. Поэтому из (5) получаем $\eta = -\mu^{-1}\epsilon^2 = -\epsilon/2$.

Итак, элементы матриц обоих эндоморфизмов g и h лежат в поле $F(\epsilon)$. Поэтому $\bar{h}^2\bar{g} = 0$ (см. [1], 49.1.1) . Следовательно прямая с направляющим вектором $e_1\bar{h}^2$ инвариантна как относительно эндоморфизма g, так и относительно эндоморфизма h. Мы пришли к противоречию с неприводимостью группы гр(g, h), предположив, что $gh \neq hg$.

Итак, для любых элементов $g, h \in G$ таких, что $\dim V(g-1) = \dim V(h-1)$ выполнено $gh = hg$. Взяв в качестве h элемент g^s, мы получим соотношение $[s, g, g] = 1$. Поскольку элементы g и s из группы G были выбраны произвольно, то мы доказали, что группа G удовлетворяет второму тождеству Энгеля $[x, y, y] = 1$.

Пусть сначала характеристика тела D положительна. Рассмотрим произвольную двупорождённую подгруппу H в группе G. Тогда она также удовлетворяет второму тождеству Энгеля. Любая такая группа нильпотентна ступени, не превосходящей 4 (см. [8], теорема 34.31). Так как любая периодическая нильпотентная группа локально конечна, то группа H конечна. Тогда по теореме 2 группа G унитриангулируема.

Пусть теперь D — тело нулевой характеристики. Выше было доказано, что группа G удовлетворяет второму тождеству Энгеля. Поэтому группа G удовлетворяет тождеству $[x, y, z]^3 = 1$ (см. [8], теорема 34.31). Так как G — унипотентная группа автоморфизмов векторного пространства над телом нулевой характеристики, то группа G не имеет кручения (см. [6], 1.3.2). Значит группа G двуступенно нильпотентна.

Пусть сначала группа G неприводима. Тогда её коммутант G' — это нормальная подгруппа, которая унипотентна и абелева. Ясно, что унипотентная абелева группа трёхмерного векторного пространства приводима и унитриангулируема. Итак, G' — нормальная унитриангулируемая подгруппа неприводимой группы. Значит, $G' = 1$ и группа G абелева.

Полученное противоречие с неприводимостью группы G, показывает, что группа G приводима, т. е. найдётся в V минимальное истинное подпространство U, инвариантное относительно группы G. Автоморфизмы из группы G естественным образом индуцируют автоморфизмы на U и на V/U. Образованные ими группы назовём частями группы G. Ясно, что группа G индуцирует на подпространстве U неприводимую группу. Так как неприводимая часть — группа унипотентных автоморфизмов пространства размерности, не превосходящей двух, то это унитриангулируемая группа. В частности, первая неприводимая часть N группы G — это неприводимая группа, удовлетворяющая второму тождеству Энгеля. Выше было показано, что тогда группа N абелева, Следовательно, $\dim U = 1$. Выберем минимальное истинное подпространство W/U, инвариантное относительно второй части группы G. Рассуждая аналогично предыдущему, приходим к выводу, что $\dim W/U = 1$. Тогда матрицы всех автоморфизмов в базисе пространства V , согласованном с матрёшкой $0 < U < W < V$ будут унитеугольными. Следствие доказано.

Важность доказанной теоремы 1 заключается в том, что она показывает правдоподобность выдвинутой гипотезы. В самом деле, для доказательства её справедливости достаточно рассмотреть две нильпотентные матрицы A, B порядка n, одна из которых состоит из нулей и единиц, и из системы алгебраических уравнений, равносильных соотношению $((E + A)^x B + (E + A)^x + B)^n = 0$, вывести либо нетривиальность центра, либо почти разрешимость группы $\text{гр}(A, B)$.

Список литературы

[1] Ю. И. Мерзляков, *Рациональные группы*, Наука, Москва, 1987. MR0895823

[2] Д. А. Супруненко, *Об унипотентных группах матриц над телом*, Докл. АН СССР, **247**:2 (1979), 289–291. MR0545353

[3] J. Derakhshan, F.J. Wagner, *Skew linear unipotent groups*, Bull. London Math. Soc. , **38**:3 (2006), 447–449. MR2239039

[4] H. Y. Mochizuki, *Unipotent matrix groups over division rings*, Canad. Math. Bull., **21**:2 (1978), 249–250. MR0507060

[5] V. N. Serezhkin, *Triangulability of unipotent linear groups of degree 4 over an arbitrary skewfield*, Vestsi Akad. Navuk BSSR, Ser. Fiz.-Mat. Navuk, **3** (1985), 12—18. MR0801202
[6] M. Shirvani, B. A. F. Wehrfritz, *Skew linear groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. MR0883801
[7] В. П. Шунков, T_0*-группы*, Наука, Новосибирск, 2000. Zbl 0978.20018
[8] Х. Нейман, *Многообразия групп*, Мир, Москва, 1969. MR0248206
[9] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Наука, Москва, 1982. MR0677282
[10] М. И. Каргаполов, *О проблеме О. Ю. Шмидта*, Сиб. матем. журн., **4**:1 (1963), 232—235. MR0148735
[11] *Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп*, изд. 9, ИМ СО РАН, Новосибирск, 1984. MR0811890

Алексей Александрович Коробов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: korobov@math.nsc.ru