S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 142–164 (2014) УДК 517.958
MSC 35L20, 35R30, 35Q99

ОЦЕНКА УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

Т.В. БУГУЕВА

Abstract. We consider the multidimensional inverse problem for the acoustic equation $u_{tt} = c^2\Big(\Delta u - \nabla \ln \rho \cdot \nabla u\Big)$ in a medium filling interior of a cylinder infinite with respect to the variable z. We assume that the velocity function $c(r)$ is known. The problem of unique determination of the density function $\rho(r, \varphi, z)$ is considered in the linear approximation. The conditional stability estimation is obtained.

Keywords: inverse problems, acoustic equation, conditional stability estimate.

1. Введение

Различные постановки обратных задач для волнового уравнения и уравнения акустики рассматривались многими авторами. В работах А.С. Благовещенского [1], В.Г. Романова [2], Т.В. Бугуевой [3] исследовалась задача определения скорости c, входящей в волновое уравнение.

В работах С.И. Кабанихина в полупространстве исследовались задачи определения плотности $\rho(x, y, z)$, когда скорость распространения волн в акустической среде тождественно равна единице [4]; определения плотности $\rho(x, y, z)$ и скорости $c(z)$ [5]; определения плотности $\rho(x, y, z)$ при известной скорости $c(x, y, z)$ [6]. В этих работах были доказаны локальные теоремы существования

Bugueva, T.V., A conditional stability estimate for solution of an inverse problem for the acoustic equation.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Сибирского отделения РАН (совместный проект СО РАН и НАН Украины №. 12 — 2013), Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН, 2012, № 14, гранта РФФИ, проект 14-01-00208.

Поступила 30 ноября 2013 г., опубликована 27 февраля 2014 г.

и единственности решений поставленных задач в классе непрерывных функций, представимых в виде конечных рядов Фурье по переменным x, y. В работе [5] для этого класса функций была получена оценка условной устойчивости.

В работе P.E. Sacks, W. Symes [7] в полупространстве определялась функция плотности $\rho(x,z)$ для $z>0$ в случае, когда $c\equiv 1$. В работе P.E. Sacks [8] в полупространстве рассматривались двумерные линеаризованные задачи определения или плотности $\rho(x,z)$, или скорости $c(x,z)$.

В работе [9] в цилиндрической области исследовались одномерная задача определения функций $c(r)$, $\rho(r)$ и многомерная обратная задача определения функции $c(r,\varphi,z)$ при известной $\rho(r)$. Были получены оценки условной устойчивости решений рассмотренных задач.

2. Постановка задачи

Пусть r_0, T – фиксированные положительные числа и $\Lambda:=[0,2\pi]\times\mathbb{R}$.
В области
$$\mathcal{D}=\Big\{(r,\varphi,z)|\ r\in(0,r_0],\ \varphi\in[0,2\pi],\ z\in\mathbb{R}\Big\}=(0,r_0]\times\Lambda\,,$$
рассмотрим уравнение акустики
$$u_{tt}=c^2\Big(\Delta u-\nabla\ln\rho\cdot\nabla u\Big)$$
вместе с начальными и граничными условиями
$$u|_{t<0}=0,\qquad u_r|_{r=r_0}=\theta_0(t).$$
Обозначим $p(r,\varphi,z):=\ln\rho(r,\varphi,z)$ и будем полагать, что имеет место представление
$$c\equiv c_0(r),\quad p(r,\varphi,z)=p_0(r)+p_1(r,\varphi,z).$$
Заметим, что определение функций $c_0(r)$ и $p_0(r)$ не составляет труда и это было проведено в работе [9]. В данной работе будем полагать, что $c_0(r)$ и $p_0(r)$ – известные функции; функция $p_1(r,\varphi,z)$ мала по сравнению с $p_0(r)$ и предполагается неизвестной. Будем также предполагать, что функция $p_1(r_0,\varphi,z)$ от переменных $(\varphi,z)\in\Lambda$ известна (при желании можем считать, что $p_1(r_0,\varphi,z)=0$ при $(\varphi,z)\in\Lambda$).

Представим функцию $u(t,r,\varphi,z)$ в виде суммы
$$u(t,r,\varphi,z)=u^0(t,r)+u^1(t,r,\varphi,z),$$
в которой функция $u^0(t,r)$ – является решением задачи
$$\frac{\partial^2u^0}{\partial t^2}=c_0^2(r)\Big(\Delta u^0-p_0'(r)\frac{\partial u^0}{\partial r}\Big),\tag{2.1}$$
$$u^0\Big|_{t<0}=0,\qquad \frac{\partial u^0}{\partial r}\Big|_{r=r_0}=\theta_0(t).\tag{2.2}$$
Тогда функция $u^1(t,r,\varphi,z)$ в линейном приближении является решением задачи
$$\frac{\partial^2u^1}{\partial t^2}=c_0^2(r)\Big(\Delta u^1-p_0'(r)\frac{\partial u^1}{\partial r}-\frac{\partial p_1}{\partial r}\,\frac{\partial u^0}{\partial r}\Big),\tag{2.3}$$
$$u^1\Big|_{t<0}=0,\qquad \frac{\partial u^1}{\partial r}\Big|_{r=r_0}=0.\tag{2.4}$$

В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи рассмотрим функцию $h^1(t,\varphi,z)$:

$$h^1(t,\varphi,z)=u^1(t,r_0,\varphi,z),\qquad t\in[0,T],\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad z\in\mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Обратная задача 2.1. Пусть T, r_0 – заданные положительные константы; $c_0(r)$, $p_0(r)$ – известные функции. Требуется определить неизвестную функцию $p_1(r,\varphi,z)$, входящую в равенство (2.3), если относительно решения $u^1(t,r,\varphi,z)$ прямой задачи (2.3)–(2.4) известна информация (2.5), где $h^1(t,\varphi,z)$ – заданная функция при $t\in[0,T]$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $z\in\mathbb{R}$; функция $u^0(t,r)$ – известна и является решением прямой задачи (2.1)–(2.2).

Замечание 2.1. Если $\beta\in\mathbb{N}_0^n$ – мультииндекс, т. е. целочисленный вектор с неотрицательными координатами, то $|\beta|:=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$, запись $\alpha\le\beta$ означает, что $0\le\alpha_k\le\beta_k$ $(1\le k\le n)$, а

$$\partial^\alpha:=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Если $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, то

$$C^\beta(\Omega):=\{f:\Omega\to\mathbb{R}\,|\,\forall\,\alpha\le\beta\quad\partial^\alpha f\in C(\Omega)\}\,.$$

Через $\Phi^{(1,3,3)}((0,r_0]\times\mathbb{R}^2)$ обозначим класс всех функций

$$f\in C^{(1,3,3)}((0,r_0]\times\mathbb{R}^2)$$

таких, что f – 2π-периодическая по второй переменной, причём интеграл

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\partial^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}f(r,\varphi,z)|\,d\,z\,d\,\varphi$$

при $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\le(1,2,2)$ сходится равномерно по r на каждом отрезке $[a,b]\subset(0,r_0]$.

Заметим, что класс $\Phi_0^{(1,3,3)}((0,r_0]\times\mathbb{R}^2)$, состоящий из 2π-периодических по второй переменной и финитных по третьей переменной функций $f\in C^{(1,3,3)}((0,r_0]\times\mathbb{R}^2)$ (финитность функции f по третьей переменной означает, что для некоторого числа $A>0$ при $|z|>A$ $\;f(r,\varphi,z)=0$ для любых $r\in(0,r_0]$, $\varphi\in[0,2\pi]$) содержится в $\Phi^{(1,3,3)}((0,r_0]\times\mathbb{R}^2)$.

Далее будем предполагать, что $c_0,\ p_0\in C^2((0,r_0])$, а $p_1\in\Phi^{(1,3,3)}((0,r_0]\times\mathbb{R}^2)$.

Представим функцию $p_1(r,\varphi,z)$ в виде суммы ряда Фурье по переменной φ:

$$p_1(r,\varphi,z)\;=\;\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_{1;k}(r,z)\mathrm{e}^{\,i\,k\varphi},$$

где

$$p_{1;k}(r,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}p_1(r,\varphi,z)\mathrm{e}^{-\,i\,k\varphi}\,d\,\varphi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

— её коэффициенты Фурье. Эти коэффициенты Фурье являются гладкими по r и трижды гладкими по z функциями и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$ по переменной z вместе со своими производными. Следовательно, к ним применимо преобразование Фурье по z:

$$\widehat{p}_{1;k}(r,\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{1;k}(r,z) \mathrm{e}^{-i\,z\nu}\, d\,z \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

причём эти образы Фурье являются гладкими по r. Кроме того, имеет место формула обращения:

$$p_{1;k}(r,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{p}_{1;k}(r,\nu) \mathrm{e}^{i\,z\nu}\, d\,\nu\,.$$

Подставляя последние интегралы в ряд Фурье, получаем равенство

$$p_1(r,\varphi,z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{p}_{1;k}(r,\nu) \mathrm{e}^{i\,z\nu}\, d\,\nu \right) \mathrm{e}^{i\,k\varphi}.$$

Представим функции $u^1(t,r,\varphi,z)$ и $h^1(t,\varphi,z)$ аналогичным образом в виде рядов Фурье и перейдем в равенствах (2.3)–(2.5) к образам Фурье коэффициентов Фурье $\widehat{p}_{1;k}(r,\nu)$ и $\widehat{u}^1_k(t,r,\nu)$, $\widehat{h}^1_k(t,\nu)$, которые определяются аналогичным образом по функциям $u^1(t,r,\varphi,z)$, $h^1(t,\varphi,z)$.

Равенства (2.3)–(2.5) в терминах функций $\widehat{p}_{1;k}(r,\nu)$ и $\widehat{u}^1_k(t,r,\nu)$, $\widehat{h}^1_k(t,\nu)$ примут вид

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}^1_{k,\nu}}{\partial t^2} = c_0^2(r) \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}^1_{k,\nu}}{\partial r^2} - \frac{\partial \widehat{u}^1_{k,\nu}}{\partial r} \left(p_0'(r) - \frac{1}{r} \right) - \widehat{u}^1_{k,\nu} \left(\frac{k^2}{r^2} + \nu^2 \right) - \frac{\partial \widehat{p}_{1,k}(r;\nu)}{\partial r} \, \frac{\partial u^0}{\partial r} \right), \tag{2.6}$$

$$\widehat{u}^1_{k,\nu} \Big|_{t<0} = 0, \qquad \frac{\partial \widehat{u}^1_{k,\nu}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \tag{2.7}$$

$$\widehat{u}^1_{k,\nu} \Big|_{r=r_0} = \widehat{h}^1_{k,\nu}(t). \tag{2.8}$$

Сделаем в равенствах (2.1)–(2.2) и (2.6)–(2.8) замену переменных

$$x = x(r) = \int\limits_r^{r_0} \frac{d\,\xi}{c_0(\xi)}, \qquad r = r(x) = r_0 - \int\limits_0^x c_0(r(\xi))\, d\,\xi. \tag{2.9}$$

Определим новые функции

$$\overline{c}_0(x) := c_0(r(x)), \qquad \overline{p}_0(x) := p_0(r(x)), \qquad \widehat{p}_{2,k,\nu}(x) := \widehat{p}_{1,k}(r(x),\nu)$$

и $U^0(x,t)$, $U^1_{k,\nu}(x,t)$, которые выражаются через функции $u^0(t,r)$, $\widehat{u}^1_k(t,r,\nu)$, следующим образом

$$U^0(t,x) = \frac{u^0(t,r(x))}{S(x)}, \quad U^1_{k,\nu}(t,x) = \frac{\widehat{u}^1_{k,\nu}(t,r(x),\nu)}{S(x)},$$

где

$$S(x) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \int\limits_0^x K(\xi)\, d\,\xi \right\}, \quad K(x) = \frac{\overline{c}_0'(x)}{\overline{c}_0(x)} + \frac{\overline{c}_0(x)}{r(x)} + \overline{p}_0'(x).$$

Перепишем равенства (2.1)–(2.2) в терминах новых функций

$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U^0}{\partial x^2} + q(x)U^0, \tag{2.10}$$

$$U^0 \Big|_{t<0} = 0, \qquad \Big(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{K(0)}{2}U^0\Big)\Big|_{x=0} = -\bar{c}_0(0)\theta_0(t), \tag{2.11}$$

здесь

$$q(x) = \frac{K'(x)}{2} - \frac{K^2(x)}{4}.$$

Равенства (2.6)–(2.8) в терминах новых функций примут вид

$$\frac{\partial^2 U^1_{k,\nu}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U^1_{k,\nu}}{\partial x^2} + q_{k,\nu}(x)U^1_{k,\nu} - \widehat{p}'_{2,k,\nu}(x)\left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{K(x)}{2}\,U^0\right), \tag{2.12}$$

$$U^1_{k,\nu}\Big|_{t<0} = 0, \qquad \Big(\frac{\partial U^1_{k,\nu}}{\partial x} + \frac{K(0)}{2}U^1_{k,\nu}\Big)\Big|_{x=0} = 0, \tag{2.13}$$

$$U^1_{k,\nu}\Big|_{x=0} = \widehat{h}^1_{k,\nu}(t), \tag{2.14}$$

здесь

$$q_{k,\nu}(x) = q(x) - \bar{c}_0^2(x)\Big(\frac{k^2}{r^2(x)} + \nu^2\Big).$$

Обратная задача 2.2. Пусть T – заданная положительная константа; $K(x)$, $q_{k,\nu}(x)$ – известные функции ($k \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{R}$). Требуется определить неизвестную функцию $\widehat{p}_{2,k,\nu}(x)$, входящую в равенство (2.12), если относительно решения $U^1_{k,\nu}(t,x)$ прямой задачи (2.12)–(2.13) известна информация (2.14), где $\widehat{h}^1_{k,\nu}(t)$ – заданная функция при $t \in [0,T]$; функция $U^0(x,t)$ – известна и является решением прямой задачи (2.10)–(2.11), значения $\widehat{p}_{2,k,\nu}(0)$ согласно предположению раздела 2 известны при любых $k \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{R}$.

3. Стуктура решения прямой задачи (2.10)–(2.11)

Рассмотрим область $\mathcal{D}^0_T = \{(x,t) \,\big|\, 0 < x < t < T - x\}$.

Замечание 3.1. Пусть r_0, T – заданные положительные числа. Пусть $q \in \mathrm{C}[0, T/2]$ – известная функция. Структура решения прямой задачи (2.10), (2.11) в области $\mathcal{D}^0_T$ имеет вид:

$$U^0(x,t) = \bar{c}_0(0)\theta_1(t-x) + \alpha_2(x)\theta_2(t-x) + \alpha_3(x)\theta_3(t-x) + \ldots, \tag{3.1}$$

где $\theta_0(t)$ – функция Хевисайда, $\theta_k(t) = \theta_0(t)t^k/k!$.

Из равенств (2.10), (2.11) имеем

$$U^0(x,t) = \alpha_1(x)\theta_1(t-x) + \alpha_2(x)\theta_2(t-x) + \alpha_3(x)\theta_3(t-x) + \ldots.$$

Подставляя верхнее представление в равенства (2.10), (2.11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых особенностях, получим

$$-2\Big(\alpha_1(x)\Big)' = 0, \qquad -\alpha_1(0) = -\bar{c}_0(0); \tag{3.2}$$

В силу (3.2)

$$\alpha_1(0) = \bar{c}_0(0), \qquad \alpha_1(x) \equiv \alpha_1(0) = \bar{c}_0(0) =: \alpha_1. \tag{3.3}$$

В силу (3.3) получим представление (3.1).

4. Решение прямой задачи (2.10)–(2.11)

Лемма 4.1. Пусть r_0, T – заданные положительные числа. Пусть $\overline{c}_0(0)$, $K(0)$ – известные константы, $q \in \mathrm{C}[0, T/2]$ – известная функция. Тогда решение $U^0(x,t)$ прямой задачи (2.10)–(2.11) существует и единственно в классе $\mathrm{C}^2(\mathcal{D}_T^0)$.

Доказательство. Пусть $(x,t) \in \mathcal{D}_T^0$. Интегрируя (2.10) вдоль характеристик дифференциальных операторов $\partial/\partial t - \partial/\partial x$, $\partial/\partial t + \partial/\partial x$ и учитывая замечание 3.1, получим выражения для функций $U^0(x,t)$, $\dfrac{\partial U^0}{\partial t}(x,t)$, $\dfrac{\partial U^0}{\partial x}(x,t)$

$$\frac{\partial U^0}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(H^{0,-}(x,t) + H^{0,+}(x,t)\Big),$$

$$\frac{\partial U^0}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(H^{0,+}(x,t) - H^{0,-}(x,t)\Big), \tag{4.1}$$

$$U^0(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_x^t \Big(H^{0,-}(x,\tau) + H^{0,+}(x,\tau)\Big)\,d\tau, \tag{4.2}$$

здесь

$$H^{0,+}(x,t) := -\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x} q(\xi)U^0(\xi, t+x-\xi)\,d\xi; \tag{4.3}$$

$$H^{0,-}(x,t) := \Big(2\overline{c}_0(0) + K(0)U^0(0,t) + H^{0,+}(0,t)\Big) + \int\limits_0^x q(\xi)U^0(\xi, t-x+\xi)\,d\xi. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.2) является интегральным уравнением типа Вольтерра и определяет единственное непрерывное решение прямой задачи (2.10)–(2.11). Кроме того, из соотношений (4.3), (4.4) следует, что это решение является гладким в области $\mathcal{D}_T^0$. Вычисляя производные второго порядка, получим, что $U^0 \in \mathrm{C}^2(\mathcal{D}_T^0)$. □

5. Исследование структуры решения прямой задачи (2.12)–(2.13)

Замечание 5.1. Пусть r_0, T – заданные положительные числа. Положим все коэффициенты при функциях $U^1_{k,\nu}(x,t)$, $U^0(x,t)$, входящие в уравнения (2.12), (2.13) известными и достаточно гладкими. Тогда структура решения прямой задачи (2.12), (2.13) в области $\mathcal{D}_T^0$ имеет вид

$$U^1_{k,\nu}(x,t) = \beta_1^{k,\nu}(x)\theta_1(t-x) + \beta_2^{k,\nu}(x)\theta_2(t-x) + \dots . \tag{5.1}$$

Действительно, из равенств (2.12), (2.13) видно, что

$$U^1_{k,\nu}(x,t) = \beta_0^{k,\nu}(x)\theta_0(t-x) + \beta_1^{k,\nu}(x)\theta_1(t-x) + \beta_2^{k,\nu}(x)\theta_2(t-x) + \dots \tag{5.2}$$

Подставляя (5.2) в равенства (2.12), (2.13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых особенностях, получим

$$\Big(\beta_0^{k,\nu}(x)\Big)' = 0, \qquad \beta_0^{k,\nu}(0) = 0.$$

Отсюда

$$\beta_0^{k,\nu}(x) \equiv 0. \tag{5.3}$$

В силу (5.3) уравнения для функции $\beta_1^{k,\nu}(x)$ примут вид

$$\Big(\beta_1^{k,\nu}(x)\Big)' = \frac{\alpha_1}{2}\widehat{p}'_{2,k,\nu}(x), \tag{5.4}$$

$$\beta_1^{k,\nu}(0) = 0. \tag{5.5}$$

Из равенств (5.4), (5.5), воспользовавшись (3.1), получим

$$\beta_1^{k,\nu}(x) = \frac{\alpha_1}{2}\,\widehat{p}_{2,k,\nu}(x) - \frac{\alpha_1}{2}\,\widehat{p}_{2,k,\nu}(0) = \frac{\overline{c}_0(0)}{2}\,\widehat{p}_{2,k,\nu}(x) - \frac{\overline{c}_0(0)}{2}\,\widehat{p}_{2,k,\nu}(0).$$

Аналогично можно найти значения $\beta_n^{k,\nu}(x)$ для любых значений $n \in \mathbb{N}$.

В силу представления (5.1) имеем

$$\frac{\partial^2 U^1_{k,\nu}}{\partial t^2}\Big|_{t=x+0} = \beta_2^{k,\nu}(x), \qquad \frac{\partial^2 U^1_{k,\nu}}{\partial x \partial t}\Big|_{t=x+0} = \Big(\beta_1^{k,\nu}\Big)'(x) - \beta_2^{k,\nu}(x). \tag{5.6}$$

Из равенств (5.6) получим

$$\Big(\beta_1^{k,\nu}\Big)'(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial U^1_{k,\nu}}{\partial t}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial U^1_{k,\nu}}{\partial t}\Big)\right)\Bigg|_{t=x+0}. \tag{5.7}$$

□

6. Решение прямой задачи (2.12)–(2.13)

Лемма 6.1. Пусть T – фиксированное положительное число и коэффициенты, входящие в равенства (2.12)–(2.13) есть известные достаточно гладкие функции, а функция $U^0(x,t)$, являющаяся решением прямой задачи (2.10)–(2.11) принадлежит классу $\mathrm{C}^2(\mathcal{D}_T^0)$. Тогда прямая задача (2.12)–(2.13) имеет единственное решение $U^1_{k,\nu}(x,t)$ в классе функций $\mathrm{C}^2(\mathcal{D}_T^0)$.

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 4.1. Запишем уравнения (2.12), (2.13) следующим образом

$$\frac{\partial^2 U^1_{k,\nu}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U^1_{k,\nu}}{\partial x^2} = R^1_{k,\nu}(x,t), \quad t > x, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial U^1_{k,\nu}}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{K(0)}{2}U^1_{k,\nu}(0,t), \quad t > 0,$$

здесь

$$R^1_{k,\nu}(x,t) = q_{\,k,\nu}(x)U^1_{k,\nu} - \widehat{p}'_{2,k,\nu}(x)\left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{K(x)}{2}\,U^0\right). \tag{6.2}$$

Интегрируя (6.1) вдоль характеристик дифференциальных операторов $(\partial/\partial t - \partial/\partial x)$, $(\partial/\partial t + \partial/\partial x)$ и учитывая равенство (5.1), получим

$$\frac{\partial U^1_{k,\nu}}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(H^+_{k,\nu}(x,t) + H^-_{k,\nu}(x,t)\Big),$$

$$\frac{\partial U^1_{k,\nu}}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(H^+_{k,\nu}(x,t) - H^-_{k,\nu}(x,t)\Big),$$

$$U^1_{k,\nu}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_x^t \Big(H^+_{k,\nu}(x,\tau) + H^-_{k,\nu}(x,\tau)\Big)\,d\tau. \tag{6.3}$$

Здесь

$$H^+_{k,\nu}(x,t) := -\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x} R^1_{k,\nu}(\xi, t+x-\xi)\,d\xi;$$

$$H^-_{k,\nu}(x,t) := \Big(K(0)U^1_{k,\nu}(0,t) + H^+_{k,\nu}(0,t)\Big) + \int\limits_0^x R^1_{k,\nu}(\xi, t-x+\xi)\,d\xi.$$

. □

7. Решение обратной задачи 2.2

Теорема 7.1. Пусть r_0, T заданные положительные числа, $0 < T < \int\limits_0^{r_0} \frac{2\,d\xi}{c_0(\xi)}$; функция $U^0(x,t)$, являющаяся решением прямой задачи (2.10)–(2.11) принадлежит классу $C^3(\mathcal{D}^0_T)$. Тогда для однозначной разрешимости при фиксированных $k \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{R}$ обратной задачи 2.2 для функций $\widehat{p}_{2,k,\nu} \in C^1[0,T/2]$, $U^1_{k,\nu} \in C^3(\mathcal{D}^0_T)$ достаточно, чтобы функции $\widehat{h}^1_{k,\nu}(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и удовлетворяли условиям

$$\widehat{h}^1_{k,\nu}(t) \in \mathrm{C}^3[0,T], \qquad \widehat{h}^1_{k,\nu}(+0) = 0.$$

Доказательство. Введём новые функции

$$V^1_{k,\nu}(x,t) := \frac{\partial U^1_{k,\nu}}{\partial t}(x,t), \quad H^1_{k,\nu}(t) := \frac{\partial \widehat{h}^1_{k,\nu}}{\partial t}, \quad V^0(x,t) := \frac{\partial U^0}{\partial t}(x,t),$$

$$\Psi_{k,\nu}(x,t) := q_{k,\nu}(x)V^1_{k,\nu}(x,t) - \widehat{p}'_{2,k,\nu}(x)\left(\frac{\partial V^0}{\partial x}(x,t) + \frac{K(x)}{2}V^0(x,t)\right) \tag{7.1}$$

и запишем равенства (2.10)–(2.11), (2.12)–(2.13), используя (7.1),

$$\frac{\partial^2 V^0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2} + q(x)V^0, \qquad t > x,$$

$$\frac{\partial V^0}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{K(0)}{2}V^0(0,t), \qquad t > 0,$$

и

$$\frac{\partial^2 V^1_{k,\nu}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V^1_{k,\nu}}{\partial t^2} = -\Psi_{k,\nu}(x,t), \qquad t > x \tag{7.2}$$

$$V^1_{k,\nu}\Big|_{x=0} = H^1_{k,\nu}(t), \quad \frac{\partial V^1_{k,\nu}}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{K(0)}{2}H^1_{k,\nu}(t), \quad t > 0. \tag{7.3}$$

После интегрирования (7.2) вдоль характеристик дифференциальных операторов $(\partial/\partial x + \partial/\partial t)$ и $(\partial/\partial x - \partial/\partial t)$, получим выражения:

$$\Big(\frac{\partial V^1_{k,\nu}}{\partial x} - \frac{\partial V^1_{k,\nu}}{\partial t}\Big)(x,t) = F^{-,1}_{k,\nu}(x,t), \tag{7.4}$$

$$\Big(\frac{\partial V^1_{k,\nu}}{\partial x} + \frac{\partial V^1_{k,\nu}}{\partial t}\Big)(x,t) = F^{+,1}_{k,\nu}(x,t). \tag{7.5}$$

Здесь

$$F^{-,1}_{k,\nu}(x,t) \,=\, -\frac{K(0)}{2}\, H^1_{k,\nu}(t-x) - \frac{\partial H^1_{k,\nu}}{\partial t}(t-x) - \int\limits_0^x \Psi_{\,k,\nu}(\xi, t-x+\xi)\, d\,\xi,$$

$$F^{+,1}_{k,\nu}(x,t) \,=\, -\frac{K(0)}{2}\, H^1_{k,\nu}(t+x) + \frac{\partial H^1_{k,\nu}}{\partial t}(t+x) - \int\limits_0^x \Psi_{\,k,\nu}(\xi, t+x-\xi)\, d\,\xi.$$

Из равенств (7.4), (7.5) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^1_{k,\nu}}{\partial x}(x,t) \,&=\, \frac{1}{2}\Big(F^{+,1}_{k,\nu}(x,t) + F^{-,1}_{k,\nu}(x,t)\Big), \\ \frac{\partial V^1_{k,\nu}}{\partial t}(x,t) \,&=\, \frac{1}{2}\Big(F^{+,1}_{k,\nu}(x,t) - F^{-,1}_{k,\nu}(x,t)\Big). \end{aligned} \tag{7.6}$$

Интегрируя (7.6), в силу (7.3) можем написать

$$V^1_{k,\nu}(x,t) \,=\, H^1_{k,\nu}(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Big(F^{+,1}_{k,\nu}(\xi,t) + F^{-,1}_{k,\nu}(\xi,t)\Big)\, d\,\xi. \tag{7.7}$$

В силу (5.2), (5.7) равенство (7.5) можем записать в виде

$$\begin{aligned} \widehat{p}\,'_{2,k,\nu}(x) \,&=\, \frac{2}{\overline{c}_0(0)}\Big(\beta_1^{k,\nu}(x)\Big)' = \frac{2}{\overline{c}_0(0)}\Big(\frac{\partial V^1_{k,\nu}}{\partial x} + \frac{\partial V^1_{k,\nu}}{\partial t}\Big)(x, x+0) = \\ &= \frac{2}{\overline{c}_0(0)} F^{+,1}_{k,\nu}(x, x+0) = \\ &= \frac{2}{\overline{c}_0(0)}\left(-\frac{K(0)}{2} H^1_{k,\nu}(2x) + \frac{\partial H^1_{k,\nu}}{\partial t}(2x) - \int\limits_0^x \Psi_{\,k,\nu}(\xi, 2x-\xi)\, d\,\xi\right). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Рассмотрим ещё одно уравнение

$$\widehat{p}_{2,k,\nu}(x) \,=\, \int\limits_0^x \widehat{p}\,'_{2,k,\nu}(\xi)\, d\,\xi - \widehat{p}_{2,k,\nu}(0), \tag{7.9}$$

значение $\widehat{p}_{2,k,\nu}(0)$ при фиксированных $k \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{R}$ считаем известным в силу предположения раздела 2.

Система уравнений (7.7), (7.8), (7.9) типа Вольтерра 2-го рода имеет единственное решение $\Big(\widehat{p}_{2,k,\nu}(x),\, V^1_{k,\nu}(x,t)\Big)$ в классе функций $\widehat{p}_{2,k,\nu} \in C^1[0, T/2]$, $V^1_{k,\nu} \in C(\mathcal{D}^0_T)$. Дифференцируя равенство (7.7) и возвращаясь к функции $U^1_{k,\nu}$, получим утверждение теоремы. $\square$

Замечание 7.1. Зная коэффициенты $\widehat{p}_{2,k,\nu}(x)$ при произвольных фиксированных $k \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{R}$, мы получаем функцию p_2, определяемую равенством

$$p_2(x,\varphi,z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)\mathrm{e}^{i\,z\nu}\,d\,\nu\right)\mathrm{e}^{i\,k\varphi}. \tag{7.10}$$

В силу замечания 2.1 функция $p_2 \in \Phi^{(1,3,3)}([0,T/2]\times\mathbb{R}^2)$, а в силу приведённого ниже замечания 9.1 ряд (7.10) сходится к функции $p_2(x,\varphi,z)$ равномерно по (φ,z) на любом компакте в $\mathbb{R}^2$. При этом функция p_2 связана с изначально искомой функцией p_1 равенством $p_2(x,\varphi,z) := p_1(r(x),\varphi,z)$, где функция $r(x)$ определяется равенством (2.9).

8. Устойчивость решения обратных задач 2.2, 2.1

Пусть T, r_0, L_0, δ_0 - заданные положительные числа, $\delta_0 \le L_0$, $T < 2r_0/L_0$, $\varepsilon_0 := r_0 - \dfrac{TL_0}{2}$. Определим классы функций

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_r &= \Big\{r(x) \in \mathrm{C}^3[0,T/2]\ \Big|\ 0 < \varepsilon_0 \leqslant |r(x)| \leqslant r_0,\ \|r\|_{\mathrm{C}^3[0,T/2]} \leqslant L_0\Big\},\\
\mathbf{Q}_c &= \Big\{\overline{c}_0(x) \in \mathrm{C}^2[0,T/2]\ \Big|\ \overline{c}_0(x) \geqslant \delta_0,\ \|\overline{c}_0\|_{\mathrm{C}^2[0,T/2]} \leqslant L_0\Big\}\\
\mathbf{Q}_p &= \Big\{\overline{p}_0(x) \in \mathrm{C}^2[0,T/2]\ \Big|\ \|\overline{p}_0\|_{\mathrm{C}^2[0,T/2]} \leqslant L_0\Big\}.
\end{aligned}$$

Замечание 8.1. По величинам T, r_0, δ_0, L_0 можем определить константу $\mathbf{b}_1$, такую что

$$\mathbf{b}_1 := \max\Big\{\|K\|_{\mathrm{C}^1[0,T/2]},\ \|q\|_{\mathrm{C}[0,T/2]},\ \|U^0\|_{C^2(D_T^0)}\Big\}.$$

Лемма 8.1. Пусть T, r_0, L_0, L_1, δ_0 – заданные положительные числа, $\overline{c}_0 \in \mathbf{Q}_c$, $\overline{p}_0 \in \mathrm{C}^2[0,T/2]$, $U^0 \in C^2(D_T^0)$ – известные функции. Пусть при фиксированных $k \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{R}$ функция $\widehat{p}_{2,k,\nu} \in \mathrm{C}^1[0,T/2]$ известна и $\|\widehat{p}_{2,k,\nu}\|_{\mathrm{C}^1[0,T/2]} \leqslant L_1$. Тогда для функции $U^1_{k,\nu}(x,t)$, являющейся решением прямой задачи (2.12)–(2.13) имеет место оценка:

$$\|U^1_{k,\nu}\|_{C^2(D_T^0)} \leqslant \mathbf{b}_2\exp\{\mathbf{b}_3(k^2+\nu^2)T\},$$

константа $\mathbf{b}_2$ зависит от $\mathbf{b}_1$, L_1; константа $\mathbf{b}_3$ зависит от T, r_0, L_0, δ_0, ε_0.

Доказательство. Заметим, что в равенство (6.3) входит функция $R^1_{k,\nu}(x,t)$, определяемая соотношением (6.2), причём, коэффициент при функции $U^1_{k,\nu}(x,t)$ — функция $q_{k,\nu}(x)$ зависит от параметров k^2, ν^2.

Дифференцируя равенство (6.3) по переменным x и t и переходя во вновь полученных равенствах и в равенствах к абсолютным величинам, получим неравенства, к которым применим лемму Гронуолла. Учитывая вид зависимости коэффициентов от параметров k, ν, а также определения классов $\mathbf{Q}_r$, $\mathbf{Q}_c$, $\mathbf{Q}_1$, получим утверждение леммы. $\square$

Лемма 8.2. Пусть T, r_0, L_0, δ_0, L_1 – заданные положительные числа, $\overline{c}_0 \in \mathbf{Q}_c$, $\overline{p}_0 \in \mathbf{Q}_p$, $U^0 \in C^3(D_T^0)$ – известные функции. Пусть при фиксированных

$k \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{R}$ функции $\widehat{p}_{2,k,\nu}$, $\widehat{p}^*_{2,k,\nu} \in \mathrm{C}^1[0,T/2]$, $U^1_{k,\nu}$, $U^{1*}_{k,\nu} \in C^3(D^0_T)$, являются решениями обратной задачи 2.2, удовлетворяющими информации $h^1_{k,\nu}(t)$, $h^{1*}_{k,\nu}(t) \in C^3([0,T])$, соответственно. Тогда справедливы следующие оценки

$$
(8.1)\qquad \max\left\{\left\|\widehat{p}_{2,k,\nu} - \widehat{p}^*_{2,k,\nu}\right\|_{C^1[0,T/2]},\ \left\|\frac{\partial U^1_{k,\nu}}{\partial t} - \frac{\partial U^{1*}_{k,\nu}}{\partial t}\right\|_{C(D^0_T)}\right\} \leqslant
$$
$$
\leqslant \mathbf{b}_4 \exp\{\mathbf{b}_5(k^2+\nu^2)T\}\left\|\widehat{h}^1_{k,\nu} - \widehat{h}^{1*}_{k,\nu}\right\|_{C^2[0,T]},
$$

константа $\mathbf{b}_4$ зависит от T, r_0, L_0, L_1, δ_0; константа $\mathbf{b}_5$ зависит от T, r_0, L_0, δ_0.

Доказательство. Запишем равенства (7.7)–(7.9) в терминах функций $U^1_{k,\nu}(x,t)$, $\widehat{p}'_{2,k,\nu}(x)$, $\widehat{p}_{2,k,\nu}(x)$ и $U^{1*}_{k,\nu}(x,t)$, $\widehat{p}^{*\prime}_{2,k,\nu}(x)$, $\widehat{p}^*_{2,k,\nu}(x)$ и перейдём в них к разности

$$
(8.2)\quad \frac{\partial U^1_{k,\nu}}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial U^{1*}_{k,\nu}}{\partial t}(x,t) =
$$
$$
= \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left[\Big(F^{+,1}_{k,\nu}(\xi,t) - F^{+,1*}_{k,\nu}(\xi,t)\Big) + \Big(F^{-,1}_{k,\nu}(\xi,t) - F^{-,1*}_{k,\nu}(\xi,t)\Big)\right] d\,\xi +
$$
$$
+\Big(\frac{\partial \widehat{h}^1_{k,\nu}}{\partial t}(t) - \frac{\partial \widehat{h}^{1*}_{k,\nu}}{\partial t}(t)\Big),
$$
$$
(8.3)\quad \widehat{p}'_{2,k,\nu}(x) - \widehat{p}'_{2,k,\nu}(x) =
$$
$$
= -\frac{K(0)}{\overline{c}_0(0)}\left(\frac{\partial \widehat{h}^1_{k,\nu}}{\partial t}(2x) - \frac{\partial \widehat{h}^{1*}_{k,\nu}}{\partial t}(2x)\right) + \frac{2}{\overline{c}_0(0)}\left(\frac{\partial^2 \widehat{h}^1_{k,\nu}}{\partial t^2}(2x) - \frac{\partial^2 \widehat{h}^{1*}_{k,\nu}}{\partial t^2}(2x)\right) -
$$
$$
-\frac{2}{\overline{c}_0(0)}\int\limits_0^x \Big(\Psi_{\,k,\nu} - \Psi^*_{k,\nu}\Big)(\xi, 2x-\xi)\, d\,\xi\Bigg).
$$
$$
(8.4)\quad \widehat{p}_{2,k,\nu}(x) - \widehat{p}^*_{2,k,\nu}(x) = \int\limits_0^x \Big(\widehat{p}'_{2,k,\nu} - \widehat{p}^{*\prime}_{2,k,\nu}(\xi)\Big)\, d\,\xi - \Big(\widehat{p}_{2,k,\nu}(0) - \widehat{p}^*_{2,k,\nu}(0)\Big).
$$

Принимая во внимание равенство

$$
q(x) = q_{k,\nu}(x) + \overline{c}^2_0(x)\Big(\frac{k^2}{r^2(x)} + \nu^2\Big),
$$

а также равенства (4.1)–(4.4) и переходя в равенствах (8.2)–(8.4) к абсолютным величинам, получим неравенства, к которым применим лемму Гроноулла. Учитывая вид зависимости коэффициентов подынтегральных функций от параметров k, ν, получим утверждение леммы. □

Далее рассмотрим функции

$$
p_2(x,\varphi,z) := p_1(r(x),\varphi,z) \ \text{ и } \ p^*_2(x,\varphi,z) := p^*_1(r(x),\varphi,z),
$$

определяемые равенствами

$$p_2(x,\varphi,z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)\mathrm{e}^{i\,z\nu}\,d\,\nu\right)\mathrm{e}^{i\,k\varphi},$$

$$p_2^*(x,\varphi,z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{p}^{\,*}_{2;k}(x,\nu)\mathrm{e}^{i\,z\nu}\,d\,\nu\right)\mathrm{e}^{i\,k\varphi}\,,$$

где функция $r(x)$ определяется равенством (2.9).

Пусть T — положительное число и

$$I := [0, T/2], \quad J := [0, T], \quad \Lambda := [0, 2\pi] \times \mathbb{R}\,.$$

Положим

$$\Phi(I\times\Lambda) := \Phi^{(1,3,3)}(I\times\mathbb{R}^2)\,.$$

Очевидно, что каждая функция f класса $\Phi(I\times\Lambda)$ удовлетворяет условию леммы 9.4 по второй и третьей переменным, а также условию

$$\sup_{x\in I}\|\Delta_{\varphi,z}f(x,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\Lambda)} < +\infty\,, \quad \text{где} \quad \Delta_{\varphi,z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

В пространстве $\Phi(I\times\Lambda)$ выделим подпространство $\Phi_1(I\times\Lambda)$ функций f таких, что

$$\sup_{x\in I}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}|f(x,\varphi,z)|^2\,d\,\varphi\,d\,z < +\infty\,, \qquad \sup_{x\in I}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi,z)\Big|^2\,d\,\varphi\,d\,z < +\infty\,.$$

Норму на $\Phi_1(I\times\Lambda)$ определим равенством

$$\begin{aligned}\|f\|_{\Phi_1(I\times\Lambda)} &:= \sup_{x\in I}\Big\{\|f(x,\cdot,\cdot)\|_{L^2(\Lambda)}, \Big\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot,\cdot)\Big\|_{L^2(\Lambda)}\Big\} = \\ &= \sup_{x\in I}\left\{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}|f(x,\varphi,z)|^2 d\,\varphi\,d\,z\right)^{1/2}, \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi,z)\Big|^2 d\,\varphi\,d\,z\right)^{1/2}\right\}.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\Phi_0(I\times\Lambda) := \Phi_0^{(1,3,3)}(I\times\mathbb{R}^2) \subset \Phi_1(I\times\Lambda)\,.$$

Через $\Psi(J\times\Lambda)$ обозначим пространство трижды непрерывно дифференцируемых на $J\times\mathbb{R}^2$ функций g, 2π-периодических по второй переменной, таких, что

$$\|g\|_{\Psi(J\times\Lambda)} := \max_{0\le k\le 3}\left\|\sup_{t\in J}\Big|\frac{\partial^k g}{\partial t^k}(t,\cdot,\cdot)\Big|\right\|_{L^1(\Lambda)} < +\infty\,.$$

Определённая таким образом функция является нормой на этом пространстве.

Замечание 8.2. Если $f \in \Phi(I \times \Lambda)$, то

$$\widehat{f}_{k,\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_k(x,z) \mathrm{e}^{-i z \nu} \, d\, z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{2\pi} f(x,\varphi,z) \mathrm{e}^{-i k \varphi} \, d\,\varphi \right) \mathrm{e}^{-i z \nu} \, d\, z =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} \left(f(x,\varphi,z) \mathrm{e}^{-i k \varphi} \mathrm{e}^{-i z \nu} \right) d\,\varphi \, d\, z \,,$$

откуда следует, что

$$\sup_{x \in I} |\widehat{f}_{k,\nu}(x)| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \sup_{x \in I} \|f(x,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\Lambda)} \,. \tag{8.5}$$

Замечание 8.3. Согласно лемме 9.4 для любой функции $p_2(x,\varphi,z)$ из класса $\Phi_1(I \times \Lambda)$ справедливо равенство

$$\widehat{\Delta_{\varphi,z} p_2}_{k,\nu}(x) = -\left(\frac{k^2}{r^2} + \nu^2 \right) \widehat{p}_{2;k,\nu}(x)$$

и, следовательно,

$$\widehat{p}_{2;k,\nu}(x) = -\frac{r^2(x)}{k^2 + r^2(x)\nu^2} \, \widehat{\Delta_{\varphi,z} p_2}_{k,\nu}(x) \,. \tag{8.6}$$

Аналогичное равенство имеет место и для производной функции $\widehat{p}_{2;k,\nu}(x)$, поэтому переходя в равенстве (8.6) к модулю и применяя оценку (8.5), получаем

$$\max\left\{ |\widehat{p}_{2;k,\nu}(x)|, \left| \frac{\partial p_{2;k,\nu}}{\partial x}(x) \right| \right\} \le \frac{L_*}{2\pi} \cdot \frac{r_0^2}{k^2 + \varepsilon_0^2 \nu^2} \le \frac{r_0^2 L_*}{k^2 + \varepsilon_0^2 \nu^2} \tag{8.7}$$

при $x \in I$, $k^2 + \nu^2 \neq 0$, где $L_* := \sup\limits_{x \in I} \|\Delta_{\varphi,z} p_2(x,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\Lambda)}$, а ε_0 – константа, отделяющая функцию $r(x)$ от нуля.

Теорема 8.1. Пусть T, r_0, L_0, L_*, δ_0 - заданные положительные числа, $T < 2r_0/L_0$ и $0 < æ < \exp(-1/2)$. Тогда для функций p_2, $p_2^* \in \Phi_1(I \times \Lambda)$ таких, что

$$\sup_{x \in I} \max \Bigg\{ \|\Delta_{\varphi,z} p_2(x,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\Lambda)}, \|\Delta_{\varphi,z} p_2^*(x,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\Lambda)},$$

$$\left\| \Delta_{\varphi,z} \frac{\partial p_2}{\partial x}(x,\cdot,\cdot) \right\|_{L^1(\Lambda)}, \left\| \Delta_{\varphi,z} \frac{\partial p_2^*}{\partial x}(x,\cdot,\cdot) \right\|_{L^1(\Lambda)} \Bigg\} \le L_*,$$

отвечающих соответственно информациям h^1, $h^{1*} \in \Psi(J \times \Lambda)$, при условии $\|h^1 - h^{1*}\|_{\Psi(J \times \Lambda)} \le æ$ имеет место оценка

$$\|p_2 - p_2^*\|^2_{\Phi_1(I \times \Lambda)} \le \frac{\mathbf{C}}{\ln æ^{-1}},$$

где константа $\mathbf{C}$ зависит от r_0, δ_0, ε_0, L_0, L_*.

Доказательство. Рассмотрим функции $p_2(x,\varphi,z)$ и $p_2^*(x,\varphi,z) \in \Phi_1(I\times\Lambda)$, отвечающих информации $h^1(x,\varphi,z)$ и $h^{1*}(x,\varphi,z)$, соответственно, и, воспользовавшись леммой 9.3 при фиксированном $x\in[0,T/2]$, получим

$$\text{(8.8)}\quad \Big\|p_2(x,\cdot,\cdot)-p_2^*(x,\cdot,\cdot)\Big\|^2_{L^2(\Lambda)}(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big|\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^*_{2;k}(x,\nu)\Big|^2\right)d\,\nu.$$

Сумму, стоящую в правой части равенства (8.8), разобъём на шесть слагаемых

$$\text{(8.9)}\quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^*_{2;k}(x,\nu)\Big)^2 d\,\nu\right)=$$

$$=\sum_{k=-M}^{M}\left(\int\limits_{-A}^{A}\Big(\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^*_{2;k}(x,\nu)\Big)^2 d\,\nu+\int\limits_{-\infty}^{-A}\Big(\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^*_{2;k}(x,\nu)\Big)^2 d\,\nu+\right.$$

$$+\int\limits_{A}^{+\infty}\Big(\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^*_{2;k}(x,\nu)\Big)^2 d\,\nu+$$

$$+\sum_{|k|\geqslant M}\left(\int\limits_{-A}^{A}\Big(\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^*_{2;k}(x,\nu)\Big)^2 d\,\nu+\int\limits_{-\infty}^{-A}\Big(\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^*_{2;k}(x,\nu)\Big)^2 d\,\nu+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{A}^{+\infty}\Big(\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^*_{2;k}(x,\nu)\Big)^2 d\,\nu\right).$$

В силу оценки (8.7) можем написать при $x\in[0,T/2]$:

$$\text{(8.10)}\qquad |\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^*_{2;k}(x,\nu)|^2\leqslant\left(\frac{2r_0^2L_*}{k^2+\varepsilon_0^2\nu^2}\right)^2\leqslant\frac{4r_0^4L_*^2}{\varepsilon_0^4}\,\frac{1}{\left(\frac{k}{\varepsilon_0}\right)^4+\nu^4}.$$

В равенстве (8.9) воспользуемся оценкой (8.10) для всех слагаемых кроме первого

$$\text{(8.11)}\quad \|p_2(x,\cdot,\cdot)-p_2^*(x,\cdot,\cdot)\|^2_{L_2(\Lambda)}(x)\leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{k=0}^{M}\int\limits_{0}^{A}\Big(\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^*_{2;k}(x,\nu)\Big)^2 d\,\nu+\frac{16r_0^4L_*^2}{\varepsilon_0^4}\sum_{k=0}^{M}\int\limits_{A}^{+\infty}\frac{d\,\nu}{\left(\frac{k}{\varepsilon_0}\right)^4+\nu^4}+$$

$$+\frac{16r_0^4L_*^2}{\varepsilon_0^4}\sum_{k=M+1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{d\,\nu}{\left(\frac{k}{\varepsilon_0}\right)^4+\nu^4}.$$

В равенстве (8.11) рассмотрим второе слагаемое в правой части

$$\frac{16r_0^4L_*^2}{\varepsilon_0^4}\sum_{k=0}^{M}\int\limits_A^{+\infty}\frac{d\nu}{\left(\frac{k}{\varepsilon_0}\right)^4+\nu^4}\leqslant\frac{16r_0^4L_*^2}{\varepsilon_0^4}\sum_{k=0}^{M}\int\limits_A^{+\infty}\frac{d\nu}{\nu^4}\leqslant \tag{8.12}$$

$$\leqslant\frac{16r_0^4L_*^2(M+1)}{\varepsilon_0^4}\int\limits_A^{+\infty}\frac{d\nu}{\nu^4}=\frac{16r_0^4L_*^2(M+1)}{\varepsilon_0^4}\cdot\frac{1}{3A^3}.$$

Рассмотрим последнее слагаемое в правой части равенства (8.11)

$$\frac{16r_0^4L_*^2}{\varepsilon_0^4}\sum_{k=M+1}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\nu}{\left(\frac{k}{\varepsilon_0}\right)^4+\nu^4}. \tag{8.13}$$

Учитывая

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\xi}{a^4+\xi^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}\,a^3} \tag{8.14}$$

и полагая в (8.14) $a:=k/\varepsilon_0$ и возвращаясь к (8.13), получим

$$\frac{16r_0^4L_*^2}{\varepsilon_0^4}\sum_{k=M+1}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\nu}{\left(\frac{k}{\varepsilon_0}\right)^4+\nu^4}=\frac{8r_0^4L_*^2\,\pi}{\varepsilon_0\sqrt{2}}\sum_{k=M+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}. \tag{8.15}$$

Воспользуемся интегральным признаком Маклорена – Коши, чтобы оценить сумму ряда

$$\sum_{k=M+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\leqslant\int\limits_{M+1}^{+\infty}\frac{d\xi}{\xi^3}=-\frac{1}{2\xi^2}\Big|_{M+1}^{+\infty}=\frac{1}{2(M+1)^2}\leqslant\frac{1}{2M^2}. \tag{8.16}$$

Правую часть равенства (8.15) можем оценить, используя (8.16)

$$\frac{8r_0^4L_*^2\,\pi}{\varepsilon_0\sqrt{2}}\sum_{k=M+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\leqslant\frac{4r_0^4L_*^2\,\pi}{\varepsilon_0\sqrt{2}}\,\frac{1}{M^2}. \tag{8.17}$$

Перепишем оценку (8.11), используя (8.12) и (8.17)

$$\|p_2(x,\cdot,\cdot)-p_2^*(x,\cdot,\cdot)\|^2_{L_2(\Lambda)}(x)\leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{k=0}^{M}\int\limits_0^A\left|\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^*_{2;k}(x,\nu)\right|^2d\nu+\frac{16r_0^4L_*^2(M+1)}{\varepsilon_0^4}\,\frac{1}{3A^3}+\frac{4r_0^4L_*^2\,\pi}{\varepsilon_0\sqrt{2}}\,\frac{1}{M^2}.$$

Полагая $A:=M$, $M\in\mathbb{N}$ и используя оценку $M+1\leqslant 2M$, можем написать

$$\|p_2(x,\cdot,\cdot)-p_2^*(x,\cdot,\cdot)\|^2_{L_2(\Lambda)}(x)\leqslant \tag{8.18}$$

$$\leqslant 4\sum_{k=0}^{M}\int\limits_0^M\left|\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^*_{2;k}(x,\nu)\right|^2d\nu+\frac{32r_0^4L_*^2}{3\varepsilon_0^4}\,\frac{1}{M^2}+\frac{4r_0^4L_*^2\,\pi}{\varepsilon_0\sqrt{2}}\,\frac{1}{M^2}.$$

В силу (8.1) можем оценить первое слагаемое в правой части (8.18)

$$(8.19)\quad 4\sum_{k=0}^{M}\int_0^M \Big|\widehat{p}_{2;k}(x,\nu)-\widehat{p}^{*}_{2;k}(x,\nu)\Big|^2\,d\nu \leqslant 4æ^2\mathbf{b}_4\sum_{k=0}^{M}\int_0^M \exp\{\mathbf{b}_5(k^2+\nu^2)\}\,d\nu \leqslant$$

$$\leqslant 4æ^2(M+1)M\mathbf{b}_4\exp\{2\mathbf{b}_5\,M^2\} \leqslant 8æ^2M^2\mathbf{b}_4\exp\{2\mathbf{b}_5\,M^2\}.$$

Обозначим

$$\mathbf{b}_6 := \max\left\{8\mathbf{b}_4,\ \frac{32r_0^4L_*^2}{3\varepsilon_0^4},\ \frac{4r_0^4L_*^2\,\pi}{\varepsilon_0\sqrt{2}}\right\},\qquad \mathbf{b}_7 := 2\mathbf{b}_5,$$

тогда из (8.18) в силу (8.19) получим

$$(8.20)\qquad \sup_{x\in[0,T/2]}\|p_2(x,\cdot,\cdot)-p_2^*(x,\cdot,\cdot)\|^2_{L_2(\Lambda)}(x) \leqslant \mathbf{b}_6\Big(æ^2M^2\exp\{\mathbf{b}_7\,M^2\}+\frac{1}{M^2}\Big).$$

Докажем, что существует такой номер M, зависящий от æ и такой, что

(1) $M(æ)\to+\infty$ при $æ\to+0$,

(2) $\Big(æ^2M^2(æ)\exp\{\mathbf{b}_7\,M^2(æ)\}+\dfrac{1}{M^2(æ)}\Big)\sim\dfrac{2}{M^2(æ)}\to 0$ при $æ\to+0$.

Тогда можем написать, что $æ^2M^4(æ)\exp\{\mathbf{b}_7\,M^2(æ)\}$ близко к 1. Отсюда следует, что

$$\ln\Big(æ^2M^4(æ)\Big)+\mathbf{b}_7\,M^2(æ)\approx 0.$$

Рассмотрим итерационный процесс и на первом шаге положим

$$(8.21)\qquad \ln æ^2+\mathbf{b}_7\,M_1^2(æ)=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{b}_7\,M_1^2(æ)=-\ln æ^2=\ln æ^{-2}$$

отсюда

$$M_1^2(æ)=\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln æ^{-2},\qquad M_1(æ)\to+\infty \text{ при } \quad æ\to+0.$$

На втором шаге итерационного процесса рассмотрим соотношение

$$\ln\Big(æ^2M_1^4(æ)\Big)+\mathbf{b}_7\,M_2^2(æ)\approx 0.\ \Rightarrow\ \mathbf{b}_7\,M_2^2(æ)=-\ln\Big(æ^2M_1^4(æ)\Big).$$

Отсюда в силу (8.21) найдём $M_2^2(æ)$

$$M_2^2(æ)=\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln\Big(æ^{-2}M_1^{-4}(æ)\Big)=\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln\Big(æ^{-2}\Big(\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln æ^{-2}\Big)^{-2}\Big),$$

$$M_2(æ)\to+\infty \text{ при } \quad æ\to+0.$$

В качестве искомого M возьмём $M_2(æ)$ и рассмотрим выражение, стоящее в правой части неравенства (8.20)

$$(8.22)\quad æ^2M^2\exp\{\mathbf{b}_7\,M^2\}+\frac{1}{M^2}=\left[\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln\bigg(æ^{-2}\Big(\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln æ^{-2}\Big)^{-2}\bigg)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln\bigg(æ^{-2}\Big(\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln æ^{-2}\Big)^{-2}\bigg)\right]^2\Big(\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln æ^{-2}\Big)^{-2}+1\right\}.$$

Рассмотрим выражение в фигурных скобках

$$\left[\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln\left(æ^{-2}\Big(\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln æ^{-2}\Big)^{-2}\right)\right]^2\Big(\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln æ^{-2}\Big)^{-2}+1= \tag{8.23}$$

$$=\left(\frac{\ln\left(æ^{-2}\Big(\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln æ^{-2}\Big)^{-2}\right)}{\ln æ^{-2}}\right)^2+1.$$

Преобразуем числитель

$$\ln\left(æ^{-2}\Big(\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln æ^{-2}\Big)^{-2}\right)=\ln æ^{-2}+2\ln\mathbf{b}_7+\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)^{-2}. \tag{8.24}$$

Используя (8.24) и возвращаясь к (8.23), получим

$$\left(\frac{\ln\left(æ^{-2}\Big(\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln æ^{-2}\Big)^{-2}\right)}{\ln æ^{-2}}\right)^2+1=\left[1+2\frac{\ln\mathbf{b}_7}{\ln æ^{-2}}+\frac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)^{-2}}{\ln æ^{-2}}\right]^2+1. \tag{8.25}$$

Рассмотрим первый множитель в правой части равенства (8.22), воспользовавшись представлением (8.24)

$$\left[\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln\left(æ^{-2}\Big(\frac{1}{\mathbf{b}_7}\ln æ^{-2}\Big)^{-2}\right)\right]^{-1}=\frac{\dfrac{\mathbf{b}_7}{\ln æ^{-2}}}{1+2\dfrac{\ln\mathbf{b}_7}{\ln æ^{-2}}-2\dfrac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)}{\ln æ^{-2}}}. \tag{8.26}$$

В дальнейшем будем считать $0<æ<\exp(-1/2)$, в силу выбора æ можем написать

$$æ^{-2}=\frac{1}{æ^2}>\frac{1}{(\exp\{-1/2\})^2}=(\mathrm{e}^{1/2})^2=\mathrm{e}$$

отсюда

$$\ln æ^{-2}>\ln\mathrm{e}=1\ \Rightarrow\ \frac{1}{\ln æ^{-2}}<1. \tag{8.27}$$

Исследуя поведение функций $G(æ):=\dfrac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)}{\ln æ^{-2}}$ и $H(æ):=\dfrac{1}{\ln æ^{-2}}$, получим оценки

$$0\leqslant G(æ)=\frac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)}{\ln æ^{-2}}\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}},\qquad 0<H(æ)=\frac{1}{\ln æ^{-2}}<1. \tag{8.28}$$

Из (8.28)

$$0\leqslant\frac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)}{\ln æ^{-2}}\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}\ \Rightarrow\ -\frac{2}{\mathrm{e}}\leqslant-2\frac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)}{\ln æ^{-2}}\leqslant 0\ \Rightarrow \tag{8.29}$$

$$\Rightarrow\ 1-\frac{2}{\mathrm{e}}\leqslant 1-2\frac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)}{\ln æ^{-2}}\leqslant 1.$$

Отсюда

$$1 \leqslant \frac{1}{1 - 2\dfrac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)}{\ln æ^{-2}}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{2}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2}. \tag{8.30}$$

Используя (8.27), (8.28), (8.30) оценим выражение в правой части (8.26)

$$\frac{1}{1 + 2\dfrac{\ln \mathbf{b}_7}{\ln æ^{-2}} - 2\dfrac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)}{\ln æ^{-2}}} \leqslant \frac{1}{1 - 2\dfrac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)}{\ln æ^{-2}}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2}. \tag{8.31}$$

Используя (8.25), (8.29), (8.31) оценим выражение, стоящее в правой части равенства (8.25)

$$\left[1 + 2\frac{\ln \mathbf{b}_7}{\ln æ^{-2}} + \frac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)^{-2}}{\ln æ^{-2}}\right]^2 + 1 \tag{8.32}$$

Аналогичным образом, используя (8.25), (8.29), (8.31) оценим выражение, стоящее в правой части равенства (8.26)

$$\frac{\dfrac{\mathbf{b}_7}{\ln æ^{-2}}}{1 + 2\dfrac{\ln \mathbf{b}_7}{\ln æ^{-2}} - 2\dfrac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)}{\ln æ^{-2}}} \leqslant \frac{\dfrac{\mathbf{b}_7}{\ln æ^{-2}}}{1 - 2\dfrac{\ln\Big(\ln æ^{-2}\Big)}{\ln æ^{-2}}} \leqslant \mathbf{b}_7 \frac{1}{\ln æ^{-2}} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2}. \tag{8.33}$$

Используя выражения, стоящие в правых частях неравенств (8.32), (8.33), обозначим

$$\mathbf{b}_8 := \left(4\Big(1 + \ln \mathbf{b}_7\Big)^2 + 1\right) \frac{\mathrm{e}\ \mathbf{b}_7}{\mathrm{e}-2}.$$

Возвращаясь к (8.22), можем написать

$$æ^2 M^2 \exp\{\mathbf{b}_7 M^2\} + \frac{1}{M^2} \leqslant \frac{\mathbf{b}_8}{\ln æ^{-2}} = \frac{\mathbf{b}_8}{2\ln æ^{-1}}. \tag{8.34}$$

Таким образом, в силу (8.34) и (8.20) получим

$$\sup_{x\in I} \|p_2(x,\cdot,\cdot) - p_2^*(x,\cdot,\cdot)\|^2_{L_2(\Lambda)}(x) \leqslant \frac{\mathbf{C_1}}{\ln æ^{-1}}, \tag{8.35}$$

здесь $\mathbf{C_1} = \mathbf{b}_6 \dfrac{\mathbf{b}_8}{2}$.

Заметим, что аналогичным образом можем получить оценку

$$\sup_{x\in I} \left\| \frac{\partial p_2}{\partial x}(x,\cdot,\cdot) - \frac{\partial p_2^*}{\partial x}(x,\cdot,\cdot) \right\|^2_{L_2(\Lambda)}(x) \leqslant \frac{\mathbf{C}_2}{\ln æ^{-1}}. \tag{8.36}$$

Объединяя равенства (8.35) и (8.36), получим требуемую оценку

$$\|p_2 - p_2^*\|^2_{\Phi_1(I\times\Lambda)} \leq \frac{\mathbf{C}}{\ln æ^{-1}},$$

$\mathbf{C} = \max\{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2\}$. □

9. Приложение. Вспомогательные утверждения

Замечание 9.1. По формуле Лейбница имеем: если функция $f:(\alpha,\beta)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна вместе со своей частной производной по первому аргументу, интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\,d\,x \quad \text{сходится при каждом } t\in(\alpha,\beta), \quad \text{а интеграл} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\,x$$

сходится равномерно на любом отрезке $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$, то первый интеграл является непрерывно дифференцируемой функцией по $t\in(\alpha,\beta)$, причём,

$$\frac{d}{d\,t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\,d\,x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\,x\,.$$

Пусть функция $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ является 2π-периодической по φ и абсолютно интегрируема в полосе $\Lambda:=[0,2\pi]\times\mathbb{R}$. Тогда она совпадает с суммой своего ряда Фурье:

$$f(\varphi,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k(z)\mathrm{e}^{i\,k\varphi}\,,$$

где

$$f_k(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi,z)\mathrm{e}^{-\,i\,k\varphi}\,d\,\varphi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

— её коэффициенты Фурье. Этот ряд сходится к $f(\varphi,z)$ равномерно на любом множестве вида $\mathbb{R}\times K$, где K — компакт в $\mathbb{R}$ и, в частности, на любом компакте в Λ, а коэффициенты Фурье являются гладкими и абсолютно интегрируемыми на $\mathbb{R}$ функциями. В частности, к коэффициентам Фурье применимо преобразование Фурье:

$$\widehat{(f_k)}(\nu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_k(z)\mathrm{e}^{-\,i\,z\nu}\,d\,z \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Кроме того, имеет место формула обращения:

$$f_k(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{(f_k)}(\nu)\mathrm{e}^{i\,z\nu}\,d\,\nu \quad (k\in\mathbb{Z},\ z\in\mathbb{R}),$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения (если бы функция f имела вторую производную по z, абсолютно интегрируемую на Λ, то вторые производные её коэффициентов Фурье были бы абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, а значит, интеграл в правой части был бы сходящимся).

Подставляя последние интегралы в ряд Фурье, получаем равенство

$$f(\varphi,z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{(f_k)}(\nu)\mathrm{e}^{i\,z\nu}\,d\,\nu\right)e^{ik\varphi}\,.$$

Лемма 9.1. [10, с. 231]
Предположим, что функции f_n $(n \in \mathbb{N})$ несобственно абсолютно интегрируемы на интервале (α, β) $(\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}})$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ сходится равномерно на любом отрезке $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ и конечна одна из величин $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \right) dx$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} |f_n(x)|\, dx$. Тогда величины $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_n(x)\, dx$ конечны и совпадают. □

Лемма 9.2.
Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая по первой переменной функция класса $C^1(\mathbb{R}^2)$, абсолютно интегрируемая на $\Lambda := [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$. Тогда

$$\forall\, k \in \mathbb{Z} \;\; \forall\, \nu \in \mathbb{R} \quad \widehat{(f_k)}(\nu) = \widehat{f}_k(\nu),$$

т. е. образы Фурье по второй переменной коэффициентов Фурье по первой переменной совпадают с коэффициентами Фурье по первой переменной образов Фурье по второй переменной.

Доказательство.
Так как

$$f(\varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k(z) \mathrm{e}^{i\, k\varphi},$$

где

$$f_k(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, z) \mathrm{e}^{-\, i\, k\varphi}\, d\,\varphi \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

то

$$\widehat{(f_k)}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, z) \mathrm{e}^{-\, i\, k\varphi}\, d\,\varphi \right) e^{-i\nu z}\, d\,z =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi, z) e^{-i\nu z}\, d\,z \right) \mathrm{e}^{-\, i\, k\varphi}\, d\,\varphi = \widehat{f}_k(\nu).$$

□

Лемма 9.3.
Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая по первой переменной функция класса $C^1(\mathbb{R}^2)$, абсолютно интегрируемая на $\Lambda := [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ вместе со своим квадратом. Тогда

$$\|f\|^2_{L^2(\Lambda)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_k(\nu)|^2\, d\,\nu\,,$$

где $\widehat{f}_k$ — преобразование Фурье коэффициентов Фурье f_k $(k \in \mathbb{Z})$ ряда Фурье функции f по первой переменной.

Доказательство.
В силу условия имеем

$$\forall\,\varphi\in[0,2\pi]\ \ \forall\,z\in\mathbb{R}\quad f(\varphi,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_k(z)\mathrm{e}^{i\,k\varphi},$$

где при $k\in\mathbb{Z}$

$$f_k(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi,z)\mathrm{e}^{-\,i\,k\varphi}\,d\,\varphi,\qquad |f_k(z)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}|f(\varphi,z)|\,d\,\varphi,$$

и функции f_k принадлежат $C^1(\mathbb{R})$ и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$ вместе со своими квадратами. Для квадратов самих функций последнее вытекает, например, из оценки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f_k(z)|^2\,d\,z\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(\varphi,z)|\,d\varphi\right)^2d\,z\leqslant$$

в силу неравенства Гёльдера

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(\varphi,z)|^2\,d\,\varphi\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{2\pi}1\cdot\,d\,\varphi\right)^{1/2}\right]^2d\,z\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(\varphi,z)|^2\,d\,\varphi\right)^{1/2}\cdot\sqrt{2\pi}\right]^2d\,z=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}|f(\varphi,z)|^2\,d\,\varphi\,d\,z<+\infty\,.$$

Далее имеем:

$$\|f\|^2_{L^2(\Lambda)}=\iint\limits_{\Lambda}|f(\varphi,z)|^2\,d\,\varphi\,d\,z=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}|f(\varphi,z)|^2\,d\,\varphi\,d\,z=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_k(z)\mathrm{e}^{i\,k\varphi}\right)\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}f_m(z)\mathrm{e}^{i\,m\varphi}\right)}\,d\,\varphi\,d\,z=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k,m=-\infty}^{+\infty}f_k(z)\overline{f_m(z)}\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i\,(k-m)\varphi}\,d\,\varphi}_{=0\text{ при }k\neq m}\,d\,z=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,2\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|f_k(z)|^2\,d\,z=(\text{по лемме 9.1})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f_k(z)|^2\,d\,z=$$

по формуле Парсеваля –順Планшереля [11, с. 371]

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}_k(\nu)|^2\,d\,\nu\,.$$

□

Лемма 9.4.
Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая по первой переменной функция класса $C^3(\mathbb{R}^2)$, частные производные которой вплоть до 2-го порядка абсолютно интегрируемы на $\Lambda := [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$. Тогда

$$\widehat{\Delta_{\varphi,z} f}_k(\nu) = \left(\frac{(i\,k)^2}{r^2} + (i\,\nu)^2\right)\widehat{f}_k(\nu) = -\left(\frac{k^2}{r^2} + \nu^2\right)\widehat{f}_k(\nu)\,,$$

где $\Delta_{\varphi,z} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ $(r > 0)$.

Доказательство.
В силу условия и леммы 9.2 имеем:

$$\widehat{\Delta_{\varphi,z} f}_k(\nu) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\widehat{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right)}_k(\nu) + \widehat{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)}_k(\nu) = \frac{1}{r^2}\left(\widehat{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right)_k}\right)(\nu) + \left(\widehat{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_k}\right)(\nu) =$$

$$= \frac{1}{r^2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}(\varphi,z)e^{-ik\varphi}\,d\varphi\; e^{-i\nu z}\,dz +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\varphi,z)e^{-ik\varphi}\,d\varphi\; e^{-i\nu z}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi r^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(ik)^2\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi,z)e^{-ik\varphi}d\varphi\; e^{-i\nu z}dz + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\varphi,z)e^{-i\nu z}dz\; e^{-ik\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{(ik)^2}{2\pi r^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi,z)e^{-i\nu z}\,dz\; e^{-ik\varphi}\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu z}\,d\,\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi,z)\right)e^{-ik\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{(ik)^2}{r^2}\widehat{f}_k(\nu) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(e^{-i\nu z}\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi,z)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + (i\nu)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi,z)e^{-i\nu z}\,dz\right)e^{-ik\varphi}\,d\varphi =$$

учитывая, что функция, абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ вместе со своей производной, на бесконечности стремится к нулю, получаем

$$= \frac{(ik)^2}{r^2}\widehat{f}_k(\nu) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left((i\nu)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi,z)e^{-i\nu z}\,dz\right)e^{-ik\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{(ik)^2}{r^2}\widehat{f}_k(\nu) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{(i\nu)^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi,z)e^{-i\nu z}\,dz\right)e^{-ik\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{(ik)^2}{r^2}\widehat{f}_k(\nu) + (i\nu)^2\widehat{f}_k(\nu)\,,$$

что и требовалось. $\square$

Список литературы

[1] А. С. Благовещенский, *О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной среды*, Труды МИАН СССР. **115**. (1971) 21–32.

[2] V. G. Romanov, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, VNU Sciences Press, Utrecht, 1987. MR0885902

[3] T. V. Bugueva, *A linearized inverse problem for the wave equation in a sphere*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. The Netherlands, Utrecht, VSP, **4**, No.3. (1996) 171-189. MR1401485

[4] С. И. Кабанихин, *Обратная задача для уравнения акустики. (Определение плотности среды)*, Препринт, № 246. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1980.

[5] С. И. Кабанихин, *О задаче определения коэффициентов уравнения акустики*, Неклассические Проблемы Математической Физики. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, (1981) 93–100.

[6] С. И. Кабанихин, *Приближенный метод решения обратной задачи для уравнения акустики*, Приближенные методы решения и вопросы корректности обратных задач. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, (1981) 52–62.

[7] P. E. Sacks, *The inverse problem for a weakly inhomogeneous two–dimensional acoustic medium*, SIAM J.Appl.Math. **48**, No.5. (1988) 1167–1193.

[8] P. Sacks, W. Symes, *Uniqueness and continuous dependence for a multidimensional hyperbolic inverse problem.* Comm. in Partial Differential Equations. **6.**, No.10. (1985) 635–676.

[9] T. V. Bugueva, *Some inverse problems for acoustic equation in cylindrical domain*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. The Netherlands, Utrecht, VSP, **12**, No.6, (2004) 581-596.

[10] Е. В. Мельников, *Основы математического анализа. Часть II. Интегралы и ряды.* Омский гос. ун-т, Омск, 2012.

[11] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* Мир, Москва, т.2. 1965.

Бугуева Татьяна Владимировна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: bugueva@math.nsc.ru