S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 185–199 (2014) УДК 519.21

MSC 46F25, 60H05, 60H40

ИНТЕГРАЛЫ ИТО И ХИЦУДЫ–СКОРОХОДА В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

М.А. АЛЬШАНСКИЙ

Abstract. The criterion of adaptedness of a Hilbert space valued stochastic process to the filtration generated by a cylindrical Wiener process is obtained in terms of the S-transform. The criterion is then used to establish the connection between the Itô integral with respect to a cylindrical Wiener process and the Hitsuda – Skhorohod integral in the space of Hilbert space valued stochastic distributions.

Keywords: Itô integral, Hitsuda – Skorohod integral, cylindrical Wiener process, S-transform.

1. Введение

При построении математических моделей, учитывающих внешние воздействия типа шума на моделируемую систему, в различных приложениях возникают стохастические дифференциальные уравнения вида

$$dX(t) = AX(t)dt + B(X(t))dW(t)\,, \quad t \geq 0\,, \tag{1}$$

где $W(t)$ — винеровский процесс со значениями в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, A — оператор, действующий, вообще говоря, в другом сепарабельном гильбертовом пространстве H ($\mathbb{H}$ и H бесконечномерны), $B(\cdot)$ — вообще говоря, нелинейный оператор, действующий из H в пространство линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$.

Уравнение (1) является краткой формой записи интегрального уравнения

$$X(t) = X(0) + \int_0^t AX(s)\,ds + \int_0^t B(X(s))\,dW(s)\,, \quad t \geq 0\,.$$

Alshanskiy, M.A., The Itô integral and the Hitsuda–Skorohod integral in the infinite dimensional case.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00090).

Поступила 19 сентября 2013 г., опубликована 2 марта 2014 г.

Использование интеграла Ито $\int_0^t B(X(s))\,dW(s)$ по гильбертово-значному винеровскому процессу (см., например, [1, 2]), являющегося обобщением интеграла Ито по броуновскому движению, позволяет вместо крайне нерегулярного белого шума работать с его первообразной — винеровским процессом.

Гауссовский белый шум неформально определяется как случайный процесс, значения которого в различные моменты времени независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием, равным нулю, и бесконечным среднеквадратическим отклонением. Не являясь случайным процессом в обычном смысле, белый шум оказывается случайным процессом в подходящим образом определенных пространствах обобщенных случайных величин. Такие пространства вводятся в "анализе белого шума" (white noise calculus)— теории, сформировавшейся во второй половине XX века. (см., например, [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], где рассматривается $\mathbb{R}^n$-значный белый шум). В результате появляется возможность работать с белым шумом, непосредственно вводя его в уравнение. Кроме того, важным обстоятельством является тот факт, что математический аппарат анализа белого шума позволяет рассматривать стохастические дифференциальные уравнения в ситуации, когда их коэффициенты и решения не являются согласованными с фильтрацией, порожденной броуновским движением. Необходимость в этом возникает, например, в финансовой математике при моделировании эволюции цен акций с учетом наличия инсайдерской информации.

В работах [12, 13] идеи анализа белого шума используются для изучения стохастических дифференицальных уравнений в гильбертовых пространствах. В этих работах белый шум рассматривается как случайный процесс в подходящим образом построенном пространстве гильбертово-значных обобщенных случайных величин. В разделе 2 настоящей работы приведены определения основных понятий, связанных с этими пространствами, и некоторые их свойства. Одним из важных понятий является интеграл

$$\int_a^b \Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t)\,dt\,,$$

где $\mathbb{W}(t)$ — гильбертово-значный гауссовский белый шум, а $''\diamond''$ — произведение Уика. В работах [12, 13] он назван интегралом Хицуды – Скорохода. Это объясняется тем, что в конечномерном случае имеет место равенство

$$\int_a^b \Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t)\,dt = \int_a^b \Psi(t)\delta W(t)\,,$$

где в правой части равенства — интеграл Хицуды – Скорохода, который в $\mathbb{R}$-значном случае вводится в терминах разложения $\Psi(t)$ в ряд по кратным интегралам Ито (см. детали в [10, 11]). Для этого интеграла, при условии согласованности $\Psi(t)$ с фильтрацией, порожденной винеровским процессом, доказано равенство с интегралом Ито:

$$\int_a^b \Psi(t)\delta W(t) = \int_a^b \Psi(t)\,dW(t)\,.$$

Поскольку в гильбертово-значном случае техника кратных интегралов Ито пока еще не развита, является актуальным вопрос о связи интегралов $\int_a^b \Psi(t) \diamond$

$\mathbb{W}(t)\,dt$ и $\int_a^b \Psi(t)\,dW(t)$ в этом случае. Этому вопросу и посвящена данная работа.

В разделе 3 представлены ее результаты. Это критерий согласованности гильбертово-значного случайного процесса с фильтрацией, порожденной цилиндрическим винеровским процессом, который получен в терминах S-преобразования (следствие 2). Далее он используется для доказательства равенства

$$\int_a^b \Psi(t)\,dW(t) = \int_a^b \Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t)\,dt$$

в гильбертово-значном случае (теорема 2). Это равенство означает, что уравнение (1) является частным случаем уравнения

$$X'(t) = AX(t) + B(X(t)) \diamond \mathbb{W}(t) \tag{2}$$

в пространствах гильбертово-значных обобщенных случайных величин. При этом решения уравнения (2), в отличие от решений уравнения (1), вообще говоря, не должны быть согласованными с фильтрацией, порожденной винеровским процессом. Это означает, в частности, возможность построения математических моделей в ситуациях, когда описываемые процессы могут "зависеть от будущего", таких как модель рынка бескупонных облигаций с учетом наличия инсайдерской информации.

Уравнение (2) исследовано в работе [13] в предположении, что операторы A и $B(\cdot)$ линейны. Путем сведения с помощью S-преобразования к детерминированному дифференциально-операторному уравнению в пространстве H, в [13] получен результат о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения (2) в пространствах гильбертово-значных обобщенных случайных величин.

2. Пространства обобщенных случайных величин

В этом разделе приведены основные определения и факты, касающиеся пространств обобщенных (в частности, гильбертово-значных) случайных величин.

2.1. **Вероятностное пространство белого шума.** Так называют тройку $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$, где $\mathcal{S}'$ — пространство распределений медленного роста над $\mathcal{S}$ — пространством быстроубывающих функций, $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$ — σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathcal{S}'$, а μ — вероятностная мера на $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$ (мера Минлоса – Сазонова), удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathcal{S}'} e^{i\langle \omega\,,\,\theta\rangle} d\mu(\omega) = e^{-\frac{1}{2}|\theta|_0^2}\,, \quad \theta \in \mathcal{S}\,, \tag{3}$$

где $|\cdot|_0$ — норма пространства $L_2(\mathbb{R})$ интегрируемых с квадратом на $\mathbb{R}$ функций. Мера μ называется нормализованной гауссовской мерой на $\mathcal{S}'$, так как для любого ортонормированного в $L_2(\mathbb{R})$ набора функций $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathcal{S}$, случайная величина $\omega \mapsto (\langle\omega, \theta_1\rangle, \langle\omega, \theta_2\rangle, \ldots, \langle\omega, \theta_n\rangle)$ распределена по нормальному закону с плотностью

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\,,$$

Пространство $\mathcal{S}$ является счетно-гильбертовым ядерным: $\mathcal{S} = \cap_{p\in\mathbb{N}}\mathcal{S}_p$, где $\mathcal{S}_p$ — подпространство $L_2(\mathbb{R})$ с нормой $|\cdot|_p$, определяемой скалярным произведением $(f,g)_p := (\hat{D}^p f, \hat{D}^p g)_{L_2(\mathbb{R})}$, где $\hat{D} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$.

Через (L^2) будем обозначать $L_2(\mathcal{S}',\mu;\mathbb{R})$ — пространство $\mathbb{R}$-значных интегрируемых с квадратом по мере μ функций (случайных величин), определенных на $\mathcal{S}'$. Норму этого пространства будем обозначать $\|\cdot\|_0$.

Для любых $\theta,\eta\in\mathcal{S}$ выполнены равенства

$$\big(\langle\cdot,\theta\rangle,\langle\cdot,\eta\rangle\big)_{(L^2)}=E\Big(\langle\cdot,\theta\rangle\langle\cdot,\eta\rangle\Big)=(\theta,\eta)_{L_2(\mathbb{R})}\,,\quad \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_0^2=E\langle\cdot,\theta\rangle^2=|\theta|_0^2\,.$$

Пользуясь этим, отображение $\theta\mapsto\langle\cdot,\theta\rangle$ можно по непрерывности продолжить с $\mathcal{S}$ на все $L_2(\mathbb{R})$. При этом соотношение (3) остается верным для $\theta\in L_2(\mathbb{R})$. В результате для любого $t\in\mathbb{R}$ случайная величина $\beta(t):=\langle\cdot,1_{[\min\{0;t\};\max\{0;t\}]}\rangle$ принадлежит (L^2), а случайный процесс $\{\beta(t)\,,\ t\in\mathbb{R}\}$ является броуновским движением.

2.2. **Пространства $\mathbb{R}$-значных обобщенных случайных величин.** Пусть $h_k(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}(d/dx)^k e^{-\frac{x^2}{2}}.\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — многочлены Эрмита, $\xi_k(x)=\pi^{-\frac14}\big((k-1)!\big)^{-\frac12}\,e^{-\frac{x^2}{2}}h_{k-1}(x)$ — функции Эрмита. Функции Эрмита являются собственными функциями дифференциального оператора $\hat{D}$: $\hat{D}\xi_i=(2i)\xi_i\,,i\in\mathbb{N}$ и образуют ортонормированный базис пространства $L_2(\mathbb{R})$. Пусть $\mathcal{T}\subset\big(\mathbb{N}\cup\{0\}\big)^{\mathbb{N}}$ — множество всех финитных мультииндексов. Стохастические полиномы Эрмита, определенные равенством

$$\mathbf{h}_\alpha(\omega):=\prod_k h_{\alpha_k}\big(\langle\omega\,,\,\xi_k\rangle\big)\,,\omega\in\mathcal{S}'\,,\alpha\in\mathcal{T}\,,$$

образуют ортогональный базис пространства (L^2), при этом

$$(\mathbf{h}_\alpha\,,\,\mathbf{h}_\beta)_{(L^2)}=\begin{cases}0\,, & \alpha\neq\beta\,,\\ \alpha!\,, & \alpha=\beta\,,\end{cases}\qquad \alpha!:=\prod_k\alpha_k!\,.$$

В работах [10, 11] используется тройка Гельфанда

$$(\mathcal{S})_\rho\subset(L^2)\subset(\mathcal{S})_{-\rho}\,,\quad(0\le\rho\le1).$$

Пространство $(\mathcal{S})_\rho$ основных функций (случайных величин) определяется равенством $(\mathcal{S})_\rho=\cap_{p\in\mathbb{N}}(\mathcal{S}_p)_\rho$, где

$$(\mathcal{S}_p)_\rho=\Big\{\varphi=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\varphi_\alpha\mathbf{h}_\alpha\in(L^2)\,;\ \sum_{\alpha\in\mathcal{T}}(\alpha!)^{1+\rho}|\varphi_\alpha|^2(2\mathbb{N})^{2p\alpha}<\infty\Big\}$$

с нормой $|\cdot|_{p,\rho}$, порожденной скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)_{p,\rho}=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}(\alpha!)^{1+\rho}\varphi_\alpha\overline{\psi}_\alpha(2\mathbb{N})^{2p\alpha}\,,\quad\big(2\mathbb{N}\big)^{p\alpha}:=\prod_{i\in\mathbb{N}}(2i)^{p\alpha_i}\,,$$

и оснащается топологией проективного предела.

Пусть $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ — пространство, сопряженное к $(\mathcal{S}_p)_\rho$. Его можно отождествить с гильбертовым пространством всевозможных формальных разложений $\Phi=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\Phi_\alpha\mathbf{h}_\alpha$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}(\alpha!)^{1-\rho}|\Phi_\alpha|^2(2\mathbb{N})^{-2p\alpha}<\infty\,,$$

со скалярным произведением

$$(\Phi,\Psi)_{-p,-\rho}=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}(\alpha!)^{1-\rho}\Phi_\alpha\overline{\Psi}_\alpha(2\mathbb{N})^{-2p\alpha}\,.$$

Будем обозначать норму $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ через $|\cdot|_{-p,-\rho}$.

Пространство $(\mathcal{S})_{-\rho}$ определяется равенством $(\mathcal{S})_{-\rho} = \cup_{p\in\mathbb{N}}(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ и оснащается топологией индуктивного предела. Для элементов $\Phi = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}$ и $\varphi \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \varphi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_\rho$ имеем:

$$\langle \Phi, \varphi\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \alpha! \Phi_\alpha \varphi_\alpha \,.$$

2.3. **Пространства гильбертово-значных обобщенных случайных величин.** Пусть $\mathbb{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство над $\mathbb{C}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, $(L^2)(\mathbb{H})$ — пространство $\mathbb{H}$-значных, определенных на $\mathcal{S}'$ функций, интегрируемых с квадратом по Бохнеру по мере μ. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{H}$. Семейство $\{\mathbf{h}_\alpha e_j\}_{\alpha\in\mathcal{T}, j\in\mathbb{N}}$ образует ортогональный базис $(L^2)(\mathbb{H})$. Для любого $f \in (L^2)(\mathbb{H})$ имеет место разложение

$$f = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}, j\in\mathbb{N}} f_{\alpha,j} \mathbf{h}_\alpha e_j = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} f_\alpha \mathbf{h}_\alpha = \sum_{j=1}^\infty f_j e_j \,, \tag{4}$$

$$f_{\alpha,j} \in \mathbb{R}\,,\ f_\alpha = \sum_j f_{\alpha,j} e_j \in \mathbb{H}\,,\ f_j = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} f_{\alpha,j} \mathbf{h}_\alpha \in (L^2)\,,$$

при этом $\|f\|^2_{(L^2)(\mathbb{H})} = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}, j\in\mathbb{N}} \alpha! |f_{\alpha,j}|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \alpha! \|f_\alpha\|^2_{\mathbb{H}} = \sum_{j=1}^\infty \|f_j\|^2_{(L^2)}$.

Определим пространство $\mathbb{H}$-значных обобщенных функций над $(\mathcal{S})_\rho$ как пространство линейных непрерывных операторов $\Phi : (\mathcal{S})_\rho \to \mathbb{H}$ оснащенное топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства $(\mathcal{S})_\rho$. Будем обозначать его $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Действие $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ на $\varphi \in (\mathcal{S})_\rho$ будем обозначать $\Phi[\varphi]$.

Любую функцию $f \in (L^2)(\mathbb{H})$ будем отождествлять с линейным оператором $f[\cdot] : (\mathcal{S})_\rho \to \mathbb{H}$, определенным равенством

$$f[\varphi] := \int\limits_{\mathcal{S}'} f(\omega)\varphi(\omega)\, d\mu(\omega)\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}\,.$$

Он, очевидно, является непрерывным, а значит, принадлежит $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Приведем предложение, характеризующее структуру пространства $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ (см. доказательство этого и других предложений раздела 2 в [13]). Оно является следствием того факта, что пространство $(\mathcal{S})_\rho$ является ядерным счетногильбертовым пространством (см. напр. [10]).

Предложение 1. $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *тогда и только тогда, когда для некоторого* $p \in \mathbb{N}$ $\Phi \in \mathcal{L}_2\big((\mathcal{S}_p)_\rho; \mathbb{H}\big)$[1].

В дальнейшем будем использовать обозначение $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H}) := \mathcal{L}_2((\mathcal{S}_p)_\rho; \mathbb{H})$. Норму этого пространства будем обозначать $\|\cdot\|_{-p,-\rho}$. Оно сепарабельно. Операторы $e_j \otimes \mathbf{h}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{T}$, $j \in \mathbb{N}$, определенные равенством

$$(e_j \otimes \mathbf{h}_\alpha)\varphi := e_j\big(\mathbf{h}_\alpha, \varphi\big)_{(L^2)}\,, \quad \varphi \in (\mathcal{S}_p)_\rho\,.$$

образуют его ортогональный базис.

[1]Через $\mathcal{L}_2(U;V)$ будем обозначать пространство операторов Гильберта — Шмидта, действующих из U в V.

Из предложения 1 следует равенство $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H}) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$. В [13] доказано, что любой элемент $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ допускает разложения:

$$\Phi[\cdot] = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle \Phi_j, \cdot\rangle e_j = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}, j\in\mathbb{N}} \Phi_{\alpha,j}(e_j \otimes \mathbf{h}_\alpha) = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \Phi_\alpha(\mathbf{h}_\alpha, \cdot)_{(L^2)}\,,$$

где $\Phi_j = (\Phi[\cdot], e_j) \in (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$, $\Phi_\alpha = \sum_{j\in\mathbb{N}} \Phi_{\alpha,j} e_j \in \mathbb{H}$. При этом

$$\|\Phi\|^2_{-p,-\rho} = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\Phi_j|^2_{-p,-\rho} = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}, j\in\mathbb{N}} (\alpha!)^{1-\rho} |\Phi_{\alpha,j}|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} =$$
$$= \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} (\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha\|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty\,.$$

Имеют место вложения

$$(\mathcal{S}_{-p_1})_{-\rho}(\mathbb{H}) \subseteq (\mathcal{S}_{-p_2})_{-\rho}(\mathbb{H}) \quad \text{при} \quad p_1 < p_2\,,$$

при этом

$$\|\Phi\|_{p_1,\rho} \geq \|\Phi\|_{p_2,\rho} \quad \text{для всех } \Phi \in (\mathcal{S}_{-p_1})_{-\rho}(\mathbb{H})\,.$$

Определение 1. *Множество $\mathcal{M} \subseteq (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ называется ограниченным, если для любой последовательности $\{\Phi_n\} \subseteq \mathcal{M}$ и для любой $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}$, сходящейся к нулю, $\{\varepsilon_n \Phi_n\}$ сходится к нулю в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.*

Предложение 2. *Множество $\mathcal{M}$ ограничено в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ тогда и только тогда, когда для любого M — ограниченного подмножества $(\mathcal{S})_\rho$ существует константа $K > 0$, такая, что $\|\Phi[\varphi]\| \leq K$ для всех $\varphi \in M$, $\Phi \in \mathcal{M}$.*

Предложение 3. *Если $\mathcal{M}$ ограничено в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, то для некоторых $p \in \mathbb{N}$ и $K > 0$ неравенство $\|\Phi[\varphi]\| \leq K|\varphi|_{p,\rho}$ выполняется для любых $\Phi \in \mathcal{M}$, $\varphi \in (\mathcal{S})_\rho$.*

Таким образом, если множество $\mathcal{M}$ ограничено в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, то для некоторого $p \in \mathbb{N}$ все элементы $\mathcal{M}$ являются ограниченными операторами из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$ и $\mathcal{M}$ ограничено в $\mathcal{L}\big((\mathcal{S}_p)_\rho, \mathbb{H}\big)$. Отсюда следует

Предложение 4. *Если множество $\mathcal{M}$ ограничено в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, то для некоторого $p \in \mathbb{N}$ $\mathcal{M} \subset (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$, причем $\mathcal{M}$ ограничено в $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$.*

Следующее предложение характеризует сходимость в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Предложение 5. *Пусть $\Phi_n = \sum_\alpha \Phi^{(n)}_\alpha \mathbf{h}_\alpha$, $\Phi = \sum_\alpha \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$\{\Phi_n\}$ сходится к Φ в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$;*
(ii) *Для некоторого $p \in \mathbb{N}$ все элементы последовательности $\{\Phi_n\}$ и Φ принадлежат $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi_n - \Phi\|_{p,\rho} = 0$.*

Для функций $\Phi(\cdot) : \mathbb{R} \to (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ предел и производную в точке $t_0 \in \mathbb{R}$ будем понимать в смысле равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства $(\mathcal{S})_\rho$. Из предложения 5 нетрудно получить

Следствие 1. *Пусть $\Phi(t) = \sum_\alpha \Phi_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ при $t \in [a, b]$, $t_0 \in [a, b]$.*

(1) *$\lim\limits_{t\to t_0} \Phi(t) = \Phi(t_0)$ в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ тогда и только тогда, когда для некоторого $p \in \mathbb{N}$ все $\Phi(t)$, $t \in [a, b]$ принадлежат $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi(t) - \Phi(t_0)\|_{p,\rho} = 0$;*

(2) *Функция* $\Phi(t)$ *дифференцируема в точке* $t_0 \in [a,b]$ *тогда и только тогда, когда для некоторого p существует* $\dfrac{d\Phi}{dt} := \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\Phi(t)-\Phi(t_0)}{t-t_0}$ *в пространстве* $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

2.4. **$\mathbb{H}$-значные цилиндрический винеровский процесс и белый шум.** Пусть $n(\cdot,\cdot) : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — биекция, удовлетворяющая условию

$$n(i,j) \ge ij\,, \quad i\,,j\in\mathbb{N}\,. \tag{5}$$

Определим в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ линейные операторы $\mathfrak{J}_j$, $j\in\mathbb{N}$, положив

$$\mathfrak{J}_j f = \sum_{i=1}^{\infty}(f,\xi_i)\xi_{n(i,j)}.$$

Пусть $L_2(\mathbb{R})_j := \mathfrak{J}_j\left(L_2(\mathbb{R})\right)$. Для любого $j\in\mathbb{N}$ оператор $\mathfrak{J}_j$ является изометрическим изоморфизмом $L_2(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})_j$ — замыкания линейной оболочки множества $\{\xi_{n(i,j)}\,,\ i\in\mathbb{N}\}$.

Определим операторы π_j, положив

$$\pi_j\xi_n = \begin{cases}\xi_n\,, & n\in\{n(i,j)\,,i\in\mathbb{N}\}\,,\\ 0\,, & n\notin\{n(i,j)\,,i\in\mathbb{N}\}\,.\end{cases}$$

Для любого $j\in\mathbb{N}$ оператор π_j является ортогональным проектором $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2(\mathbb{R})_j$.

Пусть $1^j_{[0,t]} = \mathfrak{J}_j 1_{[0,t]}$, где $1_{[0,t]}$ — индикатор отрезка $[0,t]$. Определим последовательность случайных процессов соотношениями

$$\beta_j(t) := \begin{cases}\langle\cdot\,,1^j_{[0,t]}\rangle\,, & t\ge 0\,,\\ -\langle\cdot\,,1^j_{(t,0)}\rangle\,, & t<0\,,\end{cases} \quad j=1,2,\dots\,,\ t\in\mathbb{R}\,. \tag{6}$$

Очевидно, $\{\beta_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность независимых броуновских движений. Для них справедливы разложения

$$\beta_j(t) = \Big\langle\cdot\,,\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \xi_i(s)\,ds\,\xi_{n(i,j)}\Big\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t\xi_i(s)\,ds\,\langle\cdot\,,\xi_{n(i,j)}\rangle = \\ = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t\xi_i(s)\,ds\,\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}}\,,$$

где $\epsilon_n := (0,0,\dots,\underset{n}{1},0,\dots)$. Случайный процесс, определенный равенством

$$W(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\beta_j(t)e_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} W_{\epsilon_n}(t)\,\mathbf{h}_{\epsilon_n}\,, \quad W_{\epsilon_n}(t) = \int_0^t \xi_{i(n)}(s)\,ds\,e_{j(n)}\in\mathbb{H}\,, \tag{7}$$

где $i(n)\,,j(n)\in\mathbb{N}$ такие, что $n(i(n),j(n)) = n$, называется цилиндрическим винеровским процессом.

Нетрудно проверить, что $W(t)\notin(L^2)(\mathbb{H})$ при всех $t\in\mathbb{R}$, при этом при любом $x\in\mathbb{H}$ имеем: $\big(W(t),x\big)^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}}(e_j,x)^2E\big[\beta_j^2(t)\big] = t\|x\|^2$. В то же время из известной оценки $\int_0^t\xi_i(s)\,ds = O(i^{-\frac{3}{4}})$, и условия (5) следует $\|W(t)\|^2_{-1,-\rho}<\infty$. Таким образом, $W(t)\in(\mathcal{S}_{-1})_{-\rho}(\mathbb{H})\subset(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Определим $\mathbb{H}$-значный цилиндрический белый шум равенством

$$\mathbb{W}(t) := \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t)\,(\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}} e_j) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t)\,\mathbf{h}_{\epsilon_n}\,, \quad \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t) = \xi_{i(n)}(t)\,e_{j(n)} \in \mathbb{H}\,.$$

Поскольку справедлива оценка $\xi_i(t) = O\big(i^{-\frac{1}{4}}\big)$, имеем $\|\mathbb{W}(t)\|^2_{-1,-\rho} < \infty$, что означает $\mathbb{W}(t) \in (\mathcal{S}_{-1})_{-\rho}(\mathbb{H}) \subset (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Заметим, что для всех $t \in \mathbb{R}$ верно равенство $\dfrac{d}{dt}W(t) = \mathbb{W}(t)$.

2.5. **S-преобразование гильбертово-значных обобщенных случайных величин.** Пусть $\mathcal{E}_\theta := e^{\langle\cdot,\theta\rangle - \frac{1}{2}|\theta|_0^2}$. При $\theta \in \mathcal{S}$ эта случайная величина определена на всем пространстве $\mathcal{S}'$ и принадлежит $(\mathcal{S})_\rho$, для $0 \le \rho < 1$. При этом справедлива оценка

$$|\mathcal{E}_\theta|_{p,\rho} \le 2^{\rho/2} \exp\left[(1-\rho)^{\frac{2\rho-1}{1-\rho}}|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right], \tag{8}$$

(см., напр. [10]).

Непосредственным вычислением проверяется, что $\mathcal{E}_\theta$ раскладывается в ряд

$$\mathcal{E}_\theta = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \mathfrak{e}_\alpha \mathbf{h}_\alpha\,, \quad \text{где} \ \ \mathfrak{e}_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\prod_{i=1}^{\infty}(\theta,\xi_i)^{\alpha_i}_{L_2(\mathbb{R})}\,. \tag{9}$$

Кроме того, она обладает следующими свойствами:

$$\mathcal{E}_{\theta_1+\theta_2} = \mathcal{E}_{\theta_1}\mathcal{E}_{\theta_2}\,, \quad \text{если } (\theta_1,\theta_2)_{L_2(\mathbb{R})} = 0\,; \quad E\mathcal{E}_\theta = 1\,.$$

Определение 2. *Пусть $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, $0 \le \rho < 1$. S-преобразованием Φ называется $\mathbb{H}$-значная функция, определенная равенством*

$$(S\Phi)(\theta) = \Phi[\mathcal{E}_\theta]\,, \quad h \in \mathcal{S}\,.$$

Заметим, что если $\Phi \in (L^2)(\mathbb{H})$, то

$$(S\Phi)(\theta) = \int_{\mathcal{S}'} \Phi(\omega)\mathcal{E}_\theta(\omega)\,d\mu(\omega) = E[\Phi\mathcal{E}_\theta]\,, \tag{10}$$

при этом равенство (10) верно и при $\theta \in L_2(\mathbb{R})$.

Из оценки (8) следует, что для любого $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ существует такое $p \in \mathbb{N}$, что выполнена оценка

$$\|(S\Phi)(\theta)\| = \|\Phi[\mathcal{E}_\theta]\| \le 2^{\rho/2}\|\Phi\|_{HS,p,\rho}\exp\left[(1-\rho)^{\frac{2\rho-1}{1-\rho}}|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right] \tag{11}$$

Оказывается, оценки типа (11) достаточно для того, чтобы функция, действующая из $\mathcal{S}$ в $\mathbb{H}$ была S-преобразованием некоторой обобщенной $\mathbb{H}$-значной случайной величины. Точнее, справедлива следующая характеристическая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, $0 \le \rho < 1$. Тогда функция $F = S\Phi$ удовлетворяет условиям:*

(i) *для любых $\theta, \eta \in \mathcal{S}$ функция $F(\theta + z\eta)$ является целой аналитической функцией переменной $z \in \mathbb{C}$.*

(ii) *Существуют $K > 0, a > 0$, $p \in \mathbb{N}$, такие, что выполнена оценка*

$$\|F(\theta)\| \le K \exp\left[a|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right]\,, \quad \theta \in \mathcal{S}\,.$$

Если функция $F : \mathcal{S} \to \mathbb{H}$ удовлетворяет условиям (i) и (ii), то существует единственная функция $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, для которой $F = S\Phi$. При этом Для любого q, такого, что выполняется неравенство

$$e^2 \left(\frac{2a}{1-\rho}\right)^{1-\rho} \sum_{i=1}^{\infty} (2i)^{-2(q-p)} < 1\,,$$

справедлива оценка:

$$\|\Phi\|^2_{\mathrm{HS},q,\rho} \le K \left(1 - e^2 \left(\frac{2a}{1-\rho}\right)^{1-\rho} \sum_{i=1}^{\infty} (2i)^{-2(q-p)}\right)^{-1/2}\,.$$

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы в $\mathbb{R}$-значном случае (см., например, [10], Теорема 8.2). Впервые она была доказана в работе [9].

Для определенного нами цилиндрического винеровского процесса имеем:

$$\big[SW(t)\big](\theta) = W(t)\big[\mathcal{E}_\theta\big] = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \int_0^t \xi_i(s)ds\, e_j(\xi_{n(i,j)}, \theta)_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \int_0^t \xi_i(s)ds\, \xi_{n(i,j)}, \theta \right)_{L_2(\mathbb{R})} e_j = \sum_{j\in\mathbb{N}} \big(1^j_{[0,t]}, \theta\big)_{L_2(\mathbb{R})} e_j\,.$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} \big[S\mathbb{W}(t)\big](\theta) = \mathbb{W}(t)\big[\mathcal{E}_\theta\big] &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t) e_j (\xi_{n(i,j)}, \theta)_{L_2(\mathbb{R})} = \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} e_j \sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i(t) (\xi_{n(i,j)}, \theta)_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \big(\mathfrak{J}_j^{-1} \pi_j \theta\big) e_j\,. \end{aligned} \tag{12}$$

В силу того, что функции $\xi_i(t)e_j$, $i,j \in \mathbb{N}$ образуют ортонормированный базис пространства $L_2(\mathbb{R};\mathbb{H})$, справедливо равенство

$$\big\|\big[S\mathbb{W}(\cdot)\big](\theta)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R};\mathbb{H})} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \big|(\xi_{n(i,j)}, \theta)_{L_2(\mathbb{R})}\big|^2 = |\theta|^2_{L_2(\mathbb{R})}$$

2.6. **Произведение Уика.** Пусть H — еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Поскольку $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}, H)$ — пространство операторов Гильберта – Шмидта, действующих из $\mathbb{H}$ в H — является сепарабельным гильбертовым пространством, можно ввести в рассмотрение пространство $(\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)\big)$ обобщенных случайных величин со значениями в $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)$ над $(\mathcal{S})_\rho$ так как это сделано в пункте 2.3. Пусть $\Psi \in (\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)\big)$, $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Рассмотрим их S-преобразования. Они удовлетворяют условиям (i) и (ii) теоремы 1. Для любого $\theta \in \mathcal{S}$ имеем $S\Psi(\theta) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)$, $S\Phi(\theta) \in \mathbb{H}$, поэтому $F(\theta) = S\Psi(\theta)S\Phi(\theta) \in H$, для любых $\theta, \eta \in \mathcal{S}$ функция $F(\theta + z\eta)$ — целая аналитическая H-значная функция переменной $z \in \mathbb{C}$. При этом

$$\|S\Psi(\theta)S\Phi(\theta)\|_H \le \|S\Psi(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)} \|S\Phi(\theta)\|_{\mathbb{H}} \le K_1 K_2 \exp\left[(a_1 + a_2)|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right]\,,$$

где K_1, K_2, a_1, a_2 — константы из условия (ii) теоремы 1, выполненного для Ψ и Φ соответственно (очевидно, можно считать эти условия выполненными с одной и той же константой p). Следовательно F является S преобразованием некоторой обобщенной случайной величины $\Theta \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$. Это делает корректным следующее

Определение 3. *Пусть $\Psi \in (\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)\big)$, $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Обобщенная случайная величина $\Theta \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$, такая, что $S\Theta = S\Psi S\Phi$ называется произведением Уика Ψ и Φ и обозначается $\Psi \diamond \Phi$.*

Из разложения (9) следуют равенства

$$S\Psi(\theta) = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \Psi_\alpha \prod_{i=1}^{\infty} (\theta,\xi_i)^{\alpha_i}_{L_2(\mathbb{R})}\,, \quad S\Phi(\theta) = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \Phi_\alpha \prod_{i=1}^{\infty} (\theta,\xi_i)^{\alpha_i}_{L_2(\mathbb{R})}\,.$$

Перемножая эти разложения, получим

$$S\Psi(\theta)S\Phi(\theta) = \sum_{\gamma\in\mathcal{T}} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \Psi_\alpha \Phi_\beta \right) \prod_{i=1}^{\infty} (\theta,\xi_i)^{\gamma_i}_{L_2(\mathbb{R})}$$

Отсюда следует

$$\Psi \diamond \Phi = \sum_{\gamma\in\mathcal{T}} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \Psi_\alpha \Phi_\beta \right) \theta_\alpha$$

3. Интеграл Хицуды – Скорохода

Определение 4. *Будем называть $(\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)\big)$-значный случайный процесс $\Psi(t)$* интегрируемым по Хицуда – Скороходу *на промежутке $[a;b] \subset \mathbb{R}$, если процесс $\Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t)$ интегрируем на $[a;b]$ как $(\mathcal{S})_{-1}(H)$-значная функция. В таком случае будем называть интеграл*

$$\int_0^T \Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t)\, dt$$

интегралом Хицуды – Скорохода от $\Psi(t)$.

Покажем что интеграл Хицуды – Скорохода является обобщением интеграла Ито по цилиндрическому винеровскому процессу $\int_a^b \Psi(t)\, dW(t)$.

Пусть $\{\mathcal{B}^a_t, t \geq 0\}$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами вида $(W(s),x)_{\mathbb{H}}$, где $a \leq s \leq t$, $x \in \mathbb{H}$. Семейство $\{\mathcal{B}^a_t\}$ называется *фильтрацией (потоком событий)*, порожденной цилиндрическим винеровским процессом $W(t), t \geq a$. Заметим, что броуновские движения $\beta_j(t)$, $j \in \mathbb{N}, t \geq a$ являются мартингалами относительно $\mathcal{B}^a_t$.

Пусть $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H. Тогда семейство операторов $\{g_i \otimes e_j\}_{i,j=1}^{\infty}$, определенных соотношением

$$(g_i \otimes e_j)x := g_i(e_j,x)_{\mathbb{H}}\,, \quad x \in \mathbb{H}\,,$$

образует ортонормированный базис пространства $\mathcal{L}_2(\mathbb{H},H)$, любой оператор $A \in \mathcal{L}_2(\mathbb{H},H)$ представим в виде

$$A = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}(g_i \otimes e_j)\,,$$

где $a_{ij} = (g_i, Ae_j)_H$. При этом

$$\|A\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H},H)} = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty\,.$$

Для любого случайного процесса $\varphi(t)$ со значениями в $\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)$, согласованного с фильтрацией $\mathcal{B}^a_t$, $a \le t \le b$, и удовлетворяющего условию

$$E\left[\int_a^b \|\varphi(t)\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H},H)}\,dt\right] < \infty\,, \tag{13}$$

определен и является элементом пространства $(L^2)(H)$ стохастический интеграл Ито по цилиндрическому винеровскому процессу

$$\int_a^b \varphi(t,\omega)\,dW(t)$$

(см. определение и детали в [1]). Заметим, что если функция $\varphi(t) = \varphi(t,\omega)$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathcal{S}')$-измерима, то равенство (13) влечет за собой равенство

$$E\left[\int_a^b \|\varphi(t)\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H},H)}\,dt\right] = \int_a^b E\left[\|\varphi(t)\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H},H)}\right]\,dt$$

Для установления связи между интегралом Хицуды – Скорохода и интегралом Ито нам понадобятся следующие леммы, характеризующие $\mathcal{B}^a_t$-измеримые случайные величины в терминах их S-преобразований.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное сепарабельное гильбертово пространство. Для любых $\Theta, \Phi \in (L^2)(\mathcal{H})$ равенство $\Theta = E\big(\Phi|\mathcal{B}^a_t\big)$ верно тогда и только тогда, когда для любой функции $\theta \in \mathcal{S}$ справедливо равенство*

$$S\Theta(\theta) = S\Phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} \theta_{a,t,j}\right)\,, \tag{14}$$

где $\theta_{a,t,j} := \mathfrak{I}_j\big(\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[a,t]}\big)$

Доказательство. Для любого $\theta \in \mathcal{S}$ положим $\theta^{\perp}_{a,t,j} = \mathfrak{I}_j\big(\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[a,t]^c}\big)$, $j \in \mathbb{N}$. Справедливо равенство

$$\pi_j\theta = \mathfrak{I}_j\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta = \mathfrak{I}_j\big(\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[a,t]} + \mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[a,t]^c}\big) = \theta_{a,t,j} + \theta^{\perp}_{a,t,j}\,,$$

при этом

$$\begin{aligned}(\theta_{a,t,j}, \theta^{\perp}_{a,t,j})_{L_2(\mathbb{R})} &= \Big(\mathfrak{I}_j\big(\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[a,t]}\big), \mathfrak{I}_j\big(\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[a,t]^c}\big)\Big)_{L_2(\mathbb{R})} = \\ &= \big(\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[a,t]}, \mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[a,t]^c}\big)_{L_2(\mathbb{R})} = 0\end{aligned}$$

Пользуясь этим и свойствами $\mathcal{E}_\theta$, получим:

$$\begin{aligned}S\Theta\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_j\theta\right) &= E\left(\Theta\mathcal{E}_{\sum_{j=1}^{n}\pi_j\theta}\right) = E\left(\Theta\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\pi_j\theta}\right) = E\left(\Theta\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{a,t,j}+\theta^{\perp}_{a,t,j}}\right) = \\ &= E\left(\Theta\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{a,t,j}}\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta^{\perp}_{a,t,j}}\right)\,.\end{aligned}$$

Заметим, что для любого $s \in [a;t]$ выполнено равенство

$$E\left(\beta_j(s)\langle\cdot,\theta^{\perp}_{a,t,j}\rangle\right) = \Big(\langle\cdot,\mathfrak{J}_j 1_{[a,s]}\rangle, \langle\cdot,\mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[a,t]^c}\big)\rangle\Big)_{(L^2)} =$$
$$= \Big(\mathfrak{J}_j 1_{[a,s]}, \mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[a,t]^c}\big)\Big)_{L_2(\mathbb{R})} = \big(1_{[a,s]}, \mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[a,t]^c}\big)_{L_2(\mathbb{R})} = 0\,,$$

откуда следует, что случайные величины $\langle\cdot,\theta^{\perp}_{a,t,j}\rangle$, а значит и $\mathcal{E}_{\theta^{\perp}_{a,t,j}}$, $j\in\mathbb{N}$, не зависят от $\mathcal{B}^a_t$. Приближая θ по норме $L_2(\mathbb{R})$ финитными ступенчатыми функциями, нетрудно доказать, что случайные величины $\langle\cdot,\theta_{a,t,j}\rangle$, $j\in\mathbb{N}$ являются $\mathcal{B}^a_t$-измеримыми. В результате, если $\Theta = E\big(\Phi|\mathcal{B}^a_t\big)$, то

$$S\Theta\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_j\theta\right) = E\left(E\big(\Phi|\mathcal{B}^a_t\big)\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{a,t,j}}\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta^{\perp}_{a,t,j}}\right) =$$
$$= E\left(E\left(\Phi\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{a,t,j}}\middle|\mathcal{B}^a_t\right)\right)E\left(\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta^{\perp}_{a,t,j}}\right) =$$
$$= E\left(\Phi\mathcal{E}_{\sum_{j=1}^{n}\theta_{a,t,j}}\right)E\left(\mathcal{E}_{\sum_{j=1}^{n}\theta^{\perp}_{a,t,j}}\right) = S\Phi\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_{a,t,j}\right)\,.$$

В силу того, что из сходимости последовательности θ_n к θ по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$ следует сходимость $E\big(\Phi\mathcal{E}_{\theta_n}\big)$ к $E\big(\Phi\mathcal{E}_{\theta}\big)$ в $\mathcal{H}$ для любого $\Phi\in(L^2)$, переходя в полученном равенстве к пределу при $n\to\infty$, получим равенство (14). ■

Следствие 2. *Случайная величина $\Phi\in(L^2)(\mathcal{H})$ является $\mathcal{B}^a_t$-измеримой тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$S\Phi(\theta) = S\Phi\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\theta_{a,t,j}\right)\,,\quad \theta_{a,t,j} := \mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[a,t]}\big)\,,\quad \theta\in\mathcal{S}\,.$$

Лемма 2. *Если случайная величина $\Phi\in(L^2)(\mathcal{H})$ является $\mathcal{B}^a_t$-измеримой, то для любых $k\in\mathbb{N}$, $b>t>a$, справедливо равенство*

$$S\Big(\Phi\langle\cdot,1^k_{(t,b]}\rangle\Big)(\theta) = (1^k_{(t,b]},\theta)_{L_2(\mathbb{R})}S\Phi(\theta)\,,\quad \theta\in\mathcal{S}\,. \tag{15}$$

Доказательство. Преобразуем:

$$\begin{aligned} &S\Big(\Phi\langle\cdot,1^k_{(t,b]}\rangle\Big)(\theta) = \\ &= E\left(\Phi\langle\cdot,1^k_{(t,b]}\rangle\mathcal{E}_\theta\right) = e^{-\frac{|\theta|_0}{2}}E\left(\Phi\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha\langle\cdot,1^k_{(t,b]}\rangle+\langle\cdot,\theta\rangle}\Big|_{\alpha=0}\right) = \\ &= e^{-\frac{|\theta|_0}{2}}\frac{d}{d\alpha}E\left(\Phi\, e^{\langle\cdot,\alpha 1^k_{(t,b]}+\theta\rangle-\frac12|\alpha 1^k_{(t,b]}+\theta|_0^2}\cdot e^{\frac12|\alpha 1^k_{(t,b]}+\theta|_0^2}\right)\Big|_{\alpha=0} = \\ &= e^{-\frac{|\theta|_0}{2}}\frac{d}{d\alpha}\left(e^{\frac12|\alpha 1^k_{(t,b]}+\theta|_0^2}S\Phi\big(\alpha 1^k_{(t,b]}+\theta\big)\right)\Big|_{\alpha=0}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Далее, имеем:

$$\frac{d}{d\alpha}e^{\frac{1}{2}|\alpha 1^k_{(t,b]}+\theta|_0^2}\Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}e^{\frac{1}{2}\left(\alpha^2|1^k_{(t,b]}|_0^2+2\alpha(1^k_{(t,b]},\theta)_{L_2(\mathbb{R})}+|\theta|_0^2\right)}\Big|_{\alpha=0} =$$
$$= \left(1^k_{(t,b]},\theta\right)_{L_2(\mathbb{R})}e^{\frac{|\theta|_0}{2}}\,.$$

Кроме того, в силу $\mathcal{B}^a_t$-измеримости Φ, пользуясь предложением 2 и равенством

$$(1^k_{(t,b]})_{t,j} = \mathfrak{I}_j\left(\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j 1^k_{(t,b]}\cdot 1_{[0,t]}\right) = \begin{cases}\mathfrak{I}_j\left(0\cdot 1_{[0,t]}\right)=0, & k\neq j\,,\\ \mathfrak{I}_j\left(1_{(t,b]}\cdot 1_{[0,t]}\right)=0, & k=j\,,\end{cases}$$

получим

$$S\Phi\left(\alpha 1^k_{(t,b]}+\theta\right) = S\Phi\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\alpha(1^k_{(t,b]})_{t,j}+\theta_{t,j}\right)\Big) = S\Phi\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}}\theta_{t,j}\Big)\,,$$

откуда следует, что $\dfrac{d}{d\alpha}S\Phi\left(\alpha 1^k_{(t,b]}+\theta\right) = 0$. В результате, из равенства (16) следует (15). ■

Теорема 2. *Если* $\Psi(t)\in(L^2)\left(\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)\right)$ *и* $\mathcal{B}^a_t$*-измерима для любого* $t\in[a;b]$ *и, кроме того, выполнено условие*

$$\int_a^b \|\Psi(t)\|^2_{(L^2)(\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H))}dt<\infty\,,$$

то $\displaystyle\int_a^b\Psi(t)\,dW(t)=\int_a^b\Psi(t)\diamond\mathbb{W}(t)\,dt.$

Доказательство. Достаточно проверить утверждение теоремы для Ψ вида

$$\Psi(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\Psi_k 1_{(t_k,t_{k+1}]}(t)\,,$$

где $a=t_0<t_1<\dots<t_N=b$, $\Psi_k\in(L^2)\left(\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)\right)$ являются $\mathcal{B}^a_{t_k}$-измеримыми для всех $k=0,1,\dots,N-1$. Так как линейная оболочка множества операторов вида $g_i\otimes e_j$, $i,j\in\mathbb{N}$ всюду плотна в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)$, можно считать, что Ψ_k имеют вид

$$\Psi_k=\sum_{i,j=1}^{M}\psi_{k,i,j}(g_i\otimes e_j)\,,\quad \psi_{k,i,j}\in(L^2)\,, \tag{17}$$

при этом для всех $i,j=1,\dots,M$, $k=0,1,\dots N-1$ функции $\psi_{k,i,j}$ являются $\mathcal{B}^a_{t_k}$-измеримыми. Для любого $\theta\in\mathcal{S}$, пользуясь разложениями (7) и (17), получим

$$S\left[\int_0^T\Psi(t)\,dW(t)\right](\theta)=S\left[\sum_{k=0}^{N-1}\Psi_k\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)\right](\theta)=$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M}S\left[\psi_{k,i,j}\langle 1^j_{(t_k,t_{k+1}]},\cdot\rangle\right](\theta)g_i\,.$$

Далее, используя лемму 2, а затем определения операторов $\mathfrak{J}_j$ и π_j, получаем

$$S\left[\int_0^T \Psi(t)\,dW(t)\right](\theta) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M}\left(1^j_{(t_k,t_{k+1}]},\theta\right)_{L_2(\mathbb{R})} S\psi_{k,i,j}(\theta)g_i =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M}\left(\mathfrak{J}_j 1_{(t_k,t_{k+1}]},\pi_j\theta\right)_{L_2(\mathbb{R})} S\psi_{k,i,j}(\theta)g_i =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M}\left(1_{(t_k,t_{k+1}]},\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\right)_{L_2(\mathbb{R})} S\psi_{k,i,j}(\theta)g_i =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\right](t)dtS\psi_{k,i,j}(\theta)g_i\,.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, используя формулу S-преобразования белого шума (12) и определение 3, получаем

$$S\left[\int_0^T \Psi(t)\,dW(t)\right](\theta) = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sum_{i=1}^{M} g_i\sum_{j=1}^{M} S\psi_{k,i,j}(\theta)\left[\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\right](t)dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} S\Psi_k(\theta)S\mathbb{W}(t)(\theta)dt =$$
$$= \int_0^T S\big[\Psi(t)\diamond\mathbb{W}(t)\big](\theta)dt =$$
$$= S\Big[\int_0^T \Psi(t)\diamond\mathbb{W}(t)dt\Big](\theta)\,.$$

Из равенства S-преобразований следует равенство интегралов. ■

Список литературы

[1] G. DaPrato, J. Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992. MR1207136

[2] L. Gawarecki, V. Mandrekar. *Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions with Applications to Stochastic Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011. MR2560625

[3] T. Hida. *Analysis of Brownian Functionals*, Carleton Mathematical Lecture Notes **13**, 1975.

[4] Т. Хида. *Броуновское движение*, М.: Наука, 1987. MR0898874

[5] I. Kubo, S. Takenaka. *Calculus on Gaussian white noise I* // Proc. Japan. Acad. **56A**, (1980), 376–380. MR0596008

[6] I. Kubo, S. Takenaka. *Calculus on Gaussian white noise II* // Proc. Japan. Acad. **56A**, (1980), 411–416. MR0603055

[7] I. Kubo, S. Takenaka. *Calculus on Gaussian white noise III* // Proc. Japan. Acad. **57A**, (1981), 433–437. MR0637548

[8] I. Kubo, S. Takenaka. *Calculus on Gaussian white noise IV* // Proc. Japan. Acad. **58A**, (1982), 186–189. MR0667629

[9] Kondratiev Yu.G., Streit L. *Spaces of white noise distributions: Constructions, Descriptions, Applications. I* // Reports on Math. Phys. **33** (1993) 341–366. MR1277155

[10] H.-H. Kuo *White Noise Distribution Theory*, CRC Press, 1996. MR1387829

[11] H. Holden, B. Øksendal, J. Ubøe, T. Zhang, *Stochastic Partial Differential Equations. A Modelling, White Noise Functional Approach*, Birkhauser, 1996. MR1408433

[12] I.V. Melnikova, A.I. Filinkov , M.A. Alshansky. *Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions* // J. of Math. Sci. **116**:5 (2003), 3620–3656. MR2024094

[13] И.В. Мельникова, М.А. Альшанский. *Обобщенная корректность задачи Коши для абстрактного стохастического уравнения с мультипликативным шумом* // Труды института математики и механики УрО РАН (ИММ). **8**:1 (2012), 251–267.

Максим Алексеевич Альшанский
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, 19,
620002, Екатеринбург, Россия
E-mail address: mxalsh@gmail.com