S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 200–206 (2014) УДК 519.21
MSC 60E15

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ V-СТАТИСТИК С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ЯДРАМИ

П.С. РУЗАНКИН

Abstract. Exponential inequalities for V-statistics are obtained under weaker conditions than that in known results for canonical V-statistics (see Borisov (1991)). In particular, the observations independence condition is weakened and the new inequalities do not require the existence of a factorizable majorant for the kernel.

Keywords: von Mises' statistic, exponential inequality.

Пусть $Y_1,\ldots ,Y_n$ есть набор случайных величин, $h(y_1,...,y_r)$ — функция r аргументов. Величина

$$M_n = \sum_{1\le i_1,\ldots,i_r\le n} h(Y_{i_1},...,Y_{i_r}) \tag{1}$$

называется *V-статистикой* (статистикой фон Мизеса).

Если для любых чисел $y_1,...,y_r$ и индексов $j_1,...,j_r$

$$\mathbf{E}h(Y_{j_1},y_2,...,y_r) = \mathbf{E}h(y_1,Y_{j_2},y_3,...,y_r) = \ldots = \mathbf{E}h(y_1,...,y_{r-1},Y_{j_r}) = 0, \tag{2}$$

то M_n называется *канонической* (или *вырожденной*) V-статистикой.

В работе И. С. Борисова [1] рассматривались вырожденные V-статистики, построенные по независимым одинаково распределенным наблюдениям $Y_1,\ldots,$ Y_n с ядрами h, для которых существует функция g такая, что

$$|h(y_1,...,y_n)| \le g(y_1)\cdots g(y_n). \tag{3}$$

Ruzankin, P.S., On exponential inequalities for V-statistics with unbounded kernels.

© 2014 Ruzankin P.S.

Работа поддержана РФФИ (гранты 13-01-12415 офи-м и 13-01-00511).

Поступила 3 февраля 2014 г., опубликована 3 марта 2014 г.

Причем предполагалось, что для всех $k \geq 2$ выполняется условие Бернштейна:

$$\mathbf{E}(g(Y_1))^k \leq \frac{\sigma^2 L^{k-2} k!}{2} \tag{4}$$

с некоторыми постоянными $\sigma > 0$ и $L > 0$.

Теорема A. (И. С. Борисов, [1]) *Если* $Y_1, \ldots, Y_n$ *независимы и одинаково распределены и выполняются условия* (2), (3) *и* (4), *то*

$$\mathbf{P}(\max_{l \leq n} |M_l| > y) \leq C(r) \exp\left\{ -\frac{C_0(r) y^{2/r}}{n\sigma^2 + L y^{1/r}} \right\}, \tag{5}$$

где постоянные $C(r)$ *и* $C_0(r)$ *зависят только от* r.

Одной из первых работ, где рассматривались неравенства такого типа, является статья В. Хёфдинга [8]. В этой работе неравенства получались для сумм независимых центрированных случайных величин (частного случая вырожденных V-статистик). Из этой работы, в частности, следует то, что неравенство (5) в известном смысле неулучшаемо, так как в случае расщепляющихся ядер ($h(y_1, \ldots, y_r) = g(y_1) \cdots g(y_r)$) это неравенство совпадает с неравенством Хёфдинга для уклонений порядка $y^{1/r}$. Подобные (5) неравенства для случая независимых наблюдений получались, в частности, в работах [4–7]. В работе [2] изучались неравенства такого типа для U- и V-статистик с ограниченными ядрами h в случае зависимых наблюдений, удовлетворяющих некоторым условиям перемешивания.

В предыдущей работе автора [3] условие каноничности V-статистики заменялось условием: для всех четных $k \geq 2$

$$\mathbf{E} h(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_r}) \cdots h(Y_{i_{rk-r+1}}, \ldots, Y_{i_{rk}}) = 0, \text{ если } m_1 = 1 \text{ или } \cdots \text{ или } m_j = 1, \tag{6}$$

где через $m_1,\ldots,m_j$ обозначены кратности случайных величин $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_{rk}}$ в этом математическом ожидании, другими словами, в этом выражении участвует всего j различных случайных величин, причем первая из них входит в это выражение m_1 раз, вторая – m_2 раз, последняя – m_j раз, $m_1 + \ldots + m_j = rk$. Понятно, что для независимых случайных величин это условие следует непосредственно из условия каноничности V-статистик.

Условия (3) и (4) и требование независимости и одинаковой распределенности $Y_1, \ldots, Y_n$ в [3] заменялись требованием, чтобы для всех четных $k \geq 2$ выполнялось неравенство

$$\mathbf{E} h(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_r}) \cdots h(Y_{i_{rk-r+1}}, \ldots, Y_{i_{rk}}) \leq \frac{m_1! \cdots m_j! \sigma^{2j} L^{rk-2j}}{2^j} \tag{7}$$

при $m_1 \geq 2, \ldots, m_j \geq 2$, где, как и выше, через $m_1,\ldots,m_j$ обозначены кратности случайных величин $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_{rk}}$ в этом математическом ожидании, $m_1 + \ldots + m_j = rk$; $\sigma > 0$ и $L > 0$ — постоянные.

Теорема B ([3]). *Пусть выполняются условия* (6) *и* (7). *Тогда для всех* $y \geq (2c_0 L r)^r$

$$\mathbf{P}(|M_n| > y) \leq \sqrt{2} e^{2r} \exp\left(-\frac{y^{1/r}}{c_0 L} + \frac{1}{2} \ln \frac{y^{1/r}}{c_0 L} + n \ln(1 + \sigma^2/2L^2) \right), \tag{8}$$

где $c_0 = (\sqrt{5}+1)/2 < 1.62$.

Если, кроме того,

$$y \le \left(\frac{2e^{1/2}\sigma^2 n}{L}\right)^r,$$

то

$$\mathbf{P}(|M_n| > y) \le e^r \exp\left(-\frac{y^{2/r}}{4e\sigma^2 n} + \max\left\{0,\ \frac{1}{2}\ln\frac{y^{2/r}}{4e\sigma^2 n}\right\}\right). \tag{9}$$

В настоящей работе мы заменим условия (7) и (6) более слабыми моментными ограничениями. Мы будем предполагать, что для всех четных $k \ge 2$

$$\mathbf{E}h(Y_{i_1},...,Y_{i_r})\cdots h(Y_{i_{rk-r+1}},...,Y_{i_{rk}}) \le \frac{m_1!\cdots m_j! rk(rk)^{Krk}\sigma^{2j}L^{rk-2j}}{j2^j} \tag{10}$$

при $m_1 \ge 1,\dots,m_j \ge 1$, где $K \ge 0$ — постоянная и, как и в условиях (7) и (6), всего в этом математическом ожидании участвует j различных случайных величин Y_i, а через m_1,...,m_j обозначены кратности случайных величин $Y_{i_1},...,Y_{i_{rk}}$ в этом математическом ожидании, $\sigma > 0$ и $L > 0$ — постоянные.

Кроме этого соотношения, нам понадобится еще одно условие: для всех четных $k \ge 2$

$$\mathbf{E}h(Y_{i_1},...,Y_{i_r})\cdots h(Y_{i_{rk-r+1}},...,Y_{i_{rk}}) = 0 \text{ при } j \ge \frac{rk}{2}+1, \tag{11}$$

где j имеет тот же смысл, что и в предыдущем условии, — количество различных случайных величин Y_i, участвующих в этом математическом ожидании.

Отметим, что если $j \ge (rk/2)+1$ в (11), то по крайней мере две случайные величины Y_i входят в математическое ожидание в (11) с кратностью 1, другими словами, $\#\{l : m_l = 1\} \ge 2$. Это означает, что условие (6) влечет за собой условие (11).

Пример 1. Пусть Y_1, Y_2,... — последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин, а $h(y_1,...,y_r)$ — функция вида

$$h(y_1,...,y_r) = \sum_{i=1}^{N} c_i|y_1|^{\alpha_{i,1}}\cdots|y_r|^{\alpha_{i,r}}\mathrm{sign}y_1\cdots\mathrm{sign}y_r, \tag{12}$$

где $\alpha_{i,k} > 0$. В этом случае выполняются условия (6) и (10), причем можно взять $K = \max\{0, (\max\{\alpha_{i,k}\}-2)/2\}$. Заметим, что если $\max\{\alpha_{i,k}\} > 2$, то такие ядра не удовлетворяют условиям теорем A и B (см. пример 1 в [3]).

Пример 2. Рассмотрим пример зависимых случайных величин из работы [3] (см. пример 2 в [3]). Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые стандартные нормальные случайные величины, $Y_i = X_iX_{i+1}$, функция $h(y_1,...,y_r)$ задается соотношением (12), все $\alpha_{i,k} > 0$. Тогда выполняется условие (10) с постоянной $K = \max\{0, \max\{\alpha_{i,k}\}-1\}$.

Покажем, что в этом примере выполняется и условие (6). Для простоты будем считать, что $h(y_1,...,y_r) = y_1\cdots y_r$, — другие случаи рассматриваются аналогично. Пусть $i_1 \le i_2 \le ... \le i_{rk}$ и среди переменных $Y_{i_1},...,Y_{i_{rk}}$ переменная Y_{i_l} встречается ровно один раз. Если $l = rk$ или $i_{l+1} \ge i_l + 2$, то переменная X_{i_l+1} входит в произведение $Y_{i_1}\cdots Y_{i_{rk}}$ ровно один раз, и выполняется (6).

Если же $l < rk$ и $i_{l+1} \le i_l + 1$, найдем такое $d \ge l$, что $i_{l+1} \le i_l + 1, ..., i_d \le i_{d-1} + 1$ и либо $d = rk$, либо $i_{d+1} \ge i_d + 2$. Рассмотрим произведение $Y_{i_l}\cdots Y_{i_d}$.

Пусть всего в этом произведении j различных случайных величин Y_i с кратностями $m_1, ..., m_j$ (в естественном порядке), где очевидно $m_1 = 1$. Тогда случайные величины $X_{i_l+1}, ..., X_{i_{l+j-1}+1}$ входят в последнее произведение (а значит, и в произведение $Y_{i_1} \cdots Y_{i_{rk}}$) со степенями $X_{i_l+1}^{1+m_2} X_{i_l+2}^{m_2+m_3} \cdots X_{i_{l+j-1}}^{m_{j-1}+m_j} X_{i_{l+j-1}+1}^{m_j}$. Среди чисел $1+m_2, m_2+m_3, \ldots, m_{j-1}+m_j, m_j$ хотя бы одно обязательно окажется нечетным, что и обеспечит равенство нулю математического ожидания в (6).

Теорема 1.

Если выполняется условие (10), *то для всех* $y \geq (2^{K+2}e^{-K}r^{K+1}L)^r$

$$\mathbf{P}(M_n > y) < \tag{13}$$

$$2\left(\frac{e}{2}\right)^{2(K+1)r} \exp\left(-\frac{K+1}{e^{K/(K+1)}(2L)^{1/(K+1)}}\, y^{1/((K+1)r)} + n\ln\left(1+\sigma^2/(2L^2)\right)\right).$$

Если, кроме того, выполняется условие (11) *и*

$$2^{(3+2K)r/2}e^{Kr}r^{(1+2K)r/2}(\sigma^2 n)^{r/2} \leq y \leq \left(2e^K\left(\sigma^2 n/L^2\right)^{1+K}L\right)^r,$$

то

$$\mathbf{P}(M_n > y) < \tag{14}$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^{(1+2K)r} \exp\left(-\frac{(1+2K)\, y^{2/((1+2K)r)}}{2^{1+2/(1+2K)}e^{2K/(1+2K)}(\sigma^2 n)^{1/(1+2K)}} + \frac{1}{2}\ln\frac{y^{2/((1+2K)r)}}{(\sigma^2 n)^{1/(1+2K)}}\right).$$

Замечание 1. Отметим, что неравенство (13) получено без требования каноничности V-статистики или выполнения условия (11).

Замечание 2. Для получения неравенства (14) вместо условия (11) достаточно предполагать, что для всех четных $k \geq 2$ при $j \geq (rk/2)+1$

$$\mathbf{E}h(Y_{i_1}, ..., Y_{i_r}) \cdots h(Y_{i_{rk-r+1}}, ..., Y_{i_{rk}}) \leq D\frac{m_1! \cdots m_j!\, rk(rk)^{Krk}\sigma^{2j}L^{rk-2j}}{j2^j}, \tag{15}$$

где

$$D = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1\right)\frac{1}{((rk/2)-1)!}\left(1+\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^{-n}\left(\frac{\sigma^2 n}{2L^2}\right)^{rk/2},$$

обозначения j, $m_1, \ldots, m_j$ имеют тот же смысл, что и в условии (10). Недостатком этого условия является зависимость правой части (15) от n.

Доказательство теоремы 1 *и утверждения замечания* 2 во многом аналогично доказательству теоремы 1 в [3].

Имеем

$$\mathbf{E}\left(\sum_{1\leq i_1,\ldots,i_r\leq n} h(Y_{i_1}, ..., Y_{i_r})\right)^{2k} = \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_{2rk}\leq n} \mathbf{E}h(Y_{i_1}, ..., Y_{i_r}) \cdots h(Y_{i_{2rk-r+1}}, ..., Y_{i_{2rk}}) \leq$$

$$\sum_{j=1}^{\min\{2rk,n\}} C_n^j \sum_{m_1,\ldots,m_j\geq 1;\ m_1+\cdots+m_j=2rk} \frac{m_1!\cdots m_j!(2rk)^{2Krk+1}\sigma^{2j}L^{2rk-2j}}{j2^j}\frac{(2rk)!}{m_1!\cdots m_j!} =$$

$$\sum_{j=1}^{\min\{2rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j L^{2rk}(2rk)^{2Krk}(2rk)!C_n^j\,\frac{2rk}{j} \sum_{m_1,\ldots,m_j\geq 1;\ m_1+\cdots+m_j=2rk} 1 =$$

$$L^{2rk}(2rk)^{2Krk}(2rk)! \sum_{j=1}^{\min\{2rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j \frac{2rk}{j} C_{2rk-1}^{j-1} =$$

$$L^{2rk}(2rk)^{2Krk}(2rk)! \sum_{j=1}^{\min\{2rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j C_{2rk}^j, \tag{16}$$

где, как и выше, $m_1,...,m_j$ — кратности различных случайных величин $Y_{i_1},...,Y_{i_{2rk}}$ в этих математических ожиданиях. В формуле (16) коэффициент C_n^j — число возможных вариантов выбора j различных случайных величин из $Y_1,...,Y_n$, а $\frac{(2rk)!}{m_1!\cdots m_j!}$ — число возможных вариантов расстановки этих случайных величин (с соответствующими кратностями) в математическом ожидании $\mathbf{E}h(Y_{i_1},...,Y_{i_r})\cdots h(Y_{i_{2rk-r+1}},...,Y_{i_{2rk}})$.

Легко видеть, что

$$C_{2rk}^j \le C_{2rk}^{rk} < (\pi rk)^{-1/2} 2^{2rk} \tag{17}$$

в силу формулы Стирлинга

$$\sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{1/(12n+1)} < n! < \sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{1/(12n)}.$$

Далее, имеем

$$\sum_{j=1}^{\min\{2rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j \le \left(1+\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^n - 1.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{1\le i_1,...,i_r\le n} h(Y_{i_1},...,Y_{i_r})\right)^{2k} < (\pi rk)^{-1/2}(2L)^{2rk}(2rk)^{2Krk}(2rk)! \left(1+\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^n <$$

$$2\Big(2(2e^{-1}L)^{1/(K+1)} rk\Big)^{2(K+1)rk} \left(1+\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^n.$$

Подставив сюда $k = \lfloor y^{1/((K+1)r)}/(2e(2e^{-1}L)^{1/(K+1)}r)\rfloor$ и воспользовавшись неравенством для чисел $a \in (0, e^{-1})$

$$\frac{(a\lfloor 1/(ea)\rfloor)^{\lfloor 1/(ea)\rfloor}}{(1/e)^{1/(ea)}} = (ea\lfloor 1/(ea)\rfloor)^{\lfloor 1/(ea)\rfloor} e^{1/(ea)-\lfloor 1/(ea)\rfloor} <$$

$$\lim_{z\to 2-0} (\lfloor z\rfloor/z)^{\lfloor z\rfloor} e^{z-\lfloor z\rfloor} = e/2, \tag{18}$$

из неравенства Чебышева при $k \ge 1$ получим (13).

Предположим теперь, что выполняется (15), которое влечет за собой и условие (11). Аналогично неравенству (16) получим, что

$$\mathbf{E}\left(\sum_{1\le i_1,...,i_r\le n} h(Y_{i_1},...,Y_{i_r})\right)^{2k} \le$$

$$L^{2rk}(2rk)^{2Krk}(2rk)! \left(\sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j C_{2rk}^j + D \sum_{j=rk+1}^{\min\{2rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j C_{2rk}^j\right) \le$$

$$(\pi rk)^{-1/2}(2L)^{2rk}(2rk)^{2Krk}(2rk)!\left(\sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}}\left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j + D\sum_{j=rk+1}^{\min\{2rk,n\}}\left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j\right).$$

Если $rk \le \sigma^2 n/(2L^2)$, то

$$\sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}}\left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j \le \sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}}\left(\frac{\sigma^2 n}{2L^2}\right)^j \frac{1}{j!} \le rk \max_{j=1,\dots,rk}\left\{\left(\frac{\sigma^2 n}{2L^2}\right)^j \frac{1}{j!}\right\} =$$

$$= \frac{rk}{(rk)!}\left(\frac{\sigma^2 n}{2L^2}\right)^{rk}. \tag{19}$$

Кроме того, в силу условия (15)

$$D\sum_{j=rk+1}^{\min\{2rk,n\}}\left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j < D\left(1+\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^n \le \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-1\right)\frac{rk}{(rk)!}\left(\frac{\sigma^2 n}{2L^2}\right)^{rk}. \tag{20}$$

Сложив (19) и (20), получим

$$\mathbf{E}\left(\sum_{1\le i_1,\dots,i_r\le n} h(Y_{i_1},\dots,Y_{i_r})\right)^{2k} <$$

$$\sqrt{rk}\ \left(2^{1+2/(1+2K)}\left(e^{-1}\sigma^2 n\right)^{1/(1+2K)} rk\right)^{(1+2K)rk}.$$

Подставив $k = \left\lfloor y^{2/((1+2K)r)}/\left(2^{1+2/(1+2K)} e\left(e^{-1}\sigma^2 n\right)^{1/(1+2K)} r\right)\right\rfloor$, из неравенства Чебышева и соотношения (18) получим (при $k \ge 1$)

$$\mathbf{P}(M_n > y) <$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^{(1+2K)r}\exp\left(-\frac{(1+2K)\, y^{2/((1+2K)r)}}{2^{1+2/(1+2K)}e^{2K/(1+2K)}(\sigma^2 n)^{1/(1+2K)}} + \frac{1}{2}\ln\frac{y^{2/((1+2K)r)}}{(\sigma^2 n)^{1/(1+2K)}}\right),$$

если

$$2^{(3+2K)r/2}e^{Kr}r^{(1+2K)r/2}(\sigma^2 n)^{r/2} \le y \le \left(2e^K(\sigma^2 n)^{1+K}L^{-(1+2K)}\right)^r.$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Борисов И.С., *Аппроксимация распределений статистик Мизеса с многомерными ядрами* // Сиб. мат. журн. **32**:4 (1991), 20–35. MR1142066

[2] Борисов И.С., Володько Н.В., *Экспоненциальные неравенства для распределений U- и V-статистик от зависимых наблюдений* // Матем. тр., **11**:2, 3–19. MR2500124

[3] Рузанкин П. С., *Об экспоненциальных неравенствах для канонических V-статистик* // Сибирские электронные математические известия, **11** (2008), 70–75. http://semr.math.nsc.ru/v11/p70-75.pdf

[4] Adamczak R., *Moment inequalities for U-statistics* // Ann. Probab., **34**:6 (2006), 2288–2314. MR2294982

[5] Arcones M. A. and Giné E., *Limit theorems for U-processes* // Ann. Probab., **21**:3 (2003), 1494–1542. MR1235426

[6] Giné E., Latala R., and Zinn J., *Exponential and moment inequalities for U-statistics* // High Dimensional Probability, II (Seattle, WA, 1999), Progr. Probab., Boston: Birkhäuser, **47** (2000), 13–38. MR1857312

[7] Giné E., Mason D. M., *On local U-statistic processes and the estimation of densities of functions of several sample variables* // Ann. Stat., **35**:3 (2007), 1105–1145. MR2341700

[8] Hoeffding W., *Probability inequalities for sums of bounded random variables* // J. Amer. Statist. Assoc., **58** (1963), 13–30. MR0144363

Рузанкин Павел Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ruzankin@math.nsc.ru