S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 207–209 (2014) УДК 512.542
MSC 13A99

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ТРОЕК НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В РАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В.И. ЗЕНКОВ

Abstract. It is proved that for every nilpotent subgroups A, B, C of finite solvable group G we have $A \cap B^x \cap C^y \leq F(G)$ for some elements $x, y \in G$.

Keywords: finite solvable group, nilpotent subgroup.

В работе [1] доказано, что в любой p-разрешимой конечной группе G, где p — простое число, для силовской p-подгруппы S из группы G найдутся такие элементы x и y из G, что $S \cap S^x \cap S^y = O_p(G)$. Позднее [2] эта теорема была перенесена на случай π-разрешимой группы G с нильпотентной π-холловой подгруппой H из G, где π — некоторое подмножество простых чисел, и было доказано, что $H \cap H^x \cap H^y \leq F(G)$ для некоторых элементов x и y из G и подгруппы Фиттинга $F(G)$ группы G. Возникает следующий вопрос: если подгруппа H — просто нильпотентная подгруппа из конечной группы G, то будет ли сохраняться заключение $H \cap H^x \cap H^y \leq F(G)$ для некоторых элементов x и y из G. В такой постановке для произвольной конечной группы эта задача сформулирована в "Коуровской тетради"[3] под номером 17.40.

В классе разрешимых конечных групп на более общий вопрос отвечает следующая

Zenkov, V.I., On intersections of triples of nilpotent subgroups in finite solvable groups.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 13-01-00476), Программы Отделения математических наук РАН (проект 12-T-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-C-1-1018) и с НАН Беларуси(проект 12-C-1-1009), а также программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение N 02.A03.21.0006 от 27.08.2013) .

Поступила 28 февраля 2014 г., опубликована 7 марта 2014 г.

Теорема. *Пусть G — разрешимая конечная группа, A, B и C — нильпотентные подгруппы из G. Тогда $A \cap B^x \cap C^y \leq F(G)$ для некоторых элементов x и y из G.*

Замечание. Если в условии теоремы ограничиться только двумя нильпотентными подгруппами, то, как показывает пример группы $G \simeq V_9 \leftthreetimes D_8$ с точным действием подгруппы D_8 на V_9, для подгрупп $A = B \simeq D_8$ имеем $A \cap B^g \not\leq F(G)$ для любого элемента g из G.

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие обозначения: G — разрешимая конечная группа, $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, $O_p(G)$ — силовская p-подгруппа из $F(G)$ и X — полный прообраз в группе G подгруппы $F(\overline{G})$ из факторгруппы $\overline{G} = G/O_p(G)$. Выражением $\mathrm{Syl}_p(G)$ будем обозначать множество силовских p-подгрупп группы G.

Лемма 1. *Имеем $O_p(G) = O_p(X) \in \mathrm{Syl}_p(X)$ и $X = O_p(G)X_1$, где X_1 —p'— холлова подгруппа из X.*

Доказательство. По определению подгруппа X содержит подгруппу $O_p(G)$, поэтому $O_p(G) \leq O_p(X) \trianglelefteq G$ в силу нормальности в группе G подгруппы X. Следовательно, $O_p(G) = O_p(X)$. Подгруппа $O_p(F(\overline{G}))$ нормальна в $\overline{G}$ и является силовской p-подгруппой в факторгруппе $F(\overline{G})$. Значит, ее полный прообраз T в группе G является силовской p-подгруппой подгруппы X и $T \trianglelefteq G$. Следовательно, $T = O_p(G) = O_p(X)$. Так как по определению факторгруппа $\overline{X}$ нильпотентна и изоморфна подгруппе X_1 из X, то $X = O_p(G)X_1$ Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $G = X$ и $A, B, C,$—нильпотентные подгруппы из G, то $A \cap B^u \cap C^v \leq F(G)$ для некоторых элементов u и v из $O_p(G)$

Доказательство. Из факторизации $X = O_p(G)X_1$, доказанной в лемме 1, следует, что элементы из $O_p(G)$ контролируют сопряженность p'—холловых подгрупп в G. Кроме того, по лемме 1 подгруппы $O_p(A)$, $O_p(B)$ и $O_p(C)$ лежат в $O_p(G)$, а подгруппы $O_{p'}(A)$, $O_{p'}(B)$ и $O_{p'}(C)$ лежат в сопряженных с X_1 под действием элементов из $O_p(G)$ подгруппах. Без ограничения общности можно считать, что $O_{p'}(A)$ лежит в X_1. По теореме [2] $X_1 \cap X_1^x \cap X_1^y \leq F(G)$ для некоторых элементов x и y из G. В нашем случае элементы x и y можно выбрать из $O_p(G)$. Так как некоторые сопряженные с подгруппами $O_{p'}(B)$ и $O_{p'}(C)$ под действием элементов из $O_p(G)$ попадут в X_1^x и X_1^y соответственно, то, в качестве следствия, для подгрyупп $A, B,$ и C имеем $A \cap B^u \cap C^v \leq F(G)$ для некоторых элементов u и v из $O_p(G)$, что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть G — контрпример к теореме и порядок G при этом минимален. Выберем простое число p, которое делит $|F(G)|$.

Лемма 3. *Группа G —не контрпример к теореме.*

Доказательство. Допустим, что G — контрпример к теореме. Из леммы 2 следует, что $G \not\leq X$. По индукции, примененной к факторгруппе $\overline{G}$ найдутся элементы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из $\overline{G}$, такие, что $\overline{A} \cap \overline{B}^{\overline{x}} \cap \overline{C}^{\overline{y}} \leq F(\overline{G})$. Следовательно, $A \cap B^x \cap$

$C^y \leq X$ для некоторых элементов x и y из G, образы которых в факторгруппе $\overline{G}$ совпадают, соответственно, с $\overline{x}$ и $\overline{y}$, а также для всех элементов вида xz и yt, где z и t из $O_p(G)$. Пусть $A_1 = A \cap X, B_1 = B^x \cap X$ и $C_1 = C^y \cap X$ для выбранных элементов x и y из G. Тогда по лемме 2 и нормальности подгруппы X в группе G $A_1 \cap B_1^u \cap C_1^v \leq F(X) \leq F(G)$ для некоторых элементов u и v из $O_p(G)$.

Рассмотрим пересечение $D = A \cap B^{xu} \cap C^{yv}$. Так как $D \leq AO_p(G) \cap BO_p(G)^{xu} \cap CO_p(G)^{yv}$, то $\overline{D} \leq \overline{A}$. Аналогично, $\overline{D} \leq \overline{B}^{\overline{x}}$ и $\overline{D} \leq \overline{C}^{\overline{y}}$. Значит, $\overline{D} \leq \overline{A} \cap \overline{B}^{\overline{x}} \cap \overline{C}^{\overline{y}} \leq F(\overline{G})$. Следовательно, $D \leq X$. Поэтому $D = D \cap X = A \cap B^{xu} \cap C^{yv} \cap X = (A \cap X) \cap (B^{xu} \cap X) \cap (C^{yv} \cap X) = A_1 \cap (B^{xu} \cap X^u) \cap (C^{yv} \cap X^v) = A_1 \cap (B^x \cap X)^u \cap (C^y \cap X)^v = A_1 \cap B_1^u \cap C_1^v \leq F(X) \leq F(G)$. Противоречие.

Лемма доказана.

Список литературы

[1] D.S. Passman, *Groups with normal, solvable Hall p'-subgroups*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 123, № 1 (1966), 99–111. MR0195947

[2] В.И. Зенков, *Структура пересечений нильпотентных π-подгрупп в π-разрешимых конечных группах*, Сиб. матем. журн., Т. 34 (1993), 103–107. MR1248794

[3] Коуровская тетрадь. Нерешенные задачи теории групп. Изд. 17-е. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010.

Виктор Иванович Зенков
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский Федеральный университет,
620990, Екатеринбург, Россия,
ул. С.Ковалевской 16
E-mail address: V1I9Z52@mail.ru